МАТЕМАТИКА

основана в 1992 г.

МЕТОДИЧЕСКАЯ ГАЗЕТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

1–15 апрель 2011

mat.1september.ru

7

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ | см. с. 48

издательский дом

Первое сентября

1september.ru

| МАТЕМАТИКА

индексы подписки Почта россии - 79083 (инд.); - 79584 (орг.) Роспечать - 32031 (инд.); - 32598 (орг.)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Главный редактор: Артем Соловейчик (генеральный директор)
Коммерческая деятельность: Константин Шмарковский (финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов: Сергей Островский (исполнительный директор)
Реклама и продвижение: Марк Сартан
Мультимедиа, конференции и техническое обеспечение: Павел Кузнецов
Производство: Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение: Андрей Ушаков
Дизайн: Иван Лукьянов, Андрей Балдин
Педагогический университет: Валерия Арсланьян (ректор)

ГАЗЕТЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Первое сентября – Е. Бирюкова, **Английский язык** – А. Громушкина, **Библиотека в школе** – О. Громова, **Биология** – Н. Иванова, **География** – О. Коротова, **Дошкольное образование** – М. Аромштам, **Здоровье детей** – Н. Сёмина, **Информатика** – С. Островский, **Искусство** – М. Сартан, **История** – А. Савельев, **Классное руководство и воспитание школьников** –О. Леонтьева, **Литература** – С. Волков, **Математика** – Л. Рослова, **Начальная школа** – М. Соловейчик, **Немецкий язык** – М. Бузоева, **Русский язык** – Л. Гончар, **Спорт в школе** – О. Леонтьева, **Управление школой** – Я. Сартан, **Физика** – Н. Козлова, **Французский язык** – Г. Чесновицкая, **Химия** – О. Блохина, **Школьный психолог** – И. Вачков

УЧРЕДИТЕЛЬ: ООО «ЧИСТЫЕ ПРУДЫ»
Зарегистрировано ПИ № 77-7241 от 12.04.01 в Министерстве РФ по делам печати
Подписано в печать: по графику 02.03.11, фактически 02.03.11 Заказ №
Отпечатано в ОАО «Чеховский полиграфический комбинат» ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: (499) 249-3138
Отдел рекламы: (499) 249-9870
Сайт:1september.ru

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: (499) 249-4758
E-mail: podpiska@1september.ru

Документооборот Издательского дома «Первое сентября» защищен антивирусной программой Dr.Web
Dr.WEB® Антивирус

В НОМЕРЕ:

ТЕМА НОМЕРА: ВОСПИТАНИЕ ПАТРИОТИЗМА

К материалам, обозначенным этим символом, есть приложение на CD-диске, вложенном в № 8.

МАТЕМАТИКА
Методическая газета для учителей математики
Основана в 1992 г.
Выходит два раза в месяц

Газета распространяется по подписке
Цена свободная Тираж 10 000 экз.
Тел. редакции: (499) 249-3460
E-mail: mat@1september.ru
Сайт: mat.1september.ru

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, И. Бокова, О. Макарова
Дизайн макета и обложки: И. Лукьянов
Корректор: Л. Громова
Верстка: Д. Кардановская

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Роспечать: инд.–**32030**; орг.–**32594**
Почта России: инд.–**79073**; орг.–**79583**

ГОЛЫЙ ПАТРИОТИЗМ НА СМЕНУ ОБРАЗОВАННОСТИ?

Л. РОСЛОВА

Ф. Гойя.
Сон разума рождает чудовищ, 1977

Образованность была, есть и будет главным ресурсом общества. Однако почему-то каждый раз приходится заново переосмысливать, что такое образованный человек, какое образование необходимо рядовому члену общества, чтобы служил он этому обществу верой и правдой, защищал его интересы, а если требуется, и отдавал за него свою жизнь. Вот и пришли мы к патриотизму. К тому самому, который поднят на знамена идеологами новых стандартов.

Когда возникает какая-то проблема, то поначалу кажется, что она уникальна, что ничего подобного раньше не было, ни с кем не случалось. Однако, присмотревшись, обнаруживаешь под толстым слоем косметических ухищрений нечто вполне знакомое, даже застарелое. Так и с патриотизмом.

Напомнила мне об этом случайно попавшаяся на глаза статья А. Хинчина, опубликованная в самом начале 60-х годов. Не берусь гадать и судить о том, чем было вызвано ее появление – времена легкими не были никогда. Статья о воспитании, в том числе патриотизма. В этом номере мы приводим ее фрагмент, в котором математик рассуждает о том, можно ли воспитывать патриотизм на уроках математики, в каких формах уместнее это делать. Просто рассуждает, здраво, не заигрывая ни с верхами, ни с низами, не обманываясь и не обманывая. И приятно в этой связи, что никак это не расходится с тем, что делают сейчас учителя математики, как они понимают свою задачу не только учителя, но и воспитателя подрастающего поколения.

Но не может не беспокоить то, что патриотизм в новых стандартах образования вытесняет само образование. Возможно, это реакция верхов на то, что образованные, активные граждане все энергичнее покидают страну в поисках перспективной работы, позволяющей им не выживанием заниматься, а реализовывать свой потенциал, данный природой и подкрепленный государством в виде образования? В этом видятся недостатки в патриотическом воспитании? Так пустое это все. Каждый человек трепетно и с любовью относится к тому уголку земли, где прошло его детство, каким бы ни было это детство, каким бы ни был этот уголок. А уж если есть чем гордиться! Поэтому, если есть хоть малейшая возможность реализовать себя в родном краю, никогда он его не покинет ни ради рубля или доллара, ни ради Москвы или заграницы. Были бы условия для нормальной жизни и нормальной работы.

Так вот и встает вопрос: зачем пытаются отнять у человека образование, заменив его голым патриотизмом? Кто знает ответ?

Из статьи А.Я. Хинчина «О воспитательном эффекте уроков математики»

Статья была напечатана в сборнике «Математическое просвещение», № 6. — М.: Физматгиз, 1961.

ВОСПИТАНИЕ ПАТРИОТИЗМА

ПОСТУЛАТ БЕРТРАНА:
«Для любого натурального $n \geq 2$ найдётся простое число в интервале от n до $2n$».

http://webmarki.com/pochtovya-marka-sssr/Portret-P-L-CHebysheva--mc41716849
http://de.academic.ru/dic.nsf/dewiki/841508

ГИПОТЕЗА ГОЛЬДБАХА:
«Любое нечётное число не меньшее семи можно представить в виде суммы трёх простых чисел».

Задача использования уроков математики для воспитания и укрепления в учащихся прочного чувства гордости за свою Родину и любви к ней имеет в себе специфическую трудность, очевидная причина которой заложена в абстрактном характере математической науки. Надо сказать прямо, что непосредственно, своим собственным материалом и содержанием математика в силу этой причины вообще не может служить орудием пропаганды чего-либо столь конкретного, как красота и величие родной страны. Здесь она с естественной скромностью вынуждена уступить место другим наукам.

Однако на уроках математики ученик вовсе не все время сосредоточивается на ее абстрактной сущности; абстрактные схемы математики непрестанно, почти на каждом уроке оснащаются, дополняются и иллюстрируются весьма различным конкретным содержанием, сюда входит содержательный материал «текстовых» задач, исторические сведения, различного рода приложения и т.п. При этом во многих случаях выбор конкретного оснащения в весьма широких пределах может быть варьирован и, таким образом, в значительной степени ставится на усмотрение преподающего. Очевидно, такой произвол может быть широко использован учителем для фиксирования внимания учащихся на фактах и цифрах, поддерживающих и укрепляющих уважение и любовь к Отечеству. У нас неоднократно писалось уже о подборе патриотически направленного материала текстовых задач. Против этого приема ничего нельзя возразить; надо только тщательно продумать выбираемый материал, чтобы избежать опошления, вульгаризации самой патриотической идеи, как это бывает, когда конкретное содержание задачи мало естественно, «притянуто за волосы», или когда задача, сообщая достаточно интересные цифры и факты, ставит по поводу них такой вопрос, который явно не имеет ни непосредственного интереса, ни какого-либо практического значения. Вместе с тем надо, конечно, отчетливо представлять себе, что весь этот прием является чисто внешним, для развития патриотических чувств здесь используются уроки математики, но никак не самая математика.

Значительно теснее связан с самой математической наукой прием, состоящий в придании патриотической направленности целому ряду исторических сведений. Этот прием, помимо впечатляющей силы воздействия, особенно ценен еще тем, что он значительно повышает интерес учащихся к истории математической науки, а во многих случаях дает повод и возможность эффективным образом ознакомить учащихся с математическими фактами, выходящими за пределы официальной программы и счастливым образом ее дополняющими. Так как по этому вопросу у нас почти ничего не писалось, то я здесь остановлюсь на нем несколько подробнее.

История русской и советской математики богата фактами, знакомство с которыми, в особенности на фоне правильной исторической перспективы, способно возбуждать в нас законную радостную гордость. И среди этих фактов есть немало таких, понимание которых доступно учащимся средней школы в достаточной мере для того, чтобы они могли оценить их принципиальное или практическое значение. Нужно только, чтобы сам учитель был хорошо осведомлен как об этих фактах, так и об их роли и месте в науке, а также и о той научно-исторической обстановке, в которой они возникали и развивались. Нужно, кроме того, конечно, уметь рассказать учащимся об этих фактах так, чтобы возбудить их живой интерес и извлечь максимальный эффект как для их математического развития, так и для воспитания в них здорового чувства национальной гордости.

Хорошо известно, что для всего этого очень продуктивно могут быть использованы научные идеи нашего великого соотечественника Н.И. Лобачевского и научная судьба его идеи. В своей основе великий геометрический замысел Лобачевского вполне доступен школьникам старших классов, а проведенная с надлежащим тактом беседа о нем может много содействовать, с одной стороны, пониманию основной для современной математики идеи аксиоматического мышления, а с другой — глубокому уважению как к научному гению Лобачевского, так и к его замечательной теоретической стойкости — великой силе убеждения, позволившей ему творить в одиночестве, без общественного признания, в научно-враждебной атмосфере.

Значительно менее известны у нас творения другого нашего великого ученого П.Л. Чебышева. А между тем научный облик его не менее импозантен, чем фигура Лобачевского. И кое-что о нем с большой и многосторонней пользой может быть рассказано и школьникам. Чебышев принадлежал к числу тех немногих ученых самого высокого ранга, которые на протяжении своей жизни работают в довольно многих, часто весьма удаленных друг от друга областях математики, в каждой из этих областей прокладывая совершенно новые пути, по которым затем в течение многих десятилетий идут их последователи. Великий дух новаторства был присущ Чебышеву не в меньшей степени, чем Лобачевскому. В теории чисел, теории вероятностей, теории механизмов и теории аппроксимации функций он создал мощные новые методы и сделался родоначальником большого числа научных школ в России и за границей. Замечательные идеи его далеко не исчерпаны и до настоящего времени.

Для учащихся средней школы особенно доступны и поучительны достижения Чебышева в теории чисел. Теорему Евклида о существовании бесконечного множества простых чисел знают все. Очень полезно выписать с учащимися таблицу простых чисел хотя бы до 100 и обратить их внимание на видимое отсутствие закономерности в расположении этих чисел. Затем рассказать о том, как задача о закономерностях в чередовании простых чисел была и остается одной из центральных проблем арифметики. Стоит привести (без доказательства) вполне понятный школьникам и способный вызвать в них интерес результат Эйлера о том, что доля простых чисел среди первых N натуральных чисел стремится к нулю с ростом N. В самых общих чертах можно затем коснуться асимптотических результатов Чебышева, обязательно давая историческую картину тех значительных усилий, которые до Чебышева были посвящены этой задаче. Конкретно же очень стоит остановиться на элементарном постулате Бертрана, проверить его на ряде примеров и тем возбудить интерес к нему со стороны учащихся. Позднее можно разобрать и какое-либо из его элементарных доказательств, хотя бы в порядке кружковой работы.

Очень советую обратить внимание учащихся на следующий замечательный исторический факт. Арифметика и геометрия — два старейших и важнейших раздела математической науки, и в обоих в течение ряда столетии наука в значительной степени питалась творениями Евклида; центральные проблемы этих двух основных ветвей математики — теория параллельных в геометрии и задача о распределении простых чисел в арифметике — в течение многих веков не поддавались сколько-нибудь заметно многочисленным усилиям целых поколений ученых.

И вот, в XIX столетии, обе проблемы были сдвинуты, наконец, с мертвой точки. В геометрии это сделал русский математик Лобачевский, в арифметике — русский математик Чебышев. Оба они проложили, каждый в своей области, совершенно новые пути, по которым наука успешно развивается до настоящего времени. Нет сомнения, что эти великие исторические скачки — Лобачевский и Евклид — Чебышев — должны импонировать молодым умам, которые в известной мере уже способны оценить их значение.

Заинтересовав учащихся вопросами распределения простых чисел, учитель имеет совершенно естественный повод рассказать им о знаменитой гипотезе Гольдбаха. Очень стоит проверить ее в классе в пределах хотя бы чисел первой сотни. Затем, конечно без всяких доказательств, сообщить о блестящих достижениях советского академика И.М. Виноградова (его основной результат в направлении проблемы Гольдбаха, разумеется, вполне доступен учащимся по своему содержанию).

С. КОЗЛОВ,
г. Великие Луки,
Псковская обл.

Фото предоставлены автором

НА МОГИЛЕ КОВАЛЕВСКОЙ

В Год Ковалевской судьба преподнесла мне замечательный подарок. Друзья позвали в поездку Санкт-Петербург – Хельсинки – Турку – Стокгольм и обратно тем же путем. «Увидим Финляндию, на пароме переберемся в Стокгольм, посмотрим Балтийское море. Ты же почти нигде не был», — соблазняли они меня. «В Стокгольме похоронена Ковалевская!» — первая мысль, которая пронеслась в моей голове. Как не поехать — когда еще представится такая возможность! Сам вряд ли соберешься. Конечно еду!

И вот мы в Стокгольме. Рядом со мной друг, коллега, удивительный, энциклопедически образованный историк, с которым мы еще 10 лет назад не раз вели разговоры на тему «А почему бы гимназии не носить имя С. Ковалевской?». Ему, Игорю Викторовичу Буйко, тоже хотелось побывать на могиле Ковалевской, но еще больше — посмотреть музей, посвященный истории шведских войн. Мы были уверены, что в маршрут экскурсии по Стокгольму обязательно будет включено посещение Северного кладбища, ну, а в музей мы как-нибудь доберемся сами. Увы! Экскурсии предусматривают посещение старого города, ратуши, где вручаются Нобелевские премии, музея одного корабля, различных экзотических и исторических мест Швеции... но не могилы великой соотечественницы. И такое посещение никогда (!) не включалось в маршруты различных экскурсий. Эх, Россия-матушка: пялимся на чужое, делаем вид, что чужая история нам интересна, а своей не знаем. Маршрут изменить не захотели, и мы вдвоем, выкроив три часа, отправились осуществлять свой план посещения Стокгольма.

Остановили такси и попытались объясниться с водителем, но... (вот где мы себя кляли за незнание английского, а ведь всегда писали «читаю со словарем»). Таксист напрягся. Вскоре он понял, что мы — русские, позвонил диспетчеру и передал мобильник мне. Услышав вопрос по-русски, я объяснил, что нам нужно. Там, на конце «провода», меня поняли и попросили вернуть трубку водителю, которому уже по-шведски все объяснили. Таксист улыбнулся. И вот мы с другом мчимся на окраину Стокгольма. Через

http://rbchvsk.homelinux.net/img/women/Sofia_Kovalevskaya.jpg

минут десять машина подкатила к огромному старинному кладбищу. Заходим в сторожку и, отчаянно жестикулируя, пытаемся объяснить служителям, что нам нужно. Выручил компьютер: проглотив имя «Ковалевская», он через минуту выдал нам план кладбища и того сектора, где покоится наша землячка. И мы начали искать. Пройдя с километр по ухоженному парку-кладбищу, мы подошли к невысокому холму. Среди сосен, посреди зеленого островка, на постаменте из камня, который у нас встречается на каждом шагу, возвышался крест из черного гранита. Место напомнило нам Полибино, наши леса. Мы подошли. На гранитной табличке, укрепленной на постаменте, прочли:

Профессор математики
С.В. Ковалевская
(род. $18\frac{3}{1}50 - 18\frac{29}{1}91$)
русские друзья и почитатели

Вспомнилось, что на этот памятник собирались средства по всей России. В те далекие времена это было нормой жизни: многие памятники в России так и устанавливались (например, Пушкину в Москве). Немного постояв в молчании, я достал землю, которую взял накануне отъезда в Полибинском парке, и положил ее у подножия. Земля с Родины малой и большой породнилась со шведской... «Дмитрич! Скажи какое-нибудь слово», — попросил Игорь, давно уже глядящий в глазок видеокамеры. А что скажешь? Главное — мы здесь и сделали то, что задумали. Год Ковалевской для нас завершился только сейчас. Подумалось: «Как все-таки мало нам удалось сделать за эти годы для того, чтобы Россия по-настоящему вспомнила свою великую Софью и отдала ей должное. Много ли в России, да и на всем земном шаре, было и есть таких женщин?! Мы должны удвоить, утроить свои усилия, чтобы это состоялось». С легкой грустью мы покидали святое место...

Через полчаса мы были в музее истории шведских войн, который нас поразил. Поразил тем, что он посвящен ужасам войны. Одноногий солдат в окопе (везде восковые фигуры); землянка в натуральном виде с имитацией грязи; замерзшие и голодные солдаты, разделывающие околевшую лошадь; прачечная, где замученные женщины склоняются над грубыми чанами; шашки, винтовки и пулеметы, которые можно подержать в руках и почувствовать их тяжесть; муляжи постоянных спутников солдат: окопных вшей и крыс, и еще на каждом шагу вас сопровождают какие-то недобрые шумы, взрывы и одиночные выстрелы, стоны раненых и умирающих солдат, неуютная музыка. Увидев все это, к войне не воспылаешь любовью. Вот и благодарят шведы — как нам сказал экскурсовод — своего Карла Великого за то, что он навсегда отучил от войн, и чтят тех, кто прославил их Родину добрыми делами, кто строил Швецию. Нам бы так...

И вспомнилась могила Ковалевской, ухоженная шведами и забытая нами, россиянами. И встала перед глазами юная Софья и ее Полибинская усадьба, до которой нет дела государству нашему, в лице руководителей и политиков, и которую мы, рядовые соотечественники, не знаем или вспоминаем редко, часто по случаю... Менять нам нужно приоритеты в нашем сознании и государстве. Нельзя быть Иванами, не помнящими родства! «Не ищите новое — ищите вечное» — эта древняя заповедь не выходит из головы, все время рвется из уст, когда я слышу об очередных новых реформах.

Но хочется верить, что Россия очнется от окутывающего ее векового дурмана и станет такой, какой ее мечтала увидеть наша Софья: мирной, справедливой и свободной.

А землю, собранную на могиле Ковалевской, я рассыпал в цветнике перед ее бюстом в Полибино в присутствии десятиклассников-гимназистов, приехавших убрать территорию парка. Бывая в музее-усадьбе, припомните, что у подножия памятника Софье Васильевне есть кусочек ее Швеции, страны, которая протянула ей руку, когда Родина ее отвергла.

5 класс

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

Н. ГАБУНОВА,
г. Ульяновск

Фотографии Симбирска с сайта:
http://www.welcometoulyanovsk.ru/index.php?section=28

Найти разумный компромисс между математическим содержанием урока и его гуманитарным аспектом трудно. Чаще всего приходится мириться с тем, что математическое задание оказывается искусственным добавлением к беседе по поводу гуманитарных аспектов нашей жизни. Однако то, что кажется искусственным при описании урока, в реальности очень хорошо детьми воспринимается и оказывает на ребят серьезное воспитательное воздействие. Один из таких уроков, посвященный 360-летию города Ульяновска, описан ниже.

Цели урока:

— обобщить основные результаты знаний, умений и навыков по теме «Сложение и вычитание обыкновенных дробей»;

— активизировать познавательную деятельность учащихся;

— развивать самостоятельность учащихся, используя проектный метод, творческие задания;

— воспитывать любовь к родному краю, его истории.

Оборудование: магнитная доска, компьютер, проектор, экран. Урок сопровождается компьютерной презентацией.

Ход урока

Учитель. У каждого живого существа есть на земле место, где оно появилось на свет. У растения есть корни. Говорят, что человек тоже имеет корни — это его родина, народ, предки. Ульяновск — наш с вами родной город. Кто из вас знает, с какого года начинается биография нашего города?

[1648 г.]

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 8.



Сегодня тема урока — «Сложение и вычитание обыкновенных дробей», и посвящается он 360-летию нашего родного города.

Давайте узнаем историческое название города.

Задание. Устно выполните задания и расшифруйте слово.

1. $\frac{2}{7}+\frac{4}{7}$.

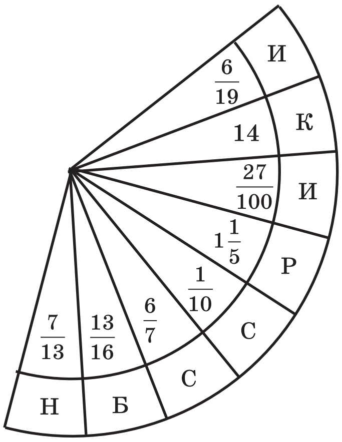
2. $\frac{13}{19}-\frac{7}{19}$.

3. $\frac{5}{13}+\frac{6}{13}-\frac{4}{13}$.

4. $1-\frac{3}{16}$.

5. $\frac{35}{100}-\frac{8}{100}$.

6. $\frac{2}{5}+\frac{4}{5}$.



7. Карлсон с помощью пылесоса утащил у фрекен Бок $\frac{9}{10}$ испеченных ею плюшек. Какую часть плюшек Карлсон оставил домоправительнице?

8. Сова приготовила ко дню рождения 68 пирожных, $\frac{7}{34}$ этого количества она съела сама. Сколько пирожных съела сова?

Учитель. Синбирск — первоначальное историческое название города. Ребята подготовили сообщения об истории нашего города. Давайте послушаем.

Сообщение 1. Для охраны границ Московское государство строило небольшие города-крепости. В 1648 году по указу царя Алексея Михайловича воеводой Богданом Матвеевичем Хитрово был основан город-крепость. Место на горе, которое выбрал Хитрово для постройки города, в то время было покрыто лесом. Здесь построили рубленый кремль. Он представлял собой бревенчатый четырехугольник со сторожевыми башнями, валом и глубоким рвом. В центре стоял собор, к северу от него располагались гостиные ряды, казармы гарнизона, пороховой погреб, хлебные амбары. Улицы расходились веером от пяти ворот кремля на север, запад и юг. До конца XVII столетия город назывался не Симбирск, а Синбирск. Известно только, что на левом берегу Волги существовал в древности булгарский город того же имени, который был разрушен Тамерланом. Хитрово, заложив город, отбыл в Москву на службу, а в Синбирск был назначен воеводой Иван Богданович Камынин, который продолжил строительство города.

Сообщение 2. Старый Симбирск всегда был надежной опорой российского царизма, крепостью на Волге. В XVI и XVII веках в состав русского государства вошло немало областей, жители которых привыкли к полуразбойничьей жизни. Таковы были донские казаки. Прежде они грабили населенные пункты вдоль берегов Азовского и Черного морей, но крымские татары загородили им дорогу к морю, и они перебрались на Волгу. Во главе казаков стоял атаман Степан Разин. При поддержке населения казаки овладели Царицыном, Астраханью, Самарой. Из Самары Разин двинулся к Симбирску с войском около 5000 человек. Но под Симбирском потерпел поражение и ушел на Дон, где вскоре был схвачен и выдан царским властям.

Учитель. В каком году Степан Разин потерпел поражение под Симбирском, мы узнаем, решив следующее задание.

Задание. Вычислите, а затем запишите числители полученных чисел по порядку.

а) $1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$; б) $\frac{3}{10}-\frac{3}{50}$;

в) $\frac{5}{6}-\frac{1}{4}$; г) $1-\frac{19}{44}-\frac{25}{44}$.

Ответ: 1670 год.

Учитель. Проходят годы. Симбирск строится. Интересно, какова дальнейшая судьба нашего города? Давайте послушаем сообщение.

Сообщение 3. До начала XIX века Симбирск был почти сплошь деревянным, поэтому огромные бедствия ему причиняли пожары. В XIX веке наиболее страшный пожар в Симбирске начался 12 августа 1864 года и продолжался 9 дней. От города уцелела его четвертая часть. Сгорело не только имущество большинства жителей, но и много людей. Кто был виновником этого несчастья, осталось неизвестным. После пожара Симбирск был построен заново. Губернский город развивался как культурный центр Поволжья, его именовали «барином городов Поволжья», «дворянским гнездом». В 1833 году Симбирск посетил А.С. Пушкин. Симбирская земля — родина известных литераторов: Языкова, Гончарова, Минаева, историка Карамзина. Именно здесь ровно через 200 лет после разгрома разинцев, 10 (22) апреля 1870 года, на улице Стрелецкой, где когда-то жили стрельцы, сочувствующие Степану Разину, родился Владимир Ульянов (Ленин). В XX веке Симбирск был переименован в город Ульяновск.

Учитель. Дату переименования мы узнаем, выполнив устно следующее задание.

Задание. Найдите значение x и выпишите полученные числа по порядку:

а) $\frac{x}{8}+\frac{7}{8}=1$;   б) $\frac{x}{275}-\frac{9}{275}=0$;

в) $1-\frac{x}{15}=\frac{13}{15}$;   г) $\frac{19}{15}-\frac{x}{15}=1$.

Ответ: 1924 год.

Учитель. Сегодня Ульяновск — крупный промышленный, научный и культурный центр. Мы живем в Новом городе — городе авиастроителей, строительство которого началось в 1975 г. «Авиастар» — крупнейшее предприятие по производству авиационной техники, в частности, грузового самолета «Руслан». На самолете «Руслан» был установлен абсолютный мировой рекорд: доставлен груз массой 171 т 219 кг.

Задача. Авиакомпания «Волга-Днепр» получила заказ на доставку груза транспортным самолетом «Руслан». В первый день бригада приготовила для перевозки $\frac{3}{10}$ всего груза, во второй день — $\frac{2}{5}$ всего груза, а в третий день — 51 т. Чему равна масса всего груза?

[170 т]

Учитель. Согласитесь, Новый город очень красивый: широкие проспекты, улицы, бульвары, весной и летом утопающие в зелени деревьев. Вы узнаете, в честь кого получила название одна из улиц, выполнив задание.

Вариант 1

1. $n+\frac{2}{7}=1$.   2. $\frac{1}{10}+\frac{4}{5}$.

3. $\frac{4}{9}+\frac{6}{27}$.   4. $\frac{5}{6}+\frac{7}{9}$.

5. $\frac{13}{58}+\frac{21}{58}-m=\frac{6}{29}$.

Вариант 2

1. $\frac{4}{9}+m=1$.   2. $\frac{3}{16}+\frac{5}{8}$.

3. $\frac{2}{3}+\frac{1}{12}$.   4. $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$.

5. $\frac{28}{54}+\frac{12}{54}-n=\frac{8}{27}$.

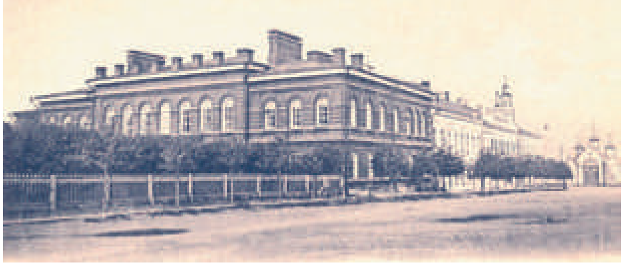
Ключ

$\frac{3}{4}$	В	$\frac{13}{16}$	Е
$\frac{2}{3}$	Р	$1\frac{11}{18}$	Б
$\frac{5}{7}$	К	$\frac{9}{10}$	А
$\frac{5}{9}$	Ш	$1\frac{7}{12}$	Д
$\frac{11}{29}$	Ы	$\frac{4}{9}$	М

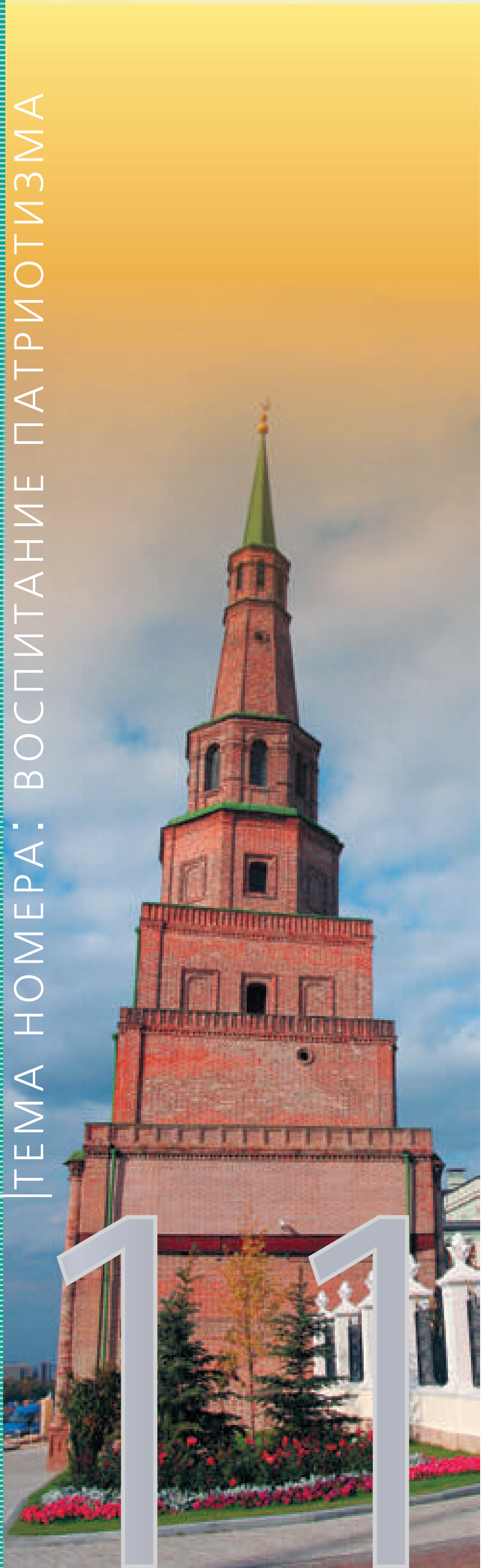
[Карбышев Д.М.]

Сообщение 4. Карбышев Дмитрий Михайлович (1880–1945) окончил Симбирский кадетский корпус, затем — военную академию, был участником русско-японской, Первой мировой войны, служил в инженерных войсках. Он — доктор военных наук, преподавал в Военной академии имени Фрунзе, написал более 100 трудов по военно-инженерному искусству и военной истории. В начале Великой Отечественной войны генерал Карбышев попал в плен, отказался перейти на службу к фашистам и погиб мученической смертью в лагере Маутхаузен (был заморожен под струями воды на февральском морозе). Дмитрий Михайлович — Герой Советского Союза, ему установлены памятники в Маутхаузене, Омске, Таллине, Москве, его имя носят малая планета, морские и речные суда, школы, предприятия и учреждения, улицы, в том числе и улица в Ульяновске, где располагается наша школа.

Учитель. История Отечества для каждого неразрывно связана с историей малой родины. У каждого она своя, но вместе мы — единое целое. С гордостью говорим: «Мы любим тебя, родной край. Мы гордимся тобой». Очень хочется, чтобы над нашей Родиной всегда было синее-синее небо.



Л. КОНДЕНКО,
Г. КАМАЕВА,
г. Елабуга



5 класс

ИСТОРИЯ КАЗАНСКОГО КРЕМЛЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Интерес учащихся к математике падает. А интерес — это один из инструментов, побуждающих учеников к более глубокому познанию предмета и развивающих их способности. Хорошо известно, что наличие интереса является необходимым условием процесса обучения. Чем выше интерес, тем активнее идет обучение и тем лучше его результат.

Сегодня все чаще говорят о гуманизации образования и математики в частности. Найти разумный компромисс между математическим содержанием урока и его гуманитарным аспектом трудно. Разумеется, «гуманитарное» преподавание математики немыслимо без изучения ее истории. И, конечно, большие возможности для воспитания у учащихся интереса к предмету и расширения их кругозора дает история родного края. Каждому человеку нужно знать, какими были и как жили его давние предки, что довелось испытать и пережить народам нашей родины на протяжении прошедших веков. Мы не ставили цель изучать историю на уроках математики, а попытались содержание задач связать с историей нашей республики, с ее архитектурными и культурными памятниками.

Уроки, посвященные истории Казанского кремля, мы готовили вместе с учениками 5-го класса. Одни учащиеся собирали легенды, другие готовили иллюстративный материал, третьи помогали учителю в составлении задач. Представляем результаты нашего совместного труда на суд читателей газеты. При составлении задач использованы сведения, взятые из трудов историков, реставраторов, архитекторов.

Учитель. В 2005 году отмечалось 1000 лет со дня основания города Казани. Он был заложен на берегу реки Казанки, сливающейся с водами Большой Волги, подвергался разрушению, горел и снова возрождался.

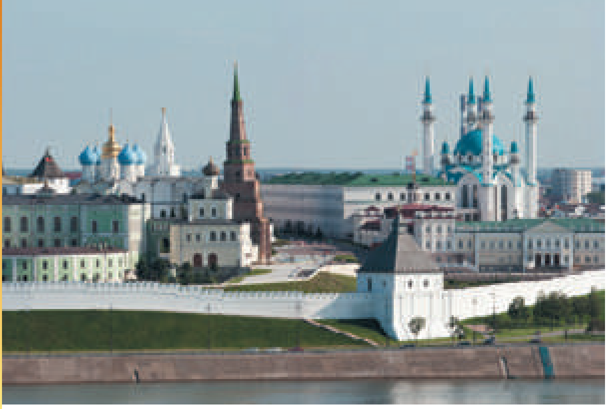
Задача 1. Чтобы узнать, в каком году был основан город Казань, выполните действия и, записав ответы в строчку, прочитайте получившееся число.

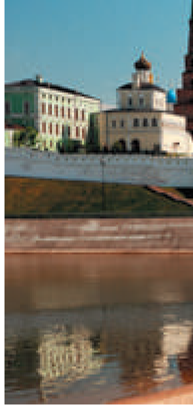
а) $24 \cdot 2 - 47$; б) $2^2 \cdot \frac{1}{4} - 1$;

в) $12 \cdot \frac{1}{6} - 2$; г) $3^2 + 4^2 - 5 \cdot 4$.

В XI веке английский путешественник Энтони Дженкинсон писал: «Казань — прекрасный город, построенный по русскому и татарскому образцу, с крепким замком, стоящим на высоком

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 8.





холме». К этому времени в городе уже проживало около 30 тысяч человек.

Задача 2. Сколько человек сейчас проживает в Казани, если численность населения с тех пор увеличилась более чем в 47 раз?

В 1552 году, сразу же после завоевания Казани русскими войсками, поврежденные во время военных действий дубовые стены крепости были спешно исправлены. Но приступить к сооружению белокаменных укреплений политическая обстановка позволила лишь спустя 4 года.

Задача 3. Кто издал указ о восстановлении Казани?

а) $(13{,}4 - 8{,}3 \cdot 0{,}5) - 2{,}35$;	[6,9 – И]
б) $0{,}9 \cdot 37 + 4{,}3 \cdot 24$;	[136,5 – В]
в) $0{,}247 \cdot 64 - 0{,}247 \cdot 54$;	[2,47 – А]
г) $83{,}8 + (24 \cdot 5{,}7 - 4{,}7)$;	[215,9 – Н]
д) $0{,}23 \cdot 12 + 0{,}27 \cdot 12$;	[6 – Г]
е) $(11{,}3 - 8{,}4) \cdot 6 + 3{,}6$;	[21 – Р]
ж) $12 \cdot 3{,}44 \cdot 5 + 43{,}6$;	[250 – О]
з) $(13{,}4 + 8{,}07) \cdot 3 - 22{,}59$;	[41,82 – З]
и) $(3{,}27 - 1{,}16) \cdot 10$;	[21,1 – Н]
к) $4{,}8 \cdot 13 - 0{,}3 \cdot 27$;	[54,3 – Ы]
л) $0{,}9 \cdot 7{,}02 - 0{,}258$.	[6,06 – Й]

Древний кремль гордо высится на высоком холме на левом берегу Казанки, при впадении в нее реки Булак. До сих пор кремль, окруженный многогранником крепостных стен с возвышающейся за ними башней Сююмбике, определяет облик Казани и является важнейшим архитектурным комплексом в панораме города.

В 1556 году по указу Ивана Грозного из Пскова прибыли 200 каменщиков для строительства в Казани нового, белокаменного кремля. В 1562 году псковские мастера закончили реконструкцию казанского кремля.

Задача 4. Сколько лет псковские мастера трудились над созданием нового кремля?

Кафедральный Благовещенский собор заложили в тот самый день, когда царь Иван Грозный въехал в завоеванный город. Он сам выбрал место, где быть храму, и уже через три дня в законченном деревянном соборе отслужили благодарственный молебен. Территория кремля сильно расширилась к югу, где поднялась каменная стена с двумя круглыми угловыми башнями и Спасской посередине. Были построены Преображенская проездная башня, Трапезная палата и Лазные ворота. И к 1630 году казанский кремль превратился в мощную цитадель, обнесенную кирпично-каменными стенами с 13 башнями.

Задача 5. Из 13 башен Казанского кремля одна имеет многогранную форму, 7 — круглую и еще 5 башен являются проездными. Какую часть составляют круглые башни от числа всех башен кремля?

Задача 6. Из 13 башен Казанского кремля до наших дней сохранилось лишь 8. Какая часть башен была разрушена?

Сейчас в Казанском кремле 8 башен, из них две проездные: Спасская и Тайницкая. Проезд в Тайницкой башне сохранил старую форму. А главную, Спасскую, перестроили в конце XVII века: старый проезд заменили аркой и надстроили. Позднее в ней установили куранты с колокольным боем.

Задача 7. Определите высоту Спасской башни, решив уравнение $4x + 24 - x = 156$.

Главная достопримечательность Казанского кремля — семиярусная проездная башня Сююмбике. С башней Сююмбике связано множество легенд. Княгиня Сююмбике была женой трех последних казанских ханов. Выданная замуж двенадцатилетней девочкой, она пережила их всех и над прахом второго мужа — Сафы Гирея — построила мавзолей. По одной из легенд, после захвата города русскими войсками последняя казанская царица бросилась вниз с вершины башни.

Задача 8. Определите высоту башни Сююмбике, решив уравнение

$$\frac{x+122}{3} = 60.$$

Когда именно была построена башня Сююмбике, точно никто не знает. Кто-то считает ее творением русских зодчих XVII века, кто-то относит еще к домонгольским временам.

Задолго до прихода в Казань Ивана Грозного, в 1487 году, Иван III посадил на казанский трон молодого Мухамеда Эмина.

Задача 9. Сколько лет царствовал в казанском царстве Мухамед Эмин, вы узнаете, вычислив сумму двух числовых выражений:

$$(4 + 5) : 3 + 17 \text{ и } (16 + 4) : 2 - 3 \cdot 3.$$

Юный хан воспитывался на Руси, в городке Касимов (Рязанская область), а позднее в Москве. Иван III относился к нему как к приемному сыну, хотя сам в те времена считался всего лишь вассалом могущественного казанского ханства. Мухаммед Эмин прославился как просвещенный государь, поэт и покровитель искусств. Кстати, похоронен «просвещенный казанский хан» был в мавзолее, у подножия башни Сююмбике. История любит неожиданности: прекрасная царица Сююмбике умерла в полном забвении далеко от Казани и была похоронена в Касимове под Рязанью, не удостоившись даже надписи на могильной плите.

Башня Сююмбике примечательна еще одним: она, подобно пизанской, «падающая башня».

Задача 10. Определите, на сколько сантиметров отклонилась местная «пизанская» башня, башня Сююмбике, выполнив действия:

$$(223 + 8) - 17 \cdot 2.$$

Вершина башни Сююмбике отклонена от вертикали на 1 метр 97 сантиметров, что заметно невооруженным глазом.

Кирпичное строительство в Казанском кремле началось, по-видимому, после пожара 1672 года. Спасскую башню над парадным въездом в крепость сделали более внушительной. Сооруженная псковичами, башня украсилась восьмигранником с плоскими лопатками на углах и поставленным над ним октогоном-смотрильней, перекрытой стройным шатром, который завершала маленькая главка, увенчанная двуглавым орлом.

Задача 11. Определите высоту Спасской башни, решив уравнение

$$(2x + 312) : 4 = 100.$$

Сегодня в Казанском кремле заново выстроена знаменитая мечеть Кул Шариф, разрушенная при Иване Грозном. Исследователи считают, что купола храма Василия Блаженного, построенного в Москве в честь покорения казанского ханства, удивительным образом похожи на купола разрушенной когда-то мечети.

Задача 12. Определите высоту четырех больших минаретов мечети Кул Шариф, решив уравнение

$$6x + 2 - 2x = 230.$$

Задача 13. Найдите радиус центрального купола мечети Кул Шариф, если его диаметр равен 17,5 метров.

Задача 14. Основание мечети Кул Шариф имеет форму квадрата. Определите длину его стороны, если площадь основания равна 484 м^2.

Сильно пострадал город во время крестьянской войны под предводительством Емельяна Пугачева в 1774 году. За один день ему удалось захватить посад, возникли пожары. Горела лучшая часть города, где стояли каменные дома. Из официальных отчетов известно, что «до бывшего в 1774 году 8 июля несчастного приключения» в Казани было 27 каменных и 50 деревянных казенных строений, а частных каменных и деревянных — 3097 домов. Из них «каменных обгорело, а деревянных в пепел» 28 церквей, Гостиный двор, в котором имелось 777 лавок, казенных строений — 74, «гражданских партикулярных домов» — 2091.

Задача 12. Каков процент частных домов, сгоревших в 1774 году?

Литература

1. *Алишев С.* Казанское ханство. – Казань: Татарское книжное издательство, 2002.

2. *Давлетшин Г.М., Хузин Ф.Ш., Измайлов И.Л.* Рассказы по истории Татарстана. — Казань: Магариф, 1994.

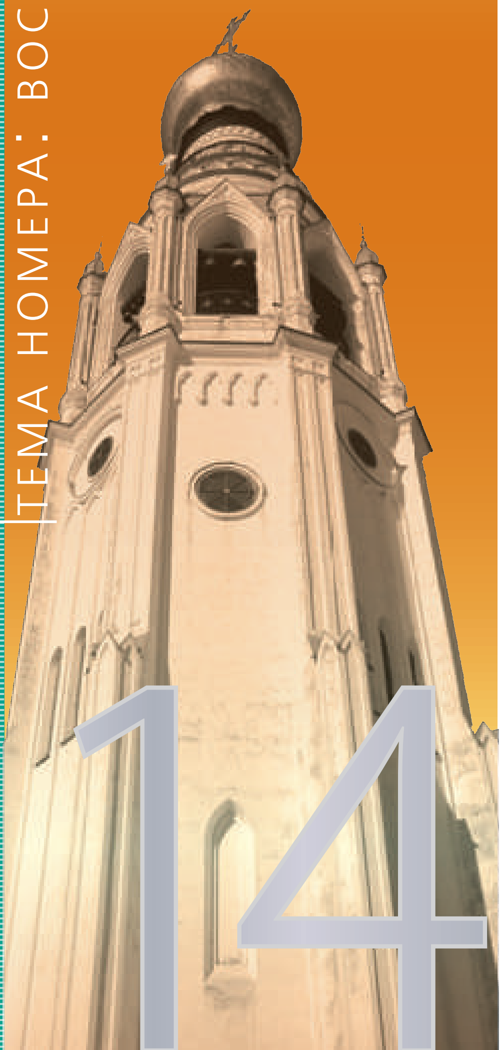
3. *Фехнер М.* Великие булгары. Казань. Свияжск. — М.: Искусство, 1978.

4. *Худяков М.Г.* Очерки по истории казанского ханства. — М.: Инсан, 1991.

5 класс

ПАТРИОТИЧЕСКОЕ ВОСПИТАНИЕ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Н. КУЗНЕЦОВА,
г. Вологда



В наши дни наблюдается потеря интереса к сознательному участию в социальных процессах. Это результат ослабления патриотического воспитания. В государственной программе «Патриотическое воспитание граждан Российской Федерации на 2001–2005 годы» отмечается: «Патриотическое воспитание направлено на формирование и развитие личности, обладающей качествами гражданина, патриота Родины и способной успешно выполнять гражданские обязанности в мирное и военное время… Система патриотического воспитания предусматривает формирование и развитие социально значимых ценностей, гражданственности и патриотизма в процессе воспитания и обучения в образовательных учреждениях всех типов и видов».

Таким образом, требуется обновленный подход к путям и методам патриотического воспитания школьников не только во внеклассной работе, но и в учебном процессе. Можно многому научить ребенка, но не привить ему чувства справедливости, доброты, любви к родному городу. Вместе с тем у школьника можно сформировать эти чувства, но не дать современного образования. Важно повышать воспитательный характер обучения и образовательный эффект воспитания. Перед школой стоит задача сделать учебный процесс более значимым для учащихся, помочь находить доброе и прекрасное там, где мы живем.

Вологодская северная земля — хранительница исконно-русских традиций, чистоты нашего языка и духа. История Вологды и вологодского края — это богатый духовный, культурно-исторический

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 8.

материал для гражданского становления юных вологжан, для воспитания у них чувства любви к родному краю, городу.

Решение на уроках математики задач, содержащих информацию о городе, повышает интерес к предмету. Когда умение решать задачу сплетается с историей, задача становится более значимой и может стать по-настоящему интересной каждому ученику.

Назначением таких задач является не только формирование умения решать задачи, но и воздействие на духовный мир учащихся, на их нравственные ценности. Такие задания способны оставить глубокий след в личностном становлении подростка.

В качестве примера приведу урок в 5-м классе «Вологодские легенды в задачах по математике» по теме «Действия с натуральными числами».

На уроке использовались задания из сборника задач по математике для пятого класса «Мой древний город», выпущенного в 2005 году издательским центром ВИРО. Он составлен на основе результатов исследовательской деятельности учащихся 5–8-х классов нашей школы по изучению истории города Вологды. В сборнике представлены задачи по математике, составленные с опорой на краеведческий материал, которые сгруппированы в 4 раздела: «Натуральные числа» (город, его архитектура), «Обыкновенные дроби» (Спасо-Прилуций монастырь), «Десятичные дроби» (Петр Великий в Вологде), «Проценты» (город и посады).

Внутри разделов задачи условно объединены в блоки с краткими историческими справками, определяющими их содержание. В приложении представлен материал для внеклассной работы. Систематическое использование таких заданий формирует верность традициям прошлого, развивает патриотические чувства, учит подростков гордиться своим городом.

Задачи соответствуют учебной программе для 5-го класса и могут быть использованы в учебном процессе и на внеклассных мероприятиях по математике.

Урок в 5 классе «Вологодские легенды в задачах»

Цели урока:

— обобщить и систематизировать материал по теме «Действия с натуральными числами», установить связь между теорией и практикой;

— воспитать патриотические чувства и любовь к родному городу.

Материал к уроку: карточки с заданиями; рисунки к легендам, выполненные учениками; разрезная картинка-мозаика с изображением города для подведения итогов игры; таблица со старинными единицами измерения, необходимыми для решения задач.

Ход урока

Класс разбивается на четыре группы.

Учитель. Что такое сказка, конечно, знают все. А что такое легенда? Это повествование о чудесном, необыкновенном, где что-то правда, а что-то выдумка, фантазия. Много легенд хранит и наша древняя Вологодская земля. В этих легендах — невыдуманная и вместе с тем сказочная история Вологодчины. Сегодня я познакомлю вас с некоторыми из них, а вы постарайтесь понять, что в них «ложь, а что — намек, добрым молодцам урок». Итак, мы проведем необычный урок, урок-путешествие в далекое прошлое. Урок поможет нам больше узнать о нашем городе, а натуральные числа будут хорошими и добрыми помощниками.

Актуализация опорных знаний

Учитель. Вспомните, какие числа называются натуральными. Какие действия с натуральными числами мы умеем выполнять? Какое число не является натуральным? Почему? Итак, мы знакомы с натуральными числами. Можно отправляться в путешествие.

В старину наши северные земли были покрыты лесами. Тянулись они без конца и края —

дремучие, суровые. В глубь леса можно было проникнуть только по рекам, полноводным и богатым рыбой. Повсюду в лесных чащах сверкали на солнце большие и малые озера, дымились туманом непроходимые болота и топи. Вот так попал в наши края и старец Герасим. Долго плыл он в лодке-ладье по спокойной и светлой реке, наконец причалил к берегу, вышел, огляделся. Понравилось ему место.

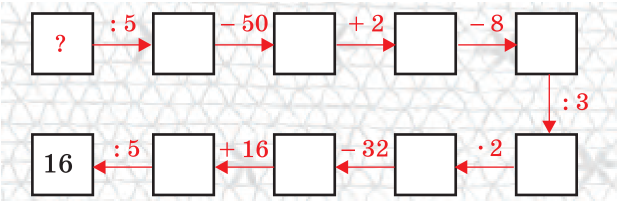
— Вот здесь, — подумал старец, — заложу я город.

Смотрит, а на обрыве стоят несколько срубленных из толстых бревен домов и церквушка.

— Как называется ваше поселение? — спросил Герасим у местных жителей.

— Вологда, — ответили ему.

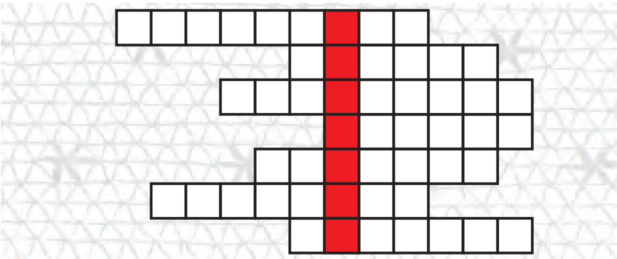
Учитель. А сейчас выполните задание и узнайте, в каком году это произошло.



Назовите год основания нашего города.

(*Команда, выполнившая задание первой, получает карточку — частичку мозаики.*)

Один из местных жителей объяснил Герасиму, что Вологда в переводе с языка финно-угорских племен означает... И мы узнаем значение слова «Вологда», проведя эстафету грамотности.



(*На доске висят четыре таблицы, в которые каждая команда вписывает названия чисел: 400, 200, 800, 1000, 1 000 000, 1 000 000 000 500. Команда, выполнившая задание первой, получает карточку — частичку мозаики.*)

Но другие жители заспорили с ним: мол, Вологда получила свое название в результате того, что путникам и рыбакам приходилось волочить от других рек до нашей лодки по земле, то есть тащить волоком, и что слово «Вологда» произошло от финского «волокъва» или «волокЪ».

Давайте, выполнив устно задание, узнаем значение этих слов в переводе на русский язык.

(*Работа в группе.*)

1-е слово
а) 100 : 2;
б) 24 · 3;
в) 206 + 17;
г) 96 – 54;
д) 123 + 15 – 23;
е) 13 · 11;
ж) (207 + 94) – 7;
з) 100 – 28;
и) 666 : 333;
к) 290 – 175.

2-е слово
а) 35 · 2;
б) (333 + 93) – 33;
в) 83 – 33;
г) 271 + 45;
д) 600 : 200;
е) 131 · 3;
ж) 255 : 5;
з) 27 + 23;
и) 144 : 2;
к) 300 – 77.

51 = й	3 = ш	50 = л	223 = с	115 = а
393 = о	316 = ь	42 = н	143 = я	294 = р
	72 = е	2 = к	70 = б	

(*Команда, выполнившая задание первой, получает карточку — частичку мозаики.*)

Учитель. Вологда имеет еще одно название. Заполните таблицу и расшифруйте его.

(*Один представитель от каждой команды работает у доски, остальные на месте.*)

125 + □ = 140 + 110; (О)
118 – □ = 38 + 50; (С)
□ + 220 = 340 – 65; (А)
□ + 480 = 230 + 570. (Н)

320	55	30	125	320

(*Команда, выполнившая задание первой, получает карточку — частичку мозаики.*)

Учитель. Первоначально наш город был деревянным, но царь Иван Грозный приказал начать в Вологде строительство каменного кремля. Под руководством опытных мастеров возводились высокие каменные стены и грозные башни. А в центре был построен огромный, величавый Софийский собор.

(*На магнитную доску крепится рисунок.*)

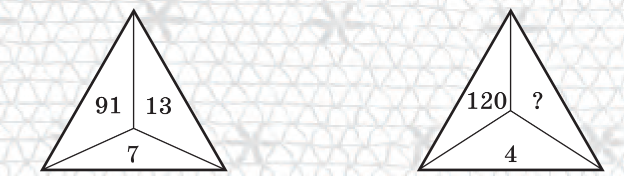
Выпишите номера примеров, в которых допущены ошибки, и вы узнаете год, когда был построен Софийский собор.

(*Работа в группе.*)

1. 100 – 25 = 65.
2. 45 · 11 = 495.
3. 933 : 3 = 311.
4. 873 + 22 + 27 = 922.
5. 38 · 5 = 180.
6. 1095 : 5 = 218.
7. 897 – 252 = 645.
8. (763 + 54) – 63 = 750.
9. 653 – 544 = 109.

(*Команда, выполнившая задание первой, получает карточку — частичку мозаики.*)

Учитель. Софийский собор расписан фресками. Найдите пропущенное число, и вы узнаете, сколько иконописцев расписывало собор.



(*Работа в группе. Команда, выполнившая задание первой, получает карточку — частичку мозаики.*)

Одновременно с постройкой собора Иван Грозный приказал построить тридцать две башни. Деревянных башен было на десять больше, чем каменных. Сколько каменных и сколько деревянных башен приказал построить Иван Грозный?

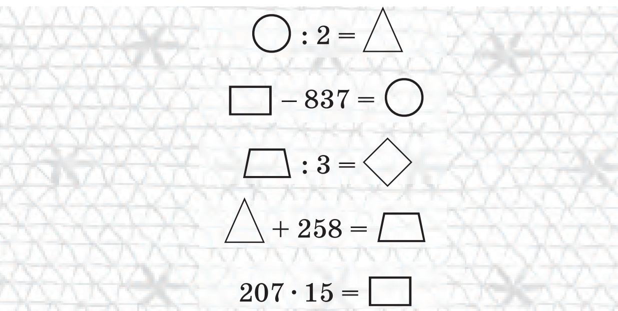
(*Для решения задачи вызываются по одному ученику от группы. Задача решается устно. Тот, кто первым даст правильный ответ на вопрос, объясняет решение. Команда, выполнившая задание первой, получает карточку — частичку мозаики.*)

Старинный город был окружен крепостными стенами.

(*На магнитную доску крепится рисунок.*)

Выполните задания, и последний результат укажет нам, сколько сажень длины имели крепостные стены в 1565 году. Одна сажень равна примерно 2 метрам 13 сантиметрам.

(*Работа в группе.*)

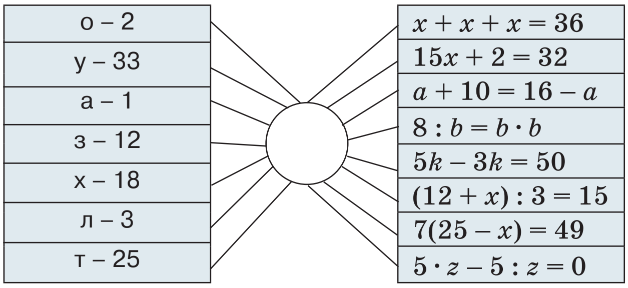


Учитель. Задумал царь создать в Вологде свою северную резиденцию. А чтобы сделать ее безопасной в военном отношении, приказал вырыть большой ров, углубив речки Содемку и Шограш и соединив их с рекой Вологдой.

(*На магнитную доску крепится рисунок.*)

Выполните задание, и вы узнаете, как называется эта речка.

(*Работа в группе.*)



(*Команда, выполнившая задание первой, получает карточку — частичку мозаики.*)

Учитель. В трех верстах от крепости Иван Грозный приказал насыпать вал. Найдите расстояние до вала в километрах и метрах, если одна верста примерно равна одному километру семидесяти сантиметрам.

(*Команда, выполнившая задание первой, получает карточку — частичку мозаики.*)

Царь часто бывал в Вологде и сам следил за тем, как она строилась. В старой народной песне поется о том, что Иван Грозный собирался даже сделать Вологду столицей, и о том, что ему помешало. А было это так: однажды, когда Иван Грозный осматривал собор, сверху прямо на голову царю упал кирпич. Иван Грозный рассердился и с тех пор в Вологде не появлялся. И она не стала столицей!

(*На магнитную доску крепится рисунок.*)

Очень жаль, но наше путешествие подходит к концу. Много сказок и былей сложено о нашем городе. Кто любит свой город и желает знать о нем больше, может прочитать книгу Владимира Аринина «Вологодский клад». Эта книга есть в школьной библиотеке.

Подведение итогов урока

Каждая команда из карточек составляет на магнитной доске картинку — рисунок о Вологде. Победители игры награждаются календариками с изображением города. Самые активные ученики получают отметки.

Задание на дом

Составить две задачи о нашем древнем городе.

Литература

1. Проблемы воспитания патриотизма / под ред. И.Д. Лушникова. —Вологда: ВИРО, 2004. — 100 с.

2. *Сазонов А.* Такой город в России один. — Вологда, 1993.

И. БЕЛИКОВА,
Москва

ОТНОШЕНИЕ ОТРЕЗКОВ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Нахождение отношений отрезков в треугольнике широко используется при решении геометрических задач. Это может быть самостоятельная работа или часть задачи на нахождение площадей. В данной работе представлена формула, связывающая отношения отрезков в треугольнике. Эта формула значительно упрощает решение большого количества задач, избавляя от необходимости делать, по сути, однотипные дополнительные построения, сводящие каждый раз задачи подобного типа к задачам на пропорциональные отрезки.

Основная формула

Рассмотрим задачу о пересечении в треугольнике двух отрезков, соединяющих вершины с точками на противолежащих сторонах.

Пусть в треугольнике ABC (рис. 1) точка M лежит на стороне BC, точка N — на стороне AC и отрезки AM и BN пересекаются в точке O, тогда отношения отрезков $\frac{AO}{OM}$, $\frac{BO}{ON}$, $\frac{CM}{MB}$, $\frac{AN}{NC}$ связаны между собой таким образом, что, зная любые два из них, можно определить остальные по формулам:

$$\frac{AO}{OM}=\frac{AN}{NC}\left(1+\frac{CM}{MB}\right),\quad \frac{BO}{ON}=\frac{BM}{MC}\left(1+\frac{CN}{NA}\right). \qquad (1)$$

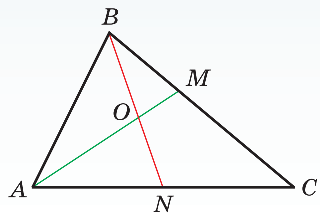


Рис. 1

Приведем вывод первого соотношения (1). Выполним дополнительное построение в треугольнике ABC: проведем отрезок MK, параллельный отрезку BN.

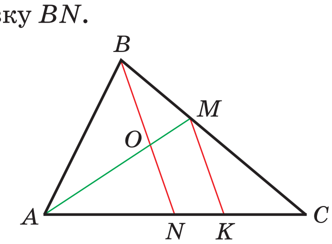


Рис. 2

Применяя теорему о пропорциональных отрезках, получим: $\frac{AO}{OM}=\frac{AN}{NK}$ — из треугольника AMK; $\frac{CK}{KN}=\frac{CM}{MB}$ — из треугольника BNC. Заметим, что

$$CK=KN\cdot\frac{CM}{MB},$$

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 8.


Фото Н. Суковой

$$\frac{AN}{NC}=\frac{AN}{NK+KC}=\frac{AN}{NK+NK\cdot\frac{CM}{MB}}=\frac{AN}{NK\left(1+\frac{CM}{MB}\right)},$$

следовательно,

$$\frac{AN}{NK}=\frac{AN}{NC}\left(1+\frac{CM}{MB}\right). \qquad (2)$$

Таким образом, заменяя правую часть в равенстве $\frac{AO}{OM}=\frac{AN}{NK}$ по формуле (2), получаем:

$$\frac{AO}{OM}=\frac{AN}{NC}\left(1+\frac{CM}{MB}\right).$$

Вывод второго соотношения (1) проводится аналогично.

Замечание. Для применения формул (1) в задачах полезно запомнить их «структуру»: отношение частей одного из пересекающихся внутри треугольника отрезков, считая от вершины, равно отношению отрезков на стороне, прилежащей к этой вершине, умноженному на сумму единицы и отношения отрезков противолежащей стороны, считая по направлению обхода (рис. 3).

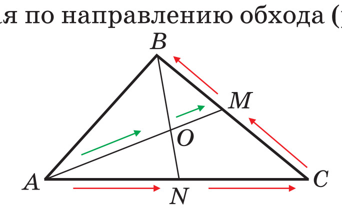


Рис. 3

Применение формулы к решению задач

Задача о пересечении медиан треугольника

Пусть медианы AM и BN треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 4). Найдите, в каком отношении делятся точкой пересечения медианы треугольника.

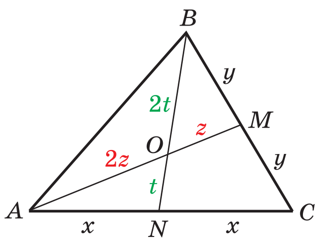


Рис. 4

Решение. (Здесь и в последующих рисунках: отношения, заданные в условии, отмечены черным, отношения, найденные при решении, — цветным.)

Так как

$$\frac{AN}{NC}=1 \text{ и } \frac{CM}{MB}=1$$

(N, M — середины AC и BC соответственно), по формулам (1):

$$\frac{AO}{OM}=1\cdot(1+1)=2=\frac{2}{1};\quad \frac{BO}{ON}=1\cdot(1+1)=2=\frac{2}{1}.$$

Таким образом, получаем свойство медиан: отношение отрезков, на которые медианы разбиваются точкой пересечения, равно 2 : 1, считая от вершины.

Задача о пересечении медианы и отрезка, делящего сторону в заданном отношении

Точка N лежит на стороне AC треугольника ABC, причем $AN : NC = 2 : 3$ (рис. 5). Медиана треугольника AM пересекает отрезок BN в точке O. Найдите отношение $BO : ON$.

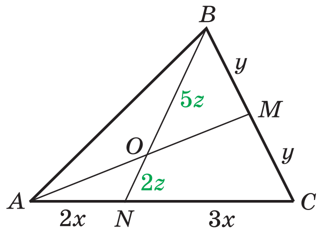


Рис. 5

Согласно формулам (1):

$$\frac{BO}{ON}=\frac{BM}{MC}\left(1+\frac{CN}{NA}\right)$$

(по определению медианы $BM = MC$), по условию $CN : NA = 3 : 2$. Таким образом,

$$\frac{BO}{ON}=1\cdot\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}.$$

Ответ: $BO : ON = 5 : 2$.

Задача о пересечении высоты и биссектрисы в равнобедренном треугольнике

В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) биссектриса AD пересекает высоту BN в точке O и делит ее в отношении $BO : ON = 6 : 5$ (рис. 6). Найдите, в каком отношении биссектриса AD делит сторону BC, и отношение $AO : OD$.

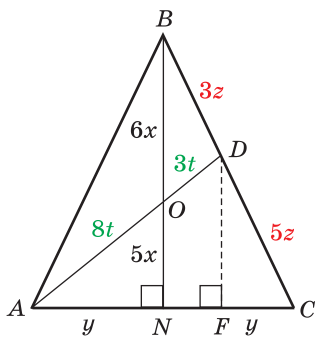


Рис. 6

Решение. Запишем формулы (1), учитывая, что $AN = NC$ (свойство высоты равнобедренного треугольника, проведенной к его основанию):

$$\frac{BO}{ON}=\frac{BD}{DC}\left(1+\frac{CN}{NA}\right),\quad \frac{6}{5}=\frac{BD}{DC}\cdot(1+1),$$

следовательно,

$$BD : DC = 6 : 10 = 3 : 5;$$

$$\frac{AO}{OD}=\frac{AN}{NC}\left(1+\frac{CD}{DB}\right),\ \ \frac{AO}{OD}=1\cdot\left(1+\frac{5}{3}\right),$$

следовательно, $AO : OD = 8 : 3$.

Ответ: $BD : DC = 3 : 5$, $AO : OD = 8 : 3$.

Замечание. Применение формулы (1) позволяет решить данную задачу, не используя свойство биссектрисы угла треугольника. Для сравнения приведем решение этой задачи без использования формулы (1). Так как биссектриса внутреннего угла треугольника ABN делит противолежащую этому углу сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, получаем:

$$\frac{AB}{AN}=\frac{BO}{ON}=\frac{6}{5};$$

учитывая, что $AC = 2AN$, имеем:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{2AN}=\frac{6}{2\cdot 5}=\frac{3}{5}$$

и, следовательно,

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{5}.$$

Для нахождения отношения $AO : OD$ сделаем дополнительное построение: проведем DF параллельно BN. По теореме о пропорциональных отрезках получим: из треугольника ADF

$$\frac{AO}{OD}=\frac{AN}{NF}.$$

Но так как $AN = NC$, то $\frac{AN}{NF}=\frac{NC}{NF}$. Из треугольника BCN

$$\frac{NC}{NF}=\frac{BC}{BD}=\frac{8}{3}$$

и, следовательно, $\frac{AO}{OD}=\frac{8}{3}$.

Ответ: $BD : DC = 3 : 5$, $AO : OD = 8 : 3$.

Задача о двух отрезках в треугольнике, делящихся при пересечении в заданном отношении

В треугольнике ABC точка Q лежит на стороне BC, точка P — на стороне AB. Отрезки AQ и CP, пересекаясь в точке O, делятся этой точкой в отношении $AO : OQ = 3 : 2$, $CO : OP = 4 : 1$ (рис. 7). Найдите, в каком отношении эти отрезки делят стороны треугольника.

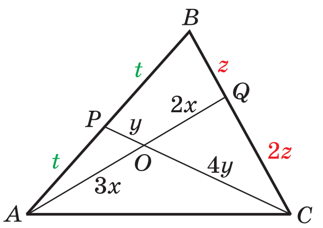


Рис. 7

Решение. Используя формулы (1), запишем:

$$\frac{AO}{OQ}=\frac{AP}{PB}\left(1+\frac{BQ}{QC}\right),\ \ \frac{CO}{OP}=\frac{CQ}{QB}\left(1+\frac{BP}{PA}\right).$$

Подставим отношения, данные в условии задачи: $\frac{3}{2}=\frac{AP}{PB}\left(1+\frac{BQ}{QC}\right)$, следовательно,

$$\frac{BP}{AP}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{BQ}{QC}\right);\ \ \frac{4}{1}=\frac{CQ}{QB}\left(1+\frac{BP}{PA}\right),$$

Таким образом,

$$\frac{BQ}{CQ}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{BP}{PA}\right).\ \ \frac{BQ}{CQ}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{BQ}{QC}\right).$$

После преобразований получаем $\frac{BQ}{QC}=\frac{1}{2}$, тогда

$$\frac{BP}{AP}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{BQ}{QC}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)=1.$$

Ответ: $AP : PB = 1 : 1$, $BQ : QC = 1 : 2$.

Задача о пересечении в одной точке трех отрезков, проведенных из вершин треугольника к противолежащим сторонам

Пусть в треугольнике ABC точки K и M расположены на сторонах BC и AC. Отрезки AK и BM пересекаются в точке O. Проведем через вершину C и точку O прямую, которая пересечет сторону AB в точке N (рис. 8). Найдем, как связаны между собой отношения отрезков, полученных на сторонах треугольника ABC.

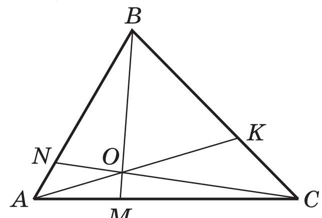


Рис. 8

Решение. В соответствии с формулами (1) запишем отношение $\frac{AO}{OK}$ двумя способами:

$$\frac{AO}{OK}=\frac{AM}{MC}\left(1+\frac{CK}{KB}\right)\ \text{и}\ \frac{AO}{OK}=\frac{AN}{NB}\left(1+\frac{BK}{KC}\right).$$

Приравняем правые части этих выражений:

$$\frac{AM}{MC}\left(1+\frac{CK}{KB}\right)=\frac{AN}{NB}\left(1+\frac{BK}{KC}\right),$$

$$\frac{AM}{MC}\cdot\frac{KB+CK}{KB}=\frac{AN}{NB}\cdot\frac{KC+BK}{KC}.$$

Замечая, что $BK + KC = BC$, имеем

$$\frac{AM}{MC}\cdot\frac{BC}{KB}=\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BC}{KC}.$$

Перенося все отношения в одну сторону, получим

$$\frac{AM}{MC}\cdot\frac{CK}{KB}\cdot\frac{BN}{NA}=1.$$

Полученное соотношение согласуется с теоремой Чевы.

Задача о делении отрезков в параллелограмме

На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки E и F такие, что

$$AE : BE = 3 : 2 \text{ и } AF : DF = 2 : 1$$

(рис. 9). В каком отношении отрезок DE делит отрезок CF?

Решение. Пусть отрезки DE и CF пересекаются в точке O. Определим отношение $\dfrac{CO}{OF}$.

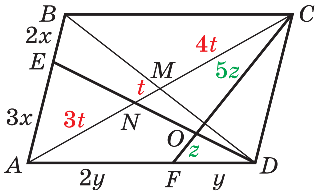


Рис. 9

Проведем диагонали параллелограмма, причем M — точка пересечения диагоналей, N — точка пересечения диагонали AC с отрезком DE.

Отношение $\dfrac{CO}{OF}$ можно определить по формуле (1) из треугольника ACD:

$$\frac{CO}{OF}=\frac{CN}{NA}\left(1+\frac{AF}{FD}\right).$$

Здесь неизвестным является отношение $\dfrac{CN}{NA}$. Определим его по формуле (1) из треугольника ABD: $\dfrac{AN}{NM}=\dfrac{AE}{EB}\left(1+\dfrac{BM}{MD}\right)$. По свойству диагоналей параллелограмма $BM=MD$, следовательно, $\dfrac{AN}{NM}=\dfrac{3}{2}\cdot(1+1)=\dfrac{3}{1}$. Пусть $NM=t$, $AN=3t$, тогда $AM=4t$. По свойству диагоналей параллелограмма $AM=MC$, следовательно, $MC=4t$, отсюда

$$\frac{CN}{NA}=\frac{CM+MN}{NA}=\frac{5t}{3t}=\frac{5}{3}.$$

Окончательно:

$$\frac{CO}{OF}=\frac{CN}{NA}\left(1+\frac{AF}{FD}\right)=\frac{5}{3}\cdot\left(1+\frac{2}{1}\right)=\frac{5}{1}.$$

Ответ: $CO : OF = 5 : 1$.

Задача о нахождении отношения площадей

В треугольнике ABC прямая AM ($M \in BC$) пересекает BC в отношении $CM : MB = 3 : 2$. Прямая CN ($N \in AB$) пересекает AM в точке O и делит ее в отношении $AO : OM = 5 : 1$ (рис. 10). Найдите площадь треугольника ABC, если площадь четырехугольника $NBMO$ равна 6.

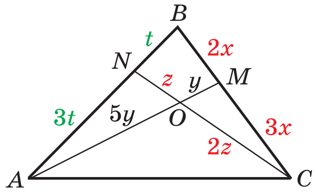


Рис. 10

Решение. Пусть $S_{ABC}=a$. Выразим площадь четырехугольника $NBMO$ как разность двух треугольников:

$$S_{NOMB}=S_{ABM}-S_{ANO}.$$

Отметим, что отношение площадей треугольников, имеющих общую высоту, равно отношению оснований. Следовательно,

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}}=\frac{BM}{BC}=\frac{2}{5},$$

откуда $S_{ABM}=\dfrac{2}{5}a$. Треугольник ANO — часть треугольника ANC, поэтому отношение их площадей равно отношению $NO : CN$. По формулам (1):

$$\frac{CO}{ON}=\frac{CM}{MB}\left(1+\frac{BN}{NA}\right),\quad \frac{CO}{ON}=\frac{3}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{1}.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{ANO}}{S_{ANC}}=\frac{NO}{NC}=\frac{1}{3},$$

тогда

$$S_{ANO}=\frac{1}{3}S_{ANC};$$

$$\frac{S_{ANC}}{S_{ABC}}=\frac{AN}{AB}=\frac{3}{4},$$

тогда

$$S_{ANC}=\frac{3}{4}a \text{ и } S_{ANO}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot a=\frac{1}{4}a.$$

Таким образом,

$$S_{NOMB}=S_{ABM}-S_{ANO}=\frac{2}{5}a-\frac{1}{4}a=\frac{3}{20}a.$$

По условию $S_{NOMB}=6$, следовательно, $\dfrac{3}{20}a=6$ и $a=40$.

Ответ: площадь треугольника ABC равна 40.

Задача о нахождение отношения площадей

На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1 и B_1 так, что $AC_1 : C_1B = 2 : 1$, $BA_1 : A_1C = 3 : 2$, $AB_1 : B_1C = 1 : 1$.

Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_2B_2C_2$, вершинами которого являются точки пересечения отрезков AA_1, BB_1, CC_1 (рис. 11).

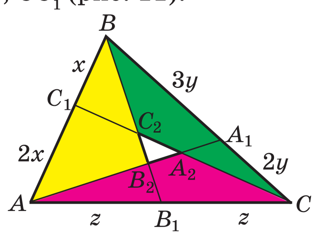


Рис. 11

Решение. Выразим площадь треугольника $A_2B_2C_2$ в виде разности:

$$S_{A_2B_2C_2}=S_{ABC}-S_{ABB_2}-S_{BCC_2}-S_{AA_2C}.$$

Представляя отношение площадей треугольников, имеющих общую высоту, как отношение оснований, запишем:

$$S_{ABB_2}=\frac{BB_2}{BB_1}\cdot S_{ABB_1}=\frac{BB_2}{BB_1}\cdot\frac{AB_1}{AC}\cdot S_{ABC};$$

$$S_{BCC_2}=\frac{BC_2}{BB_1}\cdot S_{BCB_1}=\frac{BC_2}{BB_1}\cdot\frac{CB_1}{CA}\cdot S_{ABC};$$

$$S_{AA_2C}=\frac{CA_2}{CC_1}\cdot S_{AC_1C}=\frac{CA_2}{CC_1}\cdot\frac{AC_1}{AB}\cdot S_{ABC}.$$

Из условия задачи: $\left(\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{2}{1},\ \frac{AB_1}{B_1C}=\frac{1}{1}\right)$, следует, что

$$\frac{AC_1}{AB}=\frac{2}{3},\quad \frac{AB_1}{AC}=\frac{1}{2},\quad \frac{CB_1}{CA}=\frac{1}{2}.$$

Определим $\frac{BB_2}{BB_1}$, $\frac{BC_2}{BB_1}$ и $\frac{CA_2}{CC_1}$, находя отношения отрезков внутри треугольника ABC, по формулам (1):

$$\frac{BB_2}{B_2B_1}=\frac{BA_1}{A_1C}\left(1+\frac{CB_1}{B_1A}\right)=\frac{3}{2}\cdot(1+1)=\frac{3}{1},$$

следовательно, $\frac{BB_2}{BB_1}=\frac{3}{4}$;

$$\frac{BC_2}{C_2B_1}=\frac{BC_1}{C_1A}\left(1+\frac{AB_1}{B_1C}\right)=\frac{1}{2}\cdot(1+1)=\frac{1}{1},$$

следовательно, $\frac{BC_2}{BB_1}=\frac{1}{2}$;

$$\frac{CA_2}{A_2C_1}=\frac{CA_1}{A_1B}\left(1+\frac{BC_1}{C_1A}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1},$$

следовательно, $\frac{CA_2}{CC_1}=\frac{1}{2}$.

Таким образом,

$$S_{AB_2B}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot S_{ABC}=\frac{3}{8}S_{ABC},$$

$$S_{BCC_2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot S_{ABC}=\frac{1}{4}S_{ABC},$$

$$S_{AA_2C}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot S_{ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}.$$

Отсюда следует:

$$S_{A_2B_2C_2}=S_{ABC}-S_{ABB_2}-S_{BCC_2}-S_{AA_2C}=$$

$$=S_{ABC}-\frac{3}{8}S_{ABC}-\frac{1}{4}S_{ABC}-\frac{1}{3}S_{ABC}=\frac{1}{24}S_{ABC}.$$

Ответ: отношение площади треугольника ABC к площади треугольника $A_2B_2C_2$ равно 24 : 1.

КАК СТАТЬ АВТОРОМ ГАЗЕТЫ «МАТЕМАТИКА»?

Сделать это несложно: надо лишь написать статью и прислать ее в редакцию газеты. И еще одно условие — она должна быть интересна и полезна вашим коллегам.

Требования к оформлению статьи таковы:

Материал должен быть либо напечатан, на компьютере или на пишущей машинке.

Рисунки должны быть четкими, аккуратными, выполненными на белой нелинованной или клетчатой бумаге с помощью чертежных инструментов. Если вы хорошо владеете компьютером, можете воспользоваться для этого программой Corel Draw.

Рисунки надо пронумеровать, нумерация должна соответствовать их нумерации в тексте.

Фотографии могут быть цветными или черно-белыми. Формат фотографий, отпечатанных на бумаге, не менее 10 × 15 см. Размер цифровых фотографий не менее 800 × 600 пикселей, формат JPG, качество, используемое при сохранении JPG-файлов, высокое (high).

Прислать статью можно по почте или по электронной почте. Всю необходимую для этого информацию вы найдете на странице 2 газеты.

Для выплаты гонорара необходимо заполнить авторскую карточку.

Приглашаем вас
к сотрудничеству и желаем удачи!

Данные автора

Фамилия		
Имя		
Отчество		
Дата рождения		
Место рождения		
Паспорт		
Серия	№	Когда выдан
Кем выдан		
Адрес прописки		
Индекс	город	
Улица		
Дом	корпус	квартира
Адрес проживания		
Индекс	город	
Улица		
Дом	корпус	квартира
Телефон		
Номер пенсионного страхового свидетельства		
ИНН (можно не указывать)		

Лицензия Департамента образования г. Москвы 77 № 000349, рег. № 027477 от 15.09.2010

Педагогический университет «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»

модульные курсы «НАВЫКИ ЛИЧНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ»

Достаточно ли педагогу только знаний в своей предметной области для ощущения своей профессиональной компетентности? Конечно, нет. Ведь учитель не простой транслятор информации. Ежедневно ему приходится решать еще множество задач: вести диалог с учащимися, создавать у них положительную мотивацию на активное усвоение учебного материала, разрешать конфликтные ситуации, выстраивать отношения с коллегами и родителями детей и др. Как правило, мы привыкли решать эти задачи интуитивно, методом проб и ошибок, опираясь на свой опыт. Но к настоящему времени в смежных областях знаний накоплен достаточно большой арсенал средств, которые помогают любому специалисту справляться с различными проблемами более эффективно и с меньшими затратами сил. А главное, с наименьшими потерями для своего психологического состояния – без стрессов, депрессий, нервного напряжения. Но всем этим методам не учат в педагогических вузах. Их можно почерпнуть только из каких-то дополнительных источников. Сейчас совершенно очевидно, что каждый высококвалифицированный специалист нуждается еще и в знаниях из области психологии, менеджмента, экономики, информационных технологий и др.

Все процессы, которые происходят в нашей жизни, тесно связаны и влияют друг на друга. Конфликтная ситуация на работе может сказаться на отношениях в семье, а проблемы в личной жизни отражаются на успешности в профессиональной деятельности. Любая проблемная ситуация сопровождается определенными переживаниями (обида, злость, разочарование и т.п.), что может привести к проблемам со здоровьем. Если человек владеет навыками разрешения таких ситуаций, то он их успешно преодолевает, становится сильнее, если не умеет разобраться в себе и возникшей проблеме – испытывает чувство беспомощности и разочарования в себе и других.

В этом году нашими авторами подготовлены **модульные курсы**, которые напрямую не связаны с профессиональной деятельностью педагогов, но косвенно, опосредованно помогут им повысить свою профессиональную компетентность и качество жизни в целом.

Все модульные курсы можно объединить одной общей темой – **«Навыки личной эффективности»**. В результате изучения этих материалов вы получите новые знания и умения, которые позволят вам:

- **лучше понять себя и других людей;**
- **увидеть причины возникновения стрессовых состояний и преодолеть их последствия;**
- **понять психологические причины возникновения различных заболеваний и сохранить свое здоровье;**
- **построить конструктивные отношения с учащимися и их родителями, коллегами и администрацией, с друзьями и близкими;**
- **оптимизировать свою деятельность, распределяя все дела таким образом, чтобы успевать выполнить все, что запланировано;**
- **создать свой имидж и построить презентацию на уроке;**
- **освоить методы самоподдержки в проблемных жизненных ситуациях и др.**

Авторы модульных курсов предлагают большой объем практических рекомендаций, которые позволят каждому слушателю освоить предложенные методы и технологии.

Перечень модульных курсов, которые подготовлены или планируется разработать в этом году:

1. **Тайм-менеджмент** *(навыки управления временем).*
2. **Тайм-менеджмент для детей** *(как научить детей рационально распределять свое время).*
3. **Профессиональное выгорание.**
4. **Стресс-менеджмент** *(как преодолеть стрессовые ситуации).*
5. **Как выиграть в конфликте?** *(навыки эффективного поведения в конфликтной ситуации).*
6. **Как противостоять психологическому давлению?**
7. **Как сохранить свое здоровье?**
8. **Имидж и самопрезентация.**
9. **Искусство договариваться** *(как понять других людей и донести свою точку зрения).*
10. **Навыки работы на компьютере** *(для начинающих).*

Нормативный срок освоения каждого модуля – 6 часов. Начать обучение на модульном курсе можно в любой момент. Для этого необходимо подать заявку, оформить весь пакет документов и оплатить обучение. После этого каждый слушатель получает учебные материалы. Если по окончании вы успешно выполните контрольную работу, то вам будет выслан сертификат об освоении модуля. Все материалы интересны и содержат много практических рекомендаций, поэтому могут послужить такой «настольной книгой» для каждого человека, у которого есть потребность и желание заниматься самообразованием и качественно изменить свою жизнь.

В прошлом году Педагогический университет «Первое сентября» получил новую лицензию (77 № 000349, рег. № 027477 от 15.09.2010).

Подать заявку на модуль можно на сайте Педагогического университета «Первое сентября»: **http://edu.1september.ru**

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

ЗАДАЧА B9— СТЕРЕОМЕТРИЯ

С. ДВОРЯНИНОВ

Напоминаем!
Задача B9 части 1 оценивается 1 первичным баллом (из 30 возможных).

Часть B Единого государственного экзамена содержит задачи по курсу геометрии, в частности, **стереометрические**.

Задание B9 — это задача на умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами. При этом, может, потребуются и алгебраические умения: преобразование выражений, решение уравнений и систем уравнений.

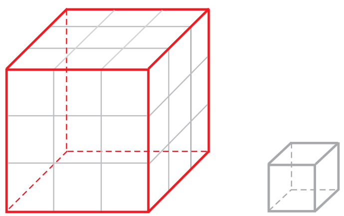
Обычно в этих задачах количество уравнений меньше, чем количество неизвестных, и поэтому найти *все* неизвестные величины невозможно. Обратите внимание: в таких задачах требуется найти *отношение* величин или же какую-либо их алгебраическую *комбинацию*.

Напомним **основные формулы.**

Тело	**Объем**, ед.^{3}	**Площадь боковой поверхности**, ед.^{2}
Правильная пирамида	$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h$	$S_{бок}=\frac{1}{2}P\cdot a$
Прямая призма	$V=S_{осн}\cdot h$	$S_{бок}=Ph$
Цилиндр	$V=\pi R^2\cdot h$	$S_{бок}=\pi R^2$
Конус	$V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot h$	$S_{бок}=\pi RL$
Шар	$V=\frac{4}{3}\pi R^3$	$S=4\pi R^2$

Пример 1. Во сколько раз увеличится:

а) объем куба, если его ребро увеличить в 3 раза;



б) объем конуса, если его высоту увеличить в 3 раза;

в) объем конуса, если его радиус основания увеличить в 1,5 раза;

больше объема первой. Найдите высоту второй пирамиды. Ответ дайте в см.

Решение. Основанием правильной четырехугольной пирамиды является квадрат. Объем пирамиды вычисляется по формуле $V=\frac{1}{3}S\cdot h$. Заполним таблицу:

Пирамида	I	II
Высота, см	60	h
Сторона основания, см	a	$4a$
Объем, см^3	$V_1=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot 60$	$V_2=\frac{1}{3}\cdot(4a)^2\cdot h$

Варианты вопроса:

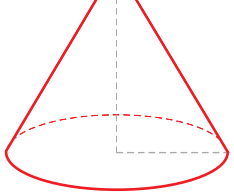
— Во сколько раз объем одной пирамиды больше объема другой?

Ответ: 2,25.

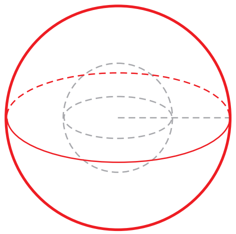
— На сколько процентов объем одной пирамиды больше объема другой пирамиды?

Ответ: 125.

Пример 4. Объем первого цилиндра равен 36 м^3. У второго цилиндра высота в три раза меньше, чем у первого. Площадь боковой поверхности первого цилиндра в два раза больше, чем второго. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.



г) площадь поверхности шара, если его радиус увеличить в 2 раза?



Решение. а) Если ребро куба равнялось a, то ребро нового куба будет равно $3a$. Подставим это значение в формулу для вычисления объема куба:

$$V_2 = (3a)^3 = 27a^3 = 27V_1.$$

б) Высота нового конуса будет равняться $3h$, отсюда:

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 3h = 3V_1.$$

в) Аналогично,

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot (1,5R)^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot (1,5)^2 R^2 \cdot h = 2,25V_1.$$

г) Аналогично,

$$S_2 = 4\pi(2R)^2 = 4S_1.$$

Ответ: а) в 27 раз; б) в 3 раза; в) в 2,25 раза; г) в 4 раза.

Пример 2. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 60 см. Сторона основания второй правильной четырехугольной пирамиды в 4 раза больше стороны основания первой пирамиды, а объем в 2 раза

Из условия задачи известно, что $V_2 = 2V_1$, то есть

$$\frac{1}{3}\cdot(4a)^2 \cdot h = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot a^2 \cdot 60.$$

Из этого уравнения с *двумя* неизвестными находим интересующую нас высоту

$$h = \frac{2\cdot 60}{16} = 7,5 \text{ см}.$$

Число 7,5 следует записать в бланк ответов.

Ответ: 7,5 см.

Пример 3. Сторона основания правильной треугольной пирамиды в три раза больше стороны основания правильной шестиугольной пирамиды, а ее высота в полтора раза больше высоты шестиугольной пирамиды. Объем шестиугольной пирамиды равен 12 дм^3. Найдите объем треугольной пирамиды. Ответ дайте в дм^3.

Решение. Сначала сравним площади оснований двух пирамид.

Площадь правильного треугольника со стороной a вычисляется по формуле $S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Площадь правильного шестиугольника со стороной b — $S_6 = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$. Если $a = 3b$, то

$$S_3 : S_6 = \frac{\sqrt{3}}{4}(3b)^2 : \frac{3\sqrt{3}}{2}b^2 = \frac{3}{2}.$$

$$V_3 : V_6 = \frac{1}{3}S_3h_3 : \frac{1}{3}S_6h_6 =$$

$$= \frac{S_3h_3}{S_6h_6} = \frac{1,5S_6\cdot 1,5h_6}{S_6h_6} = 2,25.$$

Откуда

$$V_3 = 2,25V_6 = 2,25\cdot 12 = 27 \text{ дм}^3.$$

В бланк ответа следует внести число 27.

Ответ: 27 дм^3.

Решение. В соответствии с условием задачи заполним таблицу:

Цилиндр	I	II
Высота, м	$3h$	h
Радиус основания, м	R_1	R_2
Площадь боковой поверхности, м^2	$2S$	S
Объем, м^3	36	$V_2 = \pi\cdot R_2^2\cdot h$

Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту. Сравнение боковых поверхностей цилиндров приводит к уравнению

$$2\pi R_1 \cdot 3h = 2\cdot(2\pi R_2 \cdot h).$$

Следовательно,

$$R_1 = \frac{2}{3}R_2.$$

Нам известен объем первого цилиндра:

$$\pi\left(\frac{2}{3}R_2\right)^2 \cdot 3h = 36.$$

Отсюда находим, что

$$\pi\cdot R_2^2\cdot h = 36 : \left(\frac{4}{9}\cdot 3\right) = \frac{36\cdot 3}{4} = 27.$$

Это и есть объем второго цилиндра в кубических метрах. В бланк ответов следует записать число 27.

Ответ: 27 м^3.

ИНДЕКСЫ ПОДПИСКИ | Почта России - 79083 (инд.); - 79584 (орг.) | Роспечать - 32031 (инд.); - 32598 (орг.)

годовая подшивка газеты «МАТЕМАТИКА» на компакт-диске

ПОЛНАЯ ПОДБОРКА МАТЕРИАЛОВ ЗА 2010 ГОД

ПОВТОРНЫЙ ТИРАЖ ПОДШИВКИ ЗА 2009 ГОД

А ТАКЖЕ ТЕМАТИЧЕСКИЕ СБОРНИКИ И ПОДШИВКИ ДРУГИХ ГАЗЕТ ИД «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»

Удобная система навигации и поиска: материалы можно выбрать по тематике, рубрике или по номеру газеты.

Для пользователей любого уровня: включи и работай — не требуются инсталляция и место на винчестере.

Компакт-диск пригоден для работы на компьютерах даже устаревшей конфигурации (Windows-95 и выше).

Стоимость диска включает доставку. Рассылка производится только на территории РФ.

КУПОН — ЗАПОЛНЯЕТСЯ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ!

ФАМИЛИЯ
ИМЯ
ОТЧЕСТВО
ИНДЕКС — АДРЕС

Цена за один диск с доставкой	2003 г. 299 руб.	2004 г. 299 руб.	2005 г. 299 руб.	2006 г. 299 руб.	2007 г. 399 руб.	2008 г. 399 руб.	2009 г. 499 руб.	2010 г. 699 руб.
Английский язык	x	x	x	x	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.
Библиотека в школе	x	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.
Биология	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.
География	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.
Дошкольное образование	x	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.
Здоровье детей	x	x	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.
Информатика	x	x	x	x	x	x	x	___ шт.
Искусство	x	x	x	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.
История	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.
Классное руководство и воспитание школьников	x	x	x	x	x	___ шт.	___ шт.	___ шт.
Литература	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.
Математика	x	x	x	x	x	x	___ шт.	___ шт.
Начальная школа	x	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.
Немецкий язык	x	x	x	x	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.
Русский язык	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.
Спорт в школе	x	x	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.
Управление школой	x	x	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.
Химия	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.
Физика	x	x	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.
Французский язык	x	x	x	x	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.
Школьный психолог	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.	___ шт.

ЭТИ ДИСКИ МОЖНО ПРИОБРЕСТИ:

- заполнив купон и отправив его в конверте с пометкой «Книга — почтой» по адресу: **ИД «Первое сентября», ул. Киевская, д. 24, г. Москва, 121165**
- заказав по телефону: **(499) 249-47-58**
- заказав по электронной почте: **podpiska@1september.ru**
- заказав на сайте: **www.1september.ru**

ТЕМАТИЧЕСКИЕ СБОРНИКИ

Цена за один диск с доставкой – 399 руб.

Газета «Начальная школа»
«50 лет системе Л.В. Занкова» ___ шт.

«1001 ёлка на Новый год» ___ шт.

Газета «Школьный психолог»
«Тренинг в теории и на практике» ___ шт.

Газета «Школьный психолог»
«Тест со всех сторон» ___ шт.

Газета «Литература»
«Консультации по темам экзаменационных сочинений» ___ шт.

Цены действительны до 31 августа 2011 года

Н. БЕССАРАБОВ,
В. ЗЯБЛИН,
г. Новочеркасск

ТРИ СПОСОБА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С5

Готовясь к методическому семинару по решению задач части С ЕГЭ, который традиционно проводится в Южно-Российском государственном техническом университете (Новочеркасском политехническом институте) для учителей школ г. Новочеркасска и преподавателей системы довузовской подготовки университета, авторы обратили внимание на задачу С5, предлагавшуюся на ЕГЭ в июне 2010 г.

Задача С5. Найти все значения a, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 10x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

Задачи с параметром традиционно включаются в задания части С ЕГЭ и относятся к числу наиболее сложных заданий. В прежние годы это были уравнения или неравенства с параметром с заданными дополнительными условиями.

В данной же задаче предлагается исследовать на экстремум функцию, содержащую модуль и зависящую от параметра. Ниже предлагается три способа решения этой задачи.

Первый способ использует стандартную процедуру исследования функции на экстремум методами дифференциального исчисления в нестандартной ситуации, которая заключается в том, что:

а) производная $f'(x)$ является разрывной кусочно-линейной функцией, график которой состоит из двух параллельных лучей;

б) точка разрыва $x = a^2$ линейных частей производной является критической точкой и зависит от параметра. Это требует некоторого внимания и аккуратности при определении числа критических точек и исследовании их характера при различных значениях параметра a.

Второй способ использует понятие координатно-параметрической плоскости. Такой подход при решении задач с параметром во многих случаях является наиболее эффективным. В данной задаче используется понятие «критической линии» — геометрического места точек координатно-параметрической плоскости, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует. Это позволяет найти набор критических точек при различных значениях параметра a и исследовать их характер.

Третий способ использует элементарные методы исследования функции, основанные на свойствах квадратного трехчлена.

Нестандартность ситуации заключается в том, что приходится исследовать кусочно-квадратичную функцию, график которой получается путем «склейки» двух парабол, ветви которых направлены вверх, а вершины перемещаются по параллельным прямым $x = 4$ и $x = 6$ в разные стороны.

Способ I. Исследуем функцию $f(x)$ на экстремум. При любом значении параметра a $D(f) = \boldsymbol{R}$, функция $f(x)$ является непрерывной, как разность непрерывных функций $u_1(x) = x^2 - 10x$ и $u_2(x) = 2 \cdot |x - a^2|$.

Функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ имеют вид:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-8x-2a^2, \text{ если } x-a^2<0, \\ x^2-12x+2a^2, \text{ если } x-a^2\ge 0; \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-8, \text{ если } x<a^2, \\ 2x-12, \text{ если } x\ge a^2. \end{cases}$$

Находим критические точки. Производная равна нулю при $x = 4$, если $x < a^2$ ($a^2 > 4$), и $x = 6$, если $x \ge a^2$ ($a^2 \le 6$). Покажем, что точка $x = a^2$ также является критической, так как производная $f'(x)$ не существует в этой точке.

Действительно, для существования производной в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы существовали и совпадали левая и правая производные:

$$f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0) = f'(x_0),$$

если $f'(x_0 - 0) \ne f'(x_0 + 0)$, то $f'(x_0)$ не существует. В нашем случае

$$f'(a^2 - 0) = 2a^2 - 8,$$
$$f'(a^2 + 0) = 2a^2 - 12.$$

Так как $2a^2 - 8 \ne 2a^2 - 12$, то $f'(a^2)$ не существует, следовательно, точка $x = a^2$ является критической.

Заметим, что запись вида

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-8, \text{ если } x-a^2<0, \\ 2x-12, \text{ если } x-a^2\ge 0 \end{cases}$$

является ошибочной, так как $f'(x)$ не существует в точке $x = a^2$.

Расставим знаки производной:

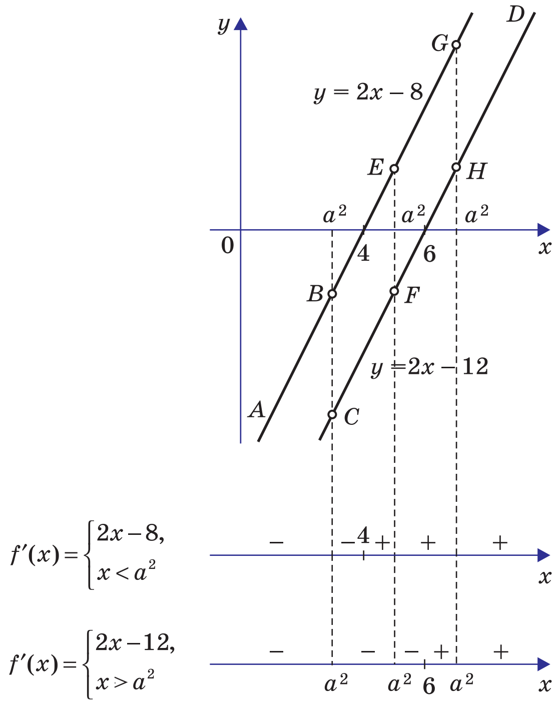


Рис. 1

Исследуем характер критических точек при различных значениях a.

При $a^2 < 4$ $f'(x)=\begin{cases} 2x-8, \text{ если } x<a^2, \\ 2x-12, \text{ если } x>a^2. \end{cases}$

Графиком производной являются лучи AB и CD. Имеем две критические точки: $x = a^2$ и $x = 6$ (точка $x = 4$ не удовлетворяет условию $x < a^2$). При переходе через точку $x = a^2$ (рис. 1) производная $f'(x)$ знака не меняет (она отрицательна), то есть точка $x = a^2$ не является точкой экстремума; при переходе через точку $x = 6$, производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс (точка $x = 6$ является точкой минимума).

При $a^2 = 4$ $f'(x)=\begin{cases} 2x-8, \text{ если } x<4, \\ 2x-12, \text{ если } x>4. \end{cases}$

Имеем две критические точки: $x = 4$, $x = 6$. При переходе через точку $x = 4$ $f'(x)$ знака не меняет, при переходе через точку $x = 6$ $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, точка $x = 6$ является точкой минимума.

Если $4 < a^2 < 6$, то графиком производной являются лучи AE и FD. Имеем три критические точки: $x = 4$, $x = a^2$, $x = 6$. При переходе через точку $x = 4$ (см. рис. 1) производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс (точка $x = 4$ является точкой минимума); при переходе через точку $x = a^2$ производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус (точка $x = a^2$ является точкой максимума); при переходе через точку $x = 6$ производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс (точка $x = 6$ является точкой минимума).

При $a^2 = 6$ $f'(x)=\begin{cases} 2x-8, \text{ если } x<6, \\ 2x-12, \text{ если } x>6. \end{cases}$

Имеем две критические точки: $x = 4$, $x = 6$. При переходе через точку $x = 4$ $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, точка $x = 4$ является точкой минимума; при переходе через точку $x = 6$ производная знака не меняет, точка $x = 6$ не является точкой экстремума.

Если $a^2 > 6$, то графиком производной являются лучи AG и HD. Имеем две критические точки: $x = 4$ и $x = a^2$ ($x = 6$ не удовлетворяет условию $x > a^2$). При переходе через точку $x = 4$ (см. рис. 1) производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс (точка $x = 4$ является точкой минимума); при переходе через точку $x = a^2$ производная $f'(x)$ знака не меняет, то есть точка $x = a^2$ не является точкой экстремума.

Таким образом, функция $f(x)$ имеет точку максимума при условии

$$4 < a^2 < 6 \Leftrightarrow 2 < |a| < \sqrt{6}.$$

Ответ: $2 < |a| < \sqrt{6}$.

Способ II. Пусть дано выражение $f(x;\ a)$, зависящее от переменной x и параметра a. Точку $(x_0;\ a_0)$ координатно-параметрической плоскости назовем критической, если при значении параметра $a = a_0$ точка $x = x_0$ является критической точкой функции $f(x_0;\ a_0)$. Критическими линиями будем называть геометрическое место критических точек на координатно-параметрической плоскости. В общем случае критическая линия представляет собой прямые, лучи, отрезки прямых, кривые линии и изолированные точки. Если функция содержит модули, то точки, в которых выражения под модулями обращаются в ноль, могут быть критическими.

Пусть $u(x;\ a) = x - a^2$. Как было показано выше, точки, удовлетворяющие уравнению $u(x;\ a) = 0$, являются критическими.

Графиком уравнения $x = a^2$ является парабола, симметричная относительно Ox, ветви которой направлены вправо, а вершина совпадает с началом координат (рис. 2).

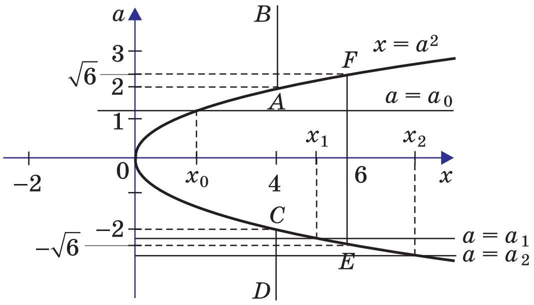


Рис. 2

Парабола разбивает координатно-параметрическую плоскость на две области, в каждой из которых выражение $u(x;\ a) = x - a^2$ сохраняет определенный знак. Выбирая пробную точку (4; 0), находим $u(4;\ 0) = 4 > 0$, следовательно, в области, заключенной между ветвями параболы $u(x;\ a) > 0$. Выбрав пробную точку (–2; 0), имеем $u(-2;\ 0) = -2 < 0$, следовательно, в области, расположенной слева от параболы $u(x;\ a) < 0$.

Рассмотрим производную

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 8, & x - a^2 < 0, \\ 2x - 12, & x - a^2 > 0. \end{cases}$$

Приравнивая производную к нулю, получаем критические линии на координатно-параметрической плоскости: $x = 4$, $|\,a\,| > 2$, если $u(x;\ a) < 0$ (лучи AB и CD, см. рис. 2), и $x = 6$, $|\,a\,| < \sqrt{6}$, если $u(x;\ a) > 0$ (интервал EF). Заметим, что парабола $x = a^2$ также представляет собой критическую линию. Исследуем характер критических точек при различных значениях параметра a.

Пусть $|\,a\,| < 2$.

Проведем линию $a = a_0$, $|\,a_0\,| < 2$ (см. рис. 2). Она пересекает критические линии в двух точках с абсциссами x_0 и 6, а функция $f(x)$ имеет две критические точки: $x = x_0$ и $x = 6$, где $|\,x_0 = a_0^2 < 4$. Производная и ее знаки имеют вид

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 8, & x < x_0, \\ 2x - 12, & x > x_0. \end{cases}$$

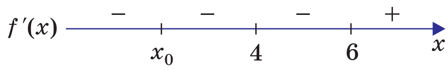


Рис. 3

При переходе через точку $x = x_0$ производная $f\,'(x)$ знак не меняет (рис. 3), следовательно, в точке $x = x_0$ экстремума нет;

при переходе через точку $x = 6$ производная $f\,'(x)$ изменяет свой знак с минуса на плюс, следовательно, точка $x = 6$ является точкой минимума.

Пусть $2 < |\,a\,| < \sqrt{6}$.

Проводим линию $a = a_1$, $2 < |\,a_1\,| < \sqrt{6}$. Она пересекает критические линии в трех точках с абсциссами $x = 4$, $x = x_1\left(x_1 = a_1^2,\ 4 < x_1 < 6\right)$ и $x = 6$.

Производная функции $f\,'(x)$ и ее знаки имеют вид:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 8, & x < x_1, \\ 2x - 12, & x > x_1. \end{cases}$$

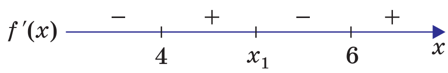


Рис. 4

При переходе через точки $x = 4$ и $x = 6$ производная $f\,'(x)$ изменяет знак с минуса на плюс (рис. 4), следовательно, точки $x = 4$ и $x = 6$ являются точками минимума; при переходе через точку $x = x_1$ производная $f\,'(x)$ изменяет знак с плюса на минус, следовательно, точка $x = x_1$ является точкой максимума.

Пусть $|\,a\,| > \sqrt{6}$.

Проводим линию $a = a_2$, $|\,a_2\,| > \sqrt{6}$. Она пересекает критические линии в двух точках с абсциссами $x = 4$ и $x = x_2\left(x_2 = a_2^2,\ x_2 > 6\right)$.

Производная функции $f\,'(x)$ и ее знаки имеют вид

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 8, & x < x_2, \\ 2x - 12, & x > x_2. \end{cases}$$

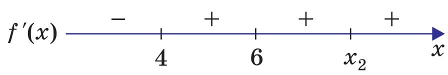


Рис. 5

При переходе через точку $x = 4$ производная $f\,'(x)$ изменяет знак с минуса на плюс (рис. 5), следовательно, точка $x = 4$ является точкой минимума; при переходе через точку $x = x_2$ производная $f\,'(x)$ знак не меняет, следовательно, в точке $x = x_2$ экстремума нет.

Способ III. При любом $a \in \boldsymbol{R}$ $D(f) = \boldsymbol{R}$, функция $f(x)$ является непрерывной и имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x - 2a^2, & x < a^2, \\ x^2 - 12x + 2a^2, & x \ge a^2. \end{cases}$$

Графиком функции

$$f_1(x) = x^2 - 8x - 2a^2$$

является семейство парабол

$$y_1 = (x - 4)^2 - 16 - 2a^2,$$

симметричных относительно прямой $x = 4$, ветви которых направлены вверх, а вершина смещается с ростом $|a|$ из точки $(4; -16)$ вниз по оси симметрии. Функция $f_1(x)$ убывает при $x < 4$ и возрастает при $x > 4$.

Графиком функции

$$f_2(x) = x^2 - 12x + 2a^2$$

является семейство парабол

$$y_2 = (x - 6)^2 - 36 + 2a^2,$$

симметричных относительно прямой $x = 6$, ветви которых направлены вверх, а вершина смещается с ростом $|a|$ из точки $(6; -36)$ вверх по оси симметрии. Функция $f_2(x)$ убывает при $x < 6$ и возрастает при $x > 6$.

При значениях $0 < a^2 < 5$ вершина левой параболы расположена выше вершины правой:

$$y_{01} = -16 - 2a^2 > y_{02} = -36 + 2a^2,$$

при значениях $a^2 > 5$ вершина левой параболы расположена ниже вершины правой

$$y_{01} < y_{02}.$$

Графиком функции $f(x)$ при некотором значении параметра a является кривая, состоящая из точек левой параболы, расположенных левее прямой $x = a^2$, и точек правой параболы, расположенных правее прямой $x = a^2$ (рис. 6–8).

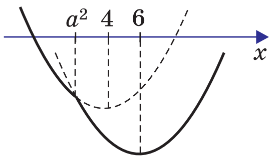


Рис. 6

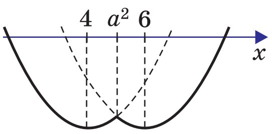


Рис. 7

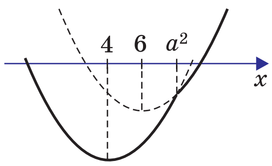


Рис. 8

Так как при любом значении параметра a функция $f(x)$ является непрерывной, то параболы «склеиваются» в точке $(a^2; f(a^2))$. Геометрическое место точек «склейки» парабол является кривой, параметрическое уравнение которой имеет вид

$$\begin{cases} x = a^2, \\ y = a^4 - 10a^2, \ a \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

Эта кривая представляет собой часть параболы $y = x^2 - 10x$, расположенной в правой полуплоскости ($x \geq 0$). Следовательно, при $0 < a^2 < 10$ «склейка» парабол происходит ниже оси Ox, а при $a^2 > 10$ — выше.

Возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках 6–8.

Если $a^2 < 4$, то точкой «склейки» является точка пересечения левых ветвей парабол; при этом вершина правой параболы расположена ниже вершины левой (рис. 6), поэтому $f(x)$ является убывающей как при $x < a^2$, так и при $a^2 < x < 6$; точка $x = 6$ является точкой минимума, точек максимума функция $f(x)$ не имеет.

Если $a^2 = 4$, то «склейка» графиков происходит в вершине левой параболы (в этом легко убедиться, подставив координаты ее вершины $(4; -24)$ в уравнение правой параболы $y_2 = (x - 6)^2 - 28$); при этом вершина правой параболы расположена ниже, поэтому функция $f(x)$ является убывающей как при $x < 4$, так и при $4 < x < 6$; точка $x = 6$ является точкой минимума, точек максимума функция $f(x)$ не имеет.

Если $4 < a^2 < 6$ (рис. 7), то точкой «склейки» является точка пересечения правой ветви левой параболы и левой ветви правой параболы, то есть при $4 < x < a^2$ $f(x)$ возрастает, а при $a^2 < x < 6$ $f(x)$ убывает. Точка $x = a^2$ является точкой максимума, точки $x = 4$ и $x = 6$ — точки минимума.

Если $a^2 = 6$, то «склейка» парабол происходит в вершине правой параболы $(6; -20)$, при этом вершина левой параболы $(4; -28)$ расположена ниже. Следовательно, функция $f(x)$ является возрастающей как при $4 < x < 6$, так и при $x > 6$, то есть в точке $x = 6$ экстремума нет. Точка $x = 4$ является точкой минимума, точек максимума функция $f(x)$ не имеет.

Если $a^2 > 6$, то точкой «склейки» является точка пересечения правых ветвей парабол, при этом вершина левой параболы расположена ниже вершины правой параболы (рис. 8); функция $f(x)$ является возрастающей как при $4 < x < a^2$, так и при $x > a^2$, то есть точка $x = a^2$ не является точкой экстремума. Точка $x = 4$ является точкой минимума.

Таким образом, функция $f(x)$ имеет единственную точку максимума при $4 < a^2 < 6$, то есть

$$2 < |a| < \sqrt{6}.$$

Ответ: $a \in \left(-\sqrt{6}; -2\right) \cup \left(2; \sqrt{6}\right)$.

Литература

1. *Бессарабов Н.И., Зяблин В.Н., Сохадзе Г.В.* Математика. Методы решений и сборник заданий. Пособие для подготовки к испытаниям в тестовой форме (учебное пособие). Часть II / под ред. Н.И. Бессарабова. — Новочеркасск: ЮРГТУ, 2007. — 422 с.

2. *Сильвестров В.В.* Модуль и производная // Математика для школьников, 2010, № 3.

Д. КАРЛОВ,
Москва

ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Фото Н. Суковой

В 2011 году исполняется 10 лет ЕГЭ: в 2001 году в республиках Чувашия и Марий Эл, в Якутии, а также в Самарской и Ростовской областях по восьми учебным дисциплинам школьники опробовали новый вид выпускного экзамена. И вот уже 10 лет не умолкают споры о том, результативно ли употребление ЕГЭ в отечественной системе образования. Если спросить учителей, выпускников и их родителей, что они думают о введении ЕГЭ, то единого мнения мы не услышим.

Какие же основные плюсы и минусы могу отметить я, учитель математики, при анализе результативности введения ЕГЭ в российских школах?

• Главный довод идеологов ЕГЭ — экзамен в новой форме помогает избежать коррупции при поступлении в вузы. На первый взгляд, с этим трудно спорить. Однако, по данным МВД, в 2009 году объем коррупции в сфере образования по отношению к 2008 году увеличился в два раза. Достаточно вспомнить 2010 год, когда в Ростовской области были задержаны 70 педагогов, которые за 40 тысяч рублей сдавали экзамены вместо учеников. И это не единичный случай. Подобные дела рассматривались в судах Республики Татарстан, Саратовской области, Пермского края и других регионов. К тому же после введения дополнительных вступительных испытаний в ряде университетов страны трудно говорить о том, что абитуриент полностью лишен возможности решить проблему поступления в вуз с помощью коррупционной составляющей.

Кроме всего, последним нормативно-правовым актам, регламентирующим проведение ЕГЭ, у выпускников остается возможность не сдавать экзамен в новой форме, если имеется заключение врача о каких-либо медицинских противопоказаниях. Заключения клинико-экспертной комиссии любой районной поликлиники достаточно для того, чтобы для выпускника были созданы условия для сдачи экзамена в традиционной форме внутри школы. Эта возможность снова увеличивает риск коррупционного варианта решения проблемы ЕГЭ.

• А с чем же столкнулись непосредственно учителя? Существующие государственные программы и учебники не всегда соответствуют требованиям, которые предъявляются в спецификации ЕГЭ. В частности, задания в учебниках не соответствуют формату заданий в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ. Учителю для результативной подготовки детей к единому государственному экзамену необходимо вносить существенные изменения, во-первых, в формат предлагаемых для решения заданий, а во-вторых, в порядок и объем изучения программного материала. Потому что для учащихся массовой школы как минимум последние полгода необходимо выделить для решения задач в формате ЕГЭ. Однако учебная программа таких новшеств не подразумевает.

Очевидно, что, если меняется содержание экзамена, требуется изменение содержания государственной программы. Пособия и методическая литература, необходимые для подготовки к ЕГЭ, в школы не поставляются, хотя, впрочем, серьезно разработанных методических комплектов до сих пор еще и не создано. Формат ЕГЭ для отечественной системы образования до сих пор считается новым, и учеников старшей школы необходимо «переучивать» при решении тех или иных задач. И только в конце 2010 года Федеральным институтом педагогических измерений (ФИПИ) были изданы сборники для подготовки к ЕГЭ, содержащие задания по всем типам — от В1 до С6. Возможно, в ближайшее время мы все-таки сможем совместными усилиями решить данную проблему.

• Однако есть и много положительных моментов введения ЕГЭ. ЕГЭ стимулирует подготовку учеников к экзамену. Мне, как учителю математики (предмета, экзамен по которому должны сдавать все 100% учеников, хотят они этого или нет), это особенно видно. Учащиеся сами просят советов, как лучше подготовиться к выпускному экзамену, просят давать больше заданий, посещают все дополнительные занятия и т.п. Подобного интереса, если его так можно назвать, не было до введения новой формы сдачи экзамена среди учеников общеобразовательных школ. Это несомненный плюс новой системы аттестации выпускников. Даже те учащиеся, для которых математика не является профильным предметом, хотят «заработать» как можно больше баллов на ЕГЭ и не жалеют для этого собственных сил.

• Но не все так просто. Взять, например, такие темы, как первообразная и интеграл, элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей, и другие темы. Данные разделы не отражены в блоке В, а многие отсутствуют и в спецификации ЕГЭ. Как же в таком случае мотивировать детей, нацеленных на сдачу ЕГЭ, уделить внимание вышеуказанным темам?

К тому же учителя по другим предметам (не математики и русского языка) отмечают, что ученики пытаются «забросить» учебные дисциплины, ЕГЭ по которым они сдавать не планируют. И после отмены конкурса аттестатов дети перестали стремиться «заработать» оценки повыше.

• Возникает также вопрос о том, можно ли по результатам ЕГЭ оценивать труд педагога при его аттестации? Ведь уровень мотивации у каждого школьника свой, и вполне очевидно, что в классе математического профиля результаты ЕГЭ будут намного выше, нежели в общеобразовательном или гуманитарном классе. Остается надеяться, что при введении с 1 января 2011 года новой системы аттестации педагогических работников Российской Федерации этот аспект будет учтен. При анализе информации о новой системе аттестации пока больше вопросов, чем ответов.

• ЕГЭ позволяет выпускникам поступать в вузы, находящиеся на значительном расстоянии от места их проживания, всего лишь отправив сведения о сдаче ЕГЭ по почте. Облегчается подача документов сразу в несколько вузов, нет необходимости сдавать в каждом из них экзамены, что является большим плюсом новой системы.

• В конце января 2011 года с заявлением о результатах введения ЕГЭ выступил председатель Совета Федерации. Сергей Миронов считает, что эксперимент по введению в России ЕГЭ провалился. «Организаторы эксперимента по введению ЕГЭ ставили восемь целей… мы проанализировали… и выводы комиссии очень просты: ни одна из восьми целей не была достигнута», — сказал Миронов, ссылаясь на выводы независимой общественной комиссии, которая была создана по его инициативе. Несмотря на это, министр А. Фурсенко считает, что новая система аттестации выпускников успешно функционирует, хоть еще и не совершенна. Кому верить, покажет время.

По моему мнению, пора сформулировать четкую и аргументированную позицию по данному вопросу, проанализировав все плюсы и минусы. Состояние, которое в настоящее время можно назвать «подвешенным», не может продолжаться так долго. Образование — это сфера жизни, которая находится в постоянном развитии, но нельзя создавать такую ситуацию, когда систему образования лихорадит вот уже 10 лет.

Работа над ошибками

В № 23/2010 на с. 29 в схеме вместо слов «противоречие с условием уже известной теоремы» следует читать «противоречие с известной теоремой».

В № 3/2011 на с. 29 под рисунком 3 в скобках следует читать: $BD < CD$.

Редакция благодарит О.И. Плакатину и В.М. Финкельштейна за замеченные неточности и приносит свои извинения авторам статей.

С. ГРИШИН,
С. МУРАВЬЕВ,
Москва

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

ПАМЯТИ ПРОФЕССОРА И.В. САВЕЛЬЕВА В НИЯУ МИФИ

Подробности об олимпиаде можно узнать по телефону приемной комиссии НИЯУ МИФИ (495) 324-84-17 и на сайте НИЯУ МИФИ www.mephi.ru.

В начале декабря 2010 г. в Национальном исследовательском ядерном университете «МИФИ» (в Москве, Обнинске, Северске, Новоуральске, Ангарске, Димитровграде) проходила традиционная физико-математическая олимпиада памяти профессора И.В. Савельева для школьников 7–11-х классов. Эта олимпиада является одним из туров традиционной физико-математической олимпиады школьников «Росатом», которая много лет проходит в МИФИ.

В олимпиаде 2010/2011 учебного года приняли участие: более 4500 школьников в олимпиаде по математике и более 3500 школьников в олимпиаде по физике, что значительно больше, чем в прошлом году. Нам кажется, что существенный рост числа участников (особенно в олимпиаде по математике в Москве) есть хороший знак изменения отношения общества к точным и естественным наукам, без которого невозможно развитие образования, науки, да и всей жизни нашей страны.

Вариант задания олимпиады по математике

1. Решите уравнение $\sin 1005\pi x = \cos 2010\pi x$. Сколько решений принадлежит отрезку [0; 2]?

2. Для любого целого n решить уравнение
$$|2x+n|+(-1)^n|3x+11-4n|=0.$$
При каких n уравнение имеет два целых решения?

3. Представьте, что вы находитесь на скачках кузнечиков, проводимых по следующим правилам: два кузнечика начинают прыгать по прямой из точки A в точку B и обратно. Вернувшись в A, они повторяют маршрут и т.д. Скорость первого кузнечика 12 $(1/c)$, второго 5 $(1/c)$, расстояние между A и B равно 60 единиц. Бега продолжаются 60 с. Какое время кузнечики могут видеть друг друга? Считать, что кузнечик прыгает головой вперед и видит то, что находится перед ним.

4. При каких значениях параметра b прямая с уравнением
$$y=(b^2+2b-2)x+b$$
пересекает прямоугольник $0\le x\le 3$, $0\le y\le 2$ на плоскости? Найти длину отрезка прямой, лежащего внутри прямоугольника при $b=1$.

5. Площадь основания прямой треугольной призмы равна S. Радиус шара, описанного около призмы, равен R. Какое наибольшее значение при этих условиях может принимать объем призмы?

Ответы и решения

1. а) $x_1=\dfrac{4k+1}{6030}$, $k\in \mathbf{Z}$; $x_2=\dfrac{4m-1}{2010}$, $m\in \mathbf{Z}$.

Используя формулу для косинуса двойного угла, сводим уравнение к квадратному относительно $\sin 1005\pi x$:

$$2\sin^2 1005\pi x+\sin 1005\pi x-1=0.$$

Решение этого уравнения дает

$$\sin 1005\pi x=\frac{1}{2} \text{ и } \sin 1005\pi x=-1.$$

Эти уравнения имеют следующие серии решений:

$$x_1=\frac{4k+1}{6030},\quad k\in \mathbf{Z};\ x_2=\frac{4m-1}{2010},\quad m\in \mathbf{Z}.$$

б) 3015 решений.

Найдем число решений на отрезке [0; 2]. Число решений первой серии на отрезке [0; 2] определяется числом целых решений неравенства

$$0\le\frac{4k+1}{6030}\le 2\ ,\text{ или } -0{,}25\le k\le 3014{,}75,$$

то есть 3015 решений.

Аналогично, вторая серия имеет на заданном отрезке 1005 решений.

Кроме того, очевидно, что данные серии пересекаются — то есть существуют значения x, принадлежащие и первой, и второй серии решений. Эти пересечения находятся из уравнения

$$\frac{4k+1}{6030}=\frac{4m-1}{2010}\ ,\text{ или } k=3m-1.$$

Таким образом, решения $x=\dfrac{12m+5}{6030}$ встречаются в обеих сериях. Таких решений на отрезке [0; 2] — 1005 штук. Поэтому общее число решений на отрезке [0; 2] равно

$$3015+1005-1005=3015.$$

2. а) $n=2m$, $m\in \mathbf{Z}$, $m\neq 1$, $x\in\varnothing$; $n=2$, $x=-1$; $n=2m+1$, $m\in \mathbf{Z}$, $x_1=10m-6$, $x_2=\dfrac{6m-8}{5}$.

Для четных n ($n=2m$, $m\in \mathbf{Z}$) данное в условии уравнение сводится к уравнению

$$|2x+2m|+|3x+11-8m|=0. \qquad (*)$$

Чтобы равенство (*) выполнялось, оба модуля должны одновременно равняться нулю. Поэтому уравнение (*) эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases} x=-m, \\ x=\dfrac{8m-11}{3}. \end{cases} \qquad (**)$$

Решение системы (**) дает $x=-1$ при $m=1$ ($n=2$). При других четных n решений нет.

Для нечетных n ($n=2m+1$, $m\in \mathbf{Z}$) данное в условии уравнение сводится к уравнению

$$|2x+2m+1|=|3x+7-8m|.$$

Раскрывая модули, найдем, что при любых $m\in \mathbf{Z}$ уравнение имеет два решения

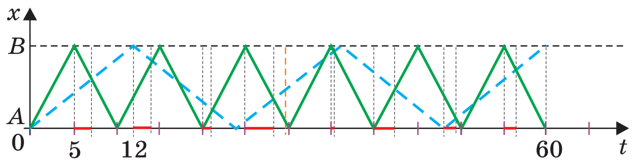
$$x_1=10m-6 \text{ и } x_2=\frac{6m-8}{5}.$$

б) $n=10t+7$, $t\in \mathbf{Z}$, $x_1=6t+2$, $x_2=50t+24$.

Уравнение может иметь два целых решения, если n — нечетное ($n=2m+1$, $m\in \mathbf{Z}$) и выполнено условие $x_2=\dfrac{6m-8}{5}=k$ — целое число (корень x_1 всегда целый). Очевидно, это условие выполнено при $m=5t+3$, $t\in \mathbf{Z}$, или $n=2(5t+3)+1=$ $=10t+7$, $t\in \mathbf{Z}$.

3. $T=\dfrac{240}{17}$ с.

Используем графические соображения. Построим графики зависимости координат кузнечиков от времени (начало координат в точке A, ось x направлена в точку B). Поскольку кузнечики движутся с постоянными скоростями, эти зависимости линейные, лежат в интервале изменений координат 0–60, возрастают при движении кузнечика из A в B и убывают при движении из B в A (см. рисунок). Первый кузнечик возвращается на старт каждые 10 с, а второй — каждые 24 с. На рисунке зависимость координаты быстрого кузнечика от времени показана зеленой линией, медленного — синей.



Аналитически эти зависимости описываются функциями:

$$S_1(t)=\frac{60}{\pi}\left(\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{10}(2x-5)\right)+\frac{\pi}{2}\right)$$

и

$$S_2(t)=\frac{60}{\pi}\left(\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{12}(x-6)\right)+\frac{\pi}{2}\right).$$

Моменты встречи кузнечиков описываются уравнением $S_1(t)=S_2(t)$ или сериями

$$x_1=\frac{120k}{7},\quad k\in \mathbf{Z}, \text{ и } x_2=\frac{120m}{17},\quad m\in \mathbf{Z}.$$

Очевидно, кузнечики видят друг друга, когда один движется из B в A (его координата убывает), второй — из A в B (его координата растет) и координата первого больше координаты второго. Из рисунка эти участки очевидны — интервалы времени, им соответствующие, выделены на оси времени красным цветом. Таких интервалов — восемь. Находя координаты точек пересечения графиков и суммируя интервалы времени

$$\left[5;\ \frac{120}{17}\right],\ \left[12;\ \frac{2\cdot 120}{17}\right],\ \left[20;\ \frac{3\cdot 120}{17}\right],\ \left[25;\ \frac{4\cdot 120}{17}\right],$$

$\left[35; \frac{5\cdot120}{17}\right]$, $\left[40; \frac{6\cdot120}{17}\right]$, $\left[48; \frac{7\cdot120}{17}\right]$, $\left[55; \frac{8\cdot120}{17}\right]$, найдем время, в течение которого кузнечики видят друг друга.

4. а) $b \in (-\infty; -3] \cup [0; 2]$.

Прямая, описываемая уравнением

$$y = (b^2 + 2b - 2)x + b,$$

пересекает ось ординат в точке с координатой $y = b$. Поэтому при $b \le 0$ все прямые, лежащие выше прямой, проходящей через точку $C(3; 0)$, пересекают прямоугольник, ниже — нет. Поэтому все значения b, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} b \le 0, \\ b^2 + 2b - 2 \ge \dfrac{-b}{3} \end{cases}$$

— искомые. Решением этой системы неравенств является полуось $b \in (-\infty; -3]$.

Все прямые, пересекающие ось ординат в точках с координатами $0 \le y \le 2$, пересекают прямоугольник, и поэтому значения $b \in [0; 2]$ — искомые.

При $b > 2$ все прямые пересекают ось ординат выше прямоугольника, следовательно, на полуоси $b \in (2; +\infty)$ искомых точек нет.

б) $l = \sqrt{2}$.

Найдем теперь длину прямой, лежащей внутри прямоугольника при $b = 1$. В этом случае прямая $y = x + 1$ пересекает прямоугольник по отрезку, соединяющему точки $P(0; 1)$ и $Q(1; 2)$, и его длина $\sqrt{2}$.

5. $V = 2S\sqrt{R^2 - \dfrac{4S}{3\sqrt{3}}}$.

Наибольшему объему призмы с заданной площадью основания S соответствует наибольшая высота. Последнее достигается при наименьшем возможном при заданных условиях радиусе r круга, описанного около основания призмы. Это бывает, когда основание призмы — правильный треугольник площади S со стороной $a = \dfrac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$. Тогда $r = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3^3}}$. Следовательно, высота призмы определяется соотношением

$$H = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2\sqrt{R^2 - \frac{4S}{3\sqrt{3}}},$$

а ее объем равен

$$V = 2S\sqrt{R^2 - \frac{4S}{3\sqrt{3}}}.$$

ФОТО НА КОНКУРС

Математическое рукоделие
(на занятии кружка «Занимательная математика»)

Автор: Л.Г. Егорова, учитель математики и физики Емёткинской средней школы, Республика Чувашия

А. БЛИНКОВ,
М. БЕРШТЕЙН,
А. МЯКИШЕВ,
Д. ПРОКОПЕНКО,
Е. ЧЕРНЫШЕВА,
П. ЧУЛКОВ,
Москва

ТУРНИР АРХИМЕДА

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РЕГАТА

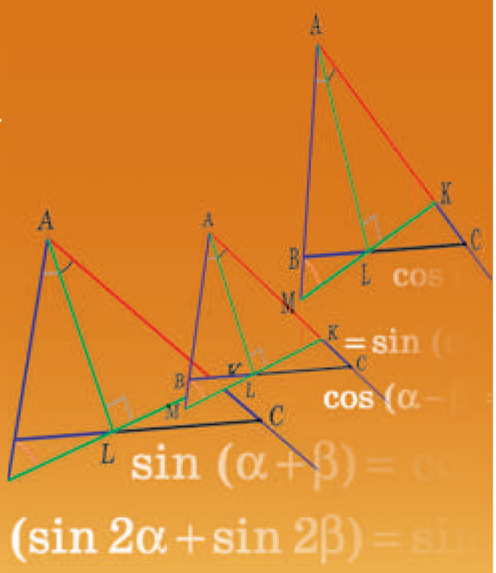
Клод Моне. Регата под Аржантейем, 1872

6 марта 2010 года в Московском городском дворце детского (юношеского) творчества при поддержке Департамента образования г. Москвы и Московского центра непрерывного математического образования состоялась математическая регата 10-х классов. Помимо команд из Москвы, в ней приняли участие ребята из г. Долгопрудного, г. Костромы, г. Санкт-Петербурга и г. Переславля, а всего участвовало 74 команды.

В традиции московских регат — вручать по окончании каждому участнику и руководителю команды брошюру с условиями и решениями задач только что прошедшей регаты. Не была она нарушена и на этот раз.

Многие участники показали высокие результаты, поэтому 21 команда получила приз — литературу по математике. Девять лучших команд получили также дипломы Турнира Архимеда. Абсолютным победителем регаты стала одна из команд, представлявших СУНЦ МГУ. Полные итоги регаты опубликованы на сервере МЦНМО (http://www.mccme.ru/olympiads).

Как обычно, часть заданий придумывалась авторами специально для этой регаты, остальные же либо можно считать математическим фольклором, либо были взяты из популярной математической литературы. Тексты решений публикуются в том виде, в каком они готовились для работы жюри.



Условия задач

Первый тур

(*10 минут; каждая задача — 6 баллов*)

1.1. Решите уравнение $4\cos \pi x = 4x^2 - 4x + 5$.

1.2. На плоскости ABC расположены два куба $ABCDA'B'C'D'$ и $KMNCQEFP$ так, как показано на рисунке 1. Сравните длины отрезков AP и $D'K$.

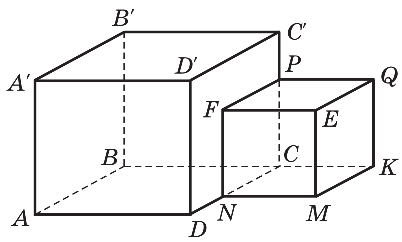


Рис. 1

1.3. Докажите, что сумма цифр в десятичной записи числа 3^{200} меньше, чем 1000.

Второй тур

(*15 минут; каждая задача — 7 баллов*)

2.1. Известно, что $a > b > c$. Докажите, что
$$\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-c}>a+2b+c.$$

2.2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Через точку L проведена прямая, перпендикулярная AL и пересекающая лучи AB и AC в точках M и K соответственно. Найдите AK, если $AB = 4$, $AC = 6$.

2.3. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы любая белая ладья не била никакую ладью по горизонтали, а любая черная ладья не била никакую ладью по вертикали?

Третий тур

(*20 минут; каждая задача — 8 баллов*)

3.1. Известно, что $m^2 + n^2 = 1$, $k^2 + p^2 = 1$ и $mk + np = 0$. Найдите $mn + kp$.

3.2. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ произвольно выбраны точки P и Q соответственно. Из вершины B на отрезки AP и AQ опущены перпендикуляры BB_1 и BB_2, а из вершины D — перпендикуляры DD_1 и DD_2 соответственно. Докажите, что отрезки B_1B_2 и D_1D_2 равны и перпендикулярны.

3.3. Полоска 1×100 разбита на единичные квадраты. В эти квадраты записывают числа 1, 2, ..., 100 следующим образом: сначала в какой-нибудь квадрат записывают число 1, затем в один из соседних квадратов записывают число 2, затем в один из соседних с уже занятыми квадратами записывают число 3 и т.д. Сколькими способами это можно проделать?

Четвертый тур

(*25 минут; каждая задача — 9 баллов*)

4.1. Число a является корнем уравнения $x^3 - 3x^2 + 5x - 17 = 0$, а число b — корнем уравнения $x^3 - 3x^2 + 5x + 11 = 0$. Какие значения может принимать $a + b$?

4.2. Точка M — середина ребра AA_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. На прямой AB_1 выбрана точка E, а на прямой BC_1 — точка F так, что прямые EF и CM параллельны. Найдите $\dfrac{EF}{CM}$.

4.3. Можно ли в десятичной записи числа $A = 28^{999}$ изменить ровно одну цифру так, чтобы оно стало простым?

Пятый тур

(*15 минут; каждая задача — 7 баллов*)

5.1. Известно, что уравнение $x^4 + px^2 + q = 0$ имеет ровно три корня. Сколько корней имеет уравнение $x^4 + qx^2 + p = 0$?

5.2. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC взяты точки E и F соответственно. Отрезки EC и FA пересекаются в точке O. Докажите, что если площадь четырехугольника $BEOF$ равна площади треугольника ACO, то $AE = BF$.

5.3. Существует ли выпуклый шестиугольник, у которого длина одной из сторон равна 1, а длины всех диагоналей — целые числа?

Решения задач

1.1. Корней нет.

Так как $4\cos \pi x \le 4$, а
$$4x^2 - 4x + 5 = (2x - 1)^2 + 4 \ge 4,$$
то исходное равенство достигается тогда и только тогда, когда его левая и правая части равны 4, то есть данное уравнение равносильно системе $\begin{cases}\cos \pi x = 1,\\ 2x-1=0.\end{cases}$ Но $x=\frac{1}{2}$ (решение второго уравнения) не является решением первого уравнения, поскольку $\cos\frac{\pi}{2}=0$.

1.2. Длины этих отрезков равны.

Способ I. Рассмотрим поворот вокруг прямой DC на 90°: образом точки A является точка D', а образом точки P — точка K (рис. 2). Следовательно, образом отрезка AD является отрезок $D'K$, значит, $AP = D'K$.

Способ II. Рассмотрим прямоугольные треугольники ACP и $D'CK$ (см. рис. 2): $AC = D'C$ (диагонали граней большего куба) и $CP = CK$ (ребра меньшего куба). Следовательно, треугольники ACP и $D'CK$ равны (по двум катетам), значит, $AP = D'K$.

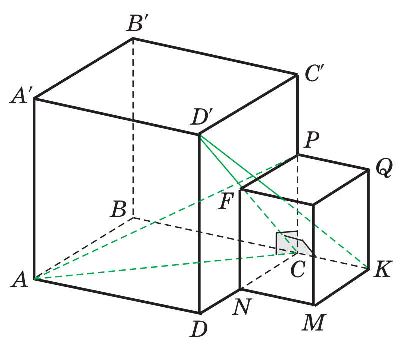


Рис. 2

Способ III. Пусть a и b — длины ребер большего и меньшего кубов соответственно (рис. 3). Тогда, из прямоугольных треугольников ACP и ADC, получим:

$$AP^2 = AC^2 + PC^2 = AD^2 + DC^2 + PC^2 = 2a^2 + b^2.$$

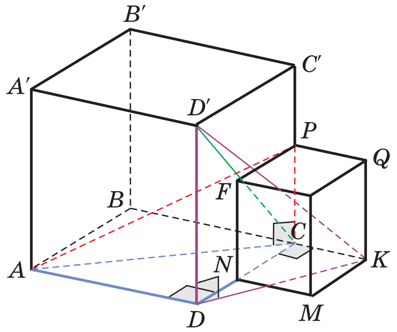


Рис.3

Аналогично, из прямоугольных треугольников KDD' и DCK, получим:

$$D'K^2 = DK^2 + D'D^2 = DC^2 + CK^2 + D'D^2 = 2a^2 + b^2.$$

Следовательно, $AP = D'K$.

1.3. Так как $3^2 < 10$, то $3^{200} < 10^{100}$. Следовательно, в десятичной записи числа 3^{200} не больше чем 100 цифр. Значит, сумма цифр числа 3^{200} не превосходит 900, то есть она меньше 1000.

2.1. Рассмотрим разность левой и правой частей доказываемого неравенства и преобразуем ее:

$$\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-c}-a-2b-c=\frac{a^2}{a-b}-(a+b)+\frac{b^2}{b-c}-(b+c)=$$
$$=\frac{b^2}{a-b}+\frac{c^2}{b-c}>0,$$

так как из условия $a > b > c$ следует, что b и c не обращаются в ноль одновременно. Следовательно, левая часть больше правой, что и требовалось.

Комментарий. Эту же идею можно реализовать в другой форме:

$$\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-c}>\frac{a^2-b^2}{a-b}+\frac{b^2-c^2}{b-c}=a+b+b+c=a+2b+c.$$

2.2. 4,8.

Так как отрезок AL является высотой и биссектрисой треугольника AMK (рис. 4 и 5), то этот треугольник — равнобедренный ($AM = AK$). Кроме того, из треугольника ABC (по свойству биссектрисы): $\frac{BL}{CL}=\frac{AB}{AC}=\frac{2}{3}$. Далее можно рассуждать по-разному.

Способ I. Через точку C проведем прямую, параллельную KM, N — точка ее пересечения с лучом AB (рис. 4).

По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{BM}{MN}=\frac{BL}{CL}=\frac{2}{3}$. Пусть $BM = 2x$, $MN = 3x$, тогда, учитывая, что $AN = AC$, получим: $AB + 5x = AC$. Следовательно, $x = 0{,}4$; $BM = 0{,}8$; $AK = AM = 4{,}8$.

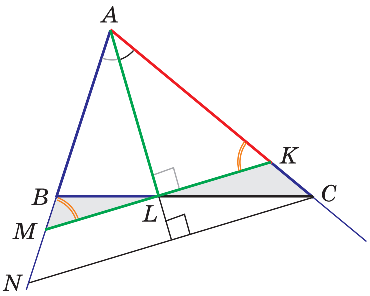


Рис. 4

Способ II. Пусть $\angle BLM = \angle CLK = \alpha$, $\angle AMK = \angle AKM = \beta$ (рис. 5).

Применим теорему синусов к треугольникам BLM и KLC. Соответственно получим:

$$\frac{BM}{\sin\alpha}=\frac{BL}{\sin\beta} \text{ и } \frac{CK}{\sin\alpha}=\frac{CL}{\sin(180^\circ-\beta)}.$$

Так как $\sin(180^\circ - \beta) = \sin\beta$, то $\frac{BM}{CK}=\frac{BL}{CL}=\frac{2}{3}$.

Пусть $AK = AM = y$, тогда

$$\frac{y-4}{6-y}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow y = 4{,}8.$$

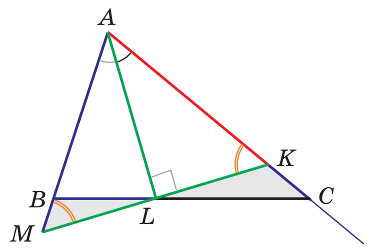


Рис. 5

2.3. 14 ладей.

Докажем, что больше чем 14 ладей поставить нельзя. Заметим, что если в какой-то горизонтали стоит белая ладья, то никаких других ладей в этой горизонтали стоять не может. Следовательно, белых ладей не может быть более восьми. Если черных ладей на доске нет, то всего ладей – не более восьми, то есть заведомо меньше чем 14. Если же на доске есть хотя бы одна черная ладья, то на одной горизонтали с ней белых ладей быть не может, значит, в этом случае белых ладей не более чем 7. Рассуждая аналогично про вертикали, получим, что и черных ладей не более чем 7. Таким образом, ладей на доске — не более, чем 14.

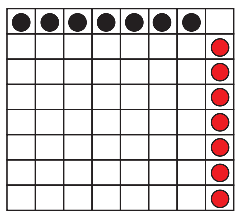


Рис. 6

Пример расстановки 14 ладей приведен на рисунке 6.

3.1. 0.

Способ I. Из первых двух данных равенств следует наличие таких углов α и β, что $m = \cos\alpha$,

$n = \sin\alpha$, $k = \cos\beta$, $p = \sin\beta$. Тогда третье равенство примет вид:

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = 0.$$

Следовательно,

$$mn + kp = \cos\alpha\sin\alpha + \cos\beta\sin\beta =$$
$$= \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) = \sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - \beta) = 0.$$

Способ II. Рассмотрим векторы $\bar{a}(m;\, n)$ и $\bar{b}(k;\, p)$. Из условия задачи следует, что

$$|\bar{a}| = \sqrt{m^2 + n^2} = 1,\ |\bar{b}| = \sqrt{k^2 + p^2} = 1,$$

$\bar{a}\cdot\bar{b} = mk + np = 0$, то есть $\bar{a} \perp \bar{b}$. Отложим единичные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ от начала координат: $\overline{OA} = \bar{a}$ и $\overline{OB} = \bar{b}$, тогда точка B является образом точки A при повороте с центром O на $90°$ (в одном из двух возможных направлений). Если этот поворот — против часовой стрелки (рис. 7), то из координатных формул поворота на $90°$ (либо рассматривая равенство треугольников) получим, что $\begin{cases} k = -n, \\ p = m. \end{cases}$ Аналогично, в случае поворота по часовой стрелке, получим, что $\begin{cases} k = n, \\ p = -m. \end{cases}$ В обоих случаях $mn + kp = 0$.

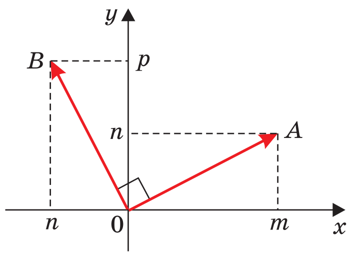


Рис. 7

Комментарий. Отметим, что две системы равенств, полученные при втором способе решения, соответствуют тому, что

$$\cos(\alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = \alpha + \frac{\pi}{2} + 2\pi n \ \text{ или } \ \alpha = \beta + \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

где $n \in \boldsymbol{Z}$, то есть

$$\begin{cases} \cos\beta = -\sin\alpha, \\ \sin\beta = \cos\alpha \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \cos\beta = \sin\alpha, \\ \sin\beta = -\cos\alpha. \end{cases}$$

3.2. *Способ I.* Пусть диагонали квадрата пересекаются в точке O (рис. 8). Рассмотрим поворот с центром O на $90°$. Образом вершины B при этом повороте является вершина A, а образом прямой BB_1 — прямая, ей перпендикулярная и проходящая через точку A. Следовательно, образ точки B_1 лежит на прямой AP. Кроме того, образом вершины A при рассматриваемом повороте является вершина D, поэтому образ прямой AB_1 – прямая, ей перпендикулярная и проходящая через точку D, то есть прямая DD_1. Значит, образ точки B_1 лежит и на прямой DD_1. Таким образом доказано, что при повороте с центром O на $90°$ образом точки B_1 является точка D_1.

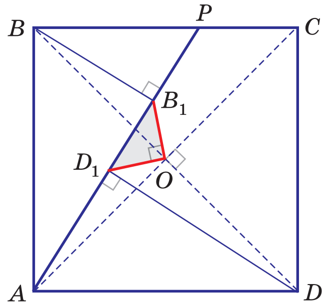


Рис. 8

Аналогично доказывается, что при рассматриваемом повороте образом точки B_2 является точка D_2. Следовательно, образом отрезка B_1B_2 является отрезок D_1D_2, поэтому эти отрезки равны и перпендикулярны, что и требовалось.

Способ II. Пусть $\angle PAQ = \alpha$. Заметим, что отрезок AB виден из точек B_1 и B_2 под углом $90°$ (рис. 9). Следовательно, точки B_1 и B_2 лежат на окружности с диаметром AB. По следствию из теоремы синусов $\frac{B_1B_2}{\sin\alpha} = AB$. Аналогично, из того, что точки D_1 и D_2 лежат на окружности с диаметром AD, получим, что $\frac{D_1D_2}{\sin\alpha} = AD$. Так как $AB = AD$, то $B_1B_2 = D_1D_2$.

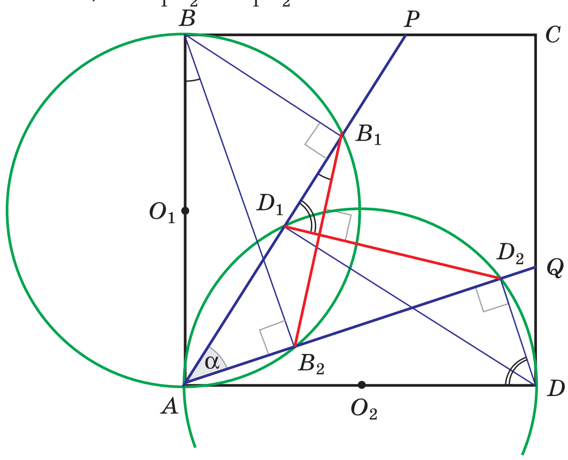


Рис. 9

Докажем теперь, что $B_1B_2 \perp D_1D_2$. Для этого достаточно доказать, что $\angle AB_1B_2 + \angle B_1D_1D_2 = 90°$.

Это можно получить, например, так:

$$\angle AB_1B_2 + \angle B_1D_1D_2 = \angle ABB_2 + \angle ADD_2 =$$
$$= (90° - \angle BAQ) + (90° - \angle DAQ) =$$
$$= 180° - (\angle BAQ + \angle DAQ) = 90°.$$

3.3. 2^{99}.

Способ I. Заметим, что количество способов расстановки не изменится, если расставлять числа с конца. Число 100 могло оказаться только в одном из концов полоски — два возможных варианта. Уберем его, тогда останется полоска 1×99.

Число 99 могло оказаться в одном из двух концов этой полоски – снова два возможных варианта. И так далее, каждый раз, для того чтобы поставить очередное число, у нас будет два варианта, пока мы не дойдем до единичного квадрата, в котором останется только одно свободное место. Значит, всего 2^{99} способов восстановить полоску с конца.

Комментарий. Эту же идею решения можно изложить по-другому. Будем расставлять числа от 1 до 100 по тем же правилам, что в условии задачи, но на бесконечной полоске. Запишем 1 в произвольный квадрат. Дальше будет два возможных варианта для того, чтобы поставить число 2, потом два возможных варианта для того, чтобы поставить число 3, и так далее. Получим, что количество вариантов выписать все числа от 1 до 100 по сформулированным правилам равно 2^{99}. В любом таком случае записанные числа займут какую-то полоску длины 100. Тогда в каждом случае их можно будет единственным способом сдвинуть так, чтобы они заняли исходную полоску 1×100.

Способ II. Пусть 1 поставили на k-е место от начала. Если после этого выбрать, какие именно $k - 1$ чисел будут записаны перед 1, то вся запись определяется однозначно. Действительно, первые $k - 1$ мест будут заняты выбранными числами в порядке убывания, а $100 - k$ мест после 1 будут заняты оставшимися числами в порядке возрастания.

Выбрать $k - 1$ число из 99 чисел можно C_{99}^{k-1} способами. Так как k может быть любым числом от 1 до 100, то общее количество способов равно:

$$C_{99}^{0} + C_{99}^{1} + C_{99}^{2} + \ldots + C_{99}^{99} = 2^{99}.$$

4.1. $a + b = 2$.

Так как

$$x^3 - 3x^2 + 5x = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + (2x + 1) = (x - 1)^3 + (2x + 1),$$

то исходные уравнения можно записать так:

$$(x - 1)^3 + 2(x - 1) - 14 = 0$$

и

$$(x - 1)^3 + 2(x - 1) + 14 = 0.$$

Далее можно рассуждать по-разному.

Способ I. Поскольку числа a и b соответственно являются корнями полученных уравнений, то выполняются равенства:

$$(a - 1)^3 + 2(a - 1) = 14 \text{ и } (b - 1)^3 + 2(b - 1) = -14.$$

Пусть $a - 1 = m$, $b - 1 = n$, тогда, складывая эти равенства почленно, получим:

$$m^3 + 2m + n^3 + 2n = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (m + n)(m^2 - mn + n^2) + 2(m + n) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (m + n)(m^2 - mn + n^2 + 2) = 0.$$

Так как

$$m^2 - mn + n^2 + 2 = (m - 0,5n)^2 + 0,75n^2 + 2 > 0,$$

то $m + n = 0$.

Следовательно,

$$a + b - 2 = 0 \Leftrightarrow a + b = 2.$$

Способ II. Пусть $z = x - 1$, тогда полученные уравнения примут вид:

$$z^3 + 2z = 14 \text{ и } z^3 + 2z = -14.$$

Функция $y = z^3 + 2z$ возрастает (сумма возрастающих функций), поэтому каждое из этих уравнений имеет не более одного корня. Заметим, что если число c — корень первого уравнения, то число $-c$ — корень второго. Следовательно, $a - 1 = c$, $b - 1 = -c$, то есть

$$a + b = (c + 1) + (-c + 1) = 2.$$

Комментарий. Эту же идею можно реализовать иначе. Уравнение $z^3 + 2z = -14$ равносильно уравнению $(-z)^3 - 2z = 14$, а графики функций $f(z) = z^3 + 2z$ и $g(z) = (-z)^3 - 2z$ симметричны относительно оси ординат (эскиз — рис. 10). Следовательно, точки пересечения графиков с прямой $y = 14$ также симметричны относительно оси y, значит, их абсциссы — противоположны. Поэтому

$$a - 1 + b - 1 = 0 \Leftrightarrow a + b = 2.$$

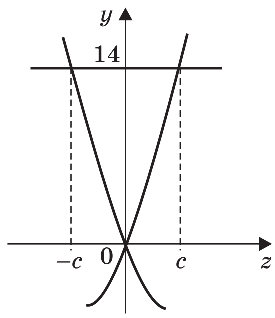


Рис. 10

Отметим, что важную роль в приведенных рассуждениях сыграла нечетность функции $f(z) = z^3 + 2z$.

4.2. $\frac{2}{5}$.

Способ I. Так как $EF \parallel CM$, а прямая CM лежит в плоскости AA_1C, то $EF \parallel AA_1C$ (рис. 11). Плоскость BEF содержит прямую EF и пересекает плоскость AA_1C по прямой DC_1, значит, $DC_1 \parallel EF$. Таким образом, $DC_1 \parallel CM$.

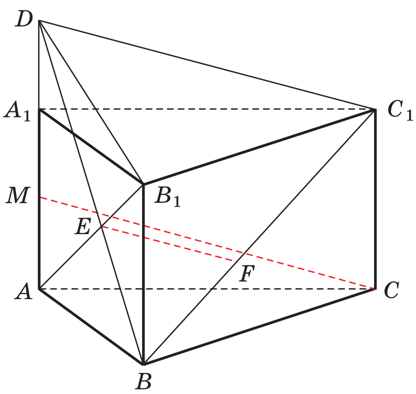


Рис. 11

Следовательно, MCC_1D — параллелограмм, значит, $CM = C_1D$. Кроме того, так как M — середина AA_1, то из равенства прямоугольных треугольников C_1A_1D и CAM следует, что $DA_1 = MA = A_1M$. Из подобия треугольников BEB_1 и DEA следует, что $\frac{BE}{DE}=\frac{BB_1}{DA}=\frac{2}{3}$. Тогда, учитывая подобие треугольников EBF и DBC_1, получим:

$$\frac{EF}{CM}=\frac{EF}{DC_1}=\frac{BE}{BD}=\frac{2}{5}.$$

Способ II. Рассмотрим тройку некомпланарных векторов: $\overline{CA}=\bar{a}$, $\overline{CB}=\bar{b}$, $\overline{CC_1}=\bar{c}$, в качестве ***базисных*** (рис. 12). Пусть также $\frac{AE}{AB_1}=x$, $\frac{BF}{BC_1}=y$. Тогда

$$\overline{CM}=\overline{CA}+\overline{AM}=\bar{a}+\frac{1}{2}\bar{c},$$

$$\overline{EF}=\overline{EA}+\overline{AB}+\overline{BF}=-x\overline{AB_1}+\left(\bar{b}-\bar{a}\right)+y\overline{BC_1}=$$
$$=x\left(\overline{AB}+\overline{BB_1}\right)+\left(\bar{b}-\bar{a}\right)+y\left(\overline{BC}+\overline{CC_1}\right)=$$
$$=-x\left(\bar{b}-\bar{a}+\bar{c}\right)+\left(\bar{b}-\bar{a}\right)+y\left(-\bar{b}+\bar{c}\right)=$$
$$=(x-1)\bar{a}+(1-x-y)\bar{b}+(y-x)\bar{c}.$$

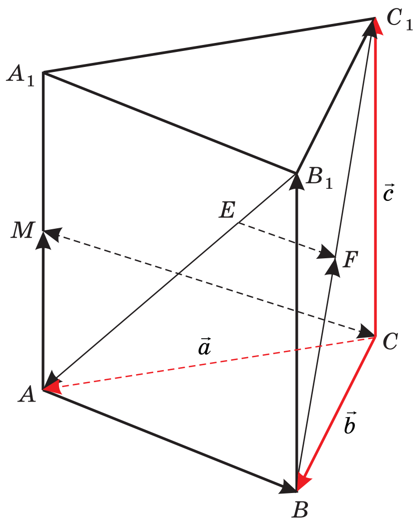


Рис. 12

Так как $EF \parallel CM$, то векторы $\overline{EF}$ и $\overline{CM}$ коллинеарны, значит, найдется такое число k, что $\overline{EF}=k\overline{CM}$. Следовательно,

$$(x-1)\bar{a}+(1-x-y)\bar{b}+(y-x)\bar{c}=k\bar{a}+\frac{1}{2}k\bar{c}.$$

В силу теоремы о единственности разложения любого вектора пространства по трем некомпланарным векторам, полученное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x-1=k,\\ 1-x-y=0,\\ y-x=0,5k.\end{cases}$ Исключив из нее переменные x и y, получим, что $k=-\frac{2}{5}$. Следовательно, $\frac{\left|\overline{EF}\right|}{\left|\overline{CM}\right|}=\frac{2}{5}$.

4.3. Нет, нельзя.

Число 28^{999} — четное, значит, его последняя цифра четная. Поэтому если менять не последнюю цифру, то число останется четным, то есть не может стать простым (оно заведомо больше чем 2). Значит, осталось разобрать возможные случаи изменения последней цифры.

Найдем последнюю цифру в десятичной записи числа 28^{999}. Для удобства записи используем утверждение, что последняя цифра в десятичной записи числа является остатком от деления этого числа на 10. Тогда:

$$28^1 \equiv 8 \pmod{10};\ 28^2 \equiv 8^2 \equiv 4 \pmod{10};$$
$$28^3 \equiv 8^3 \equiv 2 \pmod{10};\ 28^4 \equiv 8^4 \equiv 6 \pmod{10};$$
$$28^5 \equiv 8^5 \equiv 8 \pmod{10},$$

то есть остатки повторяются с периодом 4. Значит,

$$28^{999} \equiv 28^3 \equiv 2 \pmod{10}.$$

Заметим теперь, что число 28 дает остаток 1 при делении на 3, значит, число 28^{999} также дает остаток 1 при делении на 3. Переберем все варианты замены последней цифры числа 28^{999} и покажем, что в каждом случае полученное число является составным.

1. Замена последней цифры на другую четную цифру не меняет четности данного числа.

2. Замена последней цифры на 1 означает, что данное число уменьшится на 1, то есть станет равно

$$28^{999} - 1 = (28 - 1)(28^{998} + 28^{998} + \ldots + 1).$$

Тогда оно делится на 27.

3. Замена последней цифры на 3 означает, что данное число увеличится на 1, то есть станет равным

$$28^{999} + 1 = (28 + 1)(28^{998} - 28^{998} + \ldots + 1).$$

Тогда оно делится на 29.

4. Замена последней цифры на 5 означает, что полученное число кратно 5.

5. Замена последней цифры на 7 означает, что полученное число станет равно $28^{999} + 5$ и будет делиться на 3, так как $28^{999} \equiv 1 \pmod 3$.

6. Замена последней цифры на 9 означает, что полученное число будет равно $28^{999} + 7$ и будет делиться на 7.

Комментарий. Отметим, что очень сложно доказывать простоту достаточно большого числа, поэтому в большинстве подобных задач можно заранее предугадать ответ, а именно, что рассматриваемое число окажется составным.

5.1. Два корня.

Заметим, что если число x_0 — корень уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$, то и число $-x_0$ является корнем этого уравнения. Следовательно, если такое уравнение имеет ровно три корня, то один из них равен 0.

Значит, $q = 0$, то есть первое уравнение имеет вид: $x^4 + px^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 + p) = 0$.

Наличие трех корней у такого уравнения означает, что $p < 0$.

Второе уравнение при $q = 0$ имеет вид: $x^4 + p = 0$. При $p < 0$ оно имеет два корня: $x = \pm\sqrt[4]{-p}$.

5.2. Из равенства площадей в условии задачи следует, что равновелики треугольники ABF и ACE, так как их площади получаются прибавлением площади треугольника EOA к равным площадям (рис. 13).

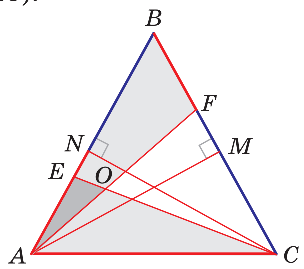


Рис. 13

Так как треугольник ABC — равнобедренный, то его высоты AM и CN равны, при этом AM и CN являются также высотами треугольников ABF и CAE соответственно. Следовательно, будут равны и соответствующие этим высотам основания, то есть $BF = AE$, что и требовалось.

5.3. Нет, не существует.

Пусть шестиугольник $ABCDEF$ со стороной $AB = 1$ удовлетворяет условию задачи (рис. 14). Рассмотрим треугольник ABD: из неравенства треугольника следует, что $|BD - AB| < AD < BD + AB$, то есть $BD - 1 < AD < BD + 1$. Учитывая, что длины BD и AD – целые, получим, что $AD = BD$.

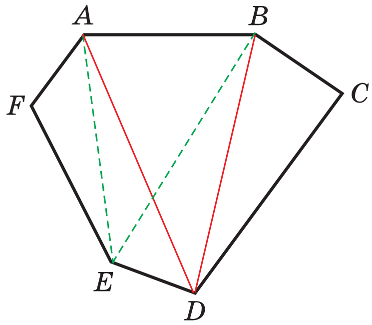


Рис. 14

Аналогичное рассуждение можно провести и для треугольника ABE. Из того, что треугольники ABD и ABE — равнобедренные с основанием AB, следует, что точки D и E лежат на серединном перпендикуляре к стороне AB. Тогда вершины A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой DE, что противоречит выпуклости шестиугольника.

Некролог

Не стало Бориса Германовича Зива. Для нескольких поколений учителей он был воплощением классической традиции преподавания математики. Сам блестящий учитель, он воспитал сотни и тысячи учеников, и через много лет после окончания школы с гордостью называющих имя своего учителя. Но его учениками оказывались не только те, у кого он вел уроки, а и те, кто учился по его книгам или посещал уроки, планы которых были разработаны под его воздействием и влиянием, и тут счет уже идет на сотни тысяч и миллионы.

Б.Г. Зив многие годы был районным методистом и многие годы читал лекции учителям всего Петербурга (Ленинграда). Когда стало легче публиковаться, он выпустил несколько задачников и методических разработок, которые сразу стали очень популярны по всей стране. У Зива богатство математических и методических идей и желание наполнить преподавание глубокими и содержательными задачами всегда сочеталось с чувством реальности — ясным пониманием того, что можно сделать и чего сделать нельзя. Когда-то за такое понимание возможного и мастерство в достижении его максимума хвалили Киселева. Зив был выдающимся продолжателем этой же линии.

В нескольких областях школьной математики «до Зива» было совсем не так, как теперь, — недостаточно было задач, да и не всегда понятно было, как их составлять. Созданное Зивом будет использоваться и в дальнейшем и станет частью той великой традиции российского преподавания математики, которой он всю жизнь служил.

Память о нем сохранится в сердцах всех, кто с ним сотрудничал или у него учился.

Санкт-Петербургские учителя математики

Н. АВИЛОВ,
ст. Егорлыкская,
Ростовская обл.

ТОЧКИ И ПРЯМЫЕ

Точка и прямая — это основные неопределяемые понятия геометрии. Их косвенные определения и свойства даются посредством системы аксиом. Одна из них: через любые две точки проходит прямая и притом только одна.

Если на плоскости отметить несколько точек и поставить вопрос: сколько различных прямых определяют эти точки, то очевидно, что однозначно ответить на этот вопрос невозможно. Потому что многое зависит от взаимного расположения точек относительно друг друга.

Обсудим вопрос: сколько различных прямых определяют n^2 точек, расположенных в узлах квадратной решетки 1×1 в форме квадрата (рис. 1).

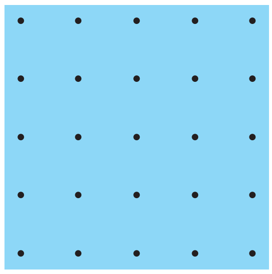


Рис. 1

Очевидно, что при $n = 1$ одна точка не определяет ни одной прямой, при $n = 2$ четыре точки определяют 6 прямых; при $n = 3$ девять точек — 20 прямых; при $n = 4$ шестнадцать точек — 62 прямых. Это можно увидеть на рисунке 2.

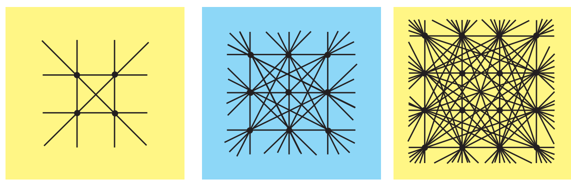


Рис. 2

При малых значениях n подсчет прямых осуществляется непосредственным перебором. Но с увеличением значения n подсчет, естественно, усложняется, значит, надо искать новые подходы.

Например, такой. Покажем его для $n = 5$. Все прямые можно разбить на непересекающиеся классы параллельных прямых, посчитать число прямых в каждом классе и полученные числа сложить. При подсчете, из соображений симметрии, число прямых в 1-м и 2-м классах увеличено в 2 раза, а в остальных классах — в 4 раза (рис. 3).

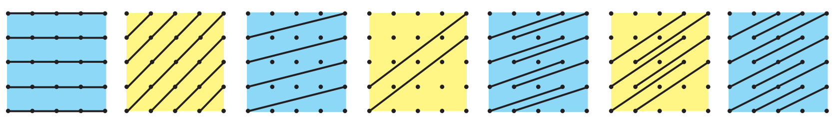


Рис. 3

$$N(5) = 2 \cdot (5 + 7) + 4 \cdot (4 + 2 + 8 + 6 + 9) = 140.$$

Ниже в таблице приведены значения N для первых 10 значений n, найденных таким способом.

Точек n^2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Прямых N	0	6	20	62	140	306	536	938	1492	2306

Поиски формулы числа N прямых в зависимости от числа n вызывают определенные трудности. Можно найти оценки числа $N(n)$. Венгерский математик П. Эрдёш, один из знаменитых математиков XX века, доказал, что если даны n точек, не лежащих на одной прямой, и через каждые две из них проведена прямая, то среди проведенных прямых не менее n различных*. Используя этот результат, получим нижнюю границу числа $N(n)$. Она равна n^2. Верхней же границей этого числа является $\frac{1}{2}n^2\left(n^2-1\right)$ — число прямых, определяемых n^2 точками общего положения, то есть никакие три из них не лежат на одной прямой. Поэтому

$$n^2 \le N(n) \le \frac{1}{2}n^2\left(n^2-1\right)$$

для всех натуральных значений $n \ge 2$.

Значит, если существует формула $N(n)$ в виде многочлена, то это многочлен второй, третьей или четвертой степени. Используя первые значения N из таблицы, методом неопределенных коэффициентов можно показать, что не существует формулы в виде многочлена

$$N(n) = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn + E,$$

значит, искать формулу $N(n)$ нужно в другом виде.

Обобщим приём подсчета прямых разбиением на классы параллельных. В каждый класс входят все параллельные прямые с угловым коэффициентом $k=\frac{a}{b}$, где здесь и далее $\frac{a}{b}$ — правильная несократимая дробь.

Любая прямая в координатной плоскости однозначно задается угловым коэффициентом и одной из её точек. Для каждого класса в точечном квадрате выделим те точки, которые определяют все прямые этого класса с угловым коэффициентом $\frac{a}{b}$. При этом возможны два случая:

1) если $b<\frac{n}{2}$, то точки, определяющие все прямые с угловым коэффициентом $\frac{a}{b}$, расположены внутри голубого или зеленого прямоугольников, и их

$$b(n-a) + a(n-2b) = n(a+b) - 3ab;$$

2) если $b \ge \frac{n}{2}$, то точки, определяющие все прямые с угловым коэффициентом $\frac{a}{b}$, расположены внутри голубого прямоугольника, и их $(n-a)(n-b)$.

Ниже приведены рисунки (рис. 4) для $n=10$, $k=\frac{2}{3}$ в первом случае и $k=\frac{2}{7}$ во втором случае.

Поэтому число $N(a;\ b)$ прямых в классе параллельных прямых с угловым коэффициентом $k=\frac{a}{b}$ ровно столько, сколько выделено точек, и вычисляется по формуле

$$N(a;\ b)=\begin{cases} n(a+b)-3ab, \text{если } b<\frac{n}{2}, \\ (n-a)(n-b), \text{если } b\ge\frac{n}{2}. \end{cases}$$

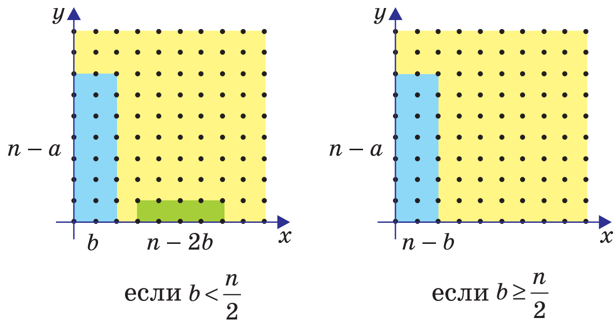


Рис. 4

Поэтому, число $N(n)$ прямых, заданных n^2 точками, расположенных в узлах квадратной решетки 1×1 в форме квадрата, можно вычислить по формуле

$$N(n)=2\left(N_0+N_1\right)+4\sum_{a=1}^{m-2}\sum_{b=2}^{m-1}N(a;\ b),$$

где $N_0 = n$ — число горизонтальных прямых, $N_1 = 2n - 3$ — число прямых, параллельных диагонали квадрата.

Формулу $N(n)$ можно алгоритмизировать. Ниже приведена программа, написанная на языке программирования Turbo Basic, и первая сотня значений N, вычисленных с помощью этой программы.

Программист с чувством собственного достоинства скажет: «Да, решена трудная задача!», а у математика задача оставляет чувство неудовлетворённости, потому что нет привычной для него формулы числа прямых.

Коллекционер последовательностей, известный американский математик Нил Дж. А. Слоун (Neil J. A. Sloane), в 1995 году издал свою книгу «Энциклопедия целочисленных последовательностей». В книге систематизированы числовые последовательности, которые встречают-

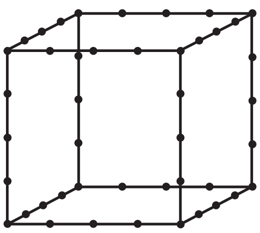
*Избранные задачи. Сборник. Пер. с англ. Ю.А. Данилова. — М.: Мир, 1977, с. 58.

```
rem Число прямых
cls:
for n=2 to 100
s=0
for b=2 to n-1
for a=1 to b-1
x=a: y=b
1 if x=y then 2
if x>y then x=x-y else y=y-x
goto 1
2 if x<>1 then goto 3
if n>2*b then k=(a+b)*n-3*a*b
if n<=2*b then k=(n-a)*(n-b)
s=s+k
3 next a,b
p=6*(n-1)+4*s
print «n=»n,»N=»p
next n
end
```

0	44388	642900	3154956	9813924
6	53586	708798	3369750	10310238
20	63648	777912	3591616	10818792
62	75674	854022	3825234	11353526
140	88948	934604	4068324	11903220
306	104374	1021074	4325334	12477042
536	121032	1111368	4590216	13064368
938	139966	1209994	4872078	13675166
1492	160636	1313612	5164580	14303516
2306	184466	1425770	5471858	14961994
3296	209944	1542520	5788016	15635288
4722	239050	1667254	6123274	16336790
6460	270588	1798132	6469748	17057820
8830	305478	1939674	6836558	17805818
11568	342480	2086576	7213480	18569864
14946	383370	2243398	7606674	19363926
18900	427020	2407292	8013108	20177748
23926	475830	2581210	8439598	21027330
29544	527280	2761192	8877144	21894432
36510	583338	2954314	9338382	22791174

ся в математике и смежных науках. В Интернете существует её виртуальная версия по адресу www.research.att.com/~njas/sequences. На этом сайте можно получить информацию об интересующей последовательности, введя лишь несколько её членов. Полученная при решении задачи последовательность находится здесь под номером: A018808.

А есть ли пространственные аналоги этой задачи? Участникам XXII Всероссийской олимпиады школьников по математике предлагалась задача обсуждаемой тематики «с выходом в пространство»:



Каркас куба с ребром длины 4 разделен точками на единичные отрезки. Сколько различных прямых определяют эти точки**?

Многие школьники правильно показали, что таких прямых 838. Меня, как члена жюри и автора задачи, удивило тогда, как нестандартно мыслят наши одаренные дети. Они не стали вести прямой подсчет прямых, а посчитали, сколько прямых теряется из-за того, что на ребрах куба лежит более двух отмеченных точек.

Возможно, кто-то из читателей сможет ответить на вопрос: сколько различных прямых определяют n^3 точек, расположенных в узлах решетки в форме куба $n \times n \times n$? Возможно, кому-то удастся алгоритмизировать формулу подсчета прямых и привлечь на помощь компьютер. Я не знаю ответа на этот, полагаю, очень трудный вопрос.

Задачи для самостоятельного решения

1. У куба отметили центр, вершины, середины ребер, центры граней, то есть всего 27 точек (рис. 6). Сколько различных прямых определяют эти 27 точек?

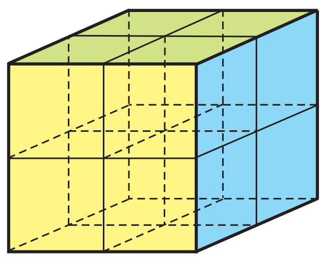


Рис. 6

2. Каркас куба с ребром длины n разделен точками на единичные отрезки. Сколько различных прямых определяют эти точки?

** Задача автора статьи, вошла в сборник олимпиадных задач: *Агаханов Н.Х., Терешин Д.А., Кузнецова Г.М.*. Школьные математические олимпиады. — М.: Дрофа, 1999.

3. Сколько различных прямых определяют точки, расположенные в узлах решетки в форме правильного точечного треугольника? Например, 10 точек правильного точечного треугольника со стороной 3 определяют 24 прямые (рис. 7). Написать программу подсчета числа прямых на одном из языков программирования.

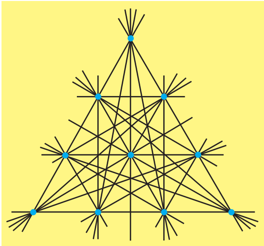


Рис. 7

Решения задач

1. 27 точек общего положения задают $\frac{27 \cdot 26}{2} = 351$ прямых. В нашем случае прямых будет меньше, потому что они теряются из-за того, что есть тройки точек, лежащих на одной прямой. Такие тройки точек вместо трех различных прямых определяют только одну прямую. Среди 27 отмеченных точек имеется 49 таких троек точек: $9 \cdot 3 = 27$, лежащих на прямых, троек параллельных ребрам куба, $2 \cdot 6 = 12$ троек точек на диагоналях граней куба, $2 \cdot 3 = 6$ троек точек на диагоналях трех серединных сечений куба и 4 тройки на диагоналях куба.

Таким образом, общее число прямых, равно

$$351 - 49 \cdot 3 + 49 = 351 - 49 \cdot 2 = 253.$$

2. Число прямых, определяемых точками каркаса куба с ребром длины n, считается по формуле

$$N(n) = 66n^2 - 60n + 22.$$

3. Можно адаптировать приведенную в статье Basic-программу, заменив в ней всего лишь три строки. А именно, в строках выбора при тех же условиях переменная k принимает другие значения:

```
k=n-b+(b-1)*(n-b-2*a)+b*(b-1)/2
```

или

```
k=(n-b)*(n-b+1)/2,
```

а в строке вывода

```
p=3*(n+s-1).
```

Это заметил В. Рыбинский — первый президент российского клуба ценителей головоломок «Диоген».

ПОЛ ЭРДЁШ (1913–1996) — один из самых знаменитых математиков XX века. Работал в самых разных областях современной математики (комбинаторика, теория графов, теория чисел, математический анализ, теория приближений, теория множеств и теория вероятностей). Лауреат множества математических наград.

Эрдёш родился в Будапеште, его родители получили математическое образование и работали учителями. Еще в раннем детстве Эрдёш проявил выдающиеся математические способности, в четырехлетнем возрасте перемножал в уме четырехзначные числа. В школьном возрасте он неоднократно выигрывал математические олимпиады.

Начиная с конца 30-х годов и до самой смерти стиль жизни Эрдёша можно охарактеризовать как «странствующий математик». Он путешествовал между научными конференциями и домами коллег по всему миру. Он появлялся на пороге со словами «мой мозг открыт» и оставался на время, необходимое для совместной подготовки нескольких статей, чтобы уехать дальше через несколько дней. Он щедро делился с окружающими своими математическими идеями, и сам легко откликался на чужие идеи.

Эрдёш написал за свою жизнь 1475 статей, это число сопоставимо только с числом статей у Эйлера. Многие из этих статей были написаны в соавторстве, число соавторов все ещё уточняется, но их было около пяти сотен. В математике совместная статья является скорее исключением, чем правилом, поэтому столь огромное число соавторов Эрдёша породило такое шуточное понятие как «число Эрдёша». Оно определяется следующим образом:

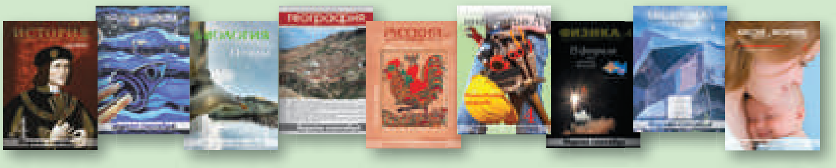
- у самого Эрдёша это число равно нулю;
- у соавторов Эрдёша это число равно единице;
- соавторы людей с числом Эрдёша, равным n, имеют число Эрдёша $n + 1$.

Словом, число Эрдёша — это длина кратчайшего пути от человека до самого Эрдёша по совместным работам. По некоторым оценкам, 90% математиков обладают числом Эрдёша не более 8, что перекликается с различными теориями «тесного мира». Существует неофициальный проект по составлению базы данных людей с конечным числом Эрдёша.

По материалам Википедии

Издательский дом
ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ

ПОДПИСКА НА ЖУРНАЛЫ
издательского дома «Первое сентября»
второе полугодие 2011 года



БУМАЖНАЯ версия

Оформление подписки НА ПОЧТЕ (доставка по почте)

Информация о подписке в каталогах «Роспечать» и «Почта России» размещена в разделе «Журналы» под заголовком «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ. ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА».

Цена для индивидуальных подписчиков – **1200 рублей + стоимость доставки.**
Цена для предприятий и организаций – **1590 рублей + стоимость доставки.**

Оформление подписки НА САЙТЕ www.1september.ru (доставка по почте)

Подписку можно оформить также в редакции по телефону 8-499-249-47-58.

Цена для индивидуальных подписчиков – **1080 рублей. Стоимость доставки включена.**
Цена для предприятий и организаций – **1200 рублей. Стоимость доставки включена.**

ЭЛЕКТРОННАЯ версия

Дорогие коллеги! Обращаем ваше внимание, что электронная версия полностью соответствует бумажной. Каждый номер приходит гарантированно в срок. Наш формат электронной версии удобен для чтения с экрана компьютера и современных мобильных устройств. А нужные страницы издания при желании можно легко вывести на принтер.

Оформление подписки НА ПОЧТЕ (доставка по Интернету)

Каждый журнал имеет в каталогах «Роспечать» и «Почта России» свой индекс для электронной подписки. По этому индексу доставка всех номеров и материалов к уроку осуществляется через Интернет. По почте придет только письмо с карточкой доступа к электронным версиям номеров. Информация размещена в разделе «Журналы» под заголовком «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ. ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА».

Цена для индивидуальных подписчиков и организаций – **780 рублей.**

Оформление подписки НА САЙТЕ www.1september.ru (доставка по Интернету)

Подписку можно оформить также в редакции по телефону 8-499-249-47-58.

Цена для индивидуальных подписчиков и организаций – **699 рублей.**

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЕ ВЕРСИИ ЖУРНАЛОВ НА САЙТЕ www.1 september.ru

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

$$b_1,\ b_2 = qb_1,\ b_3 = qb_2,\ \ldots$$

$$b_1 \neq 0, q \neq 0$$

Задача. Сколько будет зерен на шахматной доске, если класть на каждую следующую клетку доски вдвое больше зерен, чем на предыдущую, начиная с одного?

С этой задачей связана старинная легенда. В разных источниках ее детали отличаются, но суть и математическая сущность остаются неизменными.

Когда создатель шахмат показал свое изобретение правителю страны, тому игра так понравилась, что он позволил изобретателю самому выбрать награду. Тот попросил у короля за первую клетку шахматной доски заплатить одно зерно пшеницы, за вторую — два, за третью — четыре и т.д., удваивая количество зерен на каждой следующей клетке. Правитель, который не был силен в математике, согласился, даже несколько обидевшись за столь невысокую оценку изобретения, и приказал казначею, подсчитав, выдать изобретателю нужное количество зерна. Однако, когда казначей показал ему расчеты и сказал, что расплатиться невозможно, правитель, чтобы взять реванш над пытавшимся обхитрить его изобретателем, велел тому собственноручно пересчитать каждое зернышко, чтобы ни у кого не было сомнений в том, что он честно с ним расплатился.

Хотите проверить? Количество зерна, причитавшееся изобретателю, примерно в 1800 раз превышает мировой объем урожая пшеницы за год, более того, превышает объем урожая пшеницы, собранной за всю историю человечества.

Если массу пшеницы перевести в объем, то получится приблизительно 1500 км^3, а это равно объему амбара с размерами 10 км × 10 км × 15 км.

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

mat.1september.ru | Индексы подписки: Почта России 79073 (инд.); 79583 (орг.); Роспечать 32030 (инд.); 32594 (орг.)