ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.
№17 (727)

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

mat.1september.ru

ПЕРИОДИЧНОСТЬ | с. 64

тема номера |

Из опыта ЕГЭ

аналитика

Особенности ЕГЭ-2011

с. 4

решение задач

Двадцатый турнир Архимеда

с. 28

проверь себя

Итоги конкурса учителей математики

с. 38

издательский дом
1september.ru
Первое сентября
декабрь 2011
МАТЕМАТИКА Подписка: Роспечать - 32030 (бумажная версия), 26113 (электронная); Почта России - 79073 (бумажная версия), 12717 (электронная)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Главный редактор: Артем Соловейчик (генеральный директор)
Коммерческая деятельность: Константин Шмарковский (финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов: Сергей Островский (исполнительный директор)
Реклама и продвижение: Марк Сартан
Мультимедиа, конференции и техническое обеспечение: Павел Кузнецов
Производство: Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение: Андрей Ушаков
Главный художник: Иван Лукьянов
Педагогический университет: Валерия Арсланьян (ректор)

ГАЗЕТА ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Первое сентября – Е. Бирюкова

ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Английский язык – А. Громушкина,
Библиотека в школе – О. Громова,
Биология – Н. Иванова,
География – О. Коротова,
Дошкольное образование – М. Аромштам,
Здоровье детей – Н. Сёмина,
Информатика – С. Островский,
Искусство – М. Сартан,
История – А. Савельев,
Классное руководство и воспитание школьников –О. Леонтьева,
Литература – С. Волков,
Математика – Л. Рослова,
Начальная школа – М. Соловейчик,
Немецкий язык – М. Бузоева,
Русский язык – Л. Гончар,
Спорт в школе – О. Леонтьева,
Управление школой – Я. Сартан,
Физика – Н. Козлова,
Французский язык – Г. Чесновицкая,
Химия – О. Блохина,
Школьный психолог – И. Вачков

УЧРЕДИТЕЛЬ: ООО «ЧИСТЫЕ ПРУДЫ»
Зарегистрировано ПИ №ФС77-44335 от 21.03.11
в Министерстве РФ по делам печати
Подписано в печать: по графику 10.11.11, фактически 10.11.11 Заказ №
Отпечатано в ОАО «Чеховский полиграфический комбинат»
ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: **(499) 249-3138**
Отдел рекламы: **(499) 249-9870**
Сайт: **1september.ru**

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: **(499) 249-4758**
E-mail: **podpiska@1september.ru**

В НОМЕРЕ

ТЕМА НОМЕРА: ИЗ ОПЫТА ЕГЭ

К материалам, обозначенным этим символом, есть приложение на CD-диске.
Также на CD-диске вы найдете:
- Это вы читали в 2011 году;
- Постеры-2011: «Числа»

Уважаемые подписчики бумажной версии журнала «Математика»!
Теперь вы можете получать и электронную версию нашего журнала.
Для этого:
1. Зайдите на интернет-сайт www.1september.ru
2. Зарегистрируйте личный кабинет (если у вас его еще нет)
3. В личном кабинете в разделе «Издания/Коды доступа» введите код SE-02517-12471.

МАТЕМАТИКА
Методический журнал для учителей математики
Издается с 1992 г. Выходит один раз в месяц

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, И. Бокова, О. Макарова
Дизайн макета и обложки: И. Лукьянов
Корректор: Л. Громова
Верстка: Л. Кукушкина

Распространяется по подписке
Цена свободная Тираж 10 000 экз.
Тел. редакции: **(499) 249-3460**
E-mail: **mat@1september.ru**
Сайт: **mat.1september.ru**

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Роспечать: бумажная версия – **32030**; электронная версия – **26113;**
Почта России: бумажная версия – **79073**; электронная версия – **12717**

О ТОЛЕРАНТНОСТИ СМЕЖНЫХ УГЛОВ

Л. РОСЛОВА

Разговор в редакции:

— Сегодня был на открытом уроке одной знакомой учительницы, она давала урок геометрии в 7-м классе. Для аттестации. После уроков помогал ей заполнять бланк анализа урока. Там один из пунктов, на который надо было ответить, «Каким образом в ходе урока происходило формирование толерантного сознания учащихся». Не знали, как и выкрутиться…

— А тема урока какая?

— Смежные углы.

— О, так ей повезло. Смежные углы — они же самые что ни на есть толерантные! Смотрите: сторона общая, образуют развернутый угол. Не то что вертикальные — друг в друга острием упершиеся.

Мы посмеялись. Но хорошо смеяться, если это не тебе надо сочинять, доказывая свое право учить детей математике, что воспитывает она патриотизм, формирует компетенции, развивает толерантность и прочее и прочее. Доказывая, что не ерунде какой-то (вроде смежных углов) детей учишь, а серьезными вещами занимаешься, находишься в русле современных тенденций, в фарватере модернизации.

Просто качественно учить, без шаманства новомодными концепциями и теориями от образования, сегодня немодно.

Понятие толерантности многогранно, оно включает в себя самые разные стороны межличностных отношений. В одной неглупой статье о толерантности (неглупой хотя бы потому, что в ней не говорилось о том, что каждый учитель-предметник на каждом уроке должен формировать это качество) утверждается, что толерантность — это не просто способность «терпеть рядом другого». Это умение «сотрудничать с другим»: договариваться, находить точки соприкосновения, идти на компромиссы. Умение «мирно убедить другого» в своей правоте, отстоять свое мнение. А активная толерантность — это способность заступиться за униженного, защитить права другого. Как нам этого сегодня не хватает! Причем не только в обществе, но и в школе. И не только в отношениях между учащимися, но и в отношениях учителей к детям. Увы, это так.

И начинать что-то воспитывать надо с толерантного отношения к самому учителю. Терпимость — это понимание, что учителя надо воспринимать таким, какой он есть, и создавать условия для его профессионального становления и развития. А шараханье от одной доктрины к другой и заполнение кип бумаг сомнительного содержания с очевидностью для любого здравомыслящего человека способствует лишь профессиональному выгоранию. И только.

А. ПАВЛОВ,
г. Лобня, Московская обл.


Фото Л. Рословой

ОСОБЕННОСТИ ЕГЭ-2011

Когда читаешь статьи о ЕГЭ, то обычно встречаешь в них политизированную дискуссию о плюсах и минусах новой формы аттестации выпускников. Причем часто проблемы реализации ЕГЭ выдаются за проблемы самого экзамена. В данной статье мы уйдем от политики, не будем говорить о соотношении КИМ и учебников, структуре экзамена и касаться ряда других вопросов. Вместо этого рассмотрим некоторые особенности ЕГЭ по математике в 2011 году.

В статье использованы материалы открытых вариантов ЕГЭ 2011 года, разработанные ФИПИ.

Внешне контрольные измерительные материалы ЕГЭ 2011 года по математике практически не отличались от материалов, используемых в 2010 году. Первая часть экзаменационной работы содержала 12 заданий с кратким ответом базового уровня сложности, проверяющих основные вычислительные и логические умения и навыки, навыки аналитических преобразований, умения анализировать информацию, представленную в текстах, графиках и таблицах, ориентироваться в простейших геометрических конструкциях.

Во вторую часть работы были включены 6 заданий с развернутым ответом:

C1 — тригонометрическое уравнение с отбором корней;
C2 — задание по стереометрии;
C3 — логарифмическое неравенство;
C4 — задача по планиметрии;
C5 — система с параметром;
C6 — «олимпиадная» задача.

Задания этой части предназначались для проверки знаний, умений и навыков на том уровне требований, который традиционно предъявляется вступительными экзаменами по математике при поступлении в технические вузы. Последние три задания второй части предназначены для конкурсного отбора абитуриентов в ведущие университеты страны на специальности, предполагающие творческое владение математикой.

При выполнении заданий второй части были возможны различные способы решения и записи развернутого ответа. Решение должно было быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений экзаменуемого, в целом (метод, форма записи) решение могло быть произвольным – оценивалась степень полноты и обоснованности рассуждений независимо от конкретного хода решения.

И все-таки различия были.

❶ Пожалуй, по содержанию КИМ никогда не было столько положительных отзывов от учителей, как в этом году. Все 6 задач части С — относительно несложные для учащихся, знающих школьный курс математики и имеющих соответствующий уровень математического мышления, и вполне по силам не только одаренным в области математики ученикам, а всем выпускникам, которые ответственно относились к учебе в школе и серьезно подошли к подготовке к самому экзамену.

Рассмотрим решения задач группы С и основные ошибки учащихся.

С1. Решите уравнение

$$\left(4\sin^2 x+12\sin x+5\right)\sqrt{-17\cos x}=0.$$

Решение.

Если $\cos x > 0$, то решений нет.

Если $\cos x = 0$, то $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$

Если $\cos x < 0$, то $4\sin^2 x + 12\sin x + 5 = 0$, откуда $\sin x = -2{,}5$ или $\sin x = -0{,}5$.

Уравнение $\sin x = -2{,}5$ не имеет решений.

Из уравнения $\sin x = -0{,}5$, учитывая, что $\cos x < 0$, получаем:

$$x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ n,k\in \boldsymbol{Z}.$

Критерии оценивания:

- обоснованно получен верный ответ — 2 балла;
- верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно, отбор найденных значений или не произведен, или произведен неверно — 1 балл;
- решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше, — 0 баллов.

Абсолютно несложное уравнение. Но отметим, что тригонометрических уравнений с отбором корней в школьных учебниках практически нет. Многие учащиеся допускали две ошибки:

— «забывали» решать второе уравнение ($\cos x = 0$);

— не производили или производили неправильно отбор корней с учетом ОДЗ уравнения.

С2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 2, найдите расстояние от точки B до прямой A_1F_1.

Решение. Так как $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, то прямые BE и AF параллельны, параллельны также прямые A_1F_1 и AF, следовательно, прямые A_1F_1 и BE параллельны. Расстояние от точки B до прямой A_1F_1 равно расстоянию между прямыми A_1F_1 и BE (рис. 1).

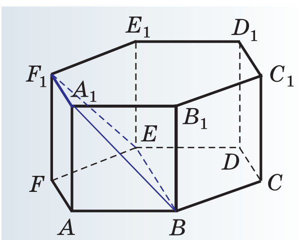


Рис. 1

В трапеции BA_1F_1E (рис. 2) $A_1F_1 = 2$, $BE = 4$, $BA_1=EF_1=2\sqrt{2},\ EH=\frac{BE-A_1F_1}{2}=\frac{4-2}{2}=1.$

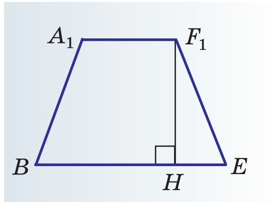


Рис. 2

Тогда $F_1H=\sqrt{7}.$

Ответ: $\sqrt{7}$.

Критерии оценивания:

- обоснованно получен верный ответ — 2 балла;
- решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено — 1 балл;
- решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше, — 0 баллов.

Иными словами, надо было только «достроить трапецию», а далее с задачей мог справиться любой хорошист.

Второй способ — применение формулы расстояния от точки до прямой — явно нерационален и арифметически непрост.

«Изюминка» задания как раз и состояла в умении увидеть несложное дополнительное построение, сводящее задачу к планиметрической.

С3. Решите неравенство

$$9\log_{12}\left(x^2-3x-4\right)\le 10+\log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}.$$

Решение.

Найдем значения x, при которых определены обе части неравенства:

$$\begin{cases} x^2-3x-4>0, \\ \dfrac{(x+1)^9}{x-4}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-4)>0, \\ \dfrac{(x+1)^9}{x-4}>0, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

Для таких x получаем:

$$9\log_{12}\left(x^2-3x-4\right)+\log_{12}\frac{x-4}{(x+1)^9}=$$

$$=\log_{12}\frac{(x-4)^9(x+1)^9(x-4)}{(x+1)^9}=\log_{12}(x-4)^{10}.$$

Исходное неравенство примет вид:

$$\log_{12}(x-4)^{10} \le 10.$$

Так как $(x-4)^{10} \ge 0$, то при условии $x \ne 4$ имеем:

$$\log_{12}(x-4)^{10} \le 10; \qquad (x-4)^{10} \le 12^{10};$$

$$(x-4)^2 \le 12^2; \qquad (x-16)(x+8) \le 0,$$

откуда $x \in [-8; 4) \cup (4; 16]$.

Учитывая, что $x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$, получаем: $x \in [-8; -1) \cup (4; 16]$.

Ответ: $[-8; -1)$, $(4; 16]$.

Критерии оценивания:

• обоснованно получен верный ответ — 3 балла;

• обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным количеством значений переменной, при которых определены обе части исходного неравенства, — 2 балла;

• произведен переход от исходного неравенства к неравенствам, которые не содержат логарифмов и являются следствиями исходного неравенства. Возможно, ограничения, при которых исходное неравенство имеет смысл, отсутствуют или найдены неверно — 1 балл;

• решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше, — 0 баллов.

Опять несложное неравенство. Но подавляющее число учащихся «попалось» на двух моментах:

— если учащийся решал неравенство методом потенцирования (оно и представлено выше), то часто после неравенства $(x+9)^2 \le 11^2$ писалось $x+9 \le 11$, а не $|x+9| \le 11$;

— если учащийся решал неравенство методом логарифмирования, то уже в самом начале делалась ошибка, связанная с незнанием свойства логарифмов:

$$\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|.$$

Модули также бесследно исчезали, и ответ получался неполным.

С4. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключенный внутри треугольника, равен 10, а отношение катетов треугольника равно $\frac{5}{12}$.

Решение.

Обозначим данный треугольник ABC, $AB = 13x$ — гипотенуза, $AC = 12x$, $BC = 5x$. Заметим, что окружность, о которой говорится в условии, — окружность, вписанная в треугольник ABC. Пусть O — ее центр, а D и E — точки касания с катетами AC и BC соответственно. Тогда, так как $ODCE$ — квадрат, радиус этой окружности

$$OD = EC = \frac{AC+BC-AB}{2} = \frac{12x+5x-13x}{2} = 2x.$$

Пусть прямая MN перпендикулярна AB, касается окружности и пересекает AB в точке M, а AC в точке N (рис. 3).

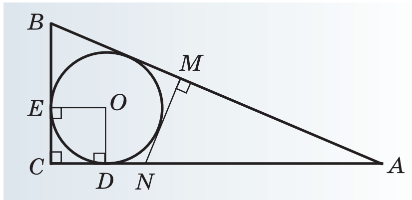


Рис. 3

Прямоугольный треугольник ANM подобен треугольнику ABC. В нем $MN = 10$, $AM = 24$, $AN = 26$. У описанного четырехугольника суммы противоположных сторон равны:

$$BC + MN = BM + CN,$$

$$5x + 10 = (13x - 24) + (12x - 26),$$

откуда находим:

$$x = 3,\ OD = 6.$$

Пусть прямая MN перпендикулярна AB, касается окружности, пересекает AB в точке M, а BC в точке N (рис. 4).

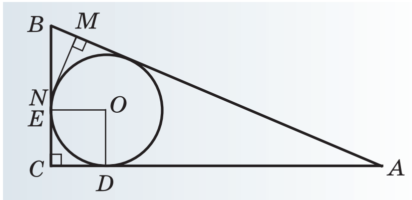


Рис. 4

Прямоугольный треугольник NBM подобен треугольнику ABC. В нем

$$MN = 10,\ BM = \frac{25}{6},\ BN = \frac{65}{6}.$$

У описанного четырехугольника суммы противоположных сторон равны:

$$AC + MN = AM + CN,$$

$$12x + 10 = \left(13x - \frac{25}{6}\right) + \left(5x - \frac{65}{6}\right),$$

откуда находим:

$$x = \frac{25}{6},\ OD = \frac{25}{3}.$$

Ответ: 6 или $\frac{25}{3}$.

Критерии оценивания:

• обоснованно получен верный ответ — 3 балла;

• рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины, — 2 балла;

• рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки — 1 балл;

• решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше — 0 баллов.

C5. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-5)^2+(y-4)^2=9, \\ (x+2)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Если $x \geq 0$, то уравнение $(|x|-5)^2+(y-4)^2=9$ задает окружность ω_1 с центром в точке $C_1(5;\ 4)$ радиуса 3, а если $x < 0$, то оно задает окружность ω_2 с центром в точке $C_2(-5;\ 4)$ того же радиуса (рис. 5).

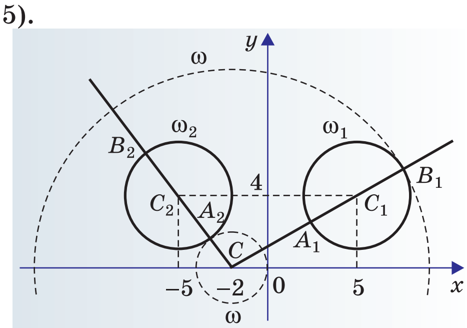


Рис. 5

При положительных значениях параметра a уравнение $(x+2)^2+y^2=a^2$ задает окружность ω с центром в точке $C(-2;\ 0)$ радиуса a. Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения параметра a, при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2.

Из точки C проведем луч CC_1 и обозначим через A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью ω_1, где A_1 лежит между C и C_1. Так как

$$CC_1=\sqrt{(5+2)^2+4^2}=\sqrt{65},$$

то

$$CA_1=\sqrt{65}-3,\ \ CB_1=\sqrt{65}+3.$$

При $a < CA_1$ или $a > CB_1$ окружности ω и ω_1 не пересекаются.

При $CA_1 < a < CB_1$ окружности ω и ω_1 имеют две общие точки.

При $a = CA_1$ или $a = CB_1$ окружности ω и ω_1 касаются.

Из точки C проведем луч CC_2 и обозначим A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью ω_2, где A_2 лежит между C и C_2. Так как

$$CC_2=\sqrt{(-5+2)^2+4^2}=5,$$

то

$$CA_2=5-3=2,\ CB_2=5+3=8.$$

При $a < CA_2$ или $a > CB_2$ окружности ω и ω_2 не пересекаются.

При $CA_2 < a < CB_2$ окружности ω и ω_2 имеют две общие точки.

При $a = CA_2$ или $a = CB_2$ окружности ω и ω_2 касаются.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается ровно одной из двух окружностей ω_1 и ω_2 и не пересекается с другой. Так как $CA_2 < CA_1 < CB_2 < CB_1$, то условию задачи удовлетворяют только числа $a = 2$ и $a=\sqrt{65}+3$.

Ответ: 2, $\sqrt{65}+3$.

Критерии оценивания:

• обоснованно получен верный ответ — 4 баллы;

• с помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но или в ответ включены также и одно-два неверных значения, или решение недостаточно обосновано — 3 балла;

• с помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра — 2 балла;

• задача сведена к исследованию или взаимного расположения трех окружностей, или двух квадратных уравнений с параметром — 1 балл;

• решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше, — 0 баллов.

C6. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно −3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение. Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $4k-8l+0\cdot m=-3(k+l+m)$.

а) Заметим, что в левой части каждое слагаемое делится на 4, поэтому $k+l+m$ — количество целых чисел — делится на 4. По условию $40 < k+l+m < 48$, поэтому $k+l+m=44$. Таким образом, написано 44 числа.

б) Приведем равенство $4k-8l=-3(k+l+m)$ к виду $5l=7k+3m$. Так как $m \geq 0$, получаем, что $5l \geq 7k$, откуда $l > k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) (*Оценка*.) Подставим сумму $k+l+m=44$ в правую часть равенства $4k-8l=-3(k+l+m)$: $4k-8l=-132$, откуда $k=2l-33$. Так как $k+l \leq 44$, получаем: $3l-33 \leq 44$, $3l \leq 77$, $l \leq 25$, $k=2l-33 \leq 17$; то есть положительных чисел не более 17.

в) (*Пример*.) Приведем пример, когда положительных чисел ровно 17. Пусть на доске 17 раз написано число 4, 25 раз написано число –8 и два раза написан 0. Тогда

$$\frac{4\cdot 17-8\cdot 25}{44}=\frac{68-200}{44}=-3,$$

указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 44; б) отрицательных; в) 17.

Критерии оценивания:

• верно выполнены: а), б), в) (пример), в) (оценка) — 4 балла;

• верно выполнены три пункта из четырех: а), б), в) (пример), в) (оценка), — 3 балла;

• верно выполнены два пункта из четырех: а), б), в) (пример), в) (оценка), — 2 балла;

• верно выполнен один пункт из четырех: а), б), в) (пример), в) (оценка), — 1 балл;

• решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше, — 0 баллов.

Олимпиадная задача на уровне городской (районной) олимпиады для 7–8-х классов. Многие школьники ошибались при ее решении, забыв, что, кроме положительных и отрицательных чисел, в последовательности могли быть и нули.

В целом — «красивая группа С». Все задачи несложные, и для их решения необходима только систематическая работа учащегося.

❷ На ЕГЭ-2010 выпускники в среднем набирали 8–9 первичных баллов, в 2011 году уже 10–11 первичных баллов. Конечно, группа В была попроще, чем в прошлом году, но можно отметить и то, что учителя стали активно пользоваться открытым банком задач по математике, решать и анализировать диагностические и тренировочные работы системы «Статград», которые не дублируют демоверсию ЕГЭ, а позволяют своевременно выявить проблемы в знаниях, отследить прогресс в ходе итогового повторения. Почти все задания части В не раз встречались в диагностических и тренировочных работах. Поэтому по-прежнему участие в тренировочных и диагностических работах МИОО — важный ресурс подготовки к сдаче ЕГЭ.

Для подготовки к части В были полезны методические пособия под редакцией А.Л. Семенова и И.В. Ященко «В1–В12», метко названные учителями и школьниками «витамины». Выстроенные последовательности заданий — от самых элементарных задач к заданиям ЕГЭ — позволяют эффективно восстановить математические навыки, снизить процент ошибок.

❸ В 2010–2011 учебном году в Интернете появился ряд полезных электронных пособий по подготовке к ЕГЭ. Отметим лишь два наиболее значимых и приближенных к реальному ЕГЭ.

Во-первых, это дистанционная обучающая система «Решу ЕГЭ», сделанная на базе банка открытых заданий.

Учащийся может пройти ряд тестов по подготовке как к части В, так и к части С. А учитель может составлять любое количество вариантов ЕГЭ или тематических работ, выбирая нужные прототипы заданий. Сочетание хорошего содержания и дружественного интерфейса программы делает ее отличным пособием для качественной подготовки к ЕГЭ.

Во-вторых, это пособия А.Г. Корянова и А.А. Прокофьева по группе С. В каждом из шести пособий, С1, С2, ..., С6, можно найти все типы заданий, которые были на ЕГЭ-2011. Иными словами, впервые стал возможен элемент натаскивания на группу С. Плохо это или хорошо — можно подискутировать. Но ценность пособий — в систематизации и обобщении различных методов решения заданий повышенной сложности. Глубокое изучение пособий и прохождение соответствующего практикума значительно повышает уровень математического мышления учащегося.

Следует отметить, правда, что открытый банк заданий и интернет-ресурсы являются дополнительными (хотя и важными) методическими материалами для учителей и выпускников. Их чрезмерное использование может привести к ненужному доминированию данных заданий над содержанием действующих школьных учебников, процесс обучения математике в школе может быть сведен лишь к «натаскиванию» на запоминание текстов решений, что вредно с точки зрения образования и неэффективно в смысле подготовки к экзамену.

Для серьезной математической подготовки, необходимой для успешного решения заданий группы С, можно порекомендовать проверенные временем пособия. В первую очередь это наиболее популярное и систематически выстроенное пособие В.В. Ткачука «Математика — абитуриенту», а также различные задачники, предназначенные для подготовки к поступлению в технические вузы.

Главный вывод, который хотелось бы сделать: формы и структура экзаменов меняются, а математика вечна. Ключ к успеху учащегося на экзамене лежит, прежде всего, в планомерном и систематическом изучении науки, а не в процессе «натаскивания» на различные типы задач.

Л. СЕРДЮКОВА,
г. Сочи, Краснодарский край

Задание B8

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

При изучении темы «Геометрический смысл производной» учащиеся часто путаются при ответах на вопросы по графику функции и графику производной. Данная работа дает возможность сравнить правила выполнения похожих заданий по графику функции и графику ее производной, показывая различия в решении задач.

Предлагаемые материалы могут быть использованы как на уроках изучения данной темы, так и при подготовке к ЕГЭ (задание B8). Материалы состоят из двух частей. Первая часть — демонстрационный вариант с решениями и аналогичными заданиями для самопроверки ученика. После объяснения темы, а при подготовке к ЕГЭ после повторения основных вопросов учитель может раздать демонстрационный вариант для дальнейшего самостоятельного изучения темы или в качестве домашней работы. После обсуждения вопросов, возникших в ходе работы над первой частью, учащимся предлагается выполнить тест по теме «Геометрический смысл производной» (6 вариантов теста помещены на CD-диске). Каждый вариант состоит из 8 заданий. Задания расположены в две колонки: слева стоят задания, в которых используется график функции, а справа — аналогичные задания по графику производной.

Источники и интернет-ресурсы:

1. *Коннова Е.Г.* и др. Математика. Базовый уровень. ЕГЭ-2011. — Ростов-на-Дону: Легион-М, 2010.

2. *Семенов А.Л.* ЕГЭ: 3000 задач с ответами по математике. — М.: Экзамен, 2011.

3. *Власова А.П.* и др. Математика. 500 учебно-тренировочных заданий для подготовки к ЕГЭ. — М.: Астрель. 2010.

4. Математика. Типовые тестовые задания / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. — М.: Экзамен, 2011.

5. *Лаппо Л.Д., Попов М.А.* Практикум по выполнению типовых тестовых заданий ЕГЭ. — М.: Экзамен. 2011.

6. Открытый банк задач ЕГЭ по математике. Задание B8. BRL: http://mathege.ru/or/ege/ShowProblems.html?posMask=128.

Ответы к тесту

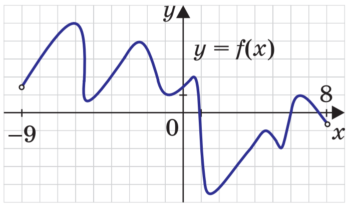
№ задания	Ответ
1	5
2	5
3	2
4	0,5
5	4
6	2
7	2
8	0

К материалу есть приложение на CD-диске.

Геометрический смысл производной. Задания по графику функции

Демонстрационный вариант

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-9; 8)$. Используя рисунок, выполните задания 1–3.

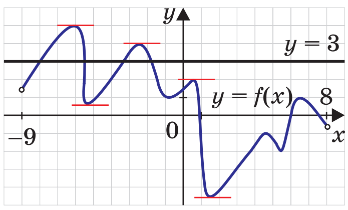


Задание 1.

Найдите количество точек на отрезке $[-8; 3]$, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 3$.

Решение. Нарисуем прямую $y = 3$.

Проведем касательные к графику функции, параллельные прямой $y = 3$. По рисунку найдем число этих касательных, а следовательно, и искомых точек. Оно равно 6.



Ответ: 6.

Задание 2.

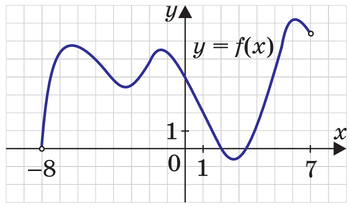
Определите количество точек с целыми отрицательными абсциссами, в которых производная функции положительна.

Решение. Производная функции положительна, если функция возрастает. Значит, нас интересуют те точки с отрицательными целыми абсциссами, где функция возрастает, то есть точки $x = -8; -7; -5; -4$. Их количество равно 4.

Ответ: 4.

Сделай по образцу и проверь себя

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8; 7)$. Используя рисунок, выполните задания 1–3.

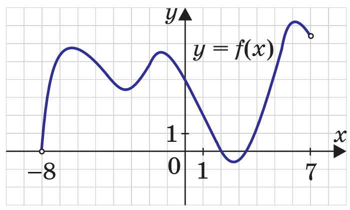


Задание 1.

Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -2$.

Решение. Нарисуем прямую $y =$ ____.

Проведем касательные к графику функции, ____________________ прямой $y = -2$. По рисунку найдем число этих ________________, а следовательно, и искомых _______ Оно равно ____.



Ответ: _____.

Задание 2.

Определите количество точек с целыми положительными абсциссами, в которых производная функции отрицательна.

Решение. Производная функции отрицательна, если функция ______________. Значит, нас интересуют те точки ______________ целыми ______________, где функция _____________, то есть точки $x =$ ____; ___. Их количество равно ____.

Ответ: _____.

Демонстрационный вариант

Задание 3.

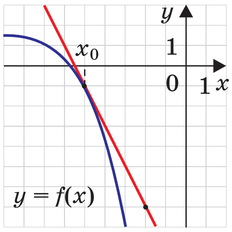
Найдите количество точек экстремума функции.

Решение. Точки экстремума функции — это точки максимума и минимума («холмики» и «впадинки» на графике функции). В нашем случае их 9.

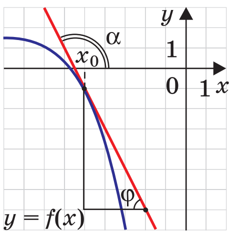
Ответ: 9.

Задание 4.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение. $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол, который образует касательная с положительным направлением оси Ox. В точке x_0 функция убывает, следовательно, ее производная отрицательна и касательная образует тупой угол α с положительным направлением оси Ox. Из прямоугольного треугольника найдем тангенс угла φ, смежного с углом α.



Вспомним, что тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к прилежащему: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{6}{3} = 2$. Поскольку $\alpha + \varphi = 180°$, то $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(180° - \varphi) = -\operatorname{tg}\varphi = -2$.

Ответ: -2.

Сделай по образцу и проверь себя

Задание 3.

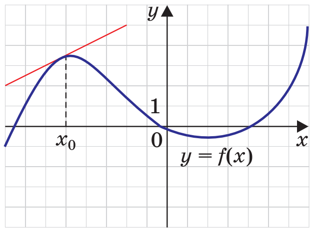
Найдите количество точек экстремума функции.

Решение. Точки экстремума функции — это точки минимума и ____________ (____________ и «холмики» на графике функции). Всего их ____.

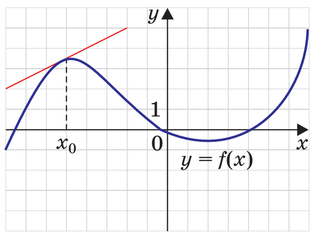
Ответ: ____.

Задание 4.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение. $f'(x) =$ _______, где α — угол, который образует касательная с _______________ направлением оси _____. В точке x_0 функция ______________, следовательно, ее производная __________ и касательная образует __________ угол α с положительным направлением оси Ox. Из прямоугольного треугольника найдем тангенс угла _____.



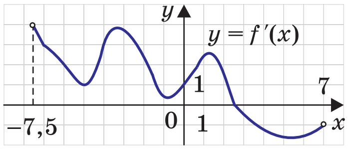
$\operatorname{tg}\alpha =$ ____.

Ответ: _____.

Геометрический смысл производной. Задания по графику производной

Демонстрационный вариант

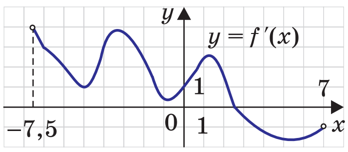
На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-7{,}5;\ 7)$. Используя рисунок, выполните задания 5–8.



Задание 5.

Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 1$ или совпадает с ней.

Решение. Касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна или совпадает с прямой $y = x + 1$, если ее угловой коэффициент $k = 1$. Но значение углового коэффициента касательной равно значению производной в точке касания, то есть нам нужно найти точки, в которых $f'(x) = 1$. Построим прямую $y = 1$, параллельную оси Ox.

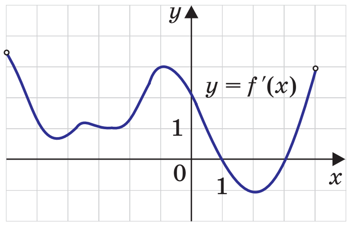


Эта прямая и график функции имеют 5 общих точек. Значит, в этих точках $f'(x) = 1$, и в них касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна или совпадает с прямой $y = x + 1$.

Ответ: 5.

Сделай по образцу и проверь себя

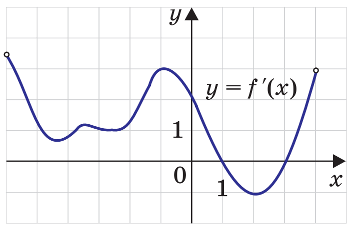
На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-5;\ 4)$. Используя рисунок, выполните задания 5–8.



Задание 5.

Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 14$ или совпадает с ней.

Решение. Касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна или совпадает с прямой $y = 2x + 14$, если ее угловой коэффициент $k =$ ___. Но значение углового коэффициента касательной равно значению ______________ в точке касания, то есть нам нужно найти точки, в которых $f'(x) =$ ____. Построим прямую $y =$ ____, параллельную оси _____.



Эта прямая и график функции имеют ____ общие точки. Значит, в этих точках $f'(x) = 2$, и касательная к графику функции $y = f(x)$ ______________ или совпадает с прямой $y = 2x + 14$.

Ответ: _____.

Демонстрационный вариант	Сделай по образцу и проверь себя
Задание 6. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на этом промежутке.	**Задание 6.** Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на этом промежутке.
Решение. Точка является точкой экстремума непрерывной функции, если при прохождении через эту точку производная меняет знак, то есть график производной пересекает ось Ox. На данном промежутке производная функции $y = f'(x)$ меняет знак 1 раз, поэтому и количество точек экстремума функции $y = f(x)$ на данном промежутке равно 1. *Ответ*: 1.	*Решение*. Точка является точкой экстремума ____________ функции, если при прохождении через эту точку ее производная __________ знак, то есть график производной пересекает ось _____. На данном промежутке производная функции $y = f'(x)$ меняет знак _____ раза, поэтому количество точек экстремума функции $y = f(x)$ на данном промежутке равно _____. *Ответ*: _____.
Задание 7. Найдите количество промежутков убывания функции.	**Задание 7.** Найдите количество промежутков возрастания функции.
Решение. Функция убывает на промежутках, где ее производная отрицательна (ниже оси Ox). По рисунку видно, что количество промежутков, где производная отрицательна, равно 1, следовательно, и количество промежутков убывания функции равно 1. *Ответ*: 1.	*Решение*. Функция возрастает на промежутках, где ее производная __________________. По рисунку видно, что количество промежутков, где производная ________________, равно ____, следовательно, и количество промежутков возрастания функции равно ____. *Ответ*: _____.
Задание 8. В какой точке отрезка $[-5; -2]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?	**Задание 8.** В какой точке отрезка $[-4; 0]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?
Решение. На отрезке $[-5; -2]$ производная положительна, следовательно, функция $f(x)$ возрастает на этом отрезке и принимает наименьшее значение при наименьшем значении x, то есть в левом конце отрезка при $x = -5$. *Ответ*: -5.	*Решение*. На отрезке $[-4; 0]$ производная ________________, следовательно, функция $f(x)$ ______________ на этом отрезке и принимает наибольшее значение при ________________ значении x, то есть при $x =$ ______. *Ответ*: ___________.

А. АЗЕВИЧ,
г. Москва

РАССТОЯНИЯ И УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Куб — красивое тело, которое изучают в школе. Правда, задач, связанных с ним, в учебнике геометрии мало. Между тем в этой фигуре наглядно просматриваются многие базовые понятия и теоремы. Стоит только внимательно приглядеться, и сложные и запутанные определения станут проще и понятнее. А если к нему обращаться почаще, то легче будет и задачи решать. Давайте попробуем в этом убедиться!

Расстояния в пространстве

Определения

Нарисуем куб, обозначим его вершины и вспомним все определения, связанные с расстояниями в пространстве (рис. 1).

Определение 1. Расстоянием между точками называется длина отрезка, соединяющего эти точки.

Например, на рисунке 1 расстояние между точками A_1 и C — длина отрезка A_1C.

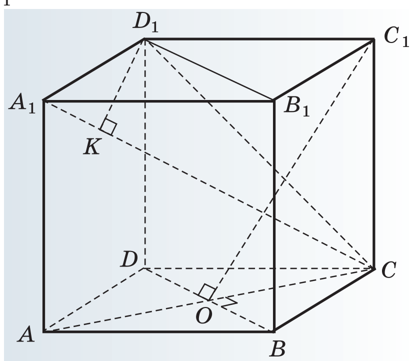


Рис. 1

Определение 2. Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на эту прямую.

Например, расстояние от точки D_1 до прямой A_1C — это длина перпендикуляра D_1K. Правда, не всегда в пространстве так легко опустить перпендикуляр из точки на прямую. Но об этом позже.

Определение 3. Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на эту плоскость.

Например, расстоянием от точки C до плоскости DBB_1 является отрезок CO. Не будем сейчас доказывать этот факт. Сделайте это самостоятельно!

К материалу есть приложение на CD-диске.

Литература

1. *Азевич А.И.* Задачи по геометрии. 10–11 классы. Дидактические материалы и контрольные работы. — М.: Школьная пресса, 2005.
2. Математика. Типовые тестовые задания / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. — М.: Экзамен, 2010.
3. Математика-2010. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий / общ. ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. — М.: Астрель, 2010.
4. *Смирнов В.А.* Задача С2. Геометрия. Стереометрия /под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2011.
5. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Геометрия. Расстояния и углы в пространстве. — М.: Экзамен, 2009.

Источники сети Интернет

www.fipi.ru
www.mioo.ru
www.mathege.ru
www.alexlarin.narod.ru
www.egetrener.ru

Определение 4. Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра. Кроме того, это расстояние между параллельными плоскостями, в которых лежат данные скрещивающиеся прямые.

Так, расстояние между прямыми AB и CC_1 — это длина их общего перпендикуляра BC.

Основные теоремы

Перед тем как приступить к решению простейших задач, вспомним несколько важных теорем.

Теорема 1 (*признак перпендикулярности прямой и плоскости*). Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости.

Так, например, прямая DD_1 перпендикулярна плоскости ABC, так как $DD_1 \perp AD$ и $DD_1 \perp DC$ (см. рис. 1).

Теорема 2 (*признак перпендикулярности плоскостей*). Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Плоскость DBB_1 перпендикулярна плоскости ABC по признаку перпендикулярности плоскостей.

Теорема 3 (*о трех перпендикулярах*). Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно ее проекции, перпендикулярна и самой наклонной. Справедлива и обратная теорема. Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно ей, перпендикулярна и проекции этой наклонной.

Расстояние от точки C_1 до прямой BD — длина отрезка C_1O (по теореме о трех перпендикулярах $C_1O \perp BD$).

Теорема 4. Если в одной из перпендикулярных плоскостей провести прямую, перпендикулярную их линии пересечения, то эта прямая будет перпендикулярна другой плоскости.

Теорема 5. Если одна из параллельных прямых перпендикулярна некоторой плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

Теорема 6. Если две прямые перпендикулярны некоторой плоскости, то они параллельны.

Теорема 7 (*признак параллельности прямой и плоскости*). Прямая, не пересекающая плоскость, параллельна плоскости, если она параллельна какой-нибудь прямой этой плоскости.

Теорема 8 (*признак параллельности плоскостей*). Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Простейшие задачи в кубе

Задача 1. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Найти расстояние между точками B_1 и M, где M — середина ребра AD.

Решение. 1. Соединим точки B_1 и M отрезком и спроектируем прямую MB_1 на плоскость ABC (рис. 2).

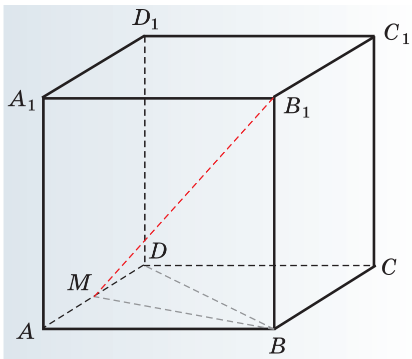


Рис. 2

2. Треугольник B_1BM — прямоугольный ($\angle B_1BM = 90°$) и $BB_1 = 2$.

3. Треугольник BAM — прямоугольный ($\angle MAB = 90°$). По теореме Пифагора

$$MB = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

4. Из треугольника B_1BM найдем искомое расстояние:

$$MB_1 = \sqrt{MB^2 + BB_1^2} = \sqrt{5+4} = 3.$$

Ответ: $MB_1 = 3$.

Задача 2. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Найти расстояние от точки D_1 до прямой AC.

Решение. 1. $AC \perp BD$ (как диагонали квадрата) (рис. 3).

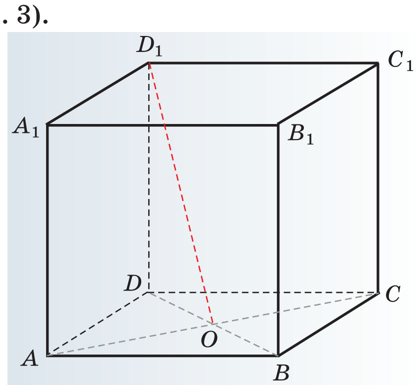


Рис. 3

2. $D_1O \perp AC$ (теорема 3), следовательно, D_1O — искомое расстояние.

3. Треугольник D_1DO — прямоугольный ($\angle D_1DO = 90°$) и $DD_1 = 2$.

$$OD = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(как радиус окружности, описанной около квадрата $ABCD$).

4. Из треугольника D_1DO по теореме Пифагора

$$D_1O = \sqrt{DO^2 + DD_1^2} = \sqrt{2+4} = \sqrt{6}.$$

Ответ: $D_1O = \sqrt{6}$.

Задача 3. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Найти расстояние от точки M — середины ребра CC_1 — до плоскости DBB_1.

Решение. 1. Прямая AC перпендикулярна плоскости BDD_1 (по теореме 1) (рис. 4).

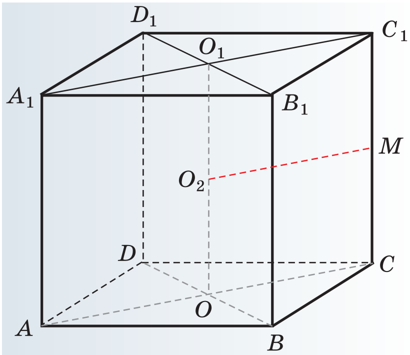


Рис. 4

2. Проведем в плоскости CAA_1 прямую MO_2, параллельную прямой AC. По теореме 5 прямая MO_2 перпендикулярна плоскости DBB_1. Следовательно, MO_2 — искомое расстояние.

3. $MO_2 = OC = \sqrt{2}$ (см. задачу 2, п. 3 решения).

Ответ: $MO_2 = \sqrt{2}$.

Задача 4. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Найти расстояние от прямой D_1C до прямой AA_1.

Решение. 1. Прямые D_1C и AA_1 — скрещивающиеся, следовательно, расстояние между ними — длина их общего перпендикуляра (рис. 5).

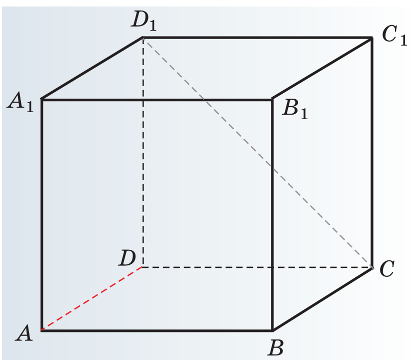


Рис. 5

2. Известно, что $AD \perp AA_1$. Кроме того, прямая AD перпендикулярна плоскости CDD_1, а следовательно, и прямой D_1C, лежащей в этой плоскости.

3. Таким образом, расстояние между данными прямыми — это длина отрезка AD. $AD = 2$.

Ответ: $AD = 2$.

Мы повторили основные определения и теоремы, решили простейшие задачи, связанные с расстояниями в пространстве. Спасибо кубу за помощь! В следующих разделах рассмотрим тему «Углы в пространстве» и задачи группы С2, предлагавшиеся на ЕГЭ.

Углы в пространстве

Определения

Для введения новых понятий вновь воспользуемся кубом (рис. 6).

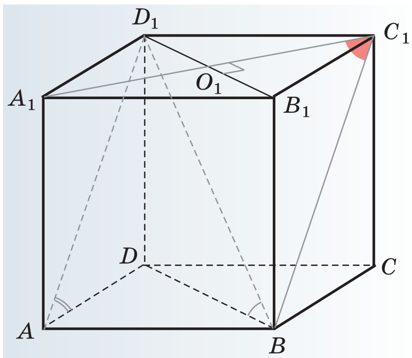


Рис. 6

Определение 5. Углом между прямыми называется меньший из углов, образовавшихся при их пересечении. Градусная мера угла изменяется от 0 до 90°. Угол между параллельными или совпадающими прямыми считается равным нулю. Угол между перпендикулярными прямыми равен 90°.

Угол между пересекающимися прямыми A_1C_1 и BC_1 — это угол A_1C_1B.

Определение 6. Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Угол между прямой BD_1 и плоскостью ABC — это угол D_1BD.

Определение 7. Углом между плоскостями называется меньший из углов, образовавшихся при пересечении этих плоскостей третьей плоскостью, перпендикулярной прямой пересечения данных плоскостей.

Угол между плоскостями ABC_1 и ABC — это угол D_1AD.

Определение 8. Углом между скрещивающимися прямыми называется угол, образованный пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным прямым.

Угол между прямыми BD и A_1C_1 — это угол $C_1O_1B_1$, который, как видно из рисунка 6, равен 90°.

Далее перейдем к решению простейших задач.

Задача 5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти угол между диагоналями A_1C_1 и BC_1.

Решение. 1. Проведем диагональ A_1B грани AA_1B_1B куба (рис. 7).

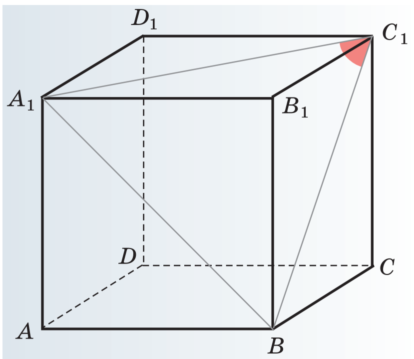


Рис. 7

2. Треугольник A_1C_1B — равносторонний, так как его стороны — диагонали равных квадратов.

3. Следовательно, угол этого треугольника равен 60°.

Ответ: $\angle A_1C_1B = 60°$.

Задача 6. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Найти угол между прямой D_1M и плоскостью ABC, где M — середина ребра BB_1.

Решение. 1. В плоскости DBB_1 выполним параллельный перенос прямой D_1M на вектор $\overrightarrow{MB}$ (рис. 8). Тогда точка D_1 перейдет в точку F ($D_1F = MB$).

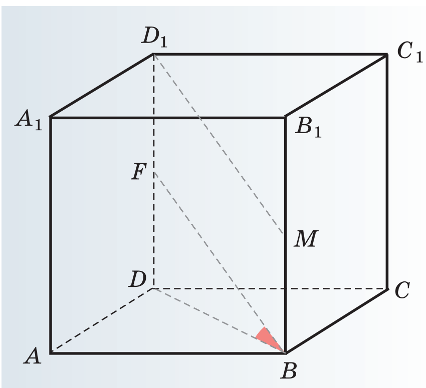


Рис. 8

2. Прямая BD — проекция прямой FB, а значит, и параллельной ей прямой D_1M на плоскость ABC. Угол FBD — искомый.

3. Из прямоугольного треугольника DAB по теореме Пифагора

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2\sqrt{2}.$$

4. Рассмотрим прямоугольный треугольник FDB:

$$\text{tg } \angle FBD = \frac{DF}{DB} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\angle FBD = \text{arctg } \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Задача 7. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Найти угол между плоскостями AD_1C и ABC.

Решение. 1. Плоскости AD_1C и ABC пересекаются по прямой AC (рис. 9).

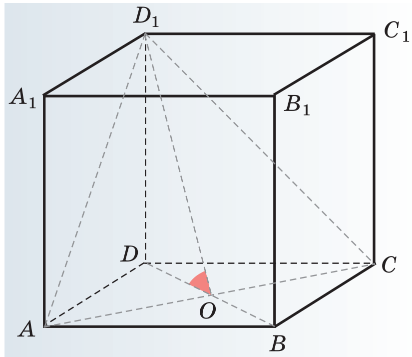


Рис. 9

2. $BD \perp AC$ (как диагонали квадрата).

3. $D_1O \perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах).

4. Следовательно, угол D_1OD — искомый.

5. Рассмотрим прямоугольный треугольник D_1DO. В нем DD_1=2, $DO = \sqrt{2}$ (см. задачу 2, п. 3):

$$\text{tg } \angle D_1OD = \frac{DD_1}{DO} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Ответ: $\angle DOD_1 = \text{arctg } \sqrt{2}$.

Задача 8. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Найти угол между прямыми MC и AK, где M — середина ребра D_1C_1, K — середина ребра A_1B_1.

Решение. 1. Плоскости A_1AB и D_1DC параллельны (по признаку параллельности плоскостей) (рис. 10). Проведем плоскость через прямые AK и AD. Она пересечет плоскость D_1DC по прямой DM.

2. По свойству параллельных плоскостей прямая AK параллельна прямой DM.

3. Следовательно, угол DMC — искомый.

4. $DM = CM$ (как соответствующие стороны равных прямоугольных треугольников DD_1M и C_1CM.

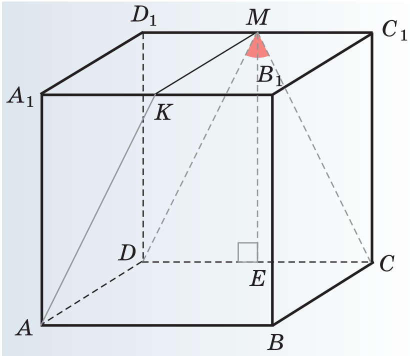


Рис. 10

5. Из прямоугольного треугольника DD_1M по теореме Пифагора

$$DM = \sqrt{DD_1^2 + MD_1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

6. В треугольнике DMC проведем высоту ME.

$$S_{DMC} = \frac{1}{2} DC \cdot ME.$$

Кроме того,

$$S_{DMC} = \frac{1}{2} DM \cdot CM \cdot \sin \angle DMC.$$

7. Тогда

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sin \angle DMC.$$

Откуда $\sin \angle DMC = 0{,}4$.

Ответ: $\angle DMC = \arcsin 0{,}4$.

После того, как вспомнили основные понятия и теоремы, связанные с решением задач на нахождение расстояний и углов в пространстве, можно перейти к типичным задачам группы С2.

Типичные задачи группы С2 ЕГЭ

Среди задач группы С2, предлагавшихся на Едином государственном экзамене, довольно трудно выделить типичные. И все же, проанализировав реальные варианты ЕГЭ, а также материал различных пособий для подготовки к экзамену, попробуем провести типологию задач.

Расстояния в пространстве

Задача 1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 1. Найти расстояние от точки C до прямой BD_1.

Решение. 1. Опустим перпендикуляр из точки C_1 на прямую BD_1 и рассмотрим треугольник BC_1D_1 (рис. 11).

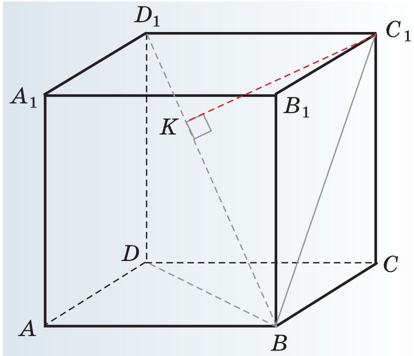


Рис. 11

2. Треугольник BC_1D_1 — прямоугольный, так как $BC_1 \perp D_1C_1$ (по теореме о трех перпендикулярах).

3. Из прямоугольного треугольника BCC_1 по теореме Пифагора

$$BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{2}.$$

4. Рассмотрим прямоугольный треугольник BDD_1. В нем $BD = BC_1 = \sqrt{2}$. По теореме Пифагора

$$BD_1 = \sqrt{BD^2 + DD_1^2} = \sqrt{3}.$$

5. Так как

$$S_{BC_1D_1} = \frac{1}{2} D_1C_1 \cdot BC \quad \text{и} \quad S_{BC_1D_1} = \frac{1}{2} BD_1 \cdot C_1K,$$

то

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot C_1K = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2}.$$

Из последнего равенства получим $C_1K = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ответ: $C_1K = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Задача 2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 1. Найти расстояние от точки B_1 до плоскости A_1BC_1.

Решение. 1. Рассмотрим правильную пирамиду $A_1BC_1B_1$. Основание пирамиды — правильный треугольник A_1BC_1 (рис. 12).

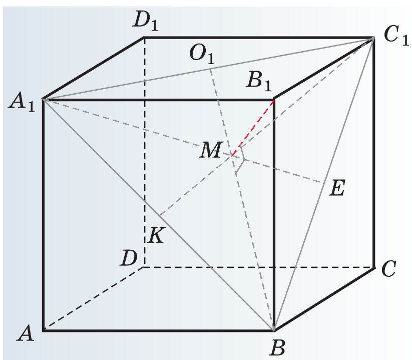


Рис. 12

Опустим перпендикуляр из точки B_1 на плоскость A_1BC_1. Нетрудно установить, что его основание M — точка пересечения медиан треугольника A_1BC_1. Следовательно, B_1M — это расстояние от точки B_1 до плоскости A_1BC_1.

2. Сторона треугольника A_1BC_1 — это диагональ грани куба, которая равна $\sqrt{2}$.

3. MB — радиус окружности, описанной около треугольника A_1BC_1:

$$MB = \frac{BA_1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

4. Из прямоугольного треугольника B_1MB по теореме Пифагора

$$MB_1 = \sqrt{BB_1^2 - MB^2} = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $MB_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 1. Найти расстояние между прямыми AD_1 и DC_1.

Решение. 1. Построим две параллельные плоскости, в которых лежат прямые AD_1и DC_1 (рис. 13).

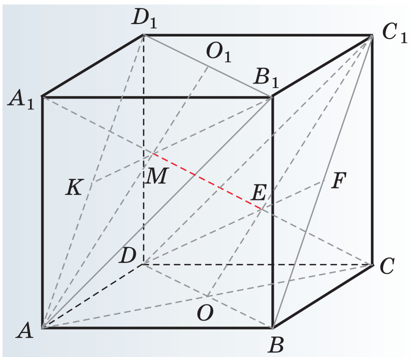


Рис. 13

2. Плоскости AD_1B_1 и BDC_1 параллельны по признаку параллельности плоскостей.

3. Прямая A_1C перпендикулярна плоскости AD_1B_1 (см. задачу 2), а следовательно, и плоскости BDC_1.

4. Пользуясь данными предыдущей задачи,

$$A_1M = CE = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5. Из прямоугольного треугольника A_1AC по теореме Пифагора $A_1C = \sqrt{3}$.

6. ME — расстояние между параллельными плоскостями AD_1B_1 и BDC_1, а следовательно, и между прямыми AD_1 и DC_1.

$$ME = A_1C - 2A_1M = \sqrt{3} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $ME = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Углы в пространстве

Задача 4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1. Найти угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

Решение. 1. Проведем плоскость ABC_1 (рис. 14). Плоскость ABC_1 перпендикулярна плоскости BCC_1 (по признаку перпендикулярности плоскостей).

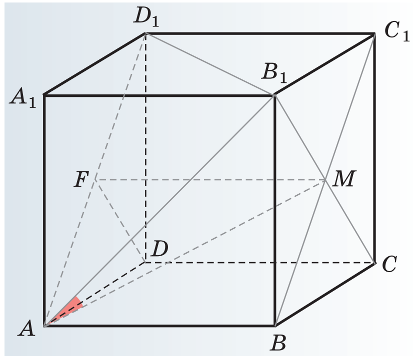


Рис. 14

2. $B_1C \perp BC_1$ (как диагонали квадрата).

3. $B_1M \perp ABC_1$, следовательно, $B_1M \perp AM$.

4. Получим $\angle B_1MA = 90°$. Угол B_1AM — искомый.

5. $BM = AF = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

6. Из прямоугольного треугольника AFM по теореме Пифагора

$$AM = \sqrt{AF^2 + FM^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

7. Рассмотрим треугольник AMB_1:

$$\operatorname{tg} \angle B_1AM = \frac{B_1M}{AM} = \frac{1}{\sqrt{2}} : \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\angle B_1AM = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = 30°.$$

Ответ: $\angle B_1AM = 30°$.

Задача 5. Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC, в котором $AC = BC = 6$, а один из углов равен 60°. На ребре CC_1 отмечена точка P так, что $CP : PC_1 = 2 : 1$. Найти тангенс угла между плоскостями ABC и ABP, если расстояние между прямыми AC и A_1B_1 равно $18\sqrt{3}$.

Решение. 1. Соединим точку P с точками A и B. $AP = BP$ (как наклонные, имеющие равные проекции) (рис. 15).

2. Проведем медиану MP треугольника APB, которая является и высотой, так как треугольник APB — равнобедренный (AB — основание).

3. Так как треугольник ABC — равнобедренный и один из его углов равен 60°, то он равносторонний.

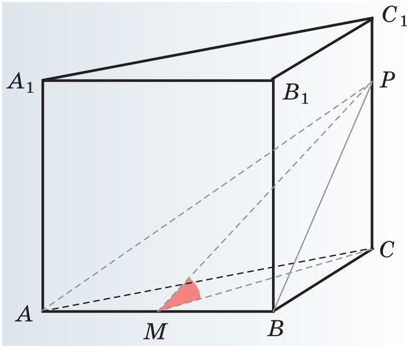


Рис. 15

4. Расстояние между прямыми AC и A_1B_1 — длина их общего перпендикуляра AA_1, $AA_1 = 18\sqrt{3}$.

5. Так как $CC_1 = AA_1 = 18\sqrt{3}$, то $PC = 12\sqrt{3}$.

6. Из прямоугольного треугольника BMC по теореме Пифагора
$$MC = \sqrt{BC^2 - MB^2} = \sqrt{36-9} = 3\sqrt{3}.$$
7. Из прямоугольного треугольника PCM:
$$\operatorname{tg} \angle PMC = \frac{PC}{MC} = \frac{12\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 4.$$

Ответ: $\operatorname{tg} \angle PMC = 4$.

Задача 6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 1. Найти угол между прямыми AD и BD_1.

Решение. 1. Выполним параллельный перенос прямой AD на вектор $\overline{AB}$. При этом прямая AD перейдет в прямую BC. Угол D_1BC — искомый (рис. 16).

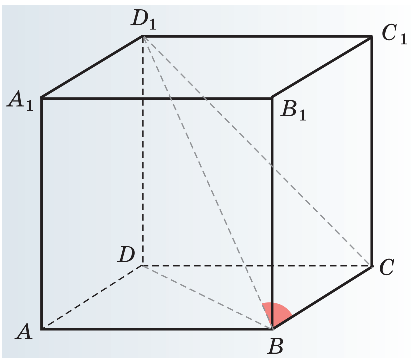


Рис. 16

2. В треугольнике BD_1C $BC = 1$, $CD_1 = \sqrt{2}$. Из прямоугольного треугольника D_1DB по теореме Пифагора
$$BD_1 = \sqrt{BD^2 + DD_1^2} = \sqrt{3}.$$

3. Обозначим α угол D_1BC. Треугольник BCD_1 — прямоугольный, так как $BC \perp DCC_1$, а следовательно, $BC \perp CD_1$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро равно 1. Точка O_1 — точка пересечения диагоналей верхней грани. Найдите расстояние от точки O_1 до прямой BC.

2. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки M — середины ребра BB_1 — до плоскости ACC_1.

3. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на диагоналях граней AD_1 и D_1B_1 взяты точки E и F так, что
$$D_1E = \frac{1}{3}AD_1,\quad D_1F = \frac{2}{3}D_1B_1.$$
Найдите длину отрезка EF.

4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 2, найдите расстояние от точки C до прямой E_1F_1.

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC $AB = 15\sqrt{3}$, $SC = 17$. Найдите угол между прямой, проходящей через середины ребер AS и BC, и плоскостью основания.

6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

7. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостью ABC и прямой EF, проходящей через середины ребер AA_1 и C_1D_1 соответственно.

9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D$ найдите угол между плоскостями AD_1C и AB_1C.

10. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: $AB = 3$, $AD = 4$, $CC_1 = 4$. Найдите угол между плоскостями BDD_1 и AD_1B_1.

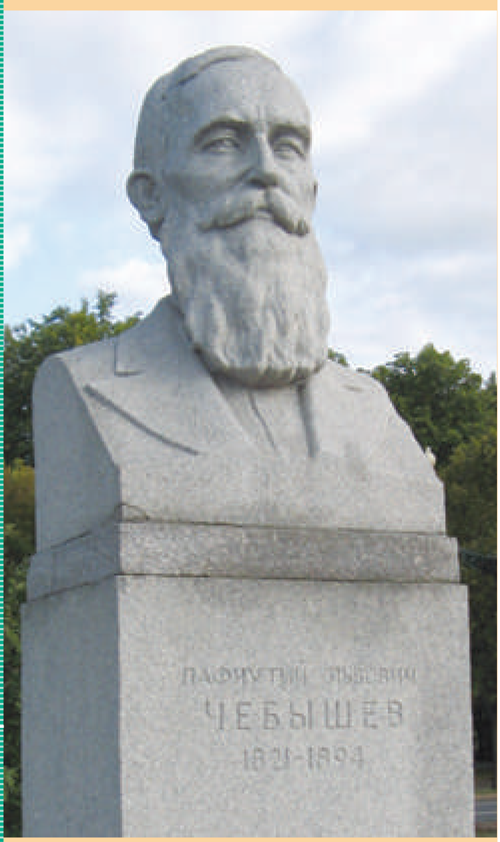
Ответы: **1.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **2.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **3.** $\frac{1}{3}$. **4.** 4. **5.** $\operatorname{arctg}\frac{4}{15}$. **6.** $\arccos 0{,}75$. **7.** 30°. **8.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **9.** $\arccos\frac{1}{3}$. **10.** $\arccos\frac{5}{\sqrt{34}}$.

Г. ФАЛИН, А. ФАЛИН,
г. Москва

Фото предоставлено авторами

НЕРАВЕНСТВА ЧЕБЫШЕВА

Неравенства Чебышева — это группа однотипных по внешнему виду и методу доказательства неравенств для вероятностей выхода случайной величины за некоторые границы. Они названы в честь великого русского математика и механика Пафнутия Львовича Чебышева, который в 1866 году доказал наиболее важное из этих неравенств и, что самое главное, применил его для простого доказательства одного из наиболее значимых результатов теории вероятностей, так называемого «закона больших чисел». Подробнее о неравенстве Чебышева в теории вероятностей можно прочитать в замечательном элементарном курсе теории вероятностей [1], написанном выдающимися советскими математиками Б.В. Гнеденко и А.Я. Хинчиным.



Бюст П.Л. Чебышева установлен в 1954 г. на Аллее ученых МГУ на Воробьевых горах.

В нашей статье мы расскажем о естественных аналогах некоторых неравенств Чебышева для обычных числовых наборов. Эти неравенства не требуют использования языка теории вероятностей, и их доказательства совершенно элементарны. С помощью этих неравенств можно глубже понять изучаемую в школе описательную статистику.

Эта тема представляется нам важной еще и в связи с патриотическим воспитанием учащихся средних школ на уроках математики. Как отмечал А.Я. Хинчин в своей статье «О воспитательном эффекте уроков математики» (сокращенный вариант этой статьи можно найти в [2]), наилучший способ для этого — рассказывать о понятных школьникам научных открытиях наших великих соотечественников. По мнению Хинчина, «этот прием, помимо впечатляющей силы воздействия, особенно ценен еще тем, что он значительно повышает интерес учащихся к истории математической науки, а во многих случаях дает повод и возможность эффективным образом ознакомить учащихся с математическими фактами, выходящими за пределы официальной программы и счастливым образом ее дополняющими». Особо выделяя двух великих русских математиков, Н.И. Лобачевского и П.Л. Чебышева, А.Я. Хинчин отмечает, что «значительно менее известны у нас творения... нашего великого ученого П.Л. Чебышева». Сам Хинчин рекомендует знакомить учащихся с деятельностью Чебышева в области теории чисел (просто в то время, когда Хинчин писал свою статью, школьная программа не давала других возможностей). Сейчас, в связи с введением в программу средней школы элементов статистики и теории вероятностей, уместно рассказать о результатах Чебышева в этой области.

Итак, пусть $x = [x_1;\ x_2;\ ...;\ x_n]$ — набор из n действительных чисел. Обозначим через $N(x \geq a)$ количество чисел набора, удовлетворяющих неравенству $x \geq a$, а через $\nu(x \geq a) = \frac{N(x \geq a)}{n}$ — долю таких чисел. Чтобы проиллюстрировать это обозначение, рассмотрим набор из 100 чисел:

27, 52, 43, 38, 47, 8, 21, 40, 32, 53, 45, 54, 35, 28, 40, 18, 31, 45, 24, 30, 37, 15, 39, 34, 48, 25, 30, 7, 32, 12, 26, 35, 48, 19, 33, 26, 17, 30, 42, 22, 53, 28, 42, 36, 23, 10, 34, 46, 16, 29, 35, 52, 41, 32, 21, 39, 55, 25, 29, 8, 36, 44, 26, 55, 34, 19, 42, 54, 27, 10, 45, 20, 31, 50, 18, 9, 41, 14, 38, 40, 23, 49, 33 15, 24, 46, 36, 28, 32, 37, 51, 20, 29, 47, 33, 27, 41, 22, 39, 40.

Этот набор мы взяли из учебника [3] , с. 251; числа набора — это время (в минутах), которое 100 выбранных наугад учеников гипотетической школы тратят на дорогу в школу.

Если $a = 45$, то, как нетрудно подсчитать, ровно 20 чисел из этого набора удовлетворяют неравенству $x \geq 45$. Поэтому для рассматриваемого набора $N(x \geq 45) = 20$, а $\nu(x \geq 45) = 0{,}2$. Величина $N(x \geq 45)$ показывает, сколько учеников тратят на дорогу достаточно большое время (по меньшей мере три четверти часа), и намного лучше характеризует набор, чем стандартные характеристики: среднее значение

$$M_x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

медиана μ_x и дисперсия

$$D_x = \frac{(x_1 - M_x)^2 + (x_2 - M_x)^2 + \ldots + (x_n - M_x)^2}{n}.$$

Еще интереснее величина $\nu(x \geq 45)$, которая говорит, что 20% учеников слишком долго (по меньшей мере три четверти часа) добираются до школы.

Если $a = 6$, то, как нетрудно определить, все числа набора удовлетворяют неравенству $x \geq 6$. Поэтому для рассматриваемого набора $N(x \geq 6) = 100$, а $\nu(x \geq 6) = 1$.

Если $a = 56$, то, как нетрудно определить, ни одно число набора не удовлетворяет неравенству $x \geq 56$. Поэтому для рассматриваемого набора $N(x \geq 56) = 0$, $\nu(x \geq 56) = 0$.

Первое неравенство Чебышева (его иногда называют неравенством Маркова), которое мы сейчас докажем, устанавливает связь между этими новыми характеристиками числового набора и основной мерой положения чисел набора, средним значением M_x.

Теорема 1. (*Неравенство Чебышева.*) Для произвольного набора $x = [x_1;\ x_2;\ ...;\ x_n]$ *неотрицательных* чисел и любого положительного числа a справедливо неравенство

$$\nu(x \geq a) \leq \frac{M_x}{a}.$$

Доказательство. Разобьем сумму

$$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

всех чисел набора на две суммы:

$$S = S' + S''.$$

В первую включим те члены набора, которые меньше, чем заданное число a, а во вторую — те члены набора, которые больше или равны a.

Поскольку наш набор состоит из неотрицательных чисел, сумма $S' \geq 0$. Если в наборе нет чисел меньших a — мы положим $S' = 0$, так что в любом случае верно неравенство $S' \geq 0$.

Вторая сумма состоит из $N(x \geq a)$ чисел набора, каждое из которых не меньше a. Поэтому $S'' \geq a \cdot N(x \geq a)$. Если в наборе нет чисел бóльших или равных a (то есть $N(x \geq a) = 0$) — мы положим $S'' = 0$, так что в любом случае верно неравенство

$$S'' \geq a \cdot N(x \geq a).$$

Теперь мы имеем:

$$M_x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{S' + S''}{n} \geq$$

$$\geq \frac{0 + a \cdot N(x \geq a)}{n} = a \cdot \nu(x \geq a),$$

что равносильно доказываемому неравенству Чебышева.

Метод, примененный при доказательстве теоремы 1, позволяет получить большое число других неравенств. В качестве примера мы докажем следующее утверждение, которое связывает медиану μ_x, среднее значение M_x, наименьшее $x_{(1)} \equiv \min(x_1; \ldots; x_n)$ и наибольшее $x_{(n)} \equiv \max(x_1; \ldots; x_n)$ числа набора.

Теорема 2.

Если набор $x = [x_1;\ x_2;\ ...;\ x_n]$ состоит из нечетного количества чисел, то

$$\frac{2n}{n+1} \cdot M_x - \frac{n-1}{n+1} \cdot x_{(n)} \leq \mu_x \leq \frac{2n}{n+1} \cdot M_x - \frac{n-1}{n+1} \cdot x_{(1)}. \qquad (1)$$

Если же количество чисел в наборе четно, то

$$\frac{2n}{n+2} \cdot M_x - \frac{n-2}{n+2} \cdot x_{(n)} \leq \mu_x \leq \frac{2n}{n+2} \cdot M_x - \frac{n-2}{n+2} \cdot x_{(1)}. \qquad (2)$$

Доказательство. Будем считать, что числа набора упорядочены по возрастанию: $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. Тогда

$x_{(1)} \equiv \min\,(x_1;\ ...;\ x_n) = x_1$, $x_{(n)} \equiv \max\,(x_1;\ ...;\ x_n) = x_n$.

Порядок, в котором расположены эти числа, не влияет на величину их суммы и, соответственно, на среднее значение набора.

Предположим, что $n = 2k + 1$, то есть набор состоит из нечетного количества чисел. Тогда медиана μ_x является $(k + 1)$-м в порядке возрастания членом набора: $\mu_x = x_{k+1}$. Запишем сумму S всех чисел набора в виде:

$$S = (x_1 + \ldots + x_k) + x_{k+1} + (x_{k+2} + \ldots + x_{2k+1}).$$

Все слагаемые в сумме $x_1 + \ldots + x_k$ первых k членов набора больше или равны $x_1 = x_{(1)}$ (напомним, что мы упорядочили числа набора по возрастанию), член x_{k+1} в точности равен медиане μ_x, а все слагаемые в сумме $x_{k+2} + \ldots + x_{2k+1}$, включающей k последних членов набора, больше или равны μ_x. Поэтому

$$S \geq kx_1 + (k+1)\mu_x.$$

Поскольку $S = nM_x$, а $k = \dfrac{n-1}{2}$, мы получим:

$$\mu_x \leq \frac{2n}{n+1} \cdot M_x - \frac{n-1}{n+1} \cdot x_{(1)}.$$

Для оценки с другой стороны отметим, что все слагаемые в сумме $x_1 + \ldots + x_k$ первых k членов набора меньше или равны μ_x, член x_{k+1} в точности равен медиане μ_x, а все слагаемые в сумме $x_{k+2} + \ldots + x_{2k+1}$, включающей k последних членов набора, меньше или равны $x_n = x_{(n)}$. Поэтому

$$S \leq kx_n + (k+1)\mu_x.$$

Поскольку $S = nM_x$, а $k = \dfrac{n-1}{2}$, мы получим:

$$\mu_x \geq \frac{2n}{n+1} \cdot M_x - \frac{n-1}{n+1} \cdot x_{(n)}.$$

Аналогичным образом рассматривается и случай, когда $n = 2k$, то есть набор состоит из четного количества чисел. Тогда медиана μ_x является средним арифметическим k-го и $(k + 1)$-го в порядке возрастания членов набора:

$$\mu_x = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}.$$

Запишем сумму S всех чисел набора в виде:

$$S = (x_1 + \ldots + x_{k-1}) + (x_k + x_{k+1}) + (x_{k+2} + \ldots + x_{2k}).$$

Все слагаемые в сумме $x_1 + \ldots + x_{k-1}$ первых $(k - 1)$ членов набора больше или равны x_1, сумма $x_k + x_{k+1}$ в точности равна $2\mu_x$, а все слагаемые в сумме $x_{k+2} + \ldots + x_{2k}$, включающей $(k - 1)$ последних членов набора, больше или равны μ_x (эти слагаемые не меньше x_{k+1}, которое, в свою очередь, не меньше, чем среднее арифметическое $\dfrac{x_k + x_{k+1}}{2} = \mu_x$). Поэтому

$$S \geq (k-1)x_1 + (k+1)\mu_x.$$

Поскольку $S = nM_x$, а $k = \dfrac{n}{2}$, мы получим:

$$\mu_x \leq \frac{2n}{n+2} \cdot M_x - \frac{n-2}{n+2} \cdot x_{(1)}.$$

Для оценки с другой стороны отметим, что все слагаемые в сумме $x_1 + \ldots + x_{k-1}$ первых $(k - 1)$ членов набора меньше или равны μ_x, сумма $x_k + x_{k+1}$ в точности равна $2\mu_x$, а все слагаемые в сумме $x_{k+2} + \ldots + x_{2k}$, включающей $(k - 1)$ последних членов набора, меньше или равны x_n. Поэтому

$$S \leq (k-1)x_n + (k+1)\mu_x.$$

Поскольку $S = nM_x$, а $k = \dfrac{n}{2}$, мы получим:

$$\mu_x \geq \frac{2n}{n+2} \cdot M_x - \frac{n-2}{n+2} \cdot x_{(n)}.$$

Замечание 1. Утверждение теоремы 2 неулучшаемо в том смысле, что существуют наборы, для которых оба доказанных двойных неравенства превращаются в точные равенства.

Например, если в случае нечетного $n = 2k + 1$ взять набор из k чисел 0 и $(k + 1)$ чисел 1 (тогда медиана равна 1, среднее значение равно $\dfrac{k+1}{n} = \dfrac{n+1}{2n}$, наименьшее значение равно 0, наибольшее значение равно 1), то в точное равенство превратится правая часть первого неравенства. Если же взять набор из $(k + 1)$ чисел 0 и k чисел 1 (тогда медиана равна 0, среднее значение равно $\dfrac{k}{n} = \dfrac{n-1}{2n}$, наименьшее значение равно 0, наибольшее значение равно 1), то в точное равенство превратится левая часть первого неравенства.

В случае четного $n = 2k$ можно взять набор из $(k - 1)$ чисел 0 и $(k + 1)$ чисел 1 (тогда медиана равна 1, среднее значение равно $\dfrac{k+1}{n} = \dfrac{n+2}{2n}$, наименьшее значение равно 0, наибольшее значение равно 1), то в точное равенство превратится правая часть второго неравенства. Если же взять набор из $(k + 1)$ чисел 0 и $(k - 1)$ чисел 1 (тогда медиана равна 0, среднее значение равно $\dfrac{k-1}{n} = \dfrac{n-2}{2n}$, наименьшее значение равно 0, наибольшее значение равно 1), то в точное равенство превратится левая часть второго неравенства.

Замечание 2. Если набор $x = [x_1; x_2; \ldots; x_n]$ состоит из *неотрицательных* чисел, то

$$\mu_x \leq 2M_x. \qquad (3)$$

Доказательство этого факта основано на простом следствии из неравенств (1) и (2) для наборов из неотрицательных чисел:

$$\mu_x \leq \begin{cases} \dfrac{2n}{n+1} \cdot M_x, \text{ если } n \text{ нечетно}, \\ \dfrac{2n}{n+2} \cdot M_x, \text{ если } n \text{ четно}. \end{cases}$$

Дроби $\dfrac{n}{n+1}$ и $\dfrac{n}{n+2}$ строго меньше 1, что влечет (3). Если исключить вырожденный случай, когда набор состоит из одних нулей, верно строгое неравенство $\mu_x < 2M_x$.

С помощью теоремы 1 можно легко получить еще одно неравенство. Обычно в учебниках по теории вероятностей именно его (точнее, его вероятностный аналог) называют неравенством Чебышева.

Теорема 3. (*Неравенство Чебышева для абсолютных отклонений от среднего.*) Для *произвольного* числового набора $x = [x_1; x_2; ...; x_n]$ и любого положительного числа a справедливо неравенство

$$\nu(|x - M_x| \ge a) \le \frac{D_x}{a^2},$$

то есть доля тех чисел набора, которые отклоняются от среднего значения на величину a или больше, не превосходит $\frac{D_x}{a^2}$.

Доказательство. Рассмотрим новый набор из n чисел, поученных из чисел исходного набора по формуле $y = (x - M_x)^2$:

$$y_1 = (x_1 - M_x)^2,$$
$$y_2 = (x_2 - M_x)^2,$$
$$.......$$
$$y_n = (x_n - M_x)^2.$$

Эти числа, очевидно, неотрицательны, и потому к ним применимо первое неравенство Чебышева, доказанное в теореме 1. При этом в качестве числа a мы возьмем число a^2:

$$\nu(y \ge a^2) \le \frac{M_y}{a^2}. \qquad (4)$$

Поскольку $y = (x - M_x)^2$, неравенство $y \ge a^2$ равносильно неравенству $(x - M_x)^2 \ge a^2$, или, после извлечения квадратного корня, неравенству $|x - M_x| \ge a$. Соответственно, количество чисел набора $y = [y_1; y_2; ...; y_n]$, удовлетворяющих неравенству $y \ge a^2$, совпадает с количеством чисел исходного набора $x = [x_1; x_2; ...; x_n]$, удовлетворяющих неравенству $|x - M_x| \ge a$:

$$N(y \ge a^2) = N(|x - M_x| \ge a) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \nu(y \ge a^2) = \nu(|x - M_x| \ge a).$$

Кроме того, среднее значение M_y, равное по определению

$$\frac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{n},$$

может быть переписано как

$$\frac{(x_1 - M_x)^2 + (x_2 - M_x)^2 + ... + (x_n - M_x)^2}{n},$$

то есть на самом деле равно дисперсии D_x исходного набора. Заменяя в неравенстве (4) $\nu(y \ge a^2)$ на $\nu(|x - M_x| \ge a)$, а M_y на D_x, мы и получим требуемый результат.

Чтобы проиллюстрировать применение доказанных неравенств Чебышева, рассмотрим набор, приведенный в начале статьи. Нетрудно подсчитать (хотя это довольно утомительно), что $M_x = 32{,}67$, $D_x = 150{,}9811$. Поэтому в случае $a = 45$ первое неравенство Чебышева примет вид: $0{,}2 \le \frac{32{,}67}{45}$, или, что то же самое, $0{,}2 \le 0{,}726$. Чтобы проиллюстрировать второе неравенство Чебышева, возьмем $a = 15$. Неравенству $|x - M_x| \ge 15 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \le 17{,}67$ или $x \ge 47{,}67$ удовлетворяет 25 чисел набора. Поскольку $D_x = 150{,}9811$, второе неравенство Чебышева примет вид $0{,}25 \le \frac{150{,}9811}{15^2}$, или, что то же самое, $0{,}25 \le 0{,}671027$. Конечно, эти числовые неравенства истинны. Но нельзя не отметить, что они довольно «грубые». Истинное значение неравенств Чебышева проявляется в теоретических рассмотрениях теории вероятностей и прежде всего при доказательстве знаменитого «закона больших чисел» (в связи с этим отметим, что $1 - \nu(x \ge a)$ фактически является эмпирической функцией распределения). Сам Чебышев доказал неравенство, называемое его именем, не в терминах описательной статистики, а на языке теории вероятностей, в связи с изучением предельного поведения среднего арифметического большого числа независимых случайных величин.

Сейчас мы рассмотрим одно применение неравенства Чебышева для анализа важной теоретической проблемы описательной статистики.

В школьных учебниках про среднее значение M_x обычно говорят, что числа набора *группируются* вокруг среднего значения, а дисперсия D_x характеризует величину рассеивания данных вокруг среднего арифметического. Однако обычные школьные определения среднего значения и дисперсии не дают никаких оснований для подобных утверждений. В особенности это относится к дисперсии, определение которой содержит смутные рассуждения о необходимости возведения в квадрат отклонений $x_i - M_x$ для того, чтобы «стереть» знаки у этих отклонений (на самом деле для этого естественно просто взять модули отклонений, но как же тогда объяснить смысл введения дисперсии?).

Неравенство Чебышева позволяет немного прояснить этот вопрос. Прежде всего отметим следующее соображение: естественно говорить, что числа набора группируются вокруг среднего значения, если лишь небольшая их доля более-менее сильно отклоняется от среднего значения, то есть если a — предельно допустимое абсолютное отклонение, то число $\nu(|x - M_x| \geq a)$ достаточно мало. Теорема 3 для любого набора оценивает это число дробью $\frac{D_x}{a^2}$. Число a, по смыслу рассматриваемой проблемы, фиксировано. Поэтому при малой дисперсии можно говорить, что числа набора группируются вокруг среднего значения. В этом смысле дисперсия может рассматриваться как мера рассеивания.

Еще один аргумент в пользу этого утверждения может быть получен следующим образом. Пусть предельно допустимое отклонение от среднего (число a) равно $3\sigma_x$, где $\sigma_x = \sqrt{D_x}$ — среднее квадратичное отклонение. Тогда второе неравенство Чебышева примет вид:

$$\nu\left(\left| x - M_x \right| \geq 3\sigma_x\right) \leq \frac{1}{9},$$

то есть для *любого* набора количество чисел, отклоняющихся от среднего значения больше (нестрого), чем на три средних квадратичных отклонения, не превосходит $\frac{1}{9} \approx 11\%$ от общего количества чисел в наборе, то есть по меньшей мере 89% всех чисел *любого* набора расположены в интервале $(M_x - 3\sigma_x;\ M_x + 3\sigma_x)$. Это одна из форм знаменитого правила «трех сигм». Для конкретных наборов эта доля может быть не 89%, а гораздо выше. Например, для набора, приведенного в начале статьи, как мы уже отмечали, $M_x = 32{,}67$, $D_x = 150{,}9811$. Поэтому $\sigma_x \approx 12{,}29$, так что интервал $(M_x - 3\sigma_x;\ M_x + 3\sigma_x) = (-4{,}19;\ 69{,}53)$. В него попадает 100% чисел набора.

Если предельно допустимое отклонение от среднего характеризовать не абсолютным значением (числом a), а достаточно малой долей $\varepsilon > 0$ от среднего значения, то есть считать, что $a = \varepsilon \cdot |M_x|$, то (при $M_x \neq 0$) теорема 3 примет вид:

$$\nu\left(\left| x - M_x \right| \geq \varepsilon \cdot \left| M_x \right|\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{D_x}{M_x^2}.$$

В этом случае мы можем говорить, что числа набора группируются вокруг среднего значения, если мало число $\frac{D_x}{M_x^2}$, или, что то же самое, мало число $\frac{\sigma_x}{|M_x|}$. Дробь $\frac{\sigma_x}{|M_x|}$ называется коэффициентом вариации – это еще одна важная мера разброса чисел набора.

Еще один подход к определению меры положения числового набора, при котором, естественно появляются медиана, среднее арифметическое и дисперсия, а также проясняется связь между средним арифметическим и дисперсией, можно найти в статье авторов [4]. Но истинный смысл введения понятий среднего значения и дисперсии можно объяснить только с помощью предельных теорем теории вероятностей («закона больших чисел» и, главным образом, центральной предельной теоремы).

Литература

1. *Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я.* Элементарное введение в теорию вероятностей. — Изд. 10-е, испр. — М., УРСС, 2003.

2. Воспитание патриотизма // Математика, 2011, № 7.

3. *Дорофеев Г.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А.* и др. Математика: Алгебра. Функции. Анализ данных: Учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений. — М.: Просвещение, 2005.

4. *Фалин Г.И., Фалин А.И.* Экстремальные свойства среднего значения и медианы // Математика в школе, 2011 (в печати).

ФОТО НА КОНКУРС

Перед вами пантомима,
В КВН играем мы.
Угадай-ка, или мимо
Пролетишь ты — вне игры!

Автор: И.Ю. Котловская,
средняя школа № 17, г. Н. Новгород

ОБЩЕРОССИЙСКАЯ МАЛАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
«ИНТЕЛЛЕКТ БУДУЩЕГО»
http://www.future4you.ru
Тел.: (48439) 97295 ■ 249035, Обнинск, Ленина, 129

РОССИЙСКИЕ ОТКРЫТЫЕ ЗАОЧНЫЕ
КОНКУРСЫ-ОЛИМПИАДЫ
ПРОЕКТ «ИНТЕЛЛЕКТ-ЭКСПРЕСС»
2011/2012 УЧЕБНЫЙ ГОД

НАЦИОНАЛЬНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНО-ТВОРЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ РОССИИ»

ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И ДРУГИМ ПРЕДМЕТАМ – НА САЙТЕ olimpiada.future4you.ru

УСЛОВИЯ УЧАСТИЯ В КОНКУРСЕ, ЗАДАНИЯ, ТАБЛИЦЫ ДЛЯ ОТВЕТОВ – НА САЙТЕ express.future4you.ru

ПРОЕКТ «ИНТЕЛЛЕКТ-ЭКСПРЕСС» – КАЖДЫЙ МОЖЕТ СТАТЬ УСПЕШНЫМ!

«Интеллект-экспресс» – Российские олимпиады – инновационный образовательный проект, в котором участвуют тысячи детей со всей страны!

Конкурс позволяет проверить уровень знаний учащихся и повторить пройденный материал.

■ **РЕАЛИЗАЦИЯ на практике стандартов нового поколения.**

■ **ПОРТФОЛИО. Учащиеся и учителя получают дипломы или свидетельства.**

Задания интересны и необычны, именно поэтому в наших олимпиадах участвует вся страна!

Организатор олимпиад – Малая академия наук «Интеллект будущего», реализующая всероссийские проекты уже более 25 лет!

■ **ИЗВЕСТНОСТЬ. Имена победителей публикуются в сборнике «Ими гордится Россия».**

■ **ДОСТУПНОСТЬ. В олимпиадах может принять участие любой школьник.**

РОССИЙСКИЕ КОНКУРСЫ-ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

Приглашаем учащихся 7–8-х классов принять участие в ОЛИМПИАДЕ ПО МАТЕМАТИКЕ, задания которой опубликованы на следующей странице.

ДЛЯ УЧАСТИЯ В КОНКУРСЕ необходимо до **31 января** 2012 г.:

1. **Выполнить работу.** Заполнить таблицу для ответов на сайте **express.future4you.ru** либо оформить ее самостоятельно, записав ответы напротив номеров заданий.

2. **Оплатить целевой взнос** в размере 195 рублей за участие в конкурсе.
Банковские реквизиты: получатель: ООО НОЦ «Росинтал», Обнинское отделение № 7786 СБ РФ, ИНН 4025418534 / КПП 402501001. Р/с: 40702810222230101653.
Банк получателя: Калужское ОСБ № 8608, г. Калуга, БИК 042908612, кор. счет 30101810100000000612.
Назначение платежа: *оргвзнос за участие в конкурсе «Интеллект-экспресс»*.

3. **Представить в оргкомитет материалы** (таблицу ответов, регистрационную форму и копию квитанции) одним из способов:
А. Зарегистрироваться на сайте **http://www.future4you.ru** и прикрепить материалы.
Б. Отправить материалы по электронному адресу **int@future.org.ru**
В. Отправить материалы почтой по адресу: 249035, г. Обнинск Калужской обл., а/я 5103, Л.Ю. Ляшко.

На отдельном листе укажите название конкурса, а также:
■ Фамилию, имя, класс, дату рождения, телефон, e-mail.
■ Полный почтовый адрес, по которому вам отправят итоговые документы (свидетельство, контрольные ответы). Это может быть домашний адрес или адрес вашего учебного заведения.
■ Ф.И.О. педагога-куратора, телефон, e-mail.

ЗАДАНИЯ ОЛИМПИАД ДЛЯ ДРУГИХ ВОЗРАСТОВ РАЗМЕЩЕНЫ НА САЙТЕ express.future4you.ru

ОБЩЕРОССИЙСКАЯ МАЛАЯ АКАДЕМИЯ НАУК «ИНТЕЛЛЕКТ БУДУЩЕГО»
Тел.: (48439) 97295 ■ 249035, Обнинск, Ленина, 129 ■ http://www.future4you.ru
РОССИЙСКИЕ ОТКРЫТЫЕ ЗАОЧНЫЕ КОНКУРСЫ-ОЛИМПИАДЫ
ПРОЕКТ «ИНТЕЛЛЕКТ-ЭКСПРЕСС» 2011/2012 УЧЕБНЫЙ ГОД
НАЦИОНАЛЬНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНО-ТВОРЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ РОССИИ»

КОНКУРС «МИР МАТЕМАТИКИ» ■ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 7 – 8-х КЛАССОВ

Конкурс проводится до 31 января 2012 г.

■ **ЗАДАНИЕ 1**. Из естественного порядка цифр выберите пять идущих подряд и расположите их так, чтобы в результате умножения чисел, образованных первыми двумя цифрами и третьей цифрой, получилось число, образованное из оставшихся двух цифр. В ответ запишите цифры в полученном порядке.

■ **ЗАДАНИЕ 2**. Когда Василию было 12 лет, он был в четыре раза моложе своего отца. В каком году Василию исполнится столько лет, сколько было его отцу, когда родился Василий, если известно, что отец родился в 1940 году?

■ **ЗАДАНИЕ 3**. В ящике лежат 80 кубиков разных цветов: 25 красных, 20 зелёных, 20 жёлтых, остальные синие и белые. Сколько кубиков нужно взять, чтобы среди них оказалось не менее 15 кубиков одного цвета?

■ **ЗАДАНИЕ 4**. Брат и сестра покупали мороженое и обнаружили, что если сестра добавит к деньгам брата половину своих денег, то они смогут купить две порции, а если брат добавит половину своих денег к деньгам сестры, то они купят всего одну порцию мороженого. Сколько денег было у девочки?

■ **ЗАДАНИЕ 5**. В слове ДЕШИФРОВКА все буквы заменили цифрами от 0 до 9. Определите получившееся число, если известны соотношения:
Д×Е=ФИ, Е×Р=ВК, Ш×А=Ш, И×К=Д, Ф×Д=ВР, Р×К=ИК, О×К=О, В×Ш=АВ, А×О=О, В×Ф=ШВ.

■ **ЗАДАНИЕ 6**. Заполните строки недостающими цифрами так, чтобы в каждой строке разность между средним и первым числом была равна разности между последним и средним, и для каждой строки эти разности различны. Цифры в строках не повторяются, 0 не используется.

2		
2		
2		
2		

5	6	4
5	6	4
5	6	4
5	6	4

8		
8		
8		
8		

■ **ЗАДАНИЕ 7**. Водитель, посмотрев на спидометр, увидел, что число пройденных километров выражалось симметричным числом 27972. С какой скоростью ехал водитель, если следующее симметричное число появилось на спидометре через два часа?

■ **ЗАДАНИЕ 8**. Ниже зашифровано высказывание великого английского учёного о допустимости отклонений в точных науках. Подберите ключ и запишите в ответ расшифрованную фразу, а также имя ее автора.

031
012.062.102.121.142.191.202.231.251
011.031.162.171.181.191.231
061.091.131.151.301.331
011.021.041.063.151.171.182.201.301
011.051.061.081
011.101.142.191.291
061.102.121.131.142
011.021.102.121.141.161.261

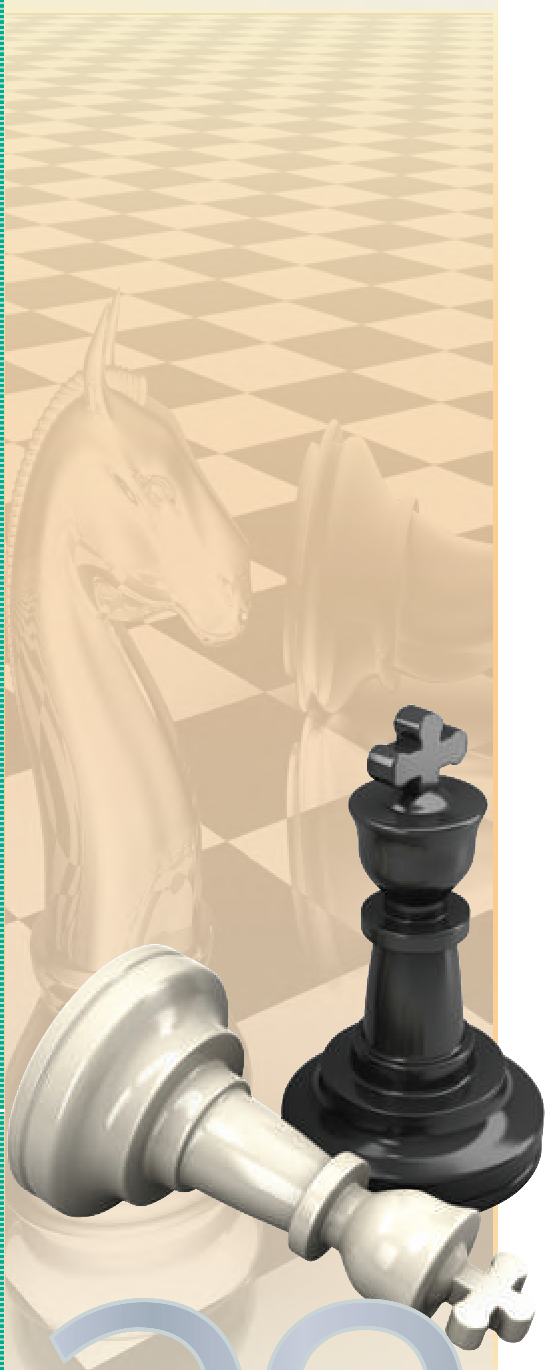
■ **ЗАДАНИЕ 9**. Школьник перемножал в столбик два трёхзначных числа, одно из которых равнялось 607. Но он ошибся в вычислении и при умножении на 6 поместил последнюю цифру произведения под второй цифрой справа, а не под третьей, как положено. В результате у него получилось число, которое меньше правильного результата на 482220. Какое число школьник умножал на 607?

■ **ЗАДАНИЕ 10**. Компания «Омега», занимающаяся рекламным бизнесом, предлагает клиентам свои услуги за 4000 рублей в месяц. Всем компаниям, обратившимся в «Омегу» впервые, предоставляется скидка 1500 рублей в первый месяц. Если заключается контракт сроком сразу на полгода, «Омега» делает скидку 600 рублей в месяц, а если сроком на год, то 1200 рублей в месяц.
Компания «Альфа» заключила с «Омегой» два контракта подряд сроком на полгода каждый, а «Бета» заключила один годовой контракт. «Альфа» и «Бета» обратились к услугам «Омеги» впервые. Запишите в ответ, какая компания и насколько меньшую сумму заплатит «Омеге».

Условия участия размещены на предыдущей странице журнала, а также на сайте express.future4you.ru (раздел «Интеллект-экспресс, зима 2011/2012», конкурс «Мир математики»).

А. ОБРУБОВ,
Ф. ПЧЕЛИНЦЕВ,
Т. СТРУКОВ,
П. ЧУЛКОВ,
Е. ШАПАРИН,
г. Москва

ДВАДЦАТЫЙ ТУРНИР АРХИМЕДА
ИТОГИ ЗАОЧНОГО КОНКУРСА



Условия задач были опубликованы в № 3/2011.

В этом учебном году в конкурсе приняло участие 430 школьников из 50 регионов России, а также Республики Беларусь, Казахстана, Украины, Армении и Болгарии. Наибольшую активность проявили школьники из Москвы, Московской области и Республики Башкортостан.

По результатам проверки каждому участнику отправлено письмо с результатами, а победителям и призерам высланы дипломы и призы — сборники задач и решений заочного конкурса математических регат. Если письмо не было получено, напишите об этом, пожалуйста, по адресу: 121165, Москва, ул. Киевская, 24, редакция журнала «Математика», с пометкой на конверте «Турнир», или на электронную почту info@arhimedes.org.

Дополнительную информацию о турнирах Архимеда можно получить на сайте www.arhimedes.org.

Задачи и решения

Задача 1. **Выборы.** В выборах поселкового совета участвовало 900 жителей села. За кандидата A проголосовали 15% женщин и 20% мужчин, всего 159 жителей. Сколько женщин и мужчин участвовало в голосовании?

Решение. Способ I. Предположим, что за за кандидата A проголосовали 20% мужчин и 20% женщин, то есть 20% жителей села, участвовавших в выборах. В этом случае число проголосовавших за кандидата A составило бы $900 \cdot 0{,}2 = 180$ жителей, что на 21 человека больше, чем в действительности. Это избыточное число голосовавших за кандидата A соответствует 5% женщин, добавленных к фактически проголосовавшим 15%. Следовательно, число женщин, участвовавших в голосовании, равно $21 : 0{,}05 = 420$. Число голосовавших мужчин: $900 - 420 = 480$.

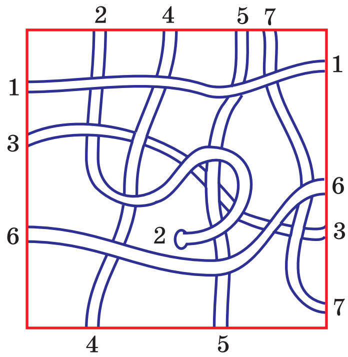
Способ II. Пусть число проголосовавших женщин равно x, тогда мужчин голосовало $900 - x$ человек. Составим уравнение: $0{,}15x + 0{,}20(900 - x) = 159$, откуда $x = 420$.

Ответ: 420 женщин и 480 мужчин.

Задача 2. **Лабиринт.** На рисунке показан лабиринт из семи пронумерованных дорожек. Требуется закрасить каждую из дорожек в какой-либо цвет, причем ни на одном перекрестке не должны пересекаться дорожки одного цвета. Какое наименьшее

К материалу есть приложение на CD-диске.

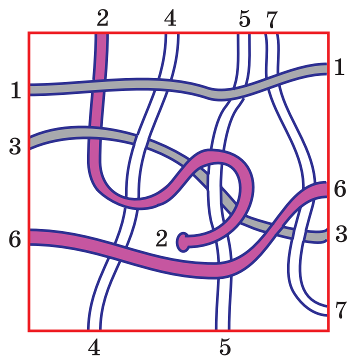
число красок необходимо иметь, чтобы выполнялось условие задачи? Приведите пример такой раскраски.



Решение. Двух цветов недостаточно, так как есть три дорожки (например, 2, 3 и 5), которые попарно пересекаются. Одним цветом можно красить только непересекающиеся дорожки.

1-я дорожка пересекается с 3-й и 6-й,
2-я — с 6-й и 7-й,
3-я — только с 1-й,
4-я — с 5-й и 7-й,
5-я — с 4-й и 7-й,
6-я — с 1-й и 2-й,
7-я — с 4-й и 5-й.

Следовательно, 1-ю и 3-ю дорожки можно покрасить в один цвет. Тогда 6-я может быть одного цвета только со 2-й дорожкой. Дорожки 4-я, 5-я и 7-я, которые между собой не пересекаются, могут быть окрашены в один цвет.



Ответ: для раскраски лабиринта нужно не менее трех красок.

Задача 3. **Когда начинается сеанс?** Школьник собрался в кино. Он знает, что первый сеанс в кинотеатре начинается между 12 и 13 часами, а второй — между 13 и 14 часами. Последний сеанс начинается в 23 ч 05 мин. Промежутки времени между началом любых двух последовательных сеансов одинаковы. Когда начинается предпоследний, шестой сеанс?

Решение. Будем считать, что промежуток времени между началом двух последовательных сеансов составляет целое число минут. В период с 12 ч 00 мин до 23 ч 05 мин (665 мин.) прошло 7 сеансов, между которыми было 6 промежутков одинаковой продолжительности. За x обозначим продолжительность сеанса (в минутах). Получим неравенство: $x < \frac{665}{6}$, или, поскольку x — целое, $x \leq 110$. Второй сеанс начался не позднее 13 ч 59 мин., следовательно, $x > \frac{546}{3}$, или, поскольку x — целое, $x \geq 110$. Получим: $x = 110$. Вычитая из времени начала седьмого сеанса 110 мин., получим 21 ч 15 мин. — время начала шестого сеанса. Приведем пример расписания киносеансов, удовлетворяющих условию задачи. Например, сеансы могут начинаться в 12.05, 13.55, 15.45, 17.35, 19.25, 21.15 и 23.05.

Ответ: 21 ч 15 мин.

Задача 4. **О целых числах.** Можно ли подобрать 4 целых числа так, чтобы все их попарные суммы составляли 6 последовательных целых чисел?

Ответ. Можно. Например, 1, 2, 3, 5.

Задача 5. **Продолжение предыдущей задачи.** Можно ли подобрать 5 целых чисел так, чтобы все их попарные суммы составляли 10 последовательных целых чисел?

Решение. Предположим, что пять целых чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, удовлетворяющих условию задачи, существуют. В сумму всех попарных сумм каждое из чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 входит четыре раза, следовательно, эта сумма является четным числом. Из этого следует, что сумма всех 10 последовательных целых чисел — четное число. Но в действительности сумма десяти последовательных целых чисел нечетна, так как

$$a + (a + 1) + \ldots + (a + 9) = \\ = 10a + 1 + 2 + \ldots + 9 = 10a + 45.$$

Получили противоречие.

Ответ: нет.

Задача 6. **Часы и математика.** Часовому мастеру принесли трое часов и попросили выверить их ход. Мастер включил секундомер и посмотрел на часы № 1 и № 2. За 11 мин. хода часов № 1 часы № 2 отсчитали 10 мин. Потом он сравнил часы № 2 и № 3: за 12 мин. 30 с хода часов № 2 часы № 3 прошли 12 мин. Посмотрев затем в течение 8 мин. 15 с на часы № 1, мастер остановил секундомер — он отсчитал ровно 30 мин. Определите, какие часы идут точно.

Решение. Так как часы идут по-разному, то у каждых своя «продолжительность минуты», то есть за минуту реального времени часы № 1 отсчитают m_1 мин., часы № 2 — m_2 мин., а часы № 3 — m_3 мин. Из соотношений времени на часах № 1 и № 2 получим: $11m_1 = 10m_2$, или $m_2 = 1{,}1m_1$. Из соотношений времени на часах № 2 и № 3: $12{,}5m_2 = 12m_3$. Найдем «продолжительность минуты» на часах № 1. Когда мастер остановил секундомер, тот отсчитал ровно 30 мин., поэтому

$$11m_1 + 12{,}5m_2 + 8{,}25m_1 = 30.$$

Заменив m_2 на m_1 получим:

$$11m_1 + 13{,}75m_1 + 8{,}25m_1 = 30,\ 11m_1 = 10.$$

Это означает, что за 10 настоящих минут часы № 1 отсчитают 11 мин., а часы № 2 — 10. То есть часы № 2 идут верно, а часы № 1 — спешат. Часы № 3 не могут показывать точное время, так как идут медленнее часов № 2.

Ответ: правильно идут часы № 2.

Задача 7. **Шахматная фигура «Хромой король».** «Хромой король» может ходить или на одну клетку вверх, или на одну клетку вправо, или на одну клетку по диагонали влево вниз. Может ли «Хромой король», начиная из левого нижнего угла доски 8 × 8 клеток, обойти всю доску, побывав на каждой клетке ровно по одному разу?

Решение. Расставим на доске числа 0, 1, 2 как показано на рисунке.

1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1

«Хромой король» начинает свой путь из клетки, в которой написано число 0. По правилам, из клетки с числом 0 он может попасть только в клетку с числом 1, далее в клетку с числом 2, затем в клетку с числом 0 и так далее. Предположим, что король обошел всю доску, побывав в каждой клетке по одному разу, сделав при этом 63 хода. Тогда сумма чисел на всей доске равна

$$(0 + 1 + 2) + \ldots + (0 + 1 + 2) + 0 = 63.$$

Но это неверно. Сумма всех чисел на доске равна 64. Противоречие.

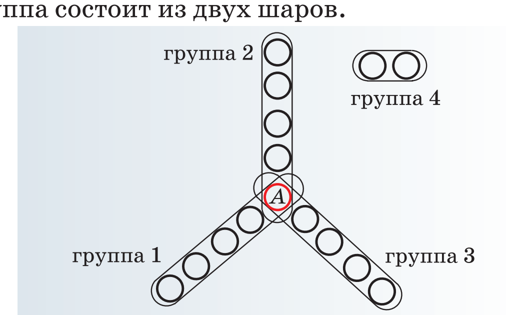
Ответ: нет.

Николай Бистерфельд, ученик 7-го класса из г. Рязани, изложил идею решения задачи в стихах:

Король заказал в своем замке паркет.
Строжайший им тотчас же дан был обет:
Дуб — ясень — береза, ступает нога.
Он зал обойдет за 63 шага.
Вступает с дамой король: раз-два-три,
Дуб — ясень — береза, еще повторим…
Но нужной дощечки не видит король:
— В чем дело, паркетчик? Ответить изволь!
И мастер ответил: «Король мой! Прости,
Ты прежде квадраты паркета сочти.
Чтоб зал обойти за 63 шага,
Вначале на ясень должна встать нога.

Задача 8. **Радиоактивные шары.** Как с помощью индикатора радиоактивности обнаружить за семь измерений два радиоактивных шара, находящихся среди пятнадцати одинаковых шаров? Измерять радиоактивность можно у отдельно взятого шара или группы шаров одновременно. Индикатор указывает на наличие радиоактивности, но не дает информации о количестве радиоактивных шаров в группе.

Решение. Разделим шары на четыре группы. В три из них входит шар *A* (см. рисунок), одна группа состоит из двух шаров.



Наличие радиоактивности будем обозначать знаком «+», отсутствие «–». Сделаем три измерения, проверив на радиоактивность группы 1-, 2-, 3-ю. Возможны четыре принципиально различных случая:

Случай	1-я группа	2-я группа	3-я группа
1-й	–	–	–
2-й	+	+	+
3-й	+	+	–
4-й	+	–	–

Что делать дальше?

1-й случай. Оба искомых шара в группе 4.

2-й случай. Шар *A* радиоактивен, сделано три измерения.

Второй радиоактивный шар можно найти так:

1. Разделим оставшиеся 14 шаров на 2 группы по 7 шаров и проверим на радиоактивность одну из групп (четвертое измерение). Если результат отрицателен, то радиоактивный шар в другой группе.

2. Разделим группу, содержащую радиоактивный шар, на две части, в одной — 3, а в другой — 4 шара.

Проверим на радиоактивность одну из частей (пятое измерение). В результате выявим, в какой из двух групп находится радиоактивный шар.

3. Далее делим группу с радиоактивным шаром на две части (либо 2 + 2 шара, либо 1 + 2). Проводим шестое измерение на радиоактивность группы из двух шаров. Если группа нерадиоактивна, то радиоактивный шар в другой группе (в случае 1 + 2 радиоактивный шар найден). Седьмым измерением найдем радиоактивный шар.

Для выявления второго радиоактивного шара достаточно четырех измерений.

3-й случай. Радиоактивность выявлена в группах 1 и 2. Следовательно, в каждой из них находится по одному радиоактивному шару, при этом шар *A* не радиоактивен (подумайте, почему). Далее поступаем аналогично 2-му случаю.

4-й случай. Шар *A* не является радиоактивным. Проверим на радиоактивность группу 4. Если в ней выявлена радиоактивность, то в 1-й и 4-й группах находится по 1 радиоактивному шару, которые определяем оставшимися тремя измерениями. Если нет, то оба радиоактивных шара в 1-й группе, и трех измерений достаточно, чтобы их найти. Для этого достаточно проверить на радиоактивность последовательно три шара из группы.

ПОБЕДИТЕЛИ И ПРИЗЕРЫ

Диплом I степени

Бистерфельд Николай (7-й класс, школа № 8, г. Рязань);
Купцов Евгений (7-й класс, лицей № 3, г. Чебоксары, Чувашская Республика);
Николаева Дарья (6-й класс, школа № 464, г. Москва);
Мосейчев Алексей (5-й класс, школа № 57, г. Москва);
Иноземцева Светлана (7-й класс, гимназия № 3, г. Юбилейный, Московская обл.).

Диплом II степени

Галяев Иван (6-й класс, школа № 548, г. Москва);
Одоевский Иван (7-й класс, лицей математики и информатики, г. Саратов);
Гаранин Евгений (6-й класс, школа «Интеллектуал», г. Москва);
Александров Михаил (7-й класс, лицей математики и информатики, г. Саратов);
Ермишина Елизавета (7-й класс, физико-математический лицей № 1, г. Саратов);
Поснов Сергей (7-й класс, школа № 444, г. Москва);
Щевьева Надежда (6-й класс, школа № 1189, г. Москва);
Карпов Владислав (7-й класс, Кошки-Шемякинская средняя школа, с. Кошки-Шемякино, Буинский р-н, Республика Татарстан);
Подкин Павел (7-й класс, лицей № 3, г. Чебоксары, Чувашская Республика);
Тарусов Александр (6-й класс, школа № 853, г. Москва).

Диплом III степени

Вдовина Кристина (6-й класс, школа № 88, г. Уфа, Республика Башкортостан);
Гаврилова Татьяна (6-й класс, лицей № 3, г. Чебоксары, Чувашская Республика);
Динчич Стэфан (6-й класс, школа № 88, г. Уфа, Республика Башкортостан);
Котяшова Анна (6-й класс, гимназия № 93, г. Уфа, Республика Башкортостан);
Марьюшкин Дмитрий (6-й класс, школа № 1358, г. Москва);
Набиуллина Лилия (7-й класс, Новодемкинская средняя школа, с. Новое Демкино, Аксубаевский р-н, Республика Татарстан);
Попова Екатерина (6-й класс, гимназия № 1532, г. Москва);
Терешкина Татьяна (7-й класс, гимназия № 3, г. Юбилейный, Московская обл.);
Вотякова Мария (7-й класс, лицей № 3, г. Чебоксары, Чувашская Республика);
Жидков Николай (7-й класс, лицей № 15, г. Саров, Нижегородская область);
Стоян Егор (6-й класс, школа № 1189, г. Москва);
Большанов Андрей (6-й класс, школа № 1358, г. Москва);
Лельков Иннокентий (7-й класс, лицей, г. Троицк);
Лисин Вадим (5-й класс, школа № 1564, г. Москва);
Бутин Павел (7-й класс, школа № 199, г. Москва);
Мусаткина Дарья (7-й класс, лицей № 3, г. Чебоксары, Чувашская Республика);
Саматова Камилла (7-й класс, гимназия № 93, г. Уфа, Республика Башкортостан);
Тихоненко Илья (7-й класс, физико-математический лицей № 30, г. Санкт-Петербург);
Гордеева Татьяна (7-й класс, лицей № 3, г. Чебоксары, Чувашская Республика);
Долгушин Григорий (7-й класс, гимназия № 1517, г. Москва);
Ерошкин Глеб (6-й класс, школа № 1189, г. Москва);
Зеленский Андрей (7-й класс, гимназия № 1534, г. Москва);
Моисеев Андрей (7-й класс, школа № 354, г. Москва);
Петров Степан (7-й класс, физико-математический лицей № 30, г. Санкт-Петербург);
Потапенко Елена (6-й класс, школа № 1189, г. Москва);
Саитов Дмитрий (6-й класс, школа с. Починок Кучук, с. Починок Кучук, Кукморский р-н, Республика Татарстан);
Хайрутдинова Ксения (6-й класс, школа № 2, г. Онега, Архангельская обл.);
Белая Алина (6-й класс, гимназия № 27, г. Алматы, Казахстан);
Глумилина Мария (6-й класс, школа № 8, г. Севастополь, Украина).

Математические кружки

Диплом I степени

Математический кружок «Эрудит» учащихся физико-математической школы № 32, г. Астрахань (руководители — Матвеева Елена Витальевна, Степанова Олеся Алексеевна, Сергеева Татьяна Михайловна).
Математический кружок учащихся 5–6-х классов гимназии № 12, г. Волгоград (руководители — Колосова Оксана Николаевна, Данелян Сусанна Амирбековна).

Диплом II степени

Математический кружок «Плюс» учащихся 7-го класса школы № 31, г. Комсомольск-на-Амуре, Хабаровский край (руководитель — Чернолых Ольга Анатольевна).

Диплом III степени

Математический кружок учащихся 4-го класса гимназии № 1 «Юнона», г. Волгодонск, Ростовская область (руководитель — Муродян Анна Дмитриевна).

В. АЛЕКСЕЕВ, П. БОРОДИН,
О. КОСУХИН, С. ПАНФЕРОВ,
И. СЕРГЕЕВ, В. ТАРАСОВ,
В. УШАКОВ, В. ЧИРСКИЙ,
М. ЮМАШЕВ, И. ШЕЙПАК,
г. Москва

«ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ»-2011

В настоящей статье представлены материалы первого (заочного) тура олимпиады МГУ по математике 2011 г. с одним из вариантов возможных решений.

Задачи с 1-й по 10-ю рекомендованы для абитуриентов механико-математического факультета и факультета вычислительной математики и кибернетики. Задачи с 1-й до 6-ю рекомендованы для других факультетов МГУ, участвующих в олимпиаде.

Результаты олимпиады учитывались при поступлении в МГУ и другие вузы страны.

1. Какое время между 14.10 и 15.10 показывают часы в тот момент, когда угол между минутной и часовой стрелками равен 90°?

Решение. 1. За 60 мин. минутная стрелка пройдет угол в 360° с угловой скоростью $\omega_м = \frac{360}{60} = 6$ град/мин., часовая стрелка пройдет угол в 30° с угловой скоростью $\omega_ч = \frac{30}{60} = 0,5$ град/мин. Значит, 6 – 0,5 = 5,5 град/мин. — скорость обгона (превышение скорости минутной стрелки).

2. В 14 ч 00 мин. угол между стрелками равен 60°.

3. За искомое время t минутная стрелка должна пройти угол на $60° + 90° = 150°$ больше, чем часовая. Учтем скорость обгона и получим уравнение для t: $5{,}5t = 150$, $t = \frac{150}{5,5} = \frac{1500}{55} = \frac{300}{11} = 27\frac{3}{11}$ (мин.).

4. Первый искомый момент времени равен 14 ч $27\frac{3}{11}$ мин. Второй момент очевиден: 15 ч 00 мин.

Ответ: 14 ч $27\frac{3}{11}$ мин.; 15 ч 00 мин.

2. Решите неравенство $\sin x \cdot \sin 1755x \cdot \sin 2011\, x \geq 1$.

Решение. Так как $|\sin t| \leq 1$, то исходное неравенство может выполняться только при

$$|\sin x| = |\sin 1755x| = |\sin 2011x| = 1.$$

Возможны два случая.

1-й случай.

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Тогда:

а) $\sin 1755x = \sin\left(1755\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right) = \sin\left(1755 \cdot \frac{\pi}{2}\right) =$

$$= \sin 877{,}5\pi = \sin\left(876\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1;$$

б) $\sin 2011x = \sin\left(2011\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right) = \sin\left(2011\cdot\frac{\pi}{2}\right) =$

$$= \sin 1005{,}5\pi = \sin\left(1004\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1.$$

Значит, (при $\sin x = 1$) исходное неравенство выполняется:

$\sin x \cdot \sin 1755x \cdot \sin 2011x = 1\cdot(-1)\cdot(-1) = 1.$

2-й случай.

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Тогда:

а) $\sin 1755x = \sin\left(1755\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right) = \sin\left(-1755\cdot\frac{\pi}{2}\right) =$

$$= -\sin 877{,}5\pi = -\sin\left(876\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\frac{3\pi}{2} = -(-1) = 1;$$

б) $\sin 2011x = \sin\left(2011\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right) = -\sin 1005{,}5\pi =$

$$= -\sin\left(1004\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\frac{3\pi}{2} = -(-1) = 1.$$

Значит, (при $\sin x = -1$) исходное неравенство не выполняется:

$\sin x \cdot \sin 1755x \cdot \sin 2011x = -1\cdot 1\cdot 1 = -1 < 1.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

3. Петя последовательно выписывает целые числа, начиная с 21, так, что каждое следующее число меньше предыдущего на 4, а Вася, глядя на очередное число, подсчитывает сумму всех выписанных к этому моменту чисел. Какая из найденных Васей сумм окажется ближайшей к 55?

Решение. Петя последовательно выписывает члены арифметической прогрессии (a_n): $\{21; 17; 13; \ldots\}$ с первым членом $a_1 = 21$ и разностью $d = -4$. Вася выписывает суммы ее членов:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n = \frac{2\cdot 21 - 4(n-1)}{2}n = (23-2n)n.$$

Задача сводится к нахождению суммы, ближайшей к числу 55. Решим уравнение (рис. 1):

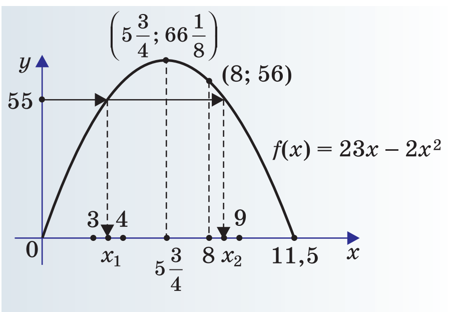


Рис. 1

$$23x - 2x^2 = 55 \Leftrightarrow 2x^2 - 23x + 55 = 0,$$

$$x_1 = \frac{23-\sqrt{89}}{4},\quad x_2 = \frac{23+\sqrt{89}}{4}.$$

Оценим числа x_1 и x_2. Имеем:

$$9 = \sqrt{81} < \sqrt{89} < \sqrt{100} = 10.$$

Значит,

$$x_1 \in \left(\frac{23-10}{4}; \frac{23-9}{4}\right),\quad x_1 \in \left[3\frac{1}{4}; 3\frac{1}{2}\right] \subset [3; 4];$$

$$x_2 \in \left(\frac{23+9}{4}; \frac{23+10}{4}\right),\quad x_2 \in \left[8; 8\frac{1}{4}\right] \subset [8; 9].$$

Найдем суммы S_n при $n \in \{3; 4; 8; 9\}$:

$$S_3 = (23-6)\cdot 3 = 17\cdot 3 = 51;$$
$$S_4 = (23-8)\cdot 4 = 15\cdot 4 = 60;$$
$$S_8 = (23-16)\cdot 8 = 7\cdot 8 = 56;$$
$$S_9 = (23-18)\cdot 9 = 5\cdot 9 = 45.$$

Ответ: сумма $S_8 = 56$ является ближайшей к 55.

4. Натуральные числа m, n таковы, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима, а дробь $\frac{4m+3n}{5m+2n}$ сократима. На какие натуральные числа она сокращается?

Решение. Пусть числа $4m + 3n$ и $5m + 2n$ имеют общий простой делитель $d > 1$. Тогда существуют такие натуральные числа a и b (частные от деления), что справедлива система

$$\begin{cases} 4m+3n = ad, \\ 5m+2n = bd. \end{cases} \left|\begin{array}{c} -2 \\ 3 \end{array}\right| \begin{array}{c} -5 \\ 4 \end{array}$$

Методом алгебраического сложения из системы найдем $7n$ и $7m$:

$$\begin{cases} -8m+15m = -2ad+3bd, \\ -15n+8n = -5ad+4bd; \end{cases} \begin{cases} 7m = d(3b-2a), \\ 7n = d(5a-4b). \end{cases}$$

Если 7 не делится на d, то числа m и n делятся на $d > 1$, дробь $\frac{m}{n}$ сократима, что противоречит условию. Значит, простое число 7 делится на натуральное число d. Следовательно, $d = 7$.

Ответ: 7.

5. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{15x+1-x^2} + \sqrt[3]{x^2-15x+27} = 4.$$

Решение. Пусть

$$\sqrt[3]{15x+1-x^2} = a,\quad \sqrt[3]{x^2-15x+27} = b.$$

Тогда

$$\begin{cases} 15x+1-x^2 = a^3, \\ x^2-15x+27 = b^3 \end{cases} \text{ и } a^3 + b^3 = 28.$$

Получаем и решаем систему относительно a и b:

$$\begin{cases} a+b = 4, \\ a^3+b^3 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 4, \\ (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right) = 28 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 4, \\ a^2-ab+b^2 = 7. \end{cases}$$

В последнем уравнении выделим полный квадрат $(a+b)^2$:

$$a^2+b^2+2ab-2ab-ab=7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^2-3ab=7.$$

Значит,

$$\begin{cases} a+b=4, \\ (a+b)^2-3ab=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4, \\ 16-3ab=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4, \\ ab=3. \end{cases}$$

Последняя система имеет два решения:

$$a=1,\ b=3 \text{ или } a=3,\ b=1.$$

Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{15x+1-x^2}=1, \\ \sqrt[3]{x^2-15x+27}=3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sqrt[3]{15x+1-x^2}=3, \\ \sqrt[3]{x^2-15x+27}=1. \end{cases}$$

Решаем их:

$$\begin{cases} 15x+1-x^2=1, \\ x^2-15x+27=27 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 15x+1-x^2=27, \\ x^2-15x+27=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15x-x^2=0, \\ x^2-15x=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2-15x+26=0, \\ x^2-15x+26=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-15)=0 \text{ или } x^2-15x+26=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=0,\ x=15 \text{ или } x=2,\ x=13.$$

Ответ: $x=0$, $x=2$, $x=13$, $x=15$.

6. В прямоугольной трапеции большая диагональ длины 11 делит острый угол трапеции в отношении 2 : 1, а расстояние от вершины тупого угла до этой диагонали равно 4. Какие значения может принимать площадь трапеции?

Решение. Возможны два случая.

1-й случай (рис. 2). $\angle ADB > \angle CDB$. Если $\angle ADB = 2\alpha$, то $\angle CDB = \alpha$. Тогда $\angle CBD = 2\alpha$. В треугольнике BCD известна сторона $BD = 11$, соотношение прилегающих к ней углов (2α и α) и высота $CC_1 = 4$. Из треугольника BCD получим уравнение для α (из равенства):

$$BD = BC_1 + C_1D, \qquad 11 = 4\text{ctg}\,2\alpha + 4\text{ctg}\,\alpha.$$

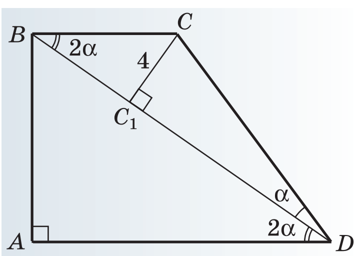


Рис. 2

По условию угол ADC острый, значит, $0 < 3\alpha < 90°$, $0 < \alpha < 30°$, $\cos\alpha \neq 0$, справедлива формула

$$\text{tg}\,2\alpha = \frac{2\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\,\alpha}.$$

Значит,

$$11 = \frac{4\left(1-\text{tg}^2\,\alpha\right)}{2\text{tg}\,\alpha} + \frac{4}{\text{tg}\,\alpha}.$$

Получаем квадратное (относительно $\text{tg}\,\alpha$) уравнение:

$$2\text{tg}^2\,\alpha + 11\text{tg}\,\alpha - 6 = 0,\ \text{tg}\,\alpha > 0 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}.$$

Так как

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4}} < \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{tg}\,30°,$$

то $\alpha = \text{arctg}\,\dfrac{1}{2} \in (0;\ 30°)$, что удовлетворяет условию. Трапеция задана. В ней

$$BC = \frac{CC_1}{\sin 2\alpha} = 4 : \frac{2\text{tg}\,\alpha}{1+\text{tg}^2\,\alpha} = \frac{4\left(1+\frac{1}{4}\right)}{2\cdot\frac{1}{2}} = 5,$$

$$BC_1 = \sqrt{5^2-4^2} = 3,$$

$$\Delta\, BC_1C \sim \Delta\, DAB,$$

$$S_{DAB} = S_{BC_1C}\cdot\left(\frac{BD}{BC}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot\left(\frac{11}{5}\right)^2 = \frac{726}{25},$$

$$S_{ABCD} = S_{DAB} + S_{BCD} = \frac{726}{25} + \frac{1}{2}\cdot 11\cdot 4 = \frac{1276}{25} = 51{,}04.$$

2-й случай (рис. 3). $\angle ADB < \angle CDB$. Если $\angle ADB = \beta$, то $\angle CDB = 2\beta$. Тогда $\angle CBD = \beta$. В треугольнике BCD поменялись местами прилегающие к стороне BD углы.

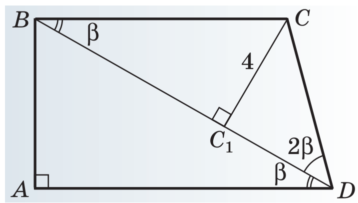


Рис. 3

Значит, аналогично получим $\text{tg}\,\beta = \dfrac{1}{2}$. Здесь

$$C_1D = 4\text{ctg}\,2\beta = 3,$$
$$BC_1 = 11-3 = 8,$$
$$BC = \sqrt{8^2+4^2} = 4\sqrt{5}.$$

$$S_{DAB} = S_{BC_1C}\cdot\left(\frac{BD}{BC}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4\cdot\left(\frac{11}{4\sqrt{5}}\right) = \frac{121}{5},$$

$$S_{ABCD} = \frac{121}{5} + \frac{1}{2}\cdot 11\cdot 4 = 46{,}2.$$

Ответ: {51,04; 46,2}.

7. Найдите наибольшее значение выражения

$$(x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + \ldots + (x_{2010}-x_{2011})^2 + (x_{2011}-x_1)^2$$

при $x_1, \ldots, x_{2011} \in [0;\ 1]$.

Решение. 1. Рассмотрим функцию

$$y = (x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + \ldots + (x_{n-1}-x_n)^2 + (x_n-x_1)^2, \qquad (1)$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0;\ 1]$, $n = 2011$, сначала как квадратичную функцию одного переменного, например, x_1:

$$y = y\left(x_1\right) = 2x_1^2 - 2x_1\left(x_2 + x_n\right) + \ldots,\quad x_1 \in [0;\, 1]. \qquad (2)$$

Она имеет положительный старший коэффициент, поэтому справедливо утверждение 1.

Утверждение 1. Функция (2) достигает наибольшего значения на конце отрезка [0; 1]:

$$y_{\text{наиб}}(x_1) = \max\{y(0);\, y(1)\}. \qquad (3)$$

Аналогичное утверждение справедливо для функции $y = y(x_i)$ как функции одного переменного x_i при любом $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$y_{\text{наиб}}(x_i) = \max\{y(0);\, y(1)\}. \qquad (4)$$

Следствие. Если значение x_i не равно 0 или 1, то значение функции $y(x_i)$ не является наибольшим на отрезке [0; 1].

Действительно, здесь значение $y(x_i)$ можно увеличить, положив $x_i = 0$ или $x_i = 1$.

2. Теперь рассмотрим функцию (1) как функцию n переменных x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Утверждение 2. Если функция (1) принимает наибольшее значение, то каждый из ее аргументов равен 0 или 1.

Доказательство (от противного). Пусть $y = y_{\text{наиб}}$, но найдется i, при котором $x_i \neq 0$, $x_i \neq 1$. Но тогда значение функции $y(x_i)$ можно увеличить (в силу следствия), и $y \neq y_{\text{наиб}}$. Противоречие.

3. Итак, имеем необходимое условие: если $y = y_{\text{наиб}}$, то

$$x_i \in \{0;\, 1\},\ i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (5)$$

Рассмотрим исходную задачу (при $n = 2011$) с учетом необходимого условия (5). Получим:

а) $$y = \left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(x_2 - x_3\right)^2 + \ldots + \left(x_{2010} - x_{2011}\right)^2 + \left(x_{2011} - x_1\right)^2, \quad x_1, x_2, \ldots, x_{2011} \in \{0;\, 1\}; \qquad (6)$$

б) каждое слагаемое в (6) не превосходит 1; оно равно 1 только в случае, когда пара его аргументов принимает разные значения из двух допустимых значений 0 или 1. Например:

$$\begin{cases}\left(x_1 - x_2\right)^2 = 1,\\ x_1,\, x_2 \in \{0;\, 1\}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1 = 0,\\ x_2 = 1\end{cases} \text{или} \begin{cases}x_1 = 1,\\ x_2 = 0;\end{cases}$$

в) $y_{\text{наиб}} \leq 2011$.

Утверждение. Функция y из (6) не достигает значения 2011.

Доказательство. Возможны два случая: $x_1 = 0$ или $x_1 = 1$.

Пусть $x_1 = 0$. Тогда

— все слагаемые в сумме, кроме последнего, равны 1 только при $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, ..., $x_{2010} = 1$, $x_{2011} = 0$;

— последнее слагаемое равно 1 при $x_{2011} = 1$.

Получили противоречие: $x_{2011} = 0$ и $x_{2011} = 1$.

Аналогичное противоречие получим при $x_1 = 1$.

Причина противоречия — в наличии в последнем слагаемом двух аргументов, индексы которых имеют одинаковую четность: числа 1 и 2011 — нечетны.

В каждом из остальных слагаемых индексы аргументов имеют разную четность. Поэтому все слагаемые не могут быть равны 1, значит, $y = 2011$ недостижимо.

Замечание. Если в (1) n — четно, то все слагаемые могут быть равными 1.

Пример.

$y = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (x_4 - x_1)^2$, $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [0;\, 1]$; при $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = x_4 = 1$.

$$y = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

Итак, в исходной задаче (1) значение $y = 2011$ недостижимо. Значение $y = 2010$ достигается, например, при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, ..., $x_{2010} = 1$, $x_{2011} = 0$.

Ответ: 2010.

8. Решите систему

$$\begin{cases}5x^2 + 3y^2 + 3xy + 2xz - yz - 10y + 5 = 0,\\ 49x^2 + 65y^2 + 49z^2 - 14xy - 98xz + 14yz -\\ - 182x - 102y + 182z + 233 = ??\end{cases}$$

Решение. Анализ коэффициентов второго уравнения подсказывает, что оно является квадратным уравнением относительно $x - z$ с параметром y. Действительно:

$$(49x^2 + 49z^2 - 98xz) - 14xy + 14yz - 182x + 182z + (65y^2 - 102y + 233) = 0,$$

$$49(x-z)^2 - 14y(x-z) - \overset{14\cdot 13}{\overbrace{182}}(x-z) + \left(65y^2 - 102y + 233\right) = 0,$$

$$49(x - z)^2 - 14(x - z)(y + 13) + (65y^2 - 102y + 233) = 0. \qquad (*)$$

Уравнение имеет решение только при $\frac{D}{4} \geq 0$. Имеем:

$$\frac{D}{4} = \left(7(y + 13)\right)^2 - 49\left(65y^2 - 102y + 233\right) =$$

$$= 49(y^2 + 26y + 169 - 65y^2 + 102y - 233) =$$

$$= 49(-64y^2 + 128y - 64) = -49 \cdot 64(y^2 - 2y + 1);$$

$$\frac{D}{4} = -49 \cdot 64 \cdot (y - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 1.$$

При $y = 1$ (то есть при $D = 0$) из (*) получаем:

$$x - z = \frac{7(y + 13)}{49} = \frac{1 + 13}{7} = 2,\ z = x - 2.$$

Решаем первое уравнение при $y = 1$, $z = x - 2$. Имеем:

$$\begin{cases} y=1, \\ 5x^2+3+3x+2xz-z-10+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1, \\ 5x^2+3x+2xz-z-2=0. \end{cases}$$

Далее:

$$\begin{cases} z=x-2, \\ 5x^2+3x+2x(x-2)-x+2-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x-2, \\ 7x^2-2x=0. \end{cases}$$

Значит, $x(7x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x=\frac{2}{7}$.

Получаем два решения исходной системы:
1) $x = 0$, $y = 1$, $z = -2$;

2) $x=\frac{2}{7}$, $y = 1$, $z=\frac{2}{7}-2=-\frac{12}{7}$.

Ответ: $(0; 1; -2)$, $\left(\frac{2}{7}; 1; -\frac{12}{7}\right)$.

9. В тетраэдре все плоские углы при одной вершине — прямые. Некоторая точка пространства удалена от указанной вершины тетраэдра на расстояние 3, а от остальных его вершин — на расстояния $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$. Найдите расстояния от центра описанной около тетраэдра сферы до каждой из его граней.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр и все плоские углы при вершине D прямые (рис. 4). Пусть длины отрезков DA, DB и DC равны a, b и c соответственно. Свяжем с лучами DA, DB и DC прямоугольную систему координат $Dxyz$. В этой системе координат точка D имеет координаты $(0; 0; 0)$, а точки A, B и C имеют координаты $(a; 0; 0)$, $(0; b; 0)$ и $(0; 0; c)$ соответственно. Пусть координаты точки K, указанной в условии задачи, равны $(x; y; z)$. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$KA=\sqrt{5},\quad KB=\sqrt{6},\quad KC=\sqrt{7}.$$

Тогда:

$$\begin{cases} KD^2=x^2+y^2+z^2=9, & (1)\\ KA^2=(x-a)^2+y^2+z^2=5, & (2)\\ KB^2=x^2+(y-b)^2+z^2=6, & (3)\\ KC^2=x^2+y^2+(z-c)^2=7. & (4) \end{cases}$$

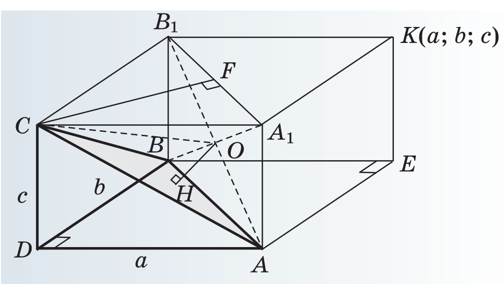


Рис. 4

Сложим второе, третье и четвертое уравнения и вычтем из полученной суммы удвоенное первое уравнение:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 0. \qquad (5)$$

Значит, $x = a$, $y = b$, $z = c$, то есть точки A, B, C и K являются вершинами прямоугольного параллелепипеда с диагональю $DK = 3$. Подставим найденные значения x, y, z в уравнения (1)–(4) и получим:

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=9, \\ b^2+c^2=5, \\ a^2+c^2=6, \\ a^2+b^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=4, \\ b^2=3, \\ c^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2, \\ b=\sqrt{3}, \\ c=\sqrt{2}. \end{cases}$$

Центр O описанной около тетраэдра сферы лежит на середине диагонали DK параллелепипеда. Расстояния от точки O до граней CDA, CDB, DBA равны $\frac{b}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{a}{2}=1$, $\frac{c}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ соответственно.

Осталось найти длину перпендикуляра OH, опущенного из точки O на грань ABC. Найдем его, например, через объем V пирамиды $OABC$, который вычислим двумя способами:

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot OH=\frac{1}{3}\cdot S_{OAB}\cdot CF \Rightarrow OH=\frac{S_{OAB}\cdot CF}{S_{ABC}},$$

где $CF \perp OAB$.

Вычисления. Найдем площадь треугольника ABC. По теореме косинусов

$$\cos\angle ABC=\frac{BC^2+BA^2-AC^2}{2BC\cdot BA}.$$

Так как

$$BC=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{5},$$

$$BA=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{7},$$

$$AC=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{6},$$

то

$$\cos\angle ABC=\frac{5+7-6}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}}=\frac{3}{\sqrt{35}}.$$

Значит,

$$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\frac{9}{35}}=\sqrt{\frac{26}{35}}.$$

Тогда

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}BA\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}=\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{35}}=\frac{\sqrt{26}}{2}.$$

Найдем высоту CF прямоугольного треугольника A_1B_1C через его площадь S:

$$\begin{cases} S=\frac{1}{2}CA_1\cdot CB_1, \\ S=\frac{1}{2}A_1B_1\cdot CF \end{cases} \Rightarrow CF=\frac{CA_1\cdot CB_1}{A_1B_1}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

Найдем площадь треугольника OAB как четвертую часть площади прямоугольника ABB_1A_1:

$$S_{OAB}=\frac{1}{4}\cdot AB\cdot AA_1=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Окончательно получаем:

$$OH=\frac{\frac{\sqrt{14}}{4}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}{\frac{\sqrt{26}}{2}}=\frac{\sqrt{14}\cdot2\cdot\sqrt{3}\cdot2}{4\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{\frac{3}{13}}$.

Примечание. Конкретные числовые данные $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, 3 позволили получить уравнение (5) и решить систему (1)–(4) с шестью неизвестными. Это — центральный момент решения.

10. Имеются 12 карандашей попарно различной длины. Сколькими способами можно уложить их в коробку в 2 слоя по 6 карандашей так, чтобы в каждом слое карандаши были упорядочены по возрастанию длины (слева направо), а каждый карандаш верхнего слоя лежал строго над карандашом нижнего слоя и был короче его?

Решение. Пусть $0 \le m \le n \le 6$. Через $K(m; n)$ обозначим множество укладок $m + n$ фиксированных карандашей попарно различной длины в коробку в два слоя так, что:

а) в каждом слое карандаши уложены от правого края без пропусков;

б) в нижнем слое уложены n карандашей по возрастанию их длины слева направо;

в) в верхнем слое уложены m карандашей по возрастанию их длины слева направо;

г) каждый карандаш верхнего слоя короче лежащего под ним карандаша нижнего слоя.

Число таких укладок обозначим $k(m; n)$. Искомым является число $k(6; 6)$. Найдем его, доказав следующие рекуррентные формулы:

$$k(m; n) = k(m - 1; n), \qquad (1)$$

если $m = n \ge 1$;

$$k(m; n) = k(m - 1; n) + k(m; n - 1), \qquad (2)$$

если $1 \le m < n$.

Доказательство. Пусть даны $m + n$ карандашей попарно различной длины. Обозначим через A самый короткий из них. Рассмотрим любую укладку этих карандашей из $K(m; n)$. Тогда карандаш A лежит в ней либо самым левым в верхнем слое, либо самым левым в нижнем слое (последнее возможно только при $m < n$). Обозначим множество укладок первого типа через $K_1(m; n)$, множество укладок второго типа через $K_2(m; n)$, а их число соответственно $k_1(m; n)$ и $k_2(m; n)$. Докажем, что $k_1(m; n) = k(m - 1; n)$ (при $m \ge 1$), $k_2(m; n) = k(m; n - 1)$ (при $m < n$).

Рассмотрим все укладки из $K_1(m; n)$. Если в каждой такой укладке убрать карандаш A, то получим укладку из $K(m - 1; n)$. Обратно, для любой укладки $m + n - 1$ карандашей (без A) из $K(m - 1; n)$ (при $m - 1 < n$) можно получить ровно одну укладку из $K_1(m; n)$, добавив карандаш A в верхний слой слева от уже лежащих карандашей без пропуска (или самым правым, если $m - 1 = 0$). Поэтому $k_1(m; n) = k(m - 1; n)$.

Рассмотрим все укладки из $K_2(m; n)$. В них $m < n$. Если в каждой такой укладке убрать карандаш A, то получим укладку из $K(m; n - 1)$. Обратно, для любой укладки $m + n - 1$ карандашей (без A) из $K(m; n - 1)$ можно получить ровно одну укладку из $K_2(m; n)$, добавив карандаш A в нижний слой слева от уже лежащих карандашей без пропуска. Поэтому $k_2(m; n) = k(m; n - 1)$.

Так как $k(m; n) = k_1(m; n) + k_2(m; n)$, то отсюда получаем (2). Поскольку при $m = n$ возможен только первый случай, то получаем (1).

Вычисление искомого числа $k(6; 6)$ теперь заключается в заполнении по формулам (1), (2) таблицы размера 7×7.

6							132
5						42	132
4					14	42	90
3				5	14	28	48
2			2	5	9	14	20
1		1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1	1
	0	1	2	3	4	5	6

В ней числами 0, 1, ..., 6 занумерованы строки (снизу вверх) и столбцы (слева направо). В клетке, расположенной в m-й строке и n-м столбце, стоит число $k(m; n)$. Поясним нахождение числа $k(m; n)$.

1) Нижняя строка заполняется единицами, так как $k(0; n) = 1$ при любом n. Действительно, правильная укладка в один слой возможна только одним способом.

2) Строка с номером 1 заполняется по формулам (1), (2), например:

$k(1; 1) = k(0; 1) = 1;$

$k(1; 2) = k(0; 1) + k(1; 1) = 1 + 1 = 2;$

$k(1; 3) = k(0; 3) + k(1; 2) = 1 + 2 = 3.$

3) Аналогично заполняются другие клетки таблицы при движении от нижнего левого угла к правому верхнему углу. В нем получаем $k(6; 6) = 132$.

Ответ: 132.

А. БЛИНКОВ,
Ю. БЛИНКОВ,
Е. ГОРСКАЯ,
И. ЯЩЕНКО,
г. Москва

ШЕСТОЙ ЗАОЧНЫЙ КОНКУРС УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Заочный творческий конкурс учителей математики, организованный Московским центром непрерывного математического образования и журналом «Математика» совместно с Московским институтом открытого образования, прошел уже в шестой раз. Подведены его итоги: ширится география участников, растет качество работ, победители приглашены на очный тур.

Напомним, что информация о конкурсе традиционно размещается на сайте www.mccme.ru. Материалы прошедших очных и заочных конкурсов также опубликованы на этом сайте и ежегодно публикуются в журнале «Математика». Материалы нескольких первых конкурсов можно найти в брошюре «Творческие конкурсы учителей математики», вышедшей в издательстве МЦНМО в 2008 году. Проведение конкурса поддерживается фондом «Династия».

Цель конкурса — стимулировать проявление профессиональных качеств учителя. В ходе выполнения работы участники могли продемонстрировать умение решать задачи, умение найти ошибку в чужом решении и отличить верное решение от неверного, знание различных разделов школьной программы и понимание логики ее построения, свою математическую эрудицию. Отдельно отметим важность «методической» составляющей, так как она в большей степени отражает повседневную работу учителя. На выполнение заданий конкурса отводилось около трех месяцев.

Задания для проведения конкурса были подготовлены методической комиссией, работавшей на базе МЦНМО. Вариант, как и ранее, включал в себя *три блока*. *Первый блок* («математический») — задачи, которые требовалось решить; *второй блок* («методический») – формулировки задач и их «решения», в которых требовалось найти ошибки и, по возможности, привести верные решения. Эти блоки включали в себя задания по арифметике, алгебре, геометрии, математическому анализу, комбинаторике и теории вероятностей. *Третий блок* («аналитический») состоял из одного задания, в котором требовалось проанализировать различные «подходы» к формированию курса школьной геометрии.

В этом году в конкурсе приняло участие 165 работ учителей (23 коллективные и 142 индивидуальные). География участников конкурса весьма обширна и разнообразна — от Москвы и Санкт-Петербурга до маленьких поселков и деревень из 49 краев, областей и республик России, а также Беларуси, Казахстана и Украины.

Вот отзыв одной из участниц конкурса, Н.О. Ягодниковой (г. Оренбург): «Только вчера, 24 апреля, от подруги узнала о конкурсе и всю ночь пыталась решать ваши задачи. Очень увлекло! Спасибо вам огромное! Сил и времени хватило не на все, но надеюсь заработать хотя бы 10 баллов, что будет хорошим началом! К сожалению, нехватка времени повлияла на качество решений, но я не теряю надежды принять участие в следующем конкурсе. Мне очень понравились методические задания, и я летом, для себя, попытаюсь выполнить последнее задание — о школьных учебниках. Есть над чем подумать!»

С удовольствием отмечаем, что результаты участников конкурса растут из года в год. При этом предложенные задания, на наш взгляд, не становятся проще! Однако по-прежнему наибольшую трудность у многих участников вызывает «аналитический» блок.

Каждое задание конкурса оценивалось исходя из 10 баллов. Победителями конкурса объявлены участники, набравшие не менее 73 баллов из 90 возможных (2 коллективные работы и 14 индивидуальных). Призерами стали участники, набравшие не менее 60 баллов.

Победители

(в алфавитном порядке)

Аскеров А.Ф. и *Габибулаев Г.О.* (г. Махачкала, Республика Дагестан), *Березина Е.П.* и *Романова С.Л.* (г. Ижевск, Республика Удмуртия), *Буфеев С.В.* (г. Москва), *Захарченко И.Д.* (г. Санкт-Петербург), *Ибатулин И.Ж.* (г. Алматы, Казахстан), *Крайко М.А.* (г. Москва), *Кузьмина С.С.* (г. Чебоксары, Республика Чувашия), *Майоров Ю.К.* (г. Москва), *Макарова И.И.* (г. Чебоксары, Республика Чувашия), *Матвеева И.В.* (г. Уфа, Республика Башкортостан), *Никитина С.С.* (г. Чебоксары, Республика Чувашия), *Ню В.* (г. Ханты-Мансийск), *Перфильева Т.С.* (г. Москва), *Сабурова Т.В.* (г. Нижний Тагил, Свердловская обл.), *Сенькова Е.И.* (г. Чебоксары, Республика Чувашия), *Стаханова П.А.* (г. Ижевск, Республика Удмуртия).

Призеры

Андреева В.А. (г. Ивангород, Ленинградская обл.), *Афанасьева С.В.* (г. Москва), *Балашова О.Е., Корнилова Л.А., Овчинникова Н.А.*и *Чугурова С.А.* (г. Тольятти, Самарская обл.), *Белов А.И.* (г. Москва), *Васина Г.С., Ипатова Е.В., Потайчук Н.М.* и *Шведова О.Н.* (г. Санкт-Петербург), *Горчаков А.С., Григорьева Т.П., Емельянова Н.А., Ерошкина И.А.* и *Рязанова Е.Д.* (г. Нижний Новгород), *Гоголева Г.А.* и *Егорова Н.М.* (г. Якутск, Республика Саха), *Данелян С.А.* и *Колосова О.Н.* (г. Волгоград), *Дмитриев О.Ю.* и *Сукманова Е.Ю.* (г. Саратов), *Заворотная И.А., Климань В.М., Климань Т.Н., Несвежая Е.М.* и *Рябуха Т.Н.* (с. Кобеляки, Полтавская обл.), *Иванова Н.В.* (г. Москва), *Иванова С.Б.* (г. Нарткала, Республика Кабардино-Балкария), *Ильичева Т.Н.* (г. Москва), *Карасева В.В.* (г. Чебоксары, Республика Чувашия), *Матвеева Е.В., Сергеева Т.М.* и *Степанова О.А.* (г. Астрахань), *Мурочкина Ю.Г.* (г. Казань, Республика Татарстан), *Мухин Д.Г.* (г. Москва), *Немировская И.М.* (г. Москва), *Пантелеева Е.Ю., Попова А.А.* и *Чернякова Е.С.* (г. Москва), *Павлов А.Н.* (г. Якутск, Республика Саха), *Пескова Т.А.* (г. Москва), *Протодьяконова Т.Г.* (г. Якутск, Республика Саха), *Сайфетдинова Г.В.* (пос. Сосновый Бор, Республика Татарстан), *Семибратов П.В.* (с. Кармало-Аделяково, Самарская обл.), *Софронов А.В.* (с. Дюллюкю, Республика Саха), *Уваровский Н.В.* (с. Хатассы, Республика Саха), *Чусовитина Л.Н., Власова С.Н., Лукьянова Е.Ю. и Мурашова М.Н.* (г. Новосибирск-90), *Шакиров Ф.М., Шакирова Ф.М.* (оба — с. Кемеш-куль, Республика Татарстан), *Шляпкин А.А.* (г. Санкт-Петербург).

Отметим, что многие из перечисленных участников не впервые становятся победителями или призерами заочного конкурса, некоторые уже были и лауреатами очных конкурсов в различные годы. Результаты на уровне победителей показали также Л.В. Баева (г. Набережные Челны, Республика Татарстан) и И.В. Чернявская (г. Москва), а результат на уровне призеров — Ю.О. Пукас (г. Троицк, Московская обл.), но их работы были отправлены позже объявленного срока, поэтому они не могут быть признаны лауреатами конкурса.

Все участники получили специальные дипломы. Победители и призеры конкурса награждены электронной подпиской на журнал «Математика» на 1-е полугодие 2011 г. Кроме того, все победители и призеры, имеющие нагрузку в школе не менее 9 уроков в неделю и не являющиеся победителями или призерами очного конкурса учителей математики 2010 года, приглашены в Москву в сентябре 2011 года для участия в очном туре VII Творческого конкурса учителей математики с оплатой проживания и питания в г. Москве. В очном туре конкурса могут также принять участие все желающие. Для участия достаточно зарегистрироваться в на сайте конкурса. Информация об очном туре конкурса и о следующем заочном конкурсе будет опубликована в журнале «Математика» и на сайте МЦНМО.

Организаторы будут благодарны за любые идеи и замечания по дальнейшему совершенствованию конкурса, которые просим присылать в редакцию журнала или по электронному адресу olteach@mccme.ru.

Ниже публикуются задания прошедшего конкурса, тексты решений и примерные критерии проверки.

В скобках указаны предложившие задачи или их авторы, а также первоисточники.

I. Математический блок

Решите задачи

№ 1. (*И.Ф. Акулич*) На рынке продавали раков: больших — по 5 рублей, маленьких — по 3 рубля, а также жаб — по рублю. Иван и Степан купили себе раков на одинаковые суммы денег, причем Иван купил больших и маленьких раков поровну, а Степан — вдвое меньше больших раков, чем маленьких. Иван расплатился одной сторублевой купюрой, а Степан — несколькими десятирублевыми. У продавца не оказалось мелких денег, поэтому он выдал сдачу Ивану опять же раками, а Степану — жабами. Сколько всего животных унесли приятели с рынка?

Ответ: 52 животных.

Решение. Пусть Иван купил x больших раков, а Степан — y больших раков. Тогда всего Иван купил $2x$ раков и потратил $5x + 3x = 8x$ рублей, а Степан купил $3y$ раков и потратил $5y + 3 \cdot 2y = 11y$ рублей. Из условия следует, что $8x = 11y$, кроме того, стоимость покупки не превосходит 100 рублей. Так как 8 и 11 — взаимно простые числа, то $x = 11$, а $y = 8$. Таким образом, вместе они купили $2 \cdot 11 + 3 \cdot 8 = 46$ раков, потратив по 88 рублей каждый.

Так как Степан расплачивался десятирублевыми купюрами, то он заплатил 90 рулей, значит, сдачу (2 рубля) ему могли дать только двумя жабами. Иван получил 12 рублей сдачи раками. Пусть a — количество больших раков и b — количество маленьких раков, полученных Иваном на сдачу. Так как уравнение $5a + 3b = 12$, где a и b — целые неотрицательные числа, имеет единственное решение: $a = 0$, $b = 4$, то он получил 4 маленьких рака. Таким образом, приятели унесли с рынка $46 + 2 + 4 = 52$ животных.

Критерии проверки. Приведено полное обоснованное решение — 10 баллов; приведены верные рассуждения, содержащие арифметическую ошибку, — 7–8 баллов; приведен только верный ответ — 1 балл.

№ 2. (*Фольклор, предложила Е.С. Горская.*) В стране 2011 городов. Какое наименьшее количество авиалиний потребуется, чтобы из любого города добраться в любой другой, делая не более двух пересадок?

Ответ: 2010 авиалиний.

Решение. Представим города точками, а связывающие их авиалинии — отрезками, то есть рассмотрим граф, в котором 2011 вершин. По условию из любого города можно добраться до любого другого, поэтому этот граф связный. Воспользуемся известным фактом: ***связный граф, в котором n вершин, содержит не менее чем $n - 1$ ребро*** (*отметим, что если ребер в точности $n - 1$, то этот граф не содержит циклов, то есть является деревом*). Таким образом, в рассматриваемом графе не менее чем 2010 ребер, то есть авиалиний не менее чем 2010.

Покажем, что такого количества авиалиний достаточно. Например, объявим один из городов столицей и соединим его авиалинией с каждым из оставшихся 2010 городов. Тогда из любого города можно добраться в любой другой, делая не более двух пересадок (*и даже не более одной*).

Комментарий. Отметим, что если утверждение о связном графе, приведенное выше, было четко сформулировано, то от участников конкурса не требовалось его доказывать. Отметим также, что оценку количества авиалиний можно было проводить и другими рассуждениями. Например, можно было рассуждать так.

Рассмотрим один из городов, обозначив его A. Отсортируем все остальные города по степени их удаленности от A. В первую группу войдут города, в которые из A можно попасть напрямую, во вторую группу — те города, в которые можно попасть из A, сделав одну пересадку, а в третью — города, для попадания в которые из A потребуется две пересадки (при этом в каждом случае мы рассматриваем кратчайший путь, например, если из A в B можно попасть двумя путями: как с одной, так и с двумя пересадками, то мы относим город B ко второй группе). Пусть в первой группе x городов, во второй — y, а в третьей — z. Тогда город A соединяет с городами первой группы не менее чем x авиалиний, города первой группы с городами второй группы соединяет не менее чем y авиалиний, а города второй группы с городами третьей группы — не менее чем z авиалиний. Поскольку в стране 2011 городов, то $x + y + z = 2010$, то есть всего авиалиний не менее 2010.

Критерии проверки. Приведено полное обоснованное решение — 10 баллов; приведены только верный ответ и пример — 5 баллов; доказано только, что авиалиний не менее чем 2010, — 5 баллов.

№ 3. (*А.В. Иванищук*) В основании пирамиды $PABCD$ расположен четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 6$, $\angle ABC = 60°$, $\angle BCD = \angle DAC = 30°$. Каждая боковая грань пирамиды образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $3\left(3\pm\sqrt{3}\right)$.

Решение. Построим четырехугольник $ABCD$, удовлетворяющий условию задачи. Рассмотрим равносторонний треугольник ABC, проведем два луча, образующие с лучом CB угол 30°, и два луча, образующие с лучом AC угол 30° (рис. 1).

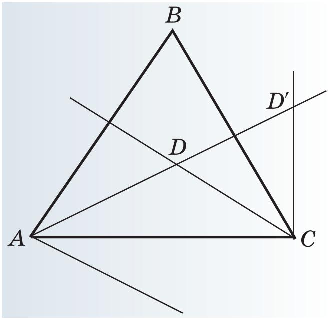


Рис. 1

Существуют две возможные точки их попарного пересечения — D и D', но $ABCD'A$ — замкнутая самопересекающаяся ломаная, поэтому $ABCD'$ не является многоугольником с точки зрения «школьных» определений, где рассматриваются только простые многоугольники (*отметим, что даже если рассмотреть пирамиду с таким основанием, то условию данной задачи она удовлетворять не может*). Таким образом, в основании данной пирамиды лежит невыпуклый четырехугольник $ABCD$, симметричный относительно прямой BD.

Из того, что боковые грани данной пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, следует, что ортогональной проекцией ее вершины P на плоскость основания является точка O, равноудаленная от прямых AB, BC, CD и DA. Так как точка O должна лежать на луче BD — биссектрисе угла ABC, а также на биссектрисах углов A и C четырехугольника (внутренних либо внешних), то возможны два случая расположения этой точки, которая будет являться центром окружности, касающейся четырех указанных прямых (рис. 2 и 3). Соответствующие пирамиды показаны на рисунках 4 и 5.

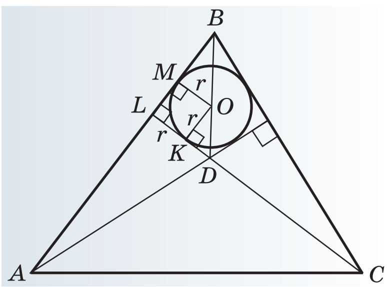


Рис. 2

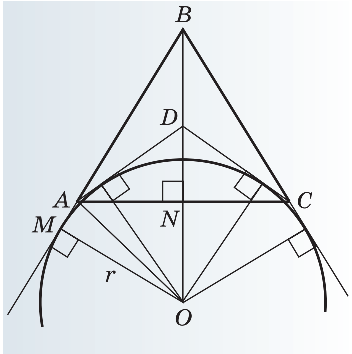


Рис. 3

Вычислим объемы пирамид, используя формулу

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot H.$$

Так как $AC\perp BD$ и отрезок BD составляет две трети высоты равностороннего треугольника, то

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}.$$

Так как угол наклона боковых граней к основанию равен 45°, то высота H пирамиды в каждом случае равна радиусу r рассматриваемой окружности.

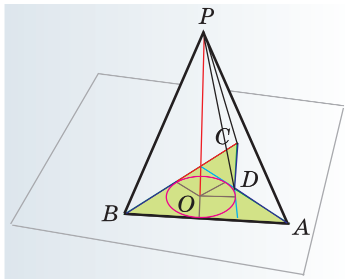


Рис. 4

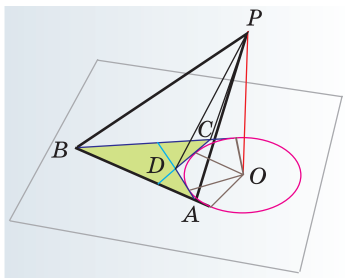


Рис. 5

Радиусы окружностей можно вычислить различными способами, например:

1) (см. рис. 2) из прямоугольного треугольника OKD:

$$\operatorname{tg}60^\circ=\frac{OK}{KD}=\frac{r}{\sqrt{3}-r},$$

значит,

$$r=\frac{3}{\sqrt{3}+1}=\frac{3\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}.$$

В этом случае

$$V_{PABCD}=3\left(3-\sqrt{3}\right);$$

2) (см. рис. 3) из прямоугольного треугольника OMB:

$$r=OB\cdot\sin 30^\circ=\frac{BN+NO}{2}=\frac{3\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$$

(так как $\angle OAN = 45^\circ$, то $NO=\frac{1}{2}AC=3$). В этом случае

$$V_{PABCD}=3\left(3+\sqrt{3}\right).$$

Комментарий. Отметим, что если в треугольной пирамиде боковые грани одинаково наклонены к основанию, то ее вершина проектируется в центр либо вписанной, либо вневписанной окружности основания. Окружности, рассмотренные в этой задаче, являются их аналогами для заданного невыпуклого четырехугольника $ABCD$.

Критерии проверки. Приведено полное обоснованное решение — 10 баллов; верно рассмотрен только один из возможных случаев — 5 баллов; приведены верные рассуждения, но допущена вычислительная ошибка — 3 балла (за каждый из случаев).

№ 4. (*Из материалов вступительных экзаменов в вузы, предложил В.И. Голубев.*) Докажите, что для любых действительных чисел a, b и c выполняется неравенство

$$|a|+|b|+|c|+|a+b+c|\geq |a+b|+|b+c|+|c+a|.$$

Решение. Отметим, что данное неравенство можно доказать, рассмотрев все возможные случаи раскрытия модулей, что очень трудоемко, но допустимо. Кроме того, так как обе части неравенства неотрицательны, то вместо того, чтобы сравнивать их, можно сравнить их квадраты. Совместим оба этих подхода в следующем решении.

Способ I. Воспользуемся некоторыми свойствами этого неравенства, чтобы сократить перебор. Поскольку оно симметрично относительно всех переменных, то без ограничения общности можно считать, что $a \geq b \geq c$. Кроме того, если в данном неравенстве перед каждой из переменных заменить знак на противоположный, то получится то же самое неравенство. Следовательно, для доказательства неравенства достаточно рассмотреть два случая:

1) $a\geq b\geq c\geq 0$;

2) $a\geq b\geq 0$, $c\leq 0$.

В первом случае неравенство превращается в равенство. Во втором случае оно равносильно неравенству

$$|c|+|a+b+c|\geq|a+c|+|b+c|. \qquad (*)$$

Поскольку обе части неравенства неотрицательны, то рассмотрим их квадраты:

$$c^2+a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc+2|c|\cdot|a+b+c|$$

и

$$a^2+c^2+2ac+b^2+c^2+2bc+2|a+c|\cdot|b+c|.$$

Таким образом, неравенство (*) равносильно неравенству

$$ab+|c|\cdot|a+b+c|\geq|a+c|\cdot|b+c|. \qquad (**)$$

В свою очередь, для доказательства неравенства (**) используем тот факт, что модуль суммы двух чисел не превосходит суммы их модулей, то есть

$$|x|+|y|\geq|x+y|.$$

Тогда,

$$ab+|c|\cdot|a+b+c|=|ab|+|c(a+b+c)|\geq$$
$$\geq|ab+c(a+b+c)|=$$
$$=|(a+c)(b+c)|=|a+c|\cdot|b+c|,$$

что и требовалось.

Приведем также несколько красивых доказательств, предложенных участниками конкурса.

Способ II. (*С.С. Кузьмина, Ю.К. Майоров, И.М. Немировская.*) Сделаем замену переменных:

$$x=a+b,\ y=b+c,\ z=a+c.$$

Тогда

$$2a=x-y+z,\ 2b=x+y-z,$$
$$2c=-x+y+z,\ 2(a+b+c)=x+y+z,$$

и доказываемое неравенство примет вид

$$|x-y+z|+|x+y-z|+|-x+y+z|+|x+y+z|\geq 2(|x|+|y|+|z|).$$

В силу симметрии можно считать, что переменные упорядочены. Кроме того, неравенство не изменится при замене знака любой из переменных на противоположный. Следовательно, полученное неравенство достаточно доказать для случая $x\geq y\geq z\geq 0$. В этом случае это неравенство равносильно неравенству

$$x-y+z+x+y-z+|-x+y+z|+x+y+z\geq 2(x+y+z),$$

которое, в свою очередь, равносильно верному неравенству

$$|-x+y+z|\geq -x+y+z.$$

Способ III. (*О.Ю. Дмитриев, Е.Ю. Сукманова, Г.К. Эсанбаев; схожая идея использовалась в решении Т.Г. Протодьяконовой.*) Докажем неравенство, равносильное данному:

$$|a|+|b|+|c|+|a+b+c|-|a+b|-|b+c|-|c+a|\geq 0.$$

Используем для этого функциональный подход. Пусть

$$f(x)=|a|+|b|+|x|+|a+b+x|-|a+b|-|b+x|-|x+a|.$$

Эта функция — кусочно-линейная, ее графиком является некоторая ломаная. Для того, чтобы убедиться, что при всех действительных значениях x $f(x)\geq 0$, достаточно доказать, что функция принимает неотрицательные значения во всех вершинах ломаной, а также при $x \to \pm\infty$, то есть $f(0) \ge 0$, $f(-a) \ge 0$, $f(-b) \ge 0$, $f(-(a+b)) \ge 0$, $f(\pm\infty) \ge 0$. Действительно:

1) $f(0) = |a| + |b| + 0 + |a+b| - |a+b| - |b| - |a| = 0 \ge 0$;

2) $f(-a) = |a| + |b| + |-a| + |a+b-a| - |a+b| - |b-a| - |-a+a| = (|a| + |b| - |a+b|) + (|a| + |-b| - |a-b|) \ge 0$ (по неравенству о модуле суммы);

3) $f(-b) = |a| + |b| + |-b| + |a+b-b| - |a+b| - |b-b| - |-b+a| = f(-a) \ge 0$;

4) $f(-(a+b)) = |a| + |b| + |-(a+b)| + |a+b-(a+b)| - |a+b| - |b-(a+b)| - |-(a+b)+a| = 0 \ge 0$;

5) при $x \to -\infty$
$$f(x) = |a| + |b| - x - a - b - x - |a+b| + b + x + x + a = |a| + |b| - |a+b| \ge 0;$$

6) при $x \to +\infty$
$$f(x) = |a| + |b| + x + a + b + x - |a+b| - b - x - x - a = |a| + |b| - |a+b| \ge 0.$$

Комментарий. К сожалению, в работах участников конкурса встречалось очень много неверных решений, например, такого типа: «Складывая три верных неравенства
$$|a| + |b| \ge |a+b|,\ |b| + |c| \ge |b+c|,\ |a| + |c| \ge |c+a|,$$
получим верное неравенство
$$2(|a| + |b| + |c|) \ge |a+b| + |b+c| + |c+a|. \quad (*)$$
Кроме того, из неравенства для суммы модулей трех чисел получим, что
$$|a| + |b| + |c| \ge |a+b+c|. \quad (**)$$
Рассмотрим разность верных неравенств (*) и (**):
$$|a| + |b| + |c| \ge |a+b| + |b+c| + |c+a| - |a+b+c|,$$
откуда следует требуемое неравенство».

На самом деле, при почленном вычитании двух верных неравенств одного знака можно получить как верное, так и неверное неравенство! Например, из верных неравенств $2 > 1$ и $3 > -5$ путем вычитания получается неверное неравенство $2 - 3 > 1 + 5$. Указанным методом можно получить только, что
$$2(|a| + |b| + |c|) \ge |a+b| + |b+c| + |c+a|$$
и
$$2(|a| + |b| + |c|) \ge |a| + |b| + |c| + |a+b+c|,$$
но никаких выводов о том, как соотносятся между собой правые части этих неравенств, сделать невозможно!

Также многие участники необоснованно считали верным неравенство
$$|c| + |a+b+c| \ge |a+c| + |b+c|.$$
Это не так, например, при $c = 3$, $a = -100$, $b = 1$.

Критерии проверки. Приведено полное обоснованное решение (любым из способов) — 10 баллов; наряду с верным решением приведено и неверное — 9 баллов.

№ 5. (*Предложил А.Г. Мякишев.*) Даны три попарно пересекающиеся окружности, в которых последовательно соединены точки их попарного пересечения. Длины получившихся хорд равны a, b, c, d, e и f (рис. 6). Найдите и обоснуйте равенство, связывающее между собой данные длины хорд.

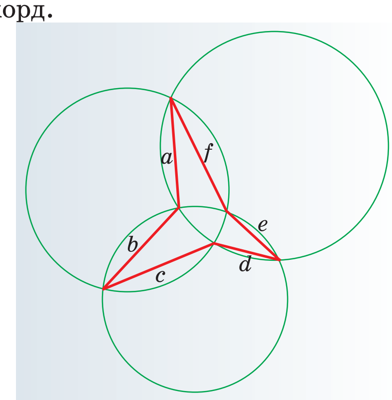


Рис. 6

Ответ: выполняется равенство $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=1$ (*в некоторых зарубежных источниках это утверждение называют теоремой Харуки*).

Решение. Докажем это равенство. Проведем общие хорды AQ, BR и CP для каждой пары окружностей (рис. 7 и 8). Прямые AQ, BR и CP являются радикальными осями пар данных окружностей, которые пересекаются в одной точке T (*радикальном центре трех окружностей*). Далее можно рассуждать по-разному.

Способ I. Заметим, что треугольники BTQ и ATR подобны (см. рис. 7, $\angle BTQ = \angle ATR$ как вертикальные и $\angle TBQ = \angle TAR$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Следовательно, $\frac{c}{f}=\frac{BT}{AT}$. Аналогично, $\Delta CTR \sim \Delta BTP$, поэтому $\frac{e}{b}=\frac{CT}{BT}$, и $\Delta ATP \sim \Delta CTQ$, значит, $\frac{a}{d}=\frac{AT}{CT}$. Перемножая почленно эти три равенства, получим: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=1$, что и требовалось.

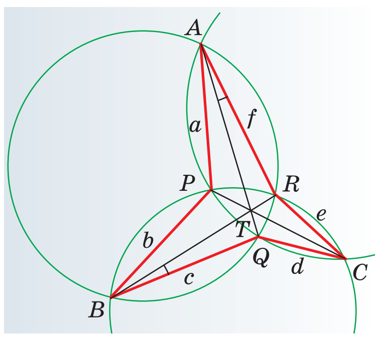


Рис. 7

Способ II. Пусть R_1, R_2 и R_3 — радиусы данных окружностей. Введем в рассмотрение углы α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1 и γ_2 (см. рис. 8). Тогда в треугольнике ABC по теореме Чевы в форме синусов выполняется равенство

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1.$$

Затем шесть раз воспользуемся следствием из теоремы синусов. Например, из треугольника APC получим: $a = 2R_3\cdot\sin\gamma_2$. Остальные пять равенств получаются аналогично:

$$b = 2R_2\cdot\sin\gamma_1,\ c = 2R_1\cdot\sin\alpha_2,\ d = 2R_3\cdot\sin\alpha_1,$$
$$e = 2R_2\cdot\sin\beta_2,\ f = 2R_1\cdot\sin\beta_1.$$

Следовательно,

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=\frac{2R_3\cdot\sin\gamma_2}{2R_2\cdot\sin\gamma_1}\cdot\frac{2R_1\cdot\sin\alpha_2}{2R_3\cdot\sin\alpha_1}\cdot\frac{2R_2\cdot\sin\beta_2}{2R_1\cdot\sin\beta_1}=$$
$$=\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}\cdot\frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1}=1,$$

что и требовалось.

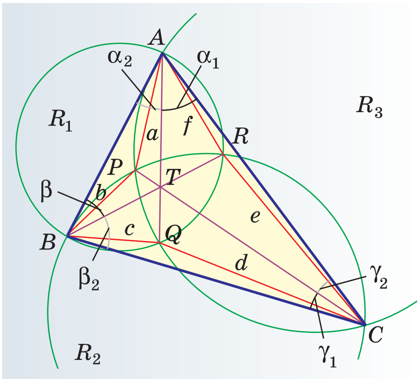


Рис. 8

Критерии проверки. Приведено полное обоснованное решение — 10 баллов; приведено верное решение, но утверждение о пересечении трех хорд в одной точке либо не обосновано, либо обосновано неверно — 8 баллов.

II. Методический блок

В предложенных текстах (№ 6 и № 7) могут содержаться математические ошибки (как в «ответах», так и в «решениях»). Укажите все ошибки и, если «решение» неверно, приведите верное решение.

№ 6. (*Предложил А.И. Сгибнев.*) «Задача». Рассматриваются все треугольники ABC, у которых фиксированы длина стороны AB и сумма длин двух других сторон. У какого из этих треугольников высота, проведенная к стороне AB, имеет наибольшую длину?

«Ответ»: такого треугольника не существует.

«Решение». Так как $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot h$ и длина AB — фиксирована, то высота h имеет наибольшую длину, если S_{ABC} принимает наибольшее значение. Поскольку $S_{ABC} = pr$ и полупериметр p данного треугольника зафиксирован, то S_{ABC} — наибольшая, если наибольшее значение принимает радиус r окружности, вписанной в данный треугольник. Но

$$r=(p-AB)\operatorname{tg}\frac{\angle ACB}{2},$$

значит, r принимает наибольшее значение при наибольшем значении тангенса указанного угла.

Угол $\alpha=\frac{1}{2}\angle ACB<90°$, функция $\operatorname{tg}\alpha$ на промежутке $(0;\ 90°)$ возрастает от 0 до $+\infty$, то есть наибольшего значения тангенса не существует, значит, и треугольника с наибольшей длиной высоты также не существует.

Комментарий. Как «ответ», так и «решение» неверны. Ошибка допущена в заключительной части приведенного «решения» и состоит в следующем: если сумма длин сторон AC и BC фиксирована, то областью определения функции $\operatorname{tg}\alpha$ будет являться только часть промежутка $(0;\ 90°)$, а именно $(0,\ \alpha_{\max}]$, где

$$\alpha_{\max}=\arcsin\frac{AB}{AC+BC}.$$

Доказать, что наибольшее значение длины высоты существует и достигается в случае равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$), можно по-разному. Рассмотрим несколько способов рассуждений.

Способ I. Исправим заключительную часть «решения». Пусть $AC + BC = d$, $\angle ACB = \gamma = 2\alpha$. Тогда по теореме косинусов

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\cdot BC\cdot\cos\gamma =$$
$$= (AC + BC)^2 - 2AC\cdot BC\,(1 + \cos\gamma) =$$
$$= d^2-4AC\cdot BC\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Следовательно,

$$\cos\alpha=\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{\sqrt{d^2-AB^2}}{2\sqrt{AC\cdot BC}}$$

($\alpha < 90°$, поэтому $\cos\alpha > 0$). Поскольку на промежутке $(0;\ 90°)$ функция $\cos\alpha$ убывает, то α достигает наибольшего значения, когда $\cos\alpha$ достигает наименьшего значения. Так как значение выражения $d^2 - AB^2$ фиксировано, то значение $AC\cdot BC$ должно быть наибольшим.

Наибольшее значение произведения двух положительных чисел с фиксированной суммой достигается в случае их равенства (это следует из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим: $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$, равенство в котором достигается, если $a = b$).

Таким образом, наибольшее значение α (равное α_{max}), а значит, и наибольшее значение длины высоты достигается в равнобедренном треугольнике ABC.

Способ II. Выразим двумя способами площадь треугольника:

$$S = \frac{AB \cdot h}{2} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)},$$

где p — полупериметр треугольника ABC. Тогда

$$h = \frac{2\sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}}{AB} =$$

$$= \frac{2\sqrt{p(p-AB)}}{AB} \cdot \sqrt{(p-BC)(p-AC)}.$$

Так как первый сомножитель в полученном выражении принимает фиксированное значение, то достаточно найти, когда выражение $\sqrt{(p-BC)(p-AC)}$ принимает наибольшее значение при условии, что сумма $BC + AC$ — фиксирована.

Для этого можно вновь воспользоваться неравенством между двумя средними, но можно рассуждать и иначе. Например, пусть

$$AC + BC = d,\ AC = \frac{d}{2} - x,\ \ BC = \frac{d}{2} + x.$$

Тогда

$$(p-BC)(p-AC) = \frac{1}{4}(AB+2x)(AB-2x) = \frac{AB^2-4x^2}{4}.$$

Значит, наибольшее значение выражения $\sqrt{(p-BC)(p-AC)}$ достигается в случае, когда $x = 0$, то есть треугольник ABC — равнобедренный.

Способ III. Геометрическим местом точек C, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек A и B постоянна, является эллипс, фокусы которого — точки A и B. Его уравнение в декартовой системе координат: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$ и $b > 0$ — длины полуосей эллипса). Длина высоты треугольника ABC, опущенной на сторону AB, равна расстоянию от точки C до оси абсцисс, то есть равна $|y|$. Так как

$$|y| = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

то его наибольшее значение достигается при $x = 0$, то есть если точка C принадлежит малой полуоси эллипса. Следовательно, треугольник ABC — равнобедренный.

Критерии проверки. Найдена и подробно прокомментирована ошибка в «решении» — 5 баллов; приведены верный ответ и верное решение — 5 баллов; указано только, что «ответ» неверен, и приведен верный ответ — 1 балл.

№ 7. (*Предложила И.В. Раскина.*) «Задача». Два артиллериста стреляют по воробью. Один попадает с вероятностью 0,2, другой — с вероятностью 0,6. В результате залпа из двух пушек в цель попал только один снаряд. Какова вероятность того, что промахнулся первый артиллерист?

«Ответ»: $\frac{1}{3}$.

«Решение». Первый артиллерист промахивается с вероятностью 0,8, а второй — с вероятностью 0,4. Поэтому вероятность промаха первого в два раза выше, чем вероятность промаха второго. Поскольку в цель попал только один снаряд, то сумма вероятностей промахов первого и второго равна 1. Следовательно, первый промахнулся с вероятностью $\frac{1}{3}$.

Комментарий. Неверны и «ответ», и «решение». Ошибка рассуждения заключается в том, что произошла подмена понятий — в одном месте идет речь о безусловной вероятности, а в другом — об условной. По отдельности все строки решения имеют смысл, но в разных ситуациях.

1. Утверждение «Первый артиллерист промахивается с вероятностью 0,8, а второй — с вероятностью 0,4. Поэтому вероятность промаха первого в два раза выше, чем промаха второго» верно, если речь идет о безусловной вероятности (причем при однократном выстреле по цели). При двойном выстреле это утверждение неверно (*более подробно — см. ниже*).

2. Утверждение «Поскольку в цель попал только один снаряд, то сумма вероятностей промахов первого и второго равна 1» также верное, но для других вероятностей! Оно имеет смысл, если речь идет об условных вероятностях промахов стрелков при условии, что из двух выстрелов в цель попал лишь один снаряд. Но ниоткуда не следует, что отношение условных вероятностей равно отношению безусловных вероятностей!

Кроме того, в «решении» была допущена опечатка — первый в итоге промахнулся с вероятностью $\frac{2}{3}$, а не $\frac{1}{3}$.

Верное решение. Так как результаты выстрелов первого и второго — независимые события, то вероятность того, что первый попал, а второй промахнулся, равна $0,2 \cdot 0,4 = 0,08$; вероятность того, что второй попал, а первый промахнулся, равна $0,8 \cdot 0,6 = 0,48$. Нас интересует условная вероятность промаха первого при условии, что из двух выстрелов в цель попал лишь один из них (иными словами: требуется найти, какую долю составляют те случаи, в которых промахнулся первый, среди всех случаев, когда в цель попал только один из артиллеристов), то есть

$$\frac{0,48}{0,08+0,48}=\frac{0,48}{0,56}=\frac{6}{7}.$$

Это же рассуждение можно выразить и более формально: пусть событие

A = {при двойном выстреле первый промахнулся},

B = {при двойном выстреле попал лишь один снаряд}. Тогда требуется вычислить $P(A/B)$. Используя формулу условной вероятности, получим:

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0,48}{0,08+0,48}=\frac{6}{7}$$

(событие AB = {первый промахнулся, а второй попал}).

Возможны также решения, использующие формулу Байеса.

Разберем теперь подробнее, почему в условиях нашей задачи (выстрелили две пушки) утверждение, разобранное в пункте 1, неверно. Действительно, при двойном выстреле возможны следующие четыре несовместных исхода:

A_1 = {оба попали в цель};

A_2 = {первый попал, второй промахнулся};

A_3 = {первый промахнулся, второй попал};

A_4 = {оба промахнулись}.

Вероятность того, что первый промахнулся, равна $P(A_3) + P(A_4)$ и по условию составляет 0,8. Вероятность того, что второй промахнулся, равна $P(A_2) + P(A_4)$ и по условию составляет 0,6. В приведенном «решении» из того, что

$$\frac{P(A_3)+P(A_4)}{P(A_2)+P(A_4)}=2,$$

делается неверный вывод о том, что

$$\frac{P(A_3)}{P(A_2)}=2.$$

Следовательно, можно решить задачу, вычислив

$$P(A_4) = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32.$$

Тогда

$$P(A_3) = 0,8 - 0,32 = 0,48,$$
$$P(A_2) = 0,4 - 0,32 = 0,08.$$

Таким образом, $\frac{P(A_3)}{P(A_2)}=6$, значит, доля тех случаев, в которых промахнулся первый, среди всех случаев, когда в цель попал лишь один, равна $\frac{6}{7}$.

Критерии проверки. Верно указаны все ошибки и подробно объяснен их характер — 5 баллов; указано только, что сумма безусловных вероятностей промахов первого и второго не равна 1, — 2 балла; приведено верное решение — еще 5 баллов.

№ 8. (*Предложил А.Д. Блинков.*) В самостоятельной работе для 10-го класса было дано следующее дополнительное задание: «Найдите все значения x, для которых выполняется равенство $\operatorname{arctg}(x^{-1}) = \operatorname{arcctg} x$». Учитель получил четыре различных решения, которые приведены ниже.

Оцените каждое из решений (верное оно или нет, какие есть ошибки и недочеты).

1. *Решение Коли.* Найдем тангенсы от каждой части равенства:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(x^{-1}\right)\right)=\frac{1}{x},$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)}=\frac{1}{x}.$$

Значит, исходное равенство выполняется при всех значениях x, кроме нуля.

2. *Решение Оли.* Найдем котангенсы от каждой части равенства:

$$\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\left(x^{-1}\right)\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} x^{-1}\right)}=x,$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x.$$

Значит, исходное равенство выполняется при всех значениях x.

3. *Решение Саши.* Так как

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(x^{-1}\right)\right)=\frac{1}{x},$$

а

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}$$

— не существует (выражение $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не имеет смысла), то равенство не выполняется ни при каких значениях x.

4. *Решение Маши.* Заметим сначала, что $x \neq 0$. Воспользуемся затем определениями обратных тригонометрических функций. Пусть $\operatorname{arctg}(x^{-1}) = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{x}$, где $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arcctg} x = \beta$, тогда $\operatorname{ctg}\beta = x$, где $0 < \beta < \pi$. Следовательно, $\operatorname{ctg}\alpha = x = \operatorname{ctg}\beta$. Так как на промежутке $(0; \pi)$ функция котангенс убывает, то каждое свое значение она принимает только при одном значении аргумента, то есть $\alpha = \beta$. Значит, исходное равенство верно при всех значениях x, кроме нуля.

Комментарий. Каждое из предложенных «решений» содержит ошибки, и полученные «ответы» неверны. Приведем одно из возможных верных решений.

Множеством значений функции $y = \operatorname{arctg} t$ является промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а множеством значений функции $y = \operatorname{arcctg} t$ — промежуток $(0; \pi)$, значит, исходное равенство может выполняться только для тех значений x, для которых значения левой и правой частей попадают в их пересечение — промежуток $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то есть для $x > 0$. При $x > 0$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(x^{-1}\right)\right) = \frac{1}{x},$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)} = \frac{1}{x}.$$

Кроме того, функция $y = \operatorname{tg} t$ возрастает на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, значит, каждое свое значение она принимает только при одном значении аргумента. Таким образом, исходное равенство выполняется для всех положительных значений x.

В решениях Коли, Оли и Саши осуществлен неравносильный переход от равенства выражений к равенству их тангенсов (котангенсов), что может привести как к приобретению посторонних решений, так и потере решений. Помимо этого, в решении Оли не учтено, что $x \neq 0$, а в решении Саши применена формула тангенса разности для того аргумента, при котором она неверна.

В решении Маши верно получено равенство котангенсов, но затем его надо было рассматривать на пересечении полученных ею промежутков, то есть на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, что и обеспечило бы равносильность перехода.

Критерии проверки. Верно указана ошибка в «ответе» и при этом показан характер ошибки в «решении» — по 2 балла за каждое из предложенных «решений». Приведено верное решение или указано, как исправить какое-то из предложенных «решений», — еще 2 балла.

Отметим, что существенной ошибкой в каждом из предложенных «решений» являлось именно нарушение равносильности перехода, а не то, что область определения или множество значений какого-то из выражений не найдены.

III. Аналитический блок

№ 9. (*Предложил А.Д. Блинков.*) В различных школьных учебниках последовательность изучения тем различна. Это, в частности, касается отдельных тем первого раздела стереометрии, «Параллельность и перпендикулярность в пространстве». В некоторых учебниках сначала изучается параллельность прямой и плоскости, затем — параллельность плоскостей, после чего — перпендикулярность прямой и плоскости и перпендикулярность плоскостей. В других — сначала перпендикулярность, а затем — параллельность (при этом параллельность плоскостей предшествует параллельности прямой и плоскости).

Сделайте обзор последовательности изучения этих тем и их приложений, рассмотрев как можно больше школьных учебников (в том числе для профильного и углубленного изучения), и оцените с методической точки зрения «плюсы и минусы» каждой из этих систем изложения материала.

Комментарий. Предполагалось, что участники конкурса рассмотрят несколько учебников с различной последовательностью изложения указанных тем и предназначенных для различных уровней обучения, например, какие-то из учебников следующих авторов: А.Д. Александрова и др. (базовый и для углубленного изучения), Л.С. Атанасяна и др., В.А. Гусева, Е.Д. Куланина и др. (профильный уровень), А.Ю. Калинина и Д.А. Терешина (для углубленного изучения), А.В. Погорелова, И.М. и В.А. Смирновых (базовый и профильный уровни), И.Ф. Шарыгина, и проведут предложенный анализ.

Выделим основные моменты, которые, на наш взгляд, должны быть отражены при анализе последовательности изложения указанных тем:

— сложность усвоения материала школьниками соответствующего уровня;

— возможность использования более разнообразного задачного материала;

— сложность и строгость вводимых определений и доказательств основных теорем курса;

— понимание аффинного характера понятия «параллельность» и метрического характера понятия «перпендикулярность»;

— удобство изучения последующих тем стереометрии, например, «Векторы в пространстве», «Многогранники» и пр.

Критерии проверки. Здесь не было «жестких» критериев: оценивалась полнота обзора, а также полнота и логика приведенных соображений.

К сожалению, многие участники конкурса подменяли анализ последовательности изложения тем анализом достоинств и недостатков конкретных учебников. Отдельно отметим, что нам не кажется осмысленным проведение анализа с позиции типовых заданий ЕГЭ (что также присутствовало у некоторых участников), так как задание предложено с целью обсуждения эффективности обучения геометрии на различных уровнях, а не с целью обсуждения способов «натаскивания» на конкретную форму экзамена.

А. КОРЯНОВ,
А. ПРОКОФЬЕВ,
г. Брянск, г. Москва

Лекция 4

ГОТОВИМ К ЕГЭ ХОРОШИСТОВ И ОТЛИЧНИКОВ

РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Фото О. Шмелевой

В заданиях ЕГЭ почти каждый год предлагаются неравенства, решение которых упрощается, если применить свойства функций. Проверка работ ЕГЭ подтверждает, что большинство учащихся решают неравенства с использованием стандартных, алгоритмических методов, что иногда приводит к громоздким выкладкам. В связи с этим процент верных решений неравенств невысок.

Область применения свойств функций при решении неравенств очень широка, а умение использовать необходимые свойства функций при решении неравенств позволяет учащимся выбирать более рациональный способ решения.

В учебниках крайне редки задания на понимание функциональной символики, поэтому ученикам необходимо предлагать такого рода задания не только при изучении функций, но и при решении уравнений и неравенств. В качестве такого задания рассмотрим пример, связанный с композицией функций.

Литература

1. *Дорофеев Г.В.* Обобщение метода интервалов // Математика в школе, 1969, № 3.

2. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебник для 10 класса / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2007.

3. *Панферов В.С., Сергеев И.Н.* ЕГЭ-2010. Математика. Задача С3 / под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2010.

4. *Потапов М.К., Шевкин А.В., Вуколова Т.М.* О решении неравенств вида $f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$ // Математика в школе, 2005, № 5.

Пример 1. (*МИЭТ, 2002.*) Пусть $f(x)=\dfrac{x^2-14x+33}{9-x^2}$, $g(x)=\sqrt{x}$. Решите неравенство $f(g(x-9))\ge f(4)$.

Решение. Так как $g(x-9)=\sqrt{x-9}$, то

$$f(g(x-9))=f\left(\sqrt{x-9}\right)= =\frac{\left(\sqrt{x-9}\right)^2-14\sqrt{x-9}+33}{9-\left(\sqrt{x-9}\right)^2}.$$

Так как $f(4)=\dfrac{4^2-14\cdot4+33}{9-4^2}=1$, то неравенство $f(g(x-9))\ge f(4)$ примет вид

$$\frac{\left(\sqrt{x-9}\right)^2-14\sqrt{x-9}+33}{9-\left(\sqrt{x-9}\right)^2}\ge1.$$

Сделав замену $\sqrt{x-9}=t$, где $t \geq 0$, получим систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{t^2-14t+33}{9-t^2} \geq 1, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t^2-7t+12}{9-t^2} \geq 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(t-3)(t-4)}{(t-3)(t+3)} \leq 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t-4}{t+3} \leq 0, \\ t \geq 0,\ t \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq t < 3 \\ 3 < t \leq 4. \end{array} \right.$$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leq \sqrt{x-9} < 3 \\ 3 < \sqrt{x-9} \leq 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq x-9 < 9 \\ 9 < x-9 \leq 16 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9 \leq x < 18 \\ 18 < x \leq 25. \end{array} \right.$$

Ответ: $9 \leq x < 18$, $18 < x \leq 25$.

Использование области определения функции

Предварительный анализ области допустимых значений неизвестной иногда позволяет получить решения без преобразований неравенства.

Если при рассмотрении неравенства выясняется, что область определения неравенства состоит из одного или нескольких чисел, то достаточно проверить, является или нет каждое из этих чисел решением данного неравенства.

Если область определения неравенства окажется пустым множеством, то в этом случае неравенство решений не имеет.

В некоторых случаях область допустимых значений неизвестной неравенства позволяет оценить левую и правую части неравенства и сделать вывод о его решении.

Пример 2. (*МИЭТ, 1998.*) Решить неравенство

$$\sqrt{-x^2+3x-2} > x^3-9.$$

Решение. Область определения неравенства задается условием:

$$-x^2+3x-2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2.$$

Для этих значений x получаем:

$$1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x^3 \leq 8 \Leftrightarrow -8 \leq x^3-9 \leq -1,$$

то есть правая часть исходного неравенства отрицательна на его области определения. Следовательно, неравенство справедливо при всех $1 \leq x \leq 2$.

Ответ: $1 \leq x \leq 2$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\left(\sqrt{x^2-6x+5}+1\right)\cdot\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{12x-2x^2-10}+1\right) > 0.$$

Решение. Область определения неравенства задается условиями:

$$\begin{cases} x^2-6x+5 \geq 0, \\ 12x-2x^2-10 \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5. \end{array} \right.$$

Подставляя полученные значения в данное неравенство, получим:

— при $x = 1$ исходное неравенство примет вид $\log_5\frac{1}{5}+1>0$, или $0 > 0$, то есть будет неверно;

— при $x = 5$ имеем $\frac{1}{5}>0$ —верное неравенство.

Ответ: 5.

Методические рекомендации. Покажем один из способов составления примеров, решение которых предполагает использование области определения неравенства.

Пусть даны три числа, $a < b < c$, тогда для неравенства вида

$$\sqrt[2n]{-(x-a)(x-b)}+\sqrt[2k]{-(x-b)(x-c)} \leq f(x),$$

где $f(x)$ — некоторый многочлен, область определения неравенства состоит из одного числа b. Для выполнения неравенства достаточно подобрать многочлен $f(x)$ с условием $f(b) \geq 0$. Например, решением неравенства

$$\sqrt[6]{-(x-2)(x-3)}+\sqrt[4]{-(x-3)(x-4)} \leq x^2+2$$

является одно число $x = 3$.

Тренировочные упражнения

Решите неравенство **(1–3)**.

1. $\sqrt{1-x^4}+\sqrt[4]{x^2-1} < 5^x-\log_3\left(2+x^6\right)$.

2. $\sqrt{\cos x} < \sqrt{1-x^2+\cos x}$.

3. $\sqrt[6]{1-x^2} > \log_3 x$.

Использование непрерывности функции

Непрерывность функции является одним из важнейших понятий, с помощью которого доказываются многие утверждения в математике. Широко используется это понятие при изучении свойств элементарных функций, которые применяются при решении различных задач.

Второе обобщение метода интервалов

Основная идея метода интервалов, рассмотренная в лекции 3: знак произведения (частного) определяется знаками сомножителей (делимого и делителя). В качестве сомножителей были рассмотрены линейные функции, но из школьного курса математики учащимся известны промежутки знакопостоянства и других функций: квадратичной, степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических. Расширение возможностей метода интервалов основано на свойстве непрерывных функций:

> Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.

А как известно, функции, полученные из элементарных функций с помощью арифметических действий или их композиции, непрерывны на своей области определения. Поэтому метод интервалов можно успешно использовать и при решении неравенств, содержащих достаточно широкий класс функций.

Так, например, метод интервалов допускает обобщение на выражения вида

$$f_1^{k_1}(x)\cdot f_2^{k_2}(x)\cdot \ldots \cdot f_n^{k_n}(x),$$

где $f_i(x)$ — функции, непрерывные на своей области определения ($i = 1, 2, ..., n$; $k_1, k_2, ..., k_n$ — фиксированные натуральные числа).

Множество решений неравенства при использовании метода интервалов можно представить в виде объединения промежутков, границами которых являются либо нули функции, либо граничные точки ее области определения.

Рассмотрим неравенства, правая часть которых равна нулю, а левая часть представлена в виде произведения или частного функций с известными промежутками знакопостоянства.

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{(2x-5)\left(32^{\frac{1}{x}}-4\right)}{\left(3^x-8\right)\left(x^4+4x+20\right)}\ge 0.$$

Решение. Так как при $x = -1$ многочлен $x^4+4x+20$ принимает наименьшее значение 17 (докажите с помощью производной), то неравенство $x^4 + 4x + 20 > 0$ выполняется при всех значениях x. Тогда данное неравенство принимает вид

$$\frac{(2x-5)\left(32^{\frac{1}{x}}-4\right)}{3^x-8}\ge 0.$$

Используем для его решения метод интервалов.

1. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{(2x-5)\left(32^{\frac{1}{x}}-4\right)}{3^x-8}.$$

2. Функция $f(x)$ не определена при $x = 0$ и $x = \log_3 8$.

3. Функция $f(x)$ обращается в нуль при $x = 2{,}5$. Отметим, что в точке $x = 2{,}5$ равны нулю два множителя: $2x - 5$ и $32^{\frac{1}{x}}-4$.

4. Найдем промежутки знакопостоянства функции $f(x)$. Так как $0 < \log_3 8 < \log_3 9 < 2{,}5$ и $f(5) < 0$, то $f(x) \ge 0$ при всех значениях $x \in (0; \log_3 8) \cup \{2{,}5\}$ (рис. 1).

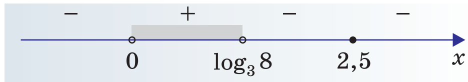


Рис. 1

Ответ: $0 < x < \log_3 8$, $x = 2{,}5$.

Пример 5. Решить неравенство

$$\left(3^{\frac{x-2}{2}}-1\right)\sqrt{3^x-10\sqrt{3^x}+9}\ge 0.$$

Решение. Обозначим $\sqrt{3^x}=t$, где $t > 0$. Тогда данное неравенство примет следующий вид

$$\left(\frac{t}{3}-1\right)\sqrt{t^2-10t+9}\ge 0 \Leftrightarrow (t-3)\sqrt{t^2-10t+9}\ge 0. \qquad (*)$$

Используем для его решения метод интервалов.

1. Рассмотрим функцию

$$f(t)=(t-3)\sqrt{t^2-10t+9}.$$

2. Найдем область определения функции $f(t)$. Для этого решим неравенство

$$t^2 - 10t + 9 \ge 0,\ (t - 1)(t - 9) \ge 0,$$

то есть $t \le 1$ или $t \ge 9$.

Отсюда $D(f) = (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$.

3. Найдем нули функции $f(t)$:

$$(t-3)\sqrt{t^2-10t+9}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{t^2-10t+9}=0\\ t-3=0.\end{array}\right.$$

Из совокупности получаем числа 1, 3, 9, из которых нулями функции являются $t = 1$ или $t = 9$, так как $3 \notin D(f)$.

4. Найдем промежутки знакопостоянства функции $f(t)$. Так как $f(0) < 0$, $f(10) > 0$, то $f(t) \ge 0$ при всех значениях $t \in \{1\} \cup [9; +\infty)$ (рис. 2).

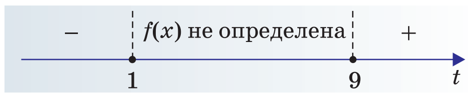


Рис. 2

Полученные решения удовлетворяют условию $t > 0$. Вернемся к переменной x.

Так как $\left[\begin{array}{l}t=1\\ t\ge 9,\end{array}\right.$ то имеем:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{3^x}=1\\ \sqrt{3^x}\ge 9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=1\\ 3^x\ge 81\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x\ge 4.\end{array}\right.$$

Замечание. Удобнее в алгоритм решения неравенства (*) методом интервалов не вносить дополнительное условие $t > 0$, а учитывать его перед возвращением к первоначальной переменной.

Ответ: $\{0\} \cup [4; +\infty)$.

Методические рекомендации. Для решения неравенств методом интервалов легко подобрать примеры следующего вида:

$$f(x)\cdot\sqrt{g(x)} \vee 0, \qquad \frac{\log_a f(x)}{g(x)} \vee 0,$$

$$\frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} \vee 0, \qquad f(x)\cdot\log_a g(x) \vee 0,$$

$$\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} \vee 0, \qquad \frac{f(x)}{\log_a g(x)} \vee 0,$$

где $f(x)$ и $g(x)$ являются линейными или квадратичными функциями.

Например,

$$\left(x^2-3x+2\right)\cdot\sqrt{x+2}\le 0,$$

$$\frac{\log_2(x-4)}{x^2-13x+42}\ge 0.$$

Рационализация неравенств

Практика экзаменов показывает, что наибольшую сложность для школьников представляют трансцендентные неравенства. При решении этих неравенств методом интервалов вычисление значений функций в промежуточных точках может вызвать трудности вычислительного характера. Для рациональных функций такие вычисления несколько проще. Более того, при решении рациональных неравенств, записанных в каноническом виде, расстановку знаков значений функции на промежутках можно проводить и без контрольных точек.

Чтобы устранить указанные проблемы и расширить возможности применения метода интервалов при решении трансцендентных неравенств, используем идею *рационализации неравенств* (см. [1]), известную в математической литературе под другими названиями (*метод декомпозиции* — В.П. Моденов или *метод замены множителей* — В.И. Голубев).

Метод рационализации заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$ (в конечном счете, рациональное), при которой неравенство $G(x) \vee 0$ равносильно неравенству $F(x) \vee 0$ на области определения выражения $F(x)$.

Это не только устраняет трудности, связанные с непосредственным применением метода интервалов к трансцендентным неравенствам, но и расширяет возможности функционально-графического метода при решении трансцендентных неравенств с параметрами.

Выделим некоторые типовые выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G (табл. 1), где f, g, h, p, q — выражения с переменной x ($h > 0$, $h \neq 1$; $f > 0$; $g > 0$), a — фиксированное число ($a > 0$, $a \neq 1$).

Таблица 1

№	Выражение F	Выражение G
1	$\log_a f-\log_a g$	$(a-1)(f-g)$
1а	$\log_a f-1$	$(a-1)(f-a)$
1б	$\log_a f$	$(a-1)(f-1)$
2	$\log_h f-\log_h g$	$(h-1)(f-g)$
2а	$\log_h f-1$	$(h-1)(f-h)$
2б	$\log_h f$	$(h-1)(f-1)$
3	$\log_f h-\log_g h\ (g\neq 1, f\neq 1)$	$(f-1)(g-1)(h-1)(g-f)$
4	$h^f-h^g\ (h>0)$	$(h-1)(f-g)$
4а	h^f-1	$(h-1)f$
5	$f^h-g^h\ (f>0, g>0)$	$(f-g)h$
6	$\lvert f\rvert-\lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$

Отметим, что рассмотренный метод рационализации обобщается на произведение и частное любого числа типовых выражений.

Перечислим ряд *следствий* (с учетом области определения неравенства):

- $\log_h f\cdot\log_p g \vee 0 \Leftrightarrow (h-1)(f-1)(p-1)(g-1)\vee 0;$
- $\log_h f+\log_h g \vee 0 \Leftrightarrow (fg-1)(h-1)\vee 0;$
- $\sqrt{f}-\sqrt{g} \vee 0 \Leftrightarrow f-g \vee 0;$
- $\dfrac{h^f-h^g}{h^p-h^q} \vee 0 \Leftrightarrow \dfrac{f-g}{p-q} \vee 0;$
- $f^h-g^p \vee 0 \Leftrightarrow (a-1)(\log_a f^h-\log_a g^p)\vee 0.$

В указанных равносильных переходах символ «$\vee$» заменяет один из знаков неравенств: «$>$», «$<$», «$\ge$», «$\le$».

Докажем справедливость замен, представленных в таблице 1.

Доказательство. 1. Пусть

$$\log_a f-\log_a g>0,$$

то есть

$$\log_a f>\log_a g, \qquad (*)$$

причем $a>0$, $a\neq 1$, $f>0$, $g>0$.

Если $0<a<1$, то по свойству убывающей логарифмической функции имеем $f<g$. Значит, выполняется система неравенств

$$\begin{cases} a-1<0, \\ f-g<0, \end{cases}$$

откуда следует неравенство $(a-1)(f-g)>0$, верное на области определения выражения $F=\log_a f-\log_a g$.

Если $a>1$, то $f>g$. Следовательно, имеет место неравенство

$$(a-1)(f-g)>0.$$

Обратно, если выполняется неравенство $(a-1)(f-g)>0$ на области $(*)$, то оно на этой области равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} a-1<0, \\ f-g<0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a-1>0, \\ f-g>0. \end{cases}$$

Из каждой системы следует неравенство

$$\log_a f > \log_a g,$$

то есть

$$\log_a f - \log_a g > 0.$$

Аналогично рассматриваются неравенства вида $F < 0$, $F \geq 0$, $F \leq 0$.

2. Пусть некоторое число $a > 0$ и $a \neq 1$, тогда имеем:

$$\log_h f - \log_h g = \frac{\log_a f}{\log_a h} - \frac{\log_a g}{\log_a h} = \frac{\log_a f - \log_a g}{\log_a h}.$$

Знак последнего выражения совпадает со знаком выражения

$$\frac{(a-1)(f-g)}{(a-1)(h-1)} \text{ или } (h-1)(f-g).$$

3. Так как

$$\log_f h - \log_g h = \frac{\log_g h}{\log_g f} - \log_g h =$$

$$= \log_g h \cdot \log_f g - \log_g h = \log_g h\,(\log_f g - 1),$$

то, используя замены 2*а* и 2*б* (см. табл.), получаем, что знак последнего выражения совпадает со знаком выражения

$$(g-1)(h-1)(f-1)(g-f)$$

или

$$(f-1)(g-1)(h-1)(g-f).$$

4. Из неравенства $h^f - h^g > 0$ следует $h^f > h^g$. Пусть число $a > 1$, тогда

$$\log_a h^f > \log_a h^g,$$

или

$$(f-g)\log_a h > 0.$$

Отсюда с учетом замены 1*б* и условия $a > 1$ получаем:

$$(f-g)(a-1)(h-1) > 0,$$
$$(h-1)(f-g) > 0.$$

Аналогично доказываются неравенства $F < 0$, $F \leq 0$, $F \geq 0$.

5. Доказательство проводится аналогично доказательству 4.

6. Доказательство замены 6 (см. табл.), следует из равносильности неравенств

$$|p| > |q| \text{ и } p^2 > q^2 \; (|p| < |q| \text{ и } p^2 < q^2).$$

Пример 6. Решить неравенство

$$\log_{|x+2|}(4 + 7x - 2x^2) \leq 2.$$

Решение. Запишем неравенство в виде

$$\log_{|x+2|}(4 + 7x - 2x^2) - \log_{|x+2|}(x+2)^2 \leq 0$$

и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации:

$$\begin{cases} (|x+2|-1)\left(4+7x-2x^2-(x+2)^2\right) \leq 0, \\ 4+7x-2x^2 > 0, \\ x+2 \neq 0, \\ |x+2| \neq 1. \end{cases}$$

Знак множителя $(|x+2|-1)$ совпадает со знаком $((x+2)^2-1)$ по замене 6.

Получим равносильную систему неравенств:

$$\begin{cases} \left((x+2)^2-1\right)\left(-3x^2+3x\right) \leq 0, \\ (x+0,5)(x-4) < 0, \\ x \neq -3,\ x \neq -2,\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)(x+3)(x-1) \geq 0, \\ (x+0,5)(x-4) < 0, \\ x \neq -3,\ x \neq -2,\ x \neq -1. \end{cases}$$

Окончательно получаем (рис. 3), что решением являются все x такие, что $-0,5 < x \leq 0$, $1 \leq x < 4$.

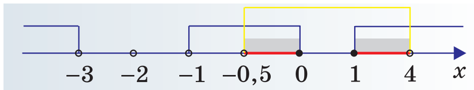


Рис. 3

Ответ: $(-0,5;\ 0] \cup [1;\ 4)$.

Пример 7. Решить неравенство

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \geq \log_{2x^2-5x+3}(3-x).$$

Решение. Запишем неравенство в виде

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) - \log_{2x^2-5x+3}(3-x) \geq 0$$

и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации:

$$\begin{cases} \left(12x^2-41x+34\right)\left(2x^2-5x+2\right)(2-x)\left(-10x^2+36x-32\right) \geq 0, \\ 12x^2-41x+35 > 0, \\ 2x^2-5x+3 > 0, \\ 12x^2-41x+34 \neq 0, \\ 2x^2-5x+2 \neq 0, \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^4\left(x-\frac{8}{5}\right)\left(x-\frac{17}{12}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) \geq 0, \\ \left(x-\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{7}{4}\right) > 0, \\ (x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right) > 0, \\ \left(x-\frac{17}{12}\right)(x-2) \neq 0, \\ (x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right) \neq 0, \\ x < 3. \end{cases}$$

Для решения первых трех неравенств системы используем метод интервалов.

Самостоятельно рассмотрите рисунки и выберите общую часть для решения системы.

Ответ: $\left(\frac{1}{2};1\right) \cup \left[\frac{8}{5};\frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4};2\right) \cup (2;\ 3)$.

Пример 8. Решить неравенство

$$\frac{9}{\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right)\log_{1,9}x} \geq \frac{(x-1)^{\log_3(x-1)}}{9\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right)\log_{1,9}x}.$$

Решение. Область определения неравенства задается системой

$$\begin{cases} x-1>0, \\ x>0, \\ x\neq 1, \\ x\neq 10, \\ (x-10)^2\neq 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x>1, \\ x\neq 10, \\ x\neq 11, \\ x\neq 9. \end{cases}$$

Учитывая, что при $x > 1$ выражение $\log_{1,9} x$ положительно, преобразуем данное неравенство на его области определения:

$$\frac{81-(x-1)^{\log_3(x-1)}}{\log_{2,1}(x-10)^2}\geq 0.$$

Далее используем метод рационализации:

$$\frac{\log_3 81-\log_3(x-1)^{\log_3(x-1)}}{(2,1-1)\left((x-10)^2-1\right)}\geq 0; \quad \frac{4-\log_3^2(x-1)}{(x-9)(x-11)}\geq 0;$$

$$\frac{\left(\log_3 9-\log_3(x-1)\right)\left(\log_3 9-\log_3(x-1)^{-1}\right)}{(x-9)(x-11)}\geq 0;$$

$$\frac{(9-x+1)\left(9-\dfrac{1}{x-1}\right)}{(x-9)(x-11)}\geq 0; \quad \frac{(x-10)(9x-10)}{(x-9)(x-11)(x-1)}\leq 0.$$

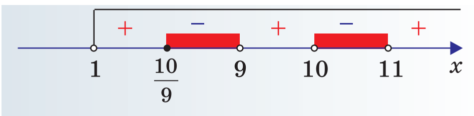


Рис. 4

Ответ: $\left[\frac{10}{9}; 9\right) \cup (10; 11).$

Методические рекомендации. Приведем один из способов, с помощью которого учитель может самостоятельно составлять неравенства определенного типа. Для этого можно взять за основу неравенство вида

$$\frac{f(x)\cdot f_2(x)\cdot \ldots \cdot f_k(x)}{f_{k+1}(x)\cdot f_{k+2}(x)\cdot \ldots \cdot f_n(x)} \vee 0,$$

где $f_i(x)$ одно из типовых выражений (см. табл.). Например,

$$\frac{\log_{x+1}\left(x^2-1\right)\cdot\left(\log_{x^2}x-1\right)}{\left(2^{x+2}-2^{x^2}\right)\cdot\left(\log_{0,2}|x|-\log_{0,2}|x+3|\right)}\leq 0.$$

Тренировочные упражнения

Решите неравенство **(4–14)**.

4. $\dfrac{2\log_{2^{x-1}}|x|}{\log_{2^{x-1}}(x+7)}\leq\dfrac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)}.$

5. $\log_{\frac{x}{6}}\left(\log_x\sqrt{6-x}\right)>0.$

6. $\dfrac{\lg\left(3x+2\sqrt{x}-1\right)}{\lg\left(5x+3\sqrt{x}-2\right)^5}\geq\dfrac{\log_{32}11}{\log_2 11}.$

7. $\dfrac{(x-0,5)(3-x)}{\log_2|x-1|}>0.$

8. $\dfrac{\log_5\left(x^2-4x-11\right)^2-\log_{11}\left(x^2-4x-11\right)^3}{2-5x-3x^2}\geq 0.$

9. $\log_{1-x}(2x^2+3x+1)\geq 2.$

10. $\log_{x+4}(5x+20)\leq\log_{x+4}(x+4)^2.$

11. $\log_{\frac{3x-1}{3x+1}}\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\geq 1.$

12. $\dfrac{\log_{2x-1}\left(\log_2\left(x^2-2x\right)\right)}{\log_{2x-1}\left(x^2+6x+10\right)}\leq 0.$

13. $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leq 0.$

14. $\log_{4x}(x+7)\leq\log_{x^2-5}(x+7).$

Использование ограниченности функций

Данный метод наиболее эффективен, если в неравенстве содержатся такие функции, как $y=\sqrt{x}$, $y=|x|$, $y=\sin x$, и другие, области значений которых ограничены сверху или снизу.

Для использования ограниченности функции необходимо уметь находить множество значений функции и знать оценки области значений стандартных функций (например, $-1\leq\sin x\leq 1$, $\sqrt{x}\geq 0$ и т.д.).

Метод оценки

Иногда неравенство $f(x)\vee g(x)$ устроено так, что на всей ОДЗ неизвестной имеют место неравенства $f(x)\geq A$ и $g(x)\leq A$ при некотором A. В этом случае:

а) решение неравенства $f(x)\leq g(x)$ сводится к нахождению тех значений x, для которых одновременно $f(x)=A$ и $g(x)=A$;

б) решение неравенства $f(x)\geq g(x)$ сводится к нахождению тех решений неравенства $f(x)\geq A$, для которых определена функция $g(x)$.

Пример 9. Решить неравенство

$$\log_5 x\leq\sqrt{1-x^4}.$$

Решение. Область определения неравенства задается условиями:

$$\begin{cases} x>0, \\ 1-x^4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x\leq 1.$$

Для всех x из полученного множества имеем $\log_5 x \le 0$, а $\sqrt{1-x^4} \ge 0$. Следовательно, решением этого неравенства является промежуток (0; 1].

Ответ: (0; 1].

Пример 10. Решить неравенство

$$\sqrt{16-(5x+2)^2} \ge 4+\cos^2\frac{15\pi x}{4}.$$

Решение. Оценим правую часть данного неравенства. Так как

$$0 \le \cos^2\frac{15\pi x}{4} \le 1,$$

то

$$4 \le 4+\cos^2\frac{15\pi x}{4} \le 5.$$

Для левой части последовательно имеем:

$$(5x+2)^2 \ge 0,\ -(5x+2)^2 \le 0,$$
$$16-(5x+2)^2 \le 16,$$
$$\sqrt{16-(5x+2)^2} \le 4$$

при всех допустимых значениях x.

Исходное неравенство будет верно только в том случае, если обе части неравенства равны 4, то есть данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{16-(5x+2)^2}=4, \\ 4+\cos^2\dfrac{15\pi x}{4}=4. \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет один корень $x = -0{,}4$, который удовлетворяет и второму уравнению.

Ответ: $-0{,}4$.

Пример 11. (*МИЭТ, 2005.*) Решить неравенство

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x} > 3\cdot\sqrt[4]{x^2-4x+20}.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}.$$

$D(f) = [-7; 11]$. Найдем экстремумы функции:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+7}}-\frac{1}{2\sqrt{11-x}}=\frac{\sqrt{11-x}-\sqrt{x+7}}{2\sqrt{x+7}\sqrt{11-x}},$$

$D(f') = (-7; 11)$. Найдем нули производной. Из уравнения $11 - x = x + 7$ получаем $x = 2$.

$f'(x) > 0$ при $-7 < x < 2$;

$f'(x) < 0$ при $2 < x < 11$.

Следовательно, $x = 2$ — точка максимума функции $f(x)$, и $f(2) = 6$. Значит, $\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x} \le 6$ при всех допустимых значениях x.

Оценим правую часть исходного неравенства:

$$3\cdot\sqrt[4]{x^2-4x+20}=3\cdot\sqrt[4]{(x-2)^2+16} \ge 3\cdot\sqrt[4]{16}=6.$$

Таким образом, для исходного неравенства нужно, чтобы его левая и правая части были равны 6. Это выполняется при $x = 2$.

Ответ: 2.

Методические рекомендации. Используем квадратичную функцию для построения примеров, в решении которых применяется метод оценки. Так как квадратичные функции $ax^2 + bx$ и $-ax^2 - bx$ при одном и том же значении $x=-\dfrac{b}{2a}$ имеют разный характер экстремума, то в уравнениях вида

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=-ax^2-bx+d,$$

или

$$\log_a(ax^2+bx+c)=-ax^2-bx+d$$

достаточно подобрать значения c и d, при которых $x=-\dfrac{b}{2a}$ является их корнем. Далее заменяем знак равенства на знак неравенства «≥» или «≤». Приведем примеры таких неравенств.

Например:

$$\log_4(6x-x^2+7) \ge x^2-6x+11,$$
$$\sqrt{6x-x^2+7} \ge x^2-6x+13.$$

Неотрицательность функции

Пусть левая часть неравенства $f(x) \vee 0$ есть сумма нескольких функций: $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$, каждая из которых неотрицательна для любого x из области ее определения. Тогда неравенство $f(x) \le 0$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x)=0, \end{cases}$$

а неравенство $f(x) \ge 0$ сводится к нахождению области определения функции $f(x)$.

Пример 12. Решить неравенство

$$\sqrt{x^3+8x^2-7x-26}+\sqrt{x^2+3x-10} \le 0.$$

Решение. Так как левая часть неравенства неотрицательна, то данное неравенство выполняется только при одновременном равенстве нулю слагаемых:

$$\begin{cases} \sqrt{x^3+8x^2-7x-26}=0, \\ \sqrt{x^2+3x-10}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+8x^2-7x-26=0, \\ \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

Методические рекомендации. Используя набор неотрицательных функций $\sqrt[2k]{f(x)}$, $|g(x)|$, $p^{2k}(x)$, $\log_a(1 + q(x))$ при $q(x) \ge 0$, имеющих хотя бы один общий нуль, учитель легко может составить примеры. Например, используя схему неравенства

$$\sqrt[4]{(x-a)(x-b)}+|(x-b)(x-c)|\le 0,$$

сначала получаем неравенство

$$\sqrt[4]{(x-2)(x-4)}+|(x-4)(x+3)|\le 0,$$

затем, после преобразований, пример приобретает окончательный вид:

$$\sqrt[4]{x^2-6x+8}+|x^2-x-12|\le 0.$$

Применение свойств модуля

В последние годы в различных математических изданиях уделяется повышенное внимание эффективным методам решения нестандартных задач. Одной из популярных тем является «Абсолютная величина». Как известно, при решении неравенств часто предварительно решают соответствующее уравнение. Поэтому при решении нестандартных уравнений с модулями используют не только основные, но и дополнительные свойства модуля числа, которые не отражены в учебниках.

Напомним *некоторые дополнительные свойства модулей*, доказательства которых легко проводятся перебором различных случаев раскрытия знаков модуля.

Сумма модулей равна алгебраической сумме подмодульных выражений тогда и только тогда, когда каждое выражение имеет тот знак, с которым оно входит в алгебраическую сумму:

$$|f|+|g|=f+g \Leftrightarrow \begin{cases} f\ge 0,\\ g\ge 0;\end{cases}$$

$$|f|+|g|=f-g \Leftrightarrow \begin{cases} f\ge 0,\\ g\le 0;\end{cases}$$

$$|f|+|g|=-f+g \Leftrightarrow \begin{cases} f\le 0,\\ g\ge 0;\end{cases}$$

$$|f|+|g|=-f-g \Leftrightarrow \begin{cases} f\le 0,\\ g\le 0.\end{cases}$$

Сумма модулей равна модулю алгебраической суммы подмодульных выражений тогда и только тогда, когда одновременно все выражения имеют тот знак, с которым они входят в алгебраическую сумму, либо одновременно все выражения имеют противоположный знак:

$$|f|+|g|=|f+g| \Leftrightarrow \begin{cases} f\ge 0,\\ g\ge 0\end{cases} \text{ или } \begin{cases} f\le 0,\\ g\le 0\end{cases} \Leftrightarrow fg\ge 0;$$

$$|f|+|g|=|f-g| \Leftrightarrow \begin{cases} f\ge 0,\\ g\le 0\end{cases} \text{ или } \begin{cases} f\le 0,\\ g\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow fg\le 0.$$

Одна из схем решения уравнения для трех слагаемых:

$$|f|+|g|+|h|=|f+g-h| \Leftrightarrow \begin{cases} f\ge 0,\\ g\ge 0,\\ h\le 0\end{cases} \text{ или } \begin{cases} f\le 0,\\ g\le 0,\\ h\ge 0.\end{cases}$$

Пример 13. Решить неравенство

$$|x^2-3x+2|\le x^2-3x+2.$$

Решение. Из условия $|a|\le a$ и из свойств модуля $|a|\ge a$ имеем $|a|=a$. Отсюда по определению модуля получаем $a\ge 0$, где $a=x^2-3x+2$. Неравенство $x^2-3x+2\ge 0$ имеет решения $(-\infty;\,1]\cup[2;\,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\,1]\cup[2;\,+\infty)$.

Пример 14. (*МИОО, 2010.*) Решить неравенство

$$|x^3-2x^2-3x|+|x^2+4x-5|\le|x^3-x^2+x-5|.$$

Решение. Неравенство имеет вид

$$|a|+|b|\le|a+b|,$$

где $a=x^3-2x^2-3x$ и $b=x^2+4x-5$.

Но из неравенств треугольника имеем:

$$|a|+|b|\ge|a+b|.$$

Отсюда получаем равенство

$$|a|+|b|=|a+b|,$$

которое справедливо при условии $ab\ge 0$.

Из неравенства

$$(x^3-2x^2-3x)(x^2+4x-5)\ge 0,$$

или

$$x(x+1)(x-3)(x-1)(x+5)\ge 0$$

получаем: $x\in[-5;\,-1]\cup[0;\,1]\cup[3;\,+\infty)$.

Ответ: $[-5;\,-1]\cup[0;\,1]\cup[3;\,+\infty)$.

Методические рекомендации. Неравенства с модулем легко составить по выше приведенным схемам:

$|f(x)|\le f(x)$, $|f|+|g|=|f+g|$, $|f|+|g|=f+g$

и т.д. Например:

$|x^3-1|+|1-\log_2 x|=x^3+\log_2 x;$

$|2^x-8|+|x^2-6x+8|=|2^x+x^2-6x|.$

Ограниченность синуса и косинуса

Неравенства $|\sin\,\alpha x|\le 1$ и $|\cos\,\alpha x|\le 1$ часто используют при решении нестандартных неравенств.

Пример 15. (*МИЭТ, 1998.*) Решить неравенство

$$(x^2+2x+2)\cdot\cos(x+1)\ge 2x^2+4x+3.$$

Решение. Поскольку $x^2+2x+2>0$ при любом x, то, разделив обе части неравенства на x^2+2x+2, придем к равносильному неравенству:

$$\cos(x+1)\ge\frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(x+1)\ge 1+\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1}.$$

Так как $\cos(x+1) \le 1$, правая часть неравенства $1+\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1}\ge 1$ при всех значениях x и $1+\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1}=1$ при $x=-1$, то равенство возможно только при $x=-1$. Проверкой убеждаемся, что и левая часть неравенства при $x=-1$ также равна 1.

Ответ: -1.

Пример 16. Решить неравенство

$$\cos 4x \cdot \sin x \ge 1.$$

Решение. Так как $|\cos 4x| \le 1$ и $|\sin x| \le 1$, то $|\cos 4x|\cdot|\sin x| \le 1$ и исходное неравенство равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 4x=1,\\ \sin x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos 4x=-1,\\ \sin x=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x=2\pi n,\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\end{cases}\\ \begin{cases}4x=\pi+2\pi n,\\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{\pi n}{2},\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\end{cases}\end{array}\right. n,\ k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$.

Пример 17. Решить неравенство

$$\cos x + \cos 3x \ge 2.$$

Решение. Из неравенств $|\cos x| \le 1$ и $|\cos 3x| \le 1$ следует, что неравенство возможно только в том случае, когда оба слагаемых одновременно будут равны 1:

$$\cos x + \cos 3x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=1,\\ \cos 3x=1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=2\pi n,\\ x=\frac{2\pi k}{3},\end{cases} n,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Вторая серия решений включает первую серию, поэтому окончательно имеем: $x=2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Методические рекомендации. Подобные примеры составляются с использованием следующих схем:

$$f(kx) \pm g(mx) \ge 2,\quad f(kx) \pm g(mx) \le -2,$$
$$f(kx)\cdot g(mx) \ge 1 \text{ или } f(kx)\cdot g(mx) \le -1,$$

где f и g — функции синус или косинус, k и m — фиксированные целые числа.

Например,

$\cos 3x - \sin 4x \le -2$;

$\sin 2x \cdot \cos 5x \ge 1$.

Применение классических неравенств

Рассмотрим классическое неравенство Коши, известное школьнику как неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел, которое эффективно может быть использовано при решении неравенств.

Неравенство Коши:

Для любых положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n справедливо неравенство

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n},$$

причем равенство достигается только в случае $a_1 = a_2 = \ldots a_n$.

Пример 18. Решить неравенство

$$x^{1005}+\frac{2010}{\sqrt{x}} \le 2011.$$

Решение. Запишем левую часть данного неравенства следующим образом:

$$x^{1005}+\frac{2010}{\sqrt{x}}=x^{1005}+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x}}}_{2010\text{ слагаемых}}.$$

Используя неравенство Коши, получим:

$$x^{1005}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x}} \ge 2011\cdot\sqrt[2011]{x^{1005}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}=$$

$$=2011\cdot\sqrt[2011]{1}=2011.$$

Причем равенство имеет место при равенстве слагаемых, то есть при

$$x^{1005}=\frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x=1.$$

Следовательно, исходное неравенство выполняется только при $x=1$. При всех остальных допустимых значениях x левая часть исходного неравенства больше 2011.

Ответ: 1.

Методические рекомендации. При составлении примеров за основу можно взять неравенство вида

$$f(x)+\frac{1}{f(x)} \vee 2-T^2(x),$$

или

$$f(x)+\frac{1}{f(x)} \vee 1+T(x),$$

где $f(x) > 0$, $T(x)$ — одна из функций $\sin\alpha x$ или $\cos\alpha x$.

Например,

$(\log_3 4)^x + (\log_4 3)^x \le 2 - \sin^2 5x$,

$\left(\frac{4}{5}\right)^{x-1}+\left(\frac{5}{4}\right)^{x-1} \le 1+\cos 7x$.

Тренировочные упражнения

Решите неравенство **(15–22)**.

15. $\sqrt{x-1}+2^{\arcsin\frac{1}{x}}>1.$

16. $\arcsin(x^2+1)<2.$

17. $5^{\log_x 2}\cdot\log_2 x+5^{\log_2 x}\cdot\log_x 2\le 10.$

18. $\sin^2 3x-\cos^2 3x\le -1.$

19. $\sqrt{\cos x-1}\ge x^2-16.$

20. $\left(10x-x^2-24\right)\cdot\log_2\left(\sin^2\frac{\pi}{2}x+1\right)\ge 1.$

21. $|x^3+2x^2+8x-7|\le x^3+4x^2-8x+7.$

22. $|x^3+2x^2-8x|+|x^2-3x-10|\le$
$\le|x^3+3x^2-11x-10|.$

Использование монотонности функций

При использовании монотонности функций различают случаи, когда функции, стоящие в обеих частях неравенства, имеют одинаковую монотонность или разную монотонность.

Монотонность функции на множестве R

Приведем несколько утверждений, позволяющих решать неравенства данного вида, где $f(t)$ строго возрастает на $\boldsymbol{R}$.

Если функция $f(t)$ строго возрастает на $\boldsymbol{R}$, то неравенство $f(h(x))>f(g(x))$ равносильно неравенству $h(x)>g(x)$.

Если функция $f(t)$ строго убывает на $\boldsymbol{R}$, то неравенство $f(h(x))>f(g(x))$ равносильно неравенству $h(x)<g(x)$.

Отметим следствия из этих утверждений, которые часто используют при решении неравенств.

Следствие 1. Так как функция $y=t^{2n+1}$, $n\in\boldsymbol{N}$, строго возрастает на $\boldsymbol{R}$, то неравенство $(h(x))^{2n+1}>(g(x))^{2n+1}$ равносильно неравенству $h(x)>g(x)$.

Следствие 2. Так как функция $y=\sqrt[2n+1]{t}$, $n\in\boldsymbol{N}$, строго возрастает на $\boldsymbol{R}$, то неравенство $\sqrt[2n+1]{h(x)}>\sqrt[2n+1]{g(x)}$ равносильно неравенству $h(x)>g(x)$.

Следствие 3. Так как функция $y=a^t$ $(a>1)$ строго возрастает на $\boldsymbol{R}$, то неравенство $a^{h(x)}>a^{g(x)}$ равносильно неравенству $h(x)>g(x)$.

Следствие 4. Так как функция $y=a^t$ $(0<a<1)$ строго убывает на $\boldsymbol{R}$, то неравенство $a^{h(x)}>a^{g(x)}$ равносильно неравенству $h(x)<g(x)$.

Следствие 5. Так как функция $y=\operatorname{arctg} t$ строго возрастает на $\boldsymbol{R}$, то неравенство $\operatorname{arctg} h(x)>\operatorname{arctg} g(x)$ равносильно неравенству $h(x)>g(x)$.

Следствие 6. Так как функция $y=\operatorname{arcctg} t$ строго убывает на $\boldsymbol{R}$, то неравенство $\operatorname{arcctg} h(x)>\operatorname{arcctg} g(x)$ равносильно неравенству $h(x)<g(x)$.

Пример 19 Решить неравенство

$$(2x^2+1)^5-(3x)^5>3x-2x^2-1.$$

Решение. Перепишем данное неравенство в виде

$$(2x^2+1)^5+2x^2+1>(3x)^5+3x. \qquad (*)$$

Рассмотрим функцию $f(t)=t^5+t$, определенную при всех действительных значениях t.

Тогда неравенство $(*)$ примет вид

$$f(2x^2+1)>f(3x).$$

Так как $f'(t)=5t^4+1>0$ для любого $t\in\boldsymbol{R}$, то функция $f(t)$ строго возрастает на $\boldsymbol{R}$. Для возрастающей функции, определенной на всей числовой прямой, неравенство $f(t_1)>f(t_2)$ равносильно неравенству $t_1>t_2$.

Следовательно, неравенство $(*)$ равносильно неравенству $2x^2+1>3x$, решением которого являются $x<0{,}5$ или $x>1$.

Ответ: $(-\infty;\ 0{,}5)\cup(1;\ +\infty)$.

Пример 20. (*МИЭТ, 2005.*). Решить неравенство

$$(1-|x|)\cdot\sqrt{1+3x^2}\le x\cdot\sqrt{4+3x^2-6x}.$$

Решение. Поскольку

$$4+3x^2-6x=1+3(1-x)^2,\ x=1-(1-x),$$

то данное неравенство можно рассматривать как сравнение значений функции

$$f(t)=(1-t)\sqrt{1+3t^2},$$

определенной на всей числовой прямой при значениях $t_1=|x|$ и $t_2=1-x$, то есть, как неравенство $f(|x|)\le f(1-x)$.

Выясним характер монотонности функции $f(t)$. Для этого найдем ее производную:

$$f'(t)=-1\cdot\sqrt{1+3t^2}+(1-t)\cdot\frac{6t}{2\sqrt{1+3t^2}}=$$
$$=-\sqrt{1+3t^2}-\frac{3t(t-1)}{\sqrt{1+3t^2}}=\frac{-6t^2+3t-1}{\sqrt{1+3t^2}}.$$

Заметим, что многочлен $-6t^2+3t-1$ не имеет корней и его старший коэффициент меньше нуля. Значит, при всех t выражение $-6t^2+3t-1<0$, соответственно, $f'(t)<0$ на $\boldsymbol{R}$. Это означает, что функция $f(t)$ — убывающая. Для убывающей функции, определенной на всей числовой прямой, неравенство $f(t_1)\le f(t_2)$ равносильно неравенству $t_1\ge t_2$. Следовательно,

$$f(|x|)\le f(1-x)\Leftrightarrow|x|\ge 1-x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1-x\\ x\le x-1\end{array}\right.\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{2}.$$

Ответ: $x\ge\frac{1}{2}$.

Методические рекомендации. Стандартные примеры по данному разделу учитель найдет в учебниках или задачниках. Приведем пример построения нестандартного по виду неравенства. Квадратное неравенство $x^2-5x+6\ge 0$ приведем, например, к виду $x^2 - 3x \ge 2x - 6$. Рассмотрим возрастающую функцию $f(t)=\sqrt[3]{t}+2^t$ на $\boldsymbol{R}$ как сумму двух возрастающих функций и запишем неравенство $f(x^2-3x) \ge f(2x-6)$. Развернутая запись последнего неравенства имеет следующий вид:

$$\sqrt[3]{x^3-3x}+2^{x^3-3x} \ge \sqrt[3]{2x-6}+2^{2x-6}.$$

Монотонность функции на промежутке

Приведем несколько утверждений, позволяющих решать неравенства вида $f(h(x)) \vee f(g(x))$, где $f(t)$ строго возрастает на промежутке.

Если функция $f(t)$ определена и является возрастающей на промежутке M, то неравенство $f(h(x)) > f(g(x))$ равносильно системе

$$\begin{cases} h(x) > g(x), \\ E(h) \subset M, \\ E(g) \subset M, \end{cases}$$

где $E(h)$ и $E(g)$ — множество значений функций $h(x)$ и $g(x)$ соответственно.

Если функция $f(t)$ определена и строго убывает на промежутке M, то неравенство $f(h(x)) > f(g(x))$ равносильно системе

$$\begin{cases} h(x) < g(x), \\ E(h) \subset M, \\ E(g) \subset M, \end{cases}$$

где $E(h)$ и $E(g)$ — множество значений функций $h(x)$ и $g(x)$ соответственно.

Следствие 1. Неравенство вида $\log_a h(x) > \log_a g(x)$, где $a > 1$, равносильно неравенствам $h(x) > g(x) > 0$.

Следствие 2. Неравенство вида $\log_a h(x) > \log_a g(x)$, где $0 < a < 1$, равносильно неравенствам $0 < h(x) < g(x)$.

Следствие 3. Неравенство вида $\arcsin h(x) > \arcsin g(x)$ равносильно неравенствам $1 \ge h(x) > g(x) \ge -1$.

Следствие 4. Неравенство вида $\arccos h(x) > \arccos g(x)$ равносильно неравенствам $-1 \le h(x) < g(x) \le 1$.

Пример 21. Решить неравенство

$$\log_3(x^3+x^2-4x+2) \ge \log_3(x^3-1).$$

Решение. Так как функция $y = \log_3 t$ строго возрастает на множестве $t > 0$, то данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^3+x^2-4x+2 \ge x^3-1, \\ x^3-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3 \ge 0, \\ x^3>1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ x \ge 3, \end{array}\right. \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 3.$$

Ответ: $[3; +\infty)$.

Пример 22. Решить неравенство

$$\arcsin(3x^2-2x) \le \arcsin(3x+2).$$

Решение. Функция $y = \arcsin t$ определена при $-1 \le t \le 1$ и возрастает на всей области определения. Используя свойства этой функции, перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} 3x^2-2x \le 3x+2, \\ -1 \le 3x^2-2x, \\ 3x+2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-5x-2 \le 0, \\ 3x^2-2x+1 \ge 0, \\ x \le -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{3} \le x \le 2, \\ x \le -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{3}$.

Пример 23. Решить неравенство

$$\log_{84-2x-2x^2} \cos x \le \log_{x+19} \cos x.$$

Решение. Из условий

$$\begin{cases} 84-2x-2x^2>0, \\ 84-2x-2x^2 \ne 1, \\ x+19>0, \\ x+19 \ne 1, \\ 0<\cos x \le 1 \end{cases}$$

получаем:

$$x \in \left(-7; -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 6\right), \quad x \ne \frac{-1 \pm \sqrt{167}}{2}. \ (*)$$

Так как по условию $0 < \cos x \le 1$, то рассмотрим два случая.

1. Пусть $\cos x = 1$, тогда из множества чисел $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, с учетом $(*)$, решениями данного в условии неравенства являются два числа: -2π и 0.

2. Для случая $0 < \cos x < 1$ исследуем функцию $y = \log_t a$, где $t > 0$, $t \ne 1$ и число $0 < a < 1$. Так как

$$y' = (\log_t a)' = \left(\frac{\ln a}{\ln t}\right)' = -\frac{\ln a}{t \ln^2 t} > 0,$$

то функция $y = \log_t a$ возрастает на каждом из промежутков $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$.

а) Для функции $y = \log_t a$, возрастающей на промежутке $(0; 1)$, получаем:

$$\begin{cases} 0<84-2x-2x^2<1, \\ 0<x+19<1, \\ 84-2x-2x^2 \le x+19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7<x<6, \\ 84-2x-2x^2<1, \\ -19<x<18, \\ 84-2x-2x^2 \le x+19 \end{cases}$$

— нет решений.

б) Для функции $y = \log_t a$, возрастающей на промежутке $(1; +\infty)$, получаем:

$$\begin{cases} 84-2x-2x^2>1, \\ x+19>1, \\ 84-2x-2x^2 \le x+19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+2x-83<0, \\ x>-18, \\ 2x^2+3x-65 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{167}}{2} < x < \dfrac{-1+\sqrt{167}}{2}, \\ x > -18, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -6{,}5 \\ x \ge 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{-1-\sqrt{167}}{2} < x \le -\dfrac{13}{2} \\ 5 \le x < \dfrac{-1+\sqrt{167}}{2}. \end{array}\right.$$

Полученные решения удовлетворяют условию (*).

Ответ: $\left(\dfrac{-1-\sqrt{167}}{2}; -\dfrac{13}{2}\right] \cup \{-2\pi; 0\} \cup \left[5; \dfrac{-1+\sqrt{167}}{2}\right).$

Функции разной монотонности

Пусть на промежутке $(a; b)$ заданы возрастающая функция $f(x)$ и убывающая функция $g(x)$, причем x_0 — корень уравнения $f(x) = g(x)$, принадлежащий промежутку $(a; b)$. Тогда решение неравенства $f(x) > g(x)$ — все числа из промежутка $(x_0; b)$, а решение неравенства $f(x) < g(x)$ — промежуток $(a; x_0)$ (рис. 5).

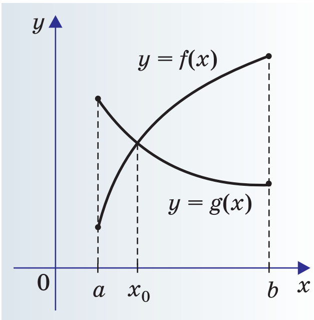


Рис. 5

Пусть на промежутке $(a; b)$ задана возрастающая функция $f(x)$ и x_0 — корень уравнения $f(x) = c$, принадлежащий промежутку $(a; b)$. Тогда решение неравенства $f(x) > c$ — все числа из промежутка $(x_0; b)$, а решение неравенства $f(x) < c$ — промежуток $(a; x_0)$ (рис. 6).

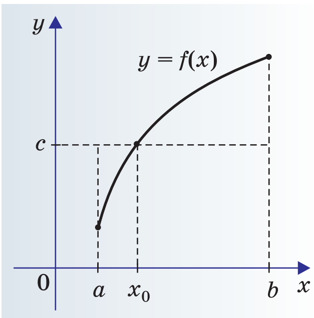


Рис. 6

Пример 24. Решить неравенство:

а) $2x^5 + x^3 + 5x - 80 > \sqrt[3]{14-3x}$;

б) $2x^5 + x^3 + 5x - 80 < \sqrt[3]{14-3x}$.

Решение. Рассмотрим функции

$$f(x) = 2x^5 + x^3 + 5x - 80 \text{ и } g(x) = \sqrt[3]{14-3x}.$$

Функция $f(x)$ определена и дифференцируема на $\boldsymbol{R}$. Исследуем ее на монотонность. Так как

$$f'(x) = 10x^4 + 3x^2 + 5 > 0$$

как сумма двух неотрицательных и одного положительного слагаемых, то функция $f(x)$ строго возрастает на $\boldsymbol{R}$.

Функция $g(x)$ определена на $\boldsymbol{R}$ и дифференцируема на множестве $\left(-\infty; \dfrac{14}{3}\right) \cup \left(\dfrac{14}{3}; +\infty\right)$, причем

$$g'(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{(14-3x)^2}} < 0.$$

Значит, функция $g(x)$ убывает на $\boldsymbol{R}$.

Поскольку функция $f(x)$ строго возрастает, а функция $g(x)$ убывает на $\boldsymbol{R}$, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не больше одного корня. Подбором находим, что $x = 2$ является корнем этого уравнения.

Значит, решения неравенства «а» есть промежуток $(2; +\infty)$, а неравенства «б» — промежуток $(-\infty; 2)$.

Ответ: а) $(2; +\infty)$; б) $(-\infty; 2)$.

Пример 25. Решить неравенство

$$\sqrt[6]{x} + 2x^3 + \log_3(x+2) - \sqrt{1-x} < 4.$$

Решение. Область определения данного неравенства есть промежуток $[0; 1]$. Функция

$$y = \sqrt[6]{x} + 2x^3 + \log_3(x+2) - \sqrt{1-x}$$

возрастает на этом промежутке как сумма возрастающих функций. Так как $f(1) = 4$, то все значения x из множества $[0; 1)$ удовлетворяют исходному неравенству.

Ответ: $[0; 1)$.

Методические рекомендации. Комбинируя, например, убывающую функцию $y = kx + b$ с возрастающими функциями, учитель может создать набор уравнений, имеющих один корень в силу разной монотонности функций: $\log_3 x = 20 - x$, $\sqrt{x+3} = 9 - x$, $-\dfrac{5}{x} = 4 - x$, $3^{x-1} = 12 - x$. Далее заменяем знак равенства на знак неравенства.

Тренировочные упражнения

Решите неравенство **(23–27)**.

23. $\sqrt{x} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} + \sqrt{x+24} < 11.$

24. $\log_3(x + 2) < 9 - x.$

25. $\sqrt[2011]{x^5 - x^2 + 1} + \operatorname{arctg}\left(x^5 - x^2 + 1\right) >$

$$> \sqrt[2011]{x^5 - 2x - 2} + \operatorname{arctg}\left(x^5 - 2x - 2\right).$$

26. $(2x+1)^2\sqrt{1+\sqrt{1+(2x+1)^2}} < x^2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}.$

27. (*МГУ, 1999.*) $\log_{\frac{x}{2}+5} \sin x \ge \log_{9+8x-x^2} \sin x.$

Графический метод

Этот метод решения неравенств обладает несколькими несомненными преимуществами:

❶ Построив графики функций, входящих в неравенство, можно определить, как влияет на решение взаимное расположение графиков;

❷ График подчас позволяет аналитически сформулировать необходимые и достаточные условия для решения поставленной задачи, то есть графические приемы эффективно применяются для изображения результатов исследования там, где чисто аналитическая запись громоздка;

❸ Ряд утверждений позволяет на основании графической информации делать вполне строгие и обоснованные заключения о решениях неравенства.

Пример 26. На рисунке 7 изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке $[-3; 6]$. Решить неравенство $f(x) > g(x)$.

Решение. Графики данных функций пересекаются в двух точках с абсциссами -2 и 4 соответственно. График функции $y = f(x)$ расположен выше графика функции $y = g(x)$ при всех значениях $x \in (-2; 4)$.

Ответ: $(-2; 4)$.

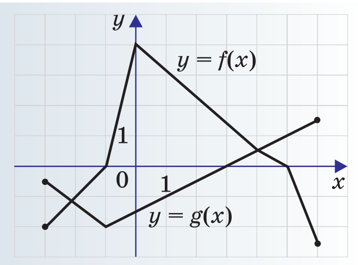


Рис. 7

Пример 27. (*МФТИ, 2009.*) Решить неравенство

$$\log_{|x|}\left(\sqrt{x+5}+4\right) \geq 2\log_{x^2}(2x+8).$$

Решение. Область определения данного неравенства определяется условиями

$$x \neq 0,\ |x| \neq 1,\ x \geq -5,\ x > -4$$

и представляет собой промежуток $(-4; +\infty)$ с выброшенными из него точками -1, 0, 1.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $|x| > 1$. В этом случае исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{|x|}\left(\sqrt{x+5}+4\right) \geq \log_{|x|}(2x+8),$$

которое равносильно неравенству

$$\sqrt{x+5} \geq 2x+4. \qquad (*)$$

Построим графики функций $y = \sqrt{x+5}$ и $y = 2x+4$ (рис. 8).

Из рисунка 8 видно, что последнему неравенству удовлетворяют все значения $x \in [-5; x_0]$, где x_0 — корень уравнения $x + 5 = (2x + 4)^2$ такой, что $-2 < x_0 < 0$. Уравнение $4x^2 + 15x + 11 = 0$ имеет корни -1 и $-\frac{11}{4}$, поэтому $x_0 = -1$. Отсюда, с учетом области определения неравенства, при условии $|x| > 1$ находим множество решений неравенства $(*)$: $-4 < x < -1$.

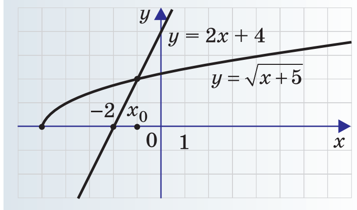


Рис. 8

2. Пусть $0 < |x| < 1$. Тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{x+5} \leq 2x+4.$$

Откуда (см. рис. 7) следует $x \geq -1$. С учетом области определения неравенства, при условии $0 < |x| < 1$, находим множество решений неравенства, которое является объединением интервалов $(-1; 0)$ и $(0; 1)$.

Ответ: $-4 < x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$.

Методические рекомендации. Покажем один из способов составления неравенств, решение которых основано на использовании графиков. Рассмотрим, например, неравенство с модулем вида $|ax+b| + |kx+m| - A \leq 0$, где a, b, k, m, A — некоторые числа. Графиком функции $y = |ax+b| + |kx+m| - A$ является ломаная, состоящая из частей прямых, которую легко построить.

Тренировочные упражнения

Решите неравенство (**28–30**).

28. $\log_2 x < \sqrt{3-x}$.

29. $|x-1| + |x+1| - 2 \leq 0$.

30. $\log_{x+2}\left(\sqrt{x+3}+1\right) \leq 1$.

Ответы: **1.** 1. **2.** $-1 < x < 1$. **3.** $0 < x < 1$. **4.** $(-7; -6)$, $[-3; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 4]$. **5.** $(2; 5)$. **6.** $\left[\frac{1}{4}; \frac{39-3\sqrt{69}}{50}\right)$. **7.** $(0; 0{,}5) \cup (2; 3)$. **8.** $x < -2$, $-2 < x < 2-\sqrt{15}$, $x \geq 6$. **9.** $(-\infty; -5]$. **10.** $(-4; -3) \cup [1; +\infty)$. **11.** $\frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}$. **12.** $\sqrt{2}+1 < x \leq 1+\sqrt{3}$. **13.** $(-2; -1] \cup (1; 2)$. **14.** $\left(\sqrt{6}; 5\right]$. **15.** $[1; +\infty)$. **16.** 0. **17.** $0 < x < 1$, $x = 2$. **18.** $\frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$. **19.** 0. **20.** 5. **21.** $[-3; 1]$, $[7; +\infty)$. **22.** $[-4; -2] \cup [0; 2] \cup [5; +\infty)$. **23.** $[0; 1)$. **24.** $(-2; 7)$. **25.** $(-1; 3)$. **26.** $\left(-1; -\frac{1}{3}\right)$. **27.** $\left[8; 4+2\sqrt{6}\right) \cup \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{2}\right\}$. **28.** $(0; 2)$. **29.** $[-1; 1]$. **30.** $(-2; -1) \cup [1; +\infty)$.

Н. АВИЛОВ,
ст. Егорлыкская, Ростовская обл.

БРАСЛЕТ ИЗ КУБИКОВ

Ведущий рубрики — Николай Иванович Авилов — на фоне своей коллекции головоломок

На стандартном игральном кубике точки расставлены так, что суммы чисел на противоположных гранях равны семи, то есть 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4. Через вершину такого кубика, в которой сходятся грани с номерами 1, 2 и 3, и вершину, в которой сходятся грани с номерами 4, 5 и 6, просверлите сквозное отверстие. Таких кубиков понадобится 8 штук. Все их нужно плотно нанизать на прочную нить и связать в кольцо. Получится вот такой симпатичный браслет (на фото слева).

Первое здание самое простое: сложите эти связанные кубики в форме куба $2 \times 2 \times 2$, как, например, на фото справа. Второе задание посложнее: соберите куб так, чтобы сумма четырех чисел на каждой его грани была равна 14. А третье задание представляет собой олимпиадную задачу, во всяком случае известно решение, где используется прием, который часто применяют олимпийцы: докажите, что нельзя собрать куб $2 \times 2 \times 2$ так, что сумма четырех чисел на каждой его грани равна 13.

Советы учителю. Головоломка позволяет в игровой форме тренировать навыки устного счета, что очень важно, ведь формирование вычислительных навыков — одна из основ в обучении математике. И еще: этот браслет — пример головоломки, которая ставит перед учеником несколько задач все возрастающей трудности, и, предлагая ученику эти задачи, мы на деле реализуем основной принцип дидактики: от простого – к сложному.

ПЕРИОДИЧНОСТЬ

Периодичность (или цикличность) — это повторяемость явления через определенные промежутки времени. К таким явлениям относятся смена дня и ночи, времен года, фаз Луны. Примеры колебательных периодических процессов – это распространение света, звука, радиоволн, переменный электрический ток. Периодически повторяющиеся изменения биологических процессов и явлений – это биоритмы. Периодическое изменение свойств химических элементов в зависимости от увеличения зарядов ядер их атомов является основой фундаментального закона химии — периодического закона Д.И. Менделеева. Учеными описаны волны демократизации и отката от неё в США и Европе, российские реформы и контрреформы.

В общем, известны циклы природные и экологические, демографические и технологические, экономические и социально-политические, с периодичностью можно столкнуться в науке, культуре, образовании.

А вот описываю периодичности часто на языке математики: повторяемые во времени процессы представляют в виде окружности или в виде синусоиды. Характеризуют они одно и то же, просто даны в разных системах координат, в первом случае — в полярной, а во втором — в декартовой.

По материалам Википедии