ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.
№16 (726)

# МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

mat.1september.ru


тема номера | **Математика и жизнь**

*методическая консультация*

## Представление данных в описательной статистике

с. 4

*результаты егэ*

## Шесть задач ЕГЭ: без комментариев

с. 17

*новый проект*

## «В кладовой головоломок»

с. 62

издательский дом
1september.ru
Первое сентября
ноябрь
2011
МАТЕМАТИКА Подписка: Роспечать - 32030 (бумажная версия), 26113 (электронная); Почта России - 79073 (бумажная версия), 12717 (электронная)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
**Главный редактор:** Артем Соловейчик (генеральный директор)
**Коммерческая деятельность:** Константин Шмарковский (финансовый директор)
**Развитие, IT и координация проектов:** Сергей Островский (исполнительный директор)
**Реклама и продвижение:** Марк Сартан
**Мультимедиа, конференции и техническое обеспечение:** Павел Кузнецов
**Производство:** Станислав Савельев
**Административно-хозяйственное обеспечение:** Андрей Ушаков
**Главный художник:** Иван Лукьянов
**Педагогический университет:** Валерия Арсланьян (ректор)

ГАЗЕТА ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
**Первое сентября** – Е. Бирюкова

ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
**Английский язык** – А. Громушкина,
**Библиотека в школе** – О. Громова,
**Биология** – Н. Иванова,
**География** – О. Коротова,
**Дошкольное образование** – М. Аромштам,
**Здоровье детей** – Н. Сёмина,
**Информатика** – С. Островский,
**Искусство** – М. Сартан,
**История** – А. Савельев,
**Классное руководство и воспитание школьников** –О. Леонтьева,
**Литература** – С. Волков,
**Математика** – Л. Рослова,
**Начальная школа** – М. Соловейчик,
**Немецкий язык** – М. Бузоева,
**Русский язык** – Л. Гончар,
**Спорт в школе** – О. Леонтьева,
**Управление школой** – Я. Сартан,
**Физика** – Н. Козлова,
**Французский язык** – Г. Чесновицкая,
**Химия** – О. Блохина,
**Школьный психолог** – И. Вачков

УЧРЕДИТЕЛЬ: ООО «ЧИСТЫЕ ПРУДЫ»
**Зарегистрировано ПИ №ФС77-44335 от 21.03.11**
в Министерстве РФ по делам печати
Подписано в печать: по графику 10.10.11,
фактически 10.10.11 Заказ №
Отпечатано в ОАО «Чеховский полиграфический комбинат»
ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: **(499) 249-3138**
Отдел рекламы: **(499) 249-9870**
Сайт: **1september.ru**

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: **(499) 249-4758**
E-mail: **podpiska@1september.ru**





# В НОМЕРЕ

## ТЕМА НОМЕРА: МАТЕМАТИКА И ЖИЗНЬ



К материалам, обозначенным этим символом, есть приложение на CD-диске.

! Уважаемые подписчики бумажной версии журнала «Математика»!
Теперь вы можете получать и электронную версию нашего журнала.
Для этого:

1. Зайдите на интернет-сайт www.1september.ru
2. Зарегистрируйте личный кабинет (если у вас его еще нет)
3. В личном кабинете в разделе «Издания/Коды доступа» введите код SE-02517-12471.

**МАТЕМАТИКА**
Методический журнал для учителей математики
Издается с 1992 г. Выходит один раз в месяц

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, И. Бокова, О. Макарова
Дизайн макета и обложки: И. Лукьянов
Корректор: Л. Громова
Верстка: Д. Кардановская

Распространяется по подписке
Цена свободная Тираж 10 000 экз.
Тел. редакции: **(499) 249-3460**
E-mail: **mat@1september.ru**
Сайт: **mat.1september.ru**

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
**Роспечать**: бумажная версия – **32030**; электронная версия – **26113;**
**Почта России:** бумажная версия – **79073**; электронная версия – **12717**

# КАК СЧИТАТЬ ШАНСЫ

Л. РОСЛОВА

Некоторые еще сомневаются, надо ли вводить в курс школьной математики элементы теории вероятностей и статистики! А еще поговаривают о том, что от какого-то содержания надо отказываться. Напрасно все это. Все больше убеждаюсь в том, что математики много не бывает — нужна она прямо на каждом шагу. Только вот что остается в головах наших выпускников после десяти лет общения со школьной математикой?

Мне нет дела до «Правого дела», но есть — до математической грамотности. И всеобщей, и элитарной грамотности тех, кого видит и слышит страна. А чего только не услышишь даже из эфира очень достойной и уважаемой радиостанции. Цитирую стенограмму передачи «Особое мнение» на «Эхо Москвы»:

Н. БОЛТЯНСКАЯ: «Правое дело» определилось с кандидатом в Государственную думу: без Прохорова, но с теннисисткой Анной Чакветадзе. Как Вы считаете, каковы дальнейшие шансы «Правого дела»?

П. ГУСЕВ: Минус один в 28 степени.

Видимо, это гипербола (не в смысле «геометрическое место точек Евклидовой плоскости», а в смысле «стилистическая фигура явного и намеренного преувеличения, с целью усиления выразительности и подчеркивания сказанной мысли»). Надо думать, что говоривший хотел сказать, что шансы — ниже нуля. Хотя, как мы с вами знаем из наших же учебников математики, шанс невозможного события равен нулю, и отрицательным шанс быть не может. Ну, то есть событие не просто невозможное, а суперневозможное? А если предположить, что с математикой у говорившего все отлично и что это такое закодированное послание слушателям? Минус один в 28 степени равен 1, следовательно, событие — достоверное! Успевших поверить разочарую — эта версия не подтверждается дальнейшими рассуждениями.

Значит, все-таки нелепая ошибка. Случайна ли она? Да нет, к сожалению. Сколько таких нелепиц приходится слышать каждый день! И как хорошо все это коррелирует с результатами нашего с вами ЕГЭ по математике. Если не верите, посмотрите в этом номере статистику семи задач ЕГЭ 2011 года. Минус единица в степени — это алгебра, а то, что встречаются выпускники, которые не могут подсчитать стоимость покупки из продуктов питания и причитающуюся сдачу, мы знаем. Но то, что их, оказывается (вот она — статистика!), десятки и сотни тысяч… Вот ужас в чем!

В общем, есть над чем задуматься учителю математики!

Г. ФАЛИН, А. ФАЛИН,
г. Москва

# О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПЕРВИЧНЫХ ДАННЫХ В ОПИСАТЕЛЬНОЙ СТАТИСТИКЕ

В описательной статистике первичные данные систематизируют и представляют в виде разнообразных таблиц, которые, в свою очередь, используют для построения столбиковых диаграмм и гистограмм. Мы расскажем об удобном способе представления первичных данных с помощью древовидных диаграмм. Эти диаграммы объединяют в себе достоинства обычных таблиц и гистограмм и позволяют быстро провести предварительный и достаточно интересный статистический анализ данных.

## Древовидная диаграмма

Основным объектом статистики являются наборы данных (обычно числовых). Эти наборы

- либо берут из существующих источников, например из газет или интернета, — такие данные называют вторичными,
- либо получают в результате опроса с помощью какого-нибудь вопросника/анкеты или в результате эксперимента — такие данные называют первичными.

Первичные данные обычно не имеют сколь-нибудь явно выраженной структуры и производят впечатление хаотического набора чисел.

Статистический анализ начинается с того, что эти данные представляют в каком-нибудь организованном виде. Например, упорядочивают по возрастанию, разбивают на группы и т.д. Это служит основой для дальнейшего статистического анализа, в ходе которого вычисляют статистические характеристики исследуемого набора (среднее значение, медиану, дисперсию и т.д.), представляют данные в графическом виде (например, рисуют столбиковую диаграмму, что позволяет визуально выявить характерные особенности распределения чисел набора) и т.д.

Мы расскажем об удобном способе представления небольших (содержащих не более сотни чисел) наборов первичных данных с помощью так называемой *древовидной диаграммы*. В статистической литературе на английском языке древовидную диаграмму называют stem-and-leaf diagram. Буквально этот термин можно было бы перевести как «диаграмма из стеблей с листьями». В информатике при представлении данных методом, используемым в этих диаграммах, говорят о *дереве*. По этой причине мы решили использовать термин *древовидная диаграмма*. Следует, однако, подчеркнуть, что общепринятого термина для этого объекта в отечественной статистической литературе нет.

Древовидная диаграмма вошла в число стандартных инструментов описательной статистики после выхода в 1977 г.

К материалу есть приложение на CD-диске.

книги известного американского статистика Джона Тьюки [1]. Их большая популярность в 70–80-е годы прошлого века была связана с тем, что в то время большинство принтеров для компьютеров работали как печатные машинки, то есть могли печатать лишь строки из цифр, букв и символов. Для рисования графиков и чертежей использовались специальные дорогостоящие устройства — плоттеры, которые работали под управлением мощных (по меркам того времени) и дорогих компьютеров. Древовидная диаграмма похожа на таблицу со строками переменной длины и легко может быть напечатана даже на пишущей машинке. В сущности, для получения древовидной диаграммы не нужно никаких технических средств. Она позволяет быстро, в любой обстановке, с помощью ручки и листа бумаги представить небольшие наборы данных в «графическом» виде и провести их простейший статистический анализ — с этой точки зрения древовидные диаграммы идеально подходят для обучения элементам описательной статистики в классе.

В странах с давней традицией преподавания статистики в школах, например в Великобритании, понятие древовидной диаграммы включено в школьные программы.

## Построение древовидной диаграммы

Принцип построения древовидной диаграммы мы продемонстрируем на примере следующего набора чисел:

9, 43, 34, 5, 28, 16, 18, 23, 45, 52, 23, 38, 25, 29, 31, 16, 27, 30, 22, 36, 12, 5, 17, 25, 31.

Начнем с того, что создадим таблицу следующего вида:

| | | Числа с данным количеством десятков |
|---|---|---|
| Десятки | 0 | |
| | 1 | |
| | 2 | |
| | 3 | |
| | 4 | |
| | 5 | |

Затем станем последовательно просматривать числа нашего набора и вписывать очередное число в соответствующую строку. Беглый анализ числового ряда показал, что все числа в наборе меньше 60. Это и определило количество строк в таблице. В результате мы получим таблицу:

| | | Числа с данным количеством десятков |
|---|---|---|
| Десятки | 0 | 9, 5, 5 |
| | 1 | 16, 18, 16, 12, 17 |
| | 2 | 28, 23, 23, 25, 29, 27, 22, 25 |
| | 3 | 34, 38, 31, 30, 36, 31 |
| | 4 | 43, 45 |
| | 5 | 52 |

Посмотрим повнимательнее на какую-нибудь строку этой таблицы, например,

| | |
|---|---|
| 1 | 16, 18, 16, 12, 17 |

Все числа в этой строке начинаются с цифры 1, причем этот факт явно указан в первом столбце. Поэтому в строке чисел 16, 18, 16, 12, 17 можно указывать только число единиц, то есть записать строку

| | |
|---|---|
| 1 | 16, 18, 16, 12, 17 |

в виде:

| | |
|---|---|
| 1 | 6, 8, 6, 2, 7 |

Соответственно, вся таблица с числами рассматриваемого набора может быть записана в виде:

| | | Единицы |
|---|---|---|
| Десятки | 0 | 9, 5, 5 |
| | 1 | 6, 8, 6, 2, 7 |
| | 2 | 8, 3, 3, 5, 9, 7, 2, 5 |
| | 3 | 4, 8, 1, 0, 6, 1 |
| | 4 | 3, 5 |
| | 5 | 2 |

Обычно эту таблицу оформляют так:

| | |
|---|---|
| 0 | 9, 5, 5 |
| 1 | 6, 8, 6, 2, 7 |
| 2 | 8, 3, 3, 5, 9, 7, 2, 5 |
| 3 | 4, 8, 1, 0, 6, 1 |
| 4 | 3, 5 |
| 5 | 2 |

Эту таблицу и назовем *древовидной диаграммой*. Дополнительно в ней обязательно указывают, что, например, запись 5|2 означает число 52. Правило восстановления чисел анализируемого набора, представленных древовидной диаграммой, называется *ключом*. В дальнейшем будем писать «ключ: **5**|2 = 52». В принципе, в ключе может быть указано любое число, не обязательно входящее в набор.

В информатике описанный выше способ структурирования данных представляют в виде *дерева*, изображенного на рисунке 1.

По этой причине мы и ввели термин *древовидная диаграмма*.

В древовидной диаграмме элементы столбца слева от вертикальной линии (в рассматриваемом примере — это цифры десятков) называются *узлами*, а цифры в строках справа от вертикальной линии (в рассматриваемом примере — это цифры единиц) называются *листьями*. Термины «узел» и «лист» используются здесь в том же смысле, что и в информатике («лист» – это узел дерева самого нижнего уровня, или узел, не имеющий потомков). Про листья, которые расположены в той же строке, что и некоторый узел, говорят, что они принадлежат этому узлу (находятся в этом узле). Например, узлу 4 принадлежат листья 3 и 5. Можно также сказать, что в узле 4 расположены листья 3 и 5.

В англоязычной статистической литературе часто термином «stem» называют весь столбец чисел слева от вертикальной линии (то есть, в нашей терминологии, весь набор узлов). В этом контексте слово «stem» можно перевести как «стебель» (в английском языке слово «stem» означает длинную, тонкую основную часть чего-либо).

Листья, принадлежащие одному узлу, упорядочивают (это несложно сделать, так как последовательность цифр-листьев обычно легко охватить взглядом), что дает упорядоченную древовидную диаграмму:

| | |
|---|---|
| **0** | 5, 5, 9 |
| **1** | 2, 6, 6, 7, 8 |
| **2** | 2, 3, 3, 5, 5, 7, 8, 9 |
| **3** | 0, 1, 1, 4, 6, 8 |
| **4** | 3, 5 |
| **5** | 2 |

Ключ: **5**|2 = 52

Обычно, когда говорят о древовидной диаграмме, имеют в виду именно подобную упорядоченную версию.

Кроме того, поскольку все листья являются цифрами, можно опустить запятые (или любые другие разделители):

| | |
|---|---|
| **0** | 559 |
| **1** | 26678 |
| **2** | 23355789 |
| **3** | 011468 |
| **4** | 35 |
| **5** | 2 |

Ключ: **5**|2 = 52

Это и будет окончательная версия древовидной диаграммы. Иногда, впрочем, в дополнительном столбце справа в круглых скобках указывают количество листьев в соответствующем узле (то есть чисел исходного набора с заданной цифрой десятков):

| | | |
|---|---|---|
| **0** | 559 | (3) |
| **1** | 26678 | (5) |
| **2** | 23355789 | (8) |
| **3** | 011468 | (6) |
| **4** | 35 | (2) |
| **5** | 2 | (1) |

Ключ: **5**|2 = 52

В построенной только что древовидной диаграмме узлы упорядочены по возрастанию сверху вниз. С равным успехом их можно было бы расположить в порядке возрастания снизу вверх. Тогда наша таблица приняла бы вид:

| | | |
|---|---|---|
| **5** | 2 | (1) |
| **4** | 35 | (2) |
| **3** | 011468 | (6) |
| **2** | 23355789 | (8) |
| **1** | 26678 | (5) |
| **0** | 559 | (3) |

Ключ: **5**|2 = 52

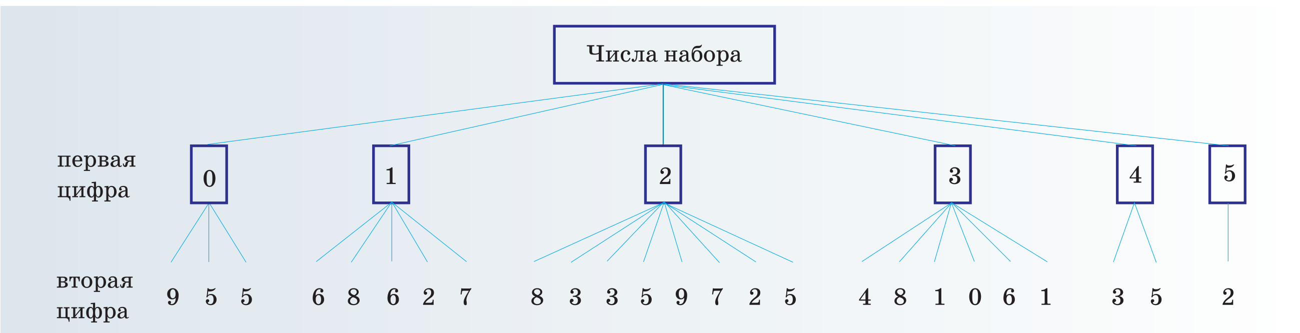



Рис. 1

Принцип, который лежит в основе построения древовидной диаграммы, широко используется при построении словарей. Посмотрим, например, на следующий список из четырех английских слов (в скобках дан перевод на русский язык): book (книга), bookcase (книжный шкаф), bookmark (закладка), bookshop (книжный магазин).

Во всех четырех словах видна общая основа — *book*. Поэтому в англо-русском словаре все четыре слова переводятся в рамках одной статьи, которая выглядит примерно так:

*book* книга; ~case книжный шкаф; ~mark закладка; ~shop книжный магазин.

## Связь древовидной диаграммы и гистограммы

Конструирование древовидной диаграммы фактически заключается в группировании данных в соответствии с числом десятков, то есть в промежутки $0 \le x \le 9$, $10 \le x \le 19$, ...

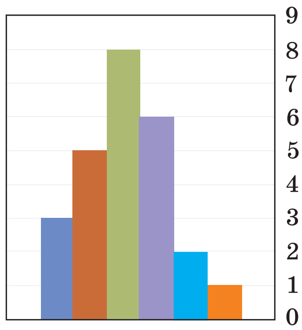
Если листья из одного узла заключить в прямоугольник, то мы получим следующую картинку:

| | |
|---|---|
| **0** | 559 |
| **1** | 26678 |
| **2** | 23355789 |
| **3** | 011468 |
| **4** | 35 |
| **5** | 2 |

Нетрудно видеть, что по сути дела на ней изображена повернутая на 90° (по часовой стрелке) гистограмма. Это сходство еще больше усилится, если узлы расположить в горизонтальной строке, а листья — в вертикальных столбцах, то есть повернуть древовидную диаграмму на 90° против часовой стрелки.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 9 | | | |
| | | 8 | | | |
| | | 7 | 8 | | |
| | 8 | 5 | 6 | | |
| | 7 | 5 | 4 | | |
| 9 | 6 | 3 | 1 | | |
| 5 | 6 | 3 | 1 | 5 | |
| 5 | 2 | 2 | 0 | 3 | 2 |
| **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |

Для сравнения ниже приведена гистограмма для рассматриваемого набора чисел, построенная с помощью MS Excel:




Хорошо видно, что визуально гистограмма дает то же представление о характере распределения чисел в исходном наборе, что и древовидная диаграмма. Но важное преимущество древовидной диаграммы по сравнению с гистограммой заключается в том, что она явно указывает все индивидуальные значения анализируемого числового набора.

Древовидную диаграмму обычно создают, если анализируемый набор содержит несколько десятков чисел. Если же чисел меньше, то древовидная диаграмма не имеет смысла, так как выявить какие-то особенности распределения чисел в маленьком наборе нельзя. С другой стороны, если количество членов набора превышает сотню, то древовидная диаграмма становится очень громоздкой и трудно обозримой (ведь мы должны указывать каждое индивидуальное значение), — в этом случае лучше использовать гистограмму.

### Дополнительные примеры

В рассмотренном выше примере мы имели дело с набором двузначных чисел. Но описанную методику представления данных можно применить и к более сложным ситуациям.

**Пример 2.** Рассмотрим набор 1,52; 1,43; 1,57; 1,62; 1,40; 1,49; 1,61; 1,53; 1,64; 1,59; 1,61; 1,44; 1,48; 1,57, 1,48 (числа набора могут представлять рост группы школьников в метрах). Этот набор можно представить с помощью следующей древовидной диаграммы:

| | | |
|---|---|---|
| **14** | 034889 | (6) |
| **15** | 23779 | (5) |
| **16** | 1124 | (4) |

Ключ: **16**|1 = 1,61 м = 161 см

## Сдвоенная древовидная диаграмма

Предположим, что в примере 2 речь идет о росте 15 девочек определенного возраста. Пусть набор 1,72; 1,63; 1,76; 1,48; 1,67; 1,57; 1,67; 1,71; 1,55; 1,63; 1,59; 1,70; 1,60; 1,51; 1,65 содержит информацию о росте 15 мальчиков того же возраста. Эти данные можно представить с помощью следующей древовидной диаграммы:

| | | |
|---|---|---|
| **14** | 8 | (1) |
| **15** | 1579 | (4) |
| **16** | 033577 | (6) |
| **17** | 0126 | (4) |

Ключ: **14**|8 = 1,48 м = 148 см

Если мы хотим сравнить данные о росте мальчиков с данными о росте девочек, удобно одну из соответствующих древовидных диаграмм, например, только что созданную, отобразить симметрично относительно столбца узлов, то есть записать в виде:

| | | |
|---|---|---|
| (1) | 8 | **14** |
| (4) | 1579 | **15** |
| (6) | 033577 | **16** |
| (4) | 0126 | **17** |

Ключ: 8|**14** = 1,48 м = 148 см

а после этого присоединить к соответствующей диаграмме для второго из двух сравниваемых наборов:

| Мальчики | | | Девочки | |
|---|---|---|---|---|
| (1) | 8 | **14** | 034889 | (6) |
| (4) | 1579 | **15** | 23779 | (5) |
| (6) | 033577 | **16** | 1124 | (4) |
| (4) | 0126 | **17** | | |

В этом примере ключ можно было бы описать так:

Ключ: 8|**14** = 1,48 м = 148 см из первого набора, **14**|3 = 1,43 м = 143 см из второго набора.

Полученная диаграмма и называется *сдвоенной* (английский термин «back-to-back»; буквально — «спина к спине»). Из нее хорошо видны различия в распределении чисел двух рассматриваемых наборов; например, ясно, что мальчики в целом выше девочек примерно на 10 см.

## Использование древовидной диаграммы для подсчета статистических характеристик набора

***С помощью*** древовидной диаграммы можно находить различные статистические характеристики этого набора. Мы продемонстрируем это на примере набора, заданного следующей древовидной диаграммой:

| | | |
|---|---|---|
| **0** | 559 | (3) |
| **1** | 26678 | (5) |
| **2** | 23355789 | (8) |
| **3** | 011468 | (6) |
| **4** | 35 | (2) |
| **5** | 2 | (1) |

Ключ: **5**|2 = 52

### Наибольшее и наименьшее значения

Древовидная диаграмма фактически представляет изучаемый числовой набор в упорядоченном (по возрастанию) виде. Поэтому наименьшее и наибольшее числа набора находятся мгновенно: наименьшее значение определяется первым листом в первом узле, а наибольшее — последним листом в последнем узле. В рассматриваемом примере наименьшее число определяется кодом 0|5 = 5, а наибольшее — кодом 5|2 = 52.

### Медиана

Напомним, что медиана $\mu_x$ числового набора $x = (x_1; \ldots; x_n)$, *упорядоченного по возрастанию*, — это член набора с номером $\frac{n+1}{2}$, если набор состоит из нечетного количества чисел, и среднее арифметическое членов набора с номерами $\frac{n}{2}$ и $\frac{n}{2}+1$, если набор состоит из четного количества чисел.

Вычисление медианы с помощью древовидной диаграммы удобно производить, если для каждого узла указано количество принадлежащих ему листьев. Прежде всего, складывая эти количества листьев в каждом узле, мы найдем общее количество чисел в наборе. В рассматриваемом примере нетрудно подсчитать, что набор содержит $n = 25$ чисел. Поэтому его медиана — это 13-е в порядке возрастания число набора. Складывая последовательно числа в круглых скобках, начиная с верхней строки, мы видим, что первые два узла содержат 8 членов набора, а первые три — уже 16 членов, поэтому 13-е число определяется кодом 2|5, то есть медиана равна 25.

### Среднее значение

Как известно, среднее значение $M_x$ числового набора $x = (x_1; \ldots; x_n)$ — это среднее арифметическое всех чисел набора: $M_x = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.

Подсчет среднего значения в рассматриваемом примере начнем с определения общего количества чисел в наборе: $n$, которое совпадает с общим количеством листьев. В древовидной диаграмме для каждого узла количество листьев явно указано в круглых скобках. Суммируя эти числа, мы найдем $n$:

$$n = 3 + 5 + 8 + 6 + 2 + 1 = 25.$$

Сумму $x_1 + \ldots + x_n$ всех членов набора можно найти, подсчитав для каждого узла сумму значений его «листьев», а затем сложив все эти суммы. Например, для узла 1 сумму значений чисел-листьев $S_1$ удобно находить так:

$$S_1 \equiv 12 + 16 + 16 + 16 + 17 + 18 =$$
$$= (10 + 2) + (10 + 6) + (10 + 6) + (10 + 7) + (10 + 8) =$$
$$= 10 \cdot 5 + (2 + 6 + 6 + 7 + 8) = 50 + 29 = 79.$$

Нетрудно сообразить, что для нахождения $S_i$ достаточно значение узла умножить на количество листьев (число, указанное в круглых скобках), а затем к результату прибавить сумму всех листьев, так что:

$S_0 = 0 \cdot 3 + (5 + 5 + 9) = 19;$
$S_1 = 10 \cdot 5 + (2 + 6 + 6 + 7 + 8) = 79;$
$S_2 = 20 \cdot 8 + (2 + 3 + 3 + 5 + 5 + 7 + 8 + 9) = 202;$
$S_3 = 30 \cdot 6 + (0 + 1 + 1 + 4 + 6 + 8) = 200;$
$S_4 = 40 \cdot 2 + (3 + 5) = 88;$
$S_5 = 50 \cdot 1 + (2) = 52.$

Тогда сумма всех членов набора равна $19 + 79 + 202 + 200 + 88 + 52 = 640$, а среднее значение равно $\frac{640}{25} = 25{,}6.$

Медиана этого набора, как мы видели, равна 25 и практически не отличается от среднего значения.

## Задачи

Рассмотрим несколько задач по описательной статистике, которые используют изложенный выше материал. Они составлены с использованием вариантов экзаменов, которые сдают выпускники школ Великобритании для получения общего сертификата о среднем образовании. Хотя все задачи являются авторскими, мы старались сохранить дух британских экзаменов, включая уровень сложности задач и их практическую направленность.

**Задача 1.** В классе учится 32 школьника. В один из дней они потратили в школьном буфете следующие суммы (в рублях): 68; 54; 62; 74; 40; 38; 45; 52; 64; 25; 50; 43; 50; 63; 38; 49; 55; 28; 61; 43; 62; 42; 36; 47; 60; 63; 35; 52; 40; 52; 64; 58. Постройте древовидную диаграмму для этого набора и с ее помощью вычислите медиану и размах.

*Решение.* Используя описанную выше процедуру, мы получим следующую древовидную диаграмму:

| | | |
|---|---|---|
| **2** | 58 | (2) |
| **3** | 5688 | (4) |
| **4** | 00233579 | (8) |
| **5** | 00222458 | (8) |
| **6** | 012233448 | (9) |
| **7** | 4 | (1) |

Ключ: $2|5 = 25$ р.

Наименьшее число набора закодировано первым листом в первом узле: min = 25. Наибольшее число набора закодировано последним листом в последнем узле: max = 74. Поэтому размах равен $74 - 25 = 49$.

Пусть $x_i$ — $i$-е в порядке возрастания число рассматриваемого набора. Поскольку рассматриваемый набор содержит четное количество элементов: $n = 32$, медиана $\mu_x$ является средним арифметическим 16-го и 17-го в порядке возрастания чисел набора: $\mu_x = \frac{x_{16} + x_{17}}{2}$. Первые три узла содержат 14 листьев (2 + 4 + 8). Легко видеть, что 16-й и 17-й элементы расположены в четвертом узле (первый лист четвертого узла соответствует 15-му элементу набора, второй — 16-му, а третий — 17-му). Поэтому медиана набора равна $\frac{50+52}{2} = 51.$

**Задача 2.** Приводимая ниже древовидная диаграмма содержит результаты школьных соревнований в беге:

| | | |
|---|---|---|
| **3** | 4 | (1) |
| **4** | 348 | (3) |
| **5** | 0134589 | (7) |
| **6** | 399 | (3) |
| **7** | 8 | (1) |

Ключ: $3|6 = 36$ с

Опишите характер распределения результатов соревнований. Найдите медиану и среднее значение этого набора. Сравните их между собой и прокомментируйте результат.

*Решение.* Из древовидной диаграммы видно, что большая часть результатов лежит в промежутке $50 \text{ с} \le x \le 59$ с. Иначе говоря, эта группа результатов является единственным и ярко выраженным *модальным классом*.

Остальные значения разбросаны вокруг этого класса более-менее *симметрично*. В узле 6 содержится столько же листьев, сколько и в узле 4, а в узле 7 — столько же, сколько в узле 3. Более того, внутри центральных узлов (узлы 4–6) представлены как маленькие, так и большие значения листьев.

Пусть $x_i$ — $i$-е в порядке возрастания число рассматриваемого набора. Поскольку рассматриваемый набор содержит нечетное количество элементов: $n = 15$, медиана $\mu_x$ является 8-м в порядке возрастания числом набора: $\mu_x = x_8$. Первые два узла содержат 4 листа; нетрудно видеть, что 8-й элемент находится в третьем узле. Первый лист третьего узла соответствует 5-му элементу набора, второй — 6-му и т.д. Восьмому элементу набора соответствует 4-й лист. Поэтому медиана набора закодирована как 5|4, что означает 54 с.

Чтобы найти среднее значение набора, сначала подсчитаем суммы листьев для каждого узла:

$S_3 = 30 \cdot 1 + 4 = 34;$

$S_4 = 40 \cdot 3 + (3 + 4 + 8) = 135;$

$S_5 = 50 \cdot 7 + (0 + 1 + 3 + 4 + 5 + 8 + 9) = 380;$

$S_6 = 60 \cdot 3 + (3 + 9 + 9) = 201;$

$S_7 = 70 \cdot 1 + 8 = 78.$

Тогда сумма всех членов нового набора равна 828, а среднее значение равно $\frac{828}{15} = 53,2$ с.

Практически идентичные значения среднего значения и медианы связаны с большой симметрией набора.

Симметрия влечет еще один важный результат. Если середину отрезка, соответствующего модальному классу (50 с $\le x \le$ 59 с), рассматривать как меру положения набора, то мы получим значение 54,5 с, которое практически совпадает со значениями медианы и среднего.

Отметим также, что набор имеет единственную моду — значение 69 с (оно встречается чаще других — два раза). Но это значение не входит в модальный класс и сильно отличается как от медианы, так и от среднего значения. Поэтому в данном случае мода не может рассматриваться в качестве хорошей меры положения набора.

Следующая задача использует набор чисел из учебника [7] , с. 251.

**Задача 3.** В одной городской школе было проведено следующее статистическое исследование. Выбранных наугад 100 учеников попросили замерить, сколько минут каждый из них тратит на дорогу в школу.

В результате получили следующий ряд данных:

27, 52, 43, 38, 47, 8, 21, 40, 32, 53, 45, 54, 35, 28, 40, 18, 31, 45, 24, 30, 37, 15, 39, 34, 48, 25, 30, 7, 32, 12, 26, 35, 48, 19, 33, 26, 17, 30, 42, 22, 53, 28, 42, 36, 23, 10, 34, 46, 16, 29, 35, 52, 41, 32, 21, 39, 55, 25, 29, 8, 36, 44, 26, 55, 34, 19, 42, 54, 27, 10, 45, 20, 31, 50, 18, 9, 41, 14, 38, 40, 23, 49, 33 15, 24, 46, 36, 28, 32, 37, 51, 20, 29, 47, 33, 27, 41, 22, 39, 40.

Постройте древовидную диаграмму для этого набора и с ее помощью охарактеризуйте распределение чисел набора.

*Решение*. Используя описанную выше процедуру, построим древовидную диаграмму, при этом в качестве узлов возьмем цифры десятков. Легко видеть, что все числа меньше 60, поэтому в диаграмме только 6 строк:

| | | |
|---|---|---|
| **0** | 7889 | ( 4) |
| **1** | 002455678899 | (12) |
| **2** | 001122334455666777888999 | (24) |
| **3** | 0001122223333444555666677788999 | (28) |
| **4** | 0000111222345556677889 | (22) |
| **5** | 0122334455 | (10) |

Ключ: 5|0 = 50 мин.

Из нее видно, что бóльшая часть чисел набора (28 из 100, то есть 28%) лежит в промежутке $30 \le x \le 39$. Иначе говоря, эта группа результатов является единственным *модальным классом*.

Остальные значения распределены вокруг этого класса с небольшим скосом в сторону меньших значений (такое распределение называют отрицательно асимметричным). Действительно, выше узла 3 расположены узлы 2, 1 и 0, содержащие 24, 12 и 4 листьев соответственно (им соответствует 40 чисел исходного набора). Ниже него расположены узлы 4 и 5, содержащие 22 и 10 листьев соответственно (им соответствует 32 числа исходного набора).

Этот вывод подтверждается и более подробным статистическим анализом, основанным на квартилях (подробнее по поводу квартилей см., например, статью авторов [8]).

Пусть $x_i$ — $i$-е в порядке возрастания число рассматриваемого набора. Поскольку рассматриваемый набор содержит четное количество элементов: $n = 100$, медиана $\mu_x$ является средним арифметическим членов с номерами 50 и 51. Первые три узла содержат 40 листьев; им соответствует 40 элементов исходного набора. Поэтому 50-й и 51-й элементы закодированы в четвертом узле. Первый лист из этого узла соответствует 41-му элементу набора, второй — 42-му и т.д. Поэтому 50-му элементу набора соответствует 10-й лист из этого узла, а 51-му — 11-й, так что $\mu_x = \frac{33+33}{2} = 33.$

Чтобы найти нижнюю и верхнюю квартили, разделим (в соответствии с определением квартилей) упорядоченную версию исходного набора на две равные по числу элементов половины, из 50 чисел каждая. Нижняя квартиль $Q_1$ — это медиана первой половины: $Q_1 = \frac{x_{25}+x_{26}}{2} = \frac{24+24}{2} = 24.$

Верхняя квартиль $Q_3$ — это медиана второй половины: $Q_3 = \frac{x_{75}+x_{76}}{2} = \frac{41+42}{2} = 41{,}5.$

Теперь мы можем количественно описать асимметрию набора с помощью квартильного коэффициента $k = \frac{Q_3+Q_1-2Q_2}{Q_3-Q_1} = \frac{41{,}5+24-66}{41{,}5-24} \approx -0{,}03.$ Малое отрицательное значение квартильного коэффициента как раз означает небольшой скос распределения в сторону меньших значений.

Тот факт, что распределение практически симметрично, означает, в частности, что среднее значение должно мало отличаться от медианы. Поэтому в качестве меры положения набора можно взять число 33. Этот вывод согласуется и с отмеченным наличием единственного модального класса $30 \le x \le 39$: если в качестве меры положения взять середину этого класса, мы получим число 34,5, которое весьма близко к медиане. Отметим, что среднее значение набора равно 32,67, то есть, как и следовало ожидать, мало отличается от медианы, причем в меньшую сторону (это является следствием отрицательной асимметрии).

Точное вычисление среднего значения в рассматриваемом примере довольно утомительное занятие даже с использованием компьютера (ввод 100 чисел требует не только времени, но и внимания). Однако очень легко получить оценку среднего.

Все числа, закодированные листьями узла 0, больше или равны 0; все числа, закодированные листьями узла 1, больше или равны 10; все числа, закодированные листьями узла 2, больше или равны 20, и т.д. Поэтому сумма всех чисел набора больше или равна $0 \cdot 4 + 10 \cdot 12 + 20 \cdot 24 + 30 \cdot 28 + 40 \cdot 22 + 50 \cdot 10 = 2820$, так что среднее значение набора больше или равно 28,2. Чтобы найти границу с другой стороны, нужно левые границы для всех чисел увеличить на 9. В результате левая граница для среднего также увеличится на 9 и составит 37,2. Имея в виду, что внутри каждого узла листья распределены более-менее равномерно (исключая крайние узлы 0 и 5), в качестве приближенного значения среднего значения анализируемого набора можно взять среднее арифметическое этих границ $\frac{28{,}2+37{,}2}{2} = 32{,}7$ (это число можно получить и проще, прибавляя к левой границе число 4,5). Найденное приближение для среднего значения набора практически не отличается от его точного значения, равного 32,67.

Проведенное исследование можно немного уточнить, если каждый узел $s$ разбить на два: $s^{(0)}$ и $s^{(5)}$; в первый собрать листья 0–4, а во второй — листья 5–9. В результате мы получим следующую модифицированную древовидную диаграмму:

| | | |
|---|---|---|
| **$0^{(0)}$** | | (0) |
| **$0^{(5)}$** | 7889 | (4) |
| **$1^{(0)}$** | 0024 | (4) |
| **$1^{(5)}$** | 55678899 | (8) |
| **$2^{(0)}$** | 0011223344 | (10) |
| **$2^{(5)}$** | 55666777888999 | (14) |
| **$3^{(0)}$** | 000112222333444 | (15) |
| **$3^{(5)}$** | 5556667788999 | (13) |
| **$4^{(0)}$** | 000011122234 | (12) |
| **$4^{(5)}$** | 5556677889 | (10) |
| **$5^{(0)}$** | 01223344 | (8) |
| **$5^{(5)}$** | 55 | (2) |

Ключ: **5**|0 = 50 мин.

Как и раньше, хорошо видно, что набор приближенно является симметричным и имеет один модальный класс, который характеризуется неравенством $30 \le x \le 34$. Середина этого класса, число 32, может рассматриваться как хорошая приближенная мера положения набора.

## Литература


**1.** *Tukey J.W.* Exploratory Data Analysis. Reading MA: Addison-Wesley Publishing Co., 1977.

**2.** Specification. Edexcel GCSE in Statistics (2ST01). Edexcel Limited, 2008.

**3.** GCSE Specification. Statistics (for certification 2011 onwards). AQA, 2008.

**4.** *Dobbs S., Miller J.* Statistics 1. Cambridge University Press, 2009.

**5.** GCSE Statistics. Complete Revision and Practice. Coordination Group Publication, 2010.

**6.** Sample Assessment Materials. Edexcel GCSE in Statistics (2ST01). February 2010.

**7.** *Дорофеев Г.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А.* и др. Математика: Алгебра. Функции. Анализ данных: Учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений / под. ред. Г.В. Дорофеева. — М.: Просвещение, 2005.

**8.** *Фалин Г.И., Фалин А.И.* Квартили в описательной статистике // Математика, 2011, № 15.

Е. ВЕКСЛЕР,
г. Санкт-Петербург


5 класс

# ФОРМИРУЕМ КЛЮЧЕВЫЕ КОМПЕТЕНЦИИ

Вопрос о ключевых компетенциях стал предметом обсуждения во всем мире. Особенно актуально эта проблема звучит сейчас в связи с модернизацией российского образования.
Предлагаю вниманию один из уроков, ориентированный на формирование и оценивание ключевых компетенций, в рамках темы «Натуральные числа. Обобщение. Применение знаний на практике».

Изучая теоретические основы компетентностного подхода, я решила особое внимание в образовательной деятельности уделить формированию у школьников учебно-познавательной и информационной компетенций.

Учебно-познавательная компетенция включает элементы логической, общеучебной деятельности, соотнесенной с реальными познаваемыми объектами. Сюда входят знания и умения организации планирования, анализа, самооценки учебно-познавательной деятельности. Ученик овладевает навыками продуктивной деятельности: добыванием знаний непосредственно из реальности, владением приемами действий в нестандартных ситуациях.

Информационная компетенция предполагает умения самостоятельно искать, анализировать и отбирать необходимую информацию, организовывать, преобразовывать, сохранять и передавать ее. Эта компетенция обеспечивает навыки деятельности ученика с информацией, содержащейся в предмете математики и других образовательных областях, и соотнесения этой информации с окружающим миром. Поэтому часто вовлекаю ребят в процесс поиска дополнительного материала о великих математиках, истории открытия теорем и формул, происхождении математических терминов в различных источниках информации. Учащиеся получают за это дополнительную оценку, что является стимулом для самостоятельной познавательной деятельности. Развивается интерес к предмету, предоставляется возможность самореализации, выражающейся в том, что ученики знакомят одноклассников с материалом, которого те не найдут в учебнике.

На уроках также уделяю внимание формированию коммуникативной компетенции — умение представить классу итог проделанной работы, ответить на вопросы своих товарищей, работать в группе.

Использую дидактические игры, занимательные задания, что особенно актуально при работе с учащимися 5–6-х классов. Именно эти технологии позволяют активно вовлекать учеников в процесс обучения.

Во многом на уроках мне помогают компьютерные технологии, применение которых расширяет возможности в выборе материалов и форм учебной работы, делает уроки яркими и увлекательными, информационно и эмоционально насыщенными. В частности,

К материалу есть приложение на CD-диске.

применение интерактивной доски расширяет возможности учителя в создании занимательных заданий.

Диагностирую формируемые мною компетенции школьников с помощью проверочных, контрольных работ и тестов, подбирая соответствующие задания.

Каждый раз, разрабатывая очередной урок, я ставлю перед собой задачу организовать работу так, чтобы она мотивировала учащихся на самостоятельное приобретение новых знаний. Каждый раз задаю себе вопросы: то, что делают мои ученики, значимо ли для них, востребовано ли в современном обществе? Где и в чем выражается применение их сегодняшнего опыта? Смогут ли они применить полученные знания в реальных жизненных условиях?

# Ход урока

## Организационный момент

Учитель организует группы по 5–6 человек.

Учащиеся рассаживаются за столы группами. Готовят письменные принадлежности.

## Введение

***Учитель.*** Сегодня мы повторим и обобщим тему «Натуральные числа» и посмотрим, в какой жизненной ситуации мы можем столкнуться с этими числами. Работать вы будете в группах, помогая друг другу на уроке. Скажите пожалуйста, какой праздник мы будем скоро отмечать?

[Новый год.]

Новый год — это всегда веселый праздник в кругу близких. А вы хотите удивить своих близких замечательным тортом, приготовленным своими руками? Тогда ставим перед собой задачу испечь торт. Возьмите, пожалуйста, инструкционную карту (см. приложение на CD-диске), запишите в ней номер группы и фамилию. Вся дальнейшая работа будет проводиться с помощью этой карты. Там вы будете записывать все результаты работы.

## Решение задач

### Задание 1

***Учитель.*** Вы решили приготовить торт. Что нужно сделать для этого? Обсудите в группе и запишите этапы решения задачи.

Ученики обсуждают и записывают в таблицу:
1. Найти подходящий рецепт.
2. Определить продукты и их количество.
3. Определить технологию приготовления торта.
4. Сходить в магазин и купить эти продукты.
5. Приготовить торт.

Учитель наблюдает за работой учеников в группах, выставляет баллы в оценочный лист. Затем следует обсудить этапы решения. Один учащийся от группы выступает, остальные дополняют.

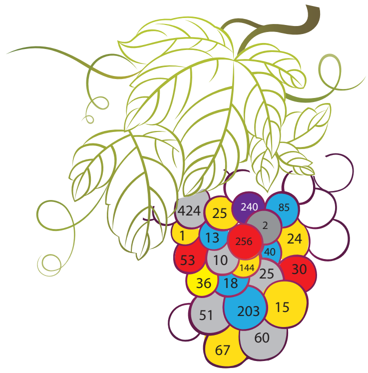
### Задание 2

***Учитель.*** Расшифруйте название торта, решив примеры.

*1-я группа*: $21^2 - 17$; $(8^2 - 12) : 4$.
*2-я группа*: $15^2 + 15$; $(6^2 - 6) : 3$.
*3-я группа*: $16^2$; $45 + 2^3$; $2 \cdot 3^2$.
*4-я группа*: $12^2$; $5 \cdot 2^3$; $(2 + 3)^2$.
*5-я группа*: $(1^3 + 29) : 2$; $34 + 13^2$.

Учащиеся каждой группы решают самостоятельно примеры, затем обсуждают в группе. Если допущена ошибка, помогают друг другу исправить ее.

По окончании работы с помощью интерактивной доски уместно расшифровать название торта. Учащиеся от каждой группы открывают буквы, перетаскивая в сторону найденные числа. Отгаданное слово — *виноградинка*.




### Задание 3

***Учитель.*** Итак, рецепт найден. Прочитайте его и составьте список необходимых продуктов.

***Рецепт торта «Виноградинка»***
*(на 8 порций)*

Развести 30 г желатина в 150 мл горячей воды (не забыть свериться с инструкцией). Оставить остывать. Развести согласно инструкции 90 г желе в 300 мл горячей воды. Тоже остудить.

В миску или кастрюлю выливаем сметану (лучше 20-процентную), насыпаем сахарный песок, его нужно в 3 раза меньше, чем сметаны. Добавляем щепотку ванилина, хорошо взбиваем. Получится 1 кг сладкой сметанной массы. В массу добавляем остывший желатин и взбиваем еще раз. Добавляем мелко поломанный крекер (300 г) и предварительно распаренный изюм

(100 г). Тщательно перемешиваем. Делим полученную массу на 3 равные части.

Плитку шоколада (200 г) (лучше предварительно охладить в морозилке) мелко ломаем.

Достаем разъемную форму. Выкладываем в нее одну часть нашего крема. Аккуратно посыпаем его шоколадом. На шоколад выкладываем еще одну часть крема и опять посыпаем шоколадом. Потом выкладываем оставшуюся массу. Форму ставим в холодильник на 30 мин.

Пока застывает крем, достаем виноград (500 г), режем его на половинки.

Достав торт из холодильника, красиво выкладываем на него половинки винограда. Виноград аккуратно заливаем желе. Ставим в холодильник до полного застывания (для этого необходимо не менее 3 часов).

По истечении этого времени достаем торт, снимаем бортики формы, с помощью лопаточки переносим на блюдо, и можно угощать гостей!

Приятного аппетита!

Учащиеся читают рецепт, заполняют таблицу в инструкционной карте, выбирая необходимые продукты и их количество. Решают задачу поиска недостающих данных (массы сметаны и песка), рассчитывают количество продуктов на 4 порции. Затем обсуждают, сверяя результаты. Помогают друг другу исправить допущенные ошибки.

В результате решения задачи учащиеся получают следующие данные:

| Продукты | По рецепту, в граммах | На 4 порции, в граммах |
|---|---|---|
| Желатин | 30 | 15 |
| Желе | 90 | 45 |
| Сметана | 750 | 375 |
| Сахарный песок | 250 | 125 |
| Крекер | 300 | 150 |
| Изюм | 100 | 50 |
| Шоколад | 200 | 100 |
| Виноград | 500 | 250 |

При обсуждении учащиеся рассказывают способы нахождения недостающих данных.

### Задание 4

***Учитель.*** Мы готовы идти в магазин, но хотелось бы как можно дешевле купить продукты. Я предлагаю ознакомиться со стоимостью нужных нам продуктов в двух магазинах, «Одуванчик» и «Поваренок».

| | Стоимость продуктов (в рублях) | |
|---|---|---|
| Продукты | Магазин «Одуванчик» | Магазин «Поваренок» |
| Желатин (10 г) | 9 | 10 |
| Желе (90 г) | 8 | 14 |
| Сметана (500 г) | 45 | 45 |
| Сахарный песок (1 кг) | 38 | 40 |
| Ванилин (10 г) | 23 | 24 |
| Крекер (300 г) | 14 | 16 |
| Изюм (100 г) | 20 | 22 |
| Шоколад (50 г) | 24 | 26 |
| Виноград (500 г) | 40 | 45 |
| В магазине «Поваренок» действует акция: с каждых 100 р. покупки возвращается 20 р.! | | |

### Задание 5

***Учитель.*** Прочитайте еще раз рецепт и составьте алгоритм приготовления торта.

(Учащиеся предлагают свои технологические этапы приготовления торта.)

***Учитель.*** В результате мы выяснили, что для приготовления торта нужно последовательно выполнить действия:

1. Залить изюм кипятком.
2. Приготовить желатин.
3. Приготовить желе.
4. Взбить сметану с сахаром и ванилином.
5. Добавить в приготовленный крем желатин, поломанный крекер и предварительно распаренный изюм.
6. Поломать шоколад.
7. В форму выложить последовательно части крема, перемежая их шоколадом, поставить в холодильник.
8. Нарезать виноград, уложить его на торт, залить желе.
9. Поставить в холодильник на 3 часа.

## Подведение итогов работы

***Учитель.*** Итак, сегодня мы проводили подготовительную работу для приготовления новогоднего торта. Для этого нам пришлось выполнять различные действия с натуральными числами. Как видите, умение работать с ними очень даже пригодится вам в жизни. И в завершение нашей работы заполните, пожалуйста, лист самоанализа, оценивая свои возможности и умения.

***Задание на дом***

Зайдите в ближайший магазин, определите стоимость необходимых для торта продуктов; рассчитайте стоимость покупки. С помощью родителей приготовьте торт на 4 порции и пригласите друзей, попросив их оценить вашу работу.

В процессе работы над каждым заданием необходимо выставить оценку каждому ученику по каждой компетенции.

**Задание 1**

1. Учебно-познавательная (интеллектуальная) компетенция:

— не ориентируется в поставленной задаче (не способен ориентироваться в жизненной ситуации) — *0 баллов*;

— ориентируется в поставленной задаче, но допущена ошибка —*1 балл*;

— верно составлены все этапы решения задачи — *2 балла*.

2. Коммуникативная компетенция:

— не участвовал в обсуждении — *0 баллов*;

— участвовал в обсуждении, получал в диалоге нужную информацию —*1 балл*;

— участвовал в диалоге, представлял и отстаивал свою точку зрения в группе на основе уважительного отношения к товарищам — *2 балла*.

*Дополнительный 1 балл* — представлял свою точку зрения в классе. Владеет монологической речью.

**Задание 2**

Предметная компетенция:

— выполнил задание с ошибкой — *0–1 баллов*;

— выполнил без ошибки — *2 балла*.

**Задание 3**

1. Информационная компетентность:

— не владеет навыком работы с источником информации; не смог структурировать информацию; не смог воспользоваться помощью товарищей в группе — *0 баллов*;

— владеет навыками работы с информацией; умеет выбирать необходимую информацию; умеет структурировать её в виде таблицы; осознает недостаточность информации; допустил ошибки, но исправил их, воспользовавшись помощью товарищей — *1 балл*;

— правильно выбрал необходимую информацию; структурировал её в виде таблицы; осознает недостаточность информации и знает пути ее получения — *2 балла*.

2. Предметная компетенция:

— допустил вычислительные ошибки и не смог воспользоваться помощью товарищей — *0 баллов*;

— умеет применять математические знания для поиска недостающей информации; допустил некоторые ошибки, но исправил их в процессе обсуждения — *1–4 балла*;

— выполнил без ошибок — *5 баллов*.

3. Коммуникативная компетенция:

— не участвовал в обсуждении — *0 баллов*;

— участвовал в обсуждении, получал в диалоге нужную информацию —*1 балл*;

— участвовал в диалоге, представлял и отстаивал свою точку зрения в группе на основе уважительного отношения к товарищам — *2 балла*.

**Задание 4**

1. Учебно-познавательная (интеллектуальная) компетенция:

— не ориентируется в поставленной задаче (не способен ориентироваться в жизненной ситуации) — *0 баллов*;

— ориентируется в поставленной задаче, но допущена ошибка —*1 балл*;

— верно составлены все этапы решения задачи — *2 балла*.

2. Информационная компетенция:

— не владеет навыком анализа данных, не смог воспользоваться помощью товарищей в группе — *0 баллов*;

— умеет выбирать и анализировать данные; допустил ошибки, но исправил их, воспользовавшись помощью товарищей — *1 балл*;

— правильно проанализировал данные — *2 балла*.

3. Предметная компетенция:

— допустил вычислительные ошибки и не смог воспользоваться помощью товарищей — *0 баллов*;

— умеет применять математические знания для решения задачи: допустил некоторые ошибки, но исправил их в процессе обсуждения — *1 балл*;

— выполнил без ошибок — *2 балла*.

4.Коммуникативная компетенция:

— не участвовал в обсуждении — *0 баллов*;

— участвовал в обсуждении, получал в диалоге нужную информацию —*1 балл*;

— участвовал в диалоге, представлял и отстаивал свою точку зрения в группе на основе уважительного отношения к товарищам — *2 балла*.

**Задание 5**

1. Учебно-познавательная (интеллектуальная) компетенция:

— не ориентируется в поставленной задаче (не способен ориентироваться в жизненной ситуации) — *0 баллов*;

— ориентируется в поставленной задаче, но допущена ошибка —*1 балл*;

— верно составлены все этапы решения задачи — *2 балла*.

2. Информационная компетенция:

— не владеет навыком анализа данных, не смог воспользоваться помощью товарищей в группе — *0 баллов*;

— умеет выбирать и анализировать данные; допустил ошибки, но исправил их, воспользовавшись помощью товарищей — *1 балл*;

— правильно проанализировал данные — *2 балла*.

3. Коммуникативная компетенция:

— не участвовал в обсуждении — *0 баллов*;

— участвовал в обсуждении, получал в диалоге нужную информацию —*1 балл*;

— участвовал в диалоге, представлял и отстаивал свою точку зрения в группе на основе уважительного отношения к товарищам — *2 балла*.

**Лист самоанализа**

Ответьте на вопросы, поставив галочку в нужном столбике. Отвечайте честно и откровенно. Помните — трудности могут быть у каждого. Определив трудности, легче их преодолеть.

| Вопросы | Да | Нет | Сомневаюсь |
|---|---|---|---|
| 1. Я могу самостоятельно ориентироваться в жизненной ситуации, рассмотренной на уроке | | | |
| 2. Я могу самостоятельно выбрать необходимую информацию из предоставленного источника | | | |
| 3. Полученную информацию я могу структурировать в таблицу | | | |
| 4. Я владею необходимыми математическими навыками для решения поставленной задачи | | | |
| 5. Я могу признать свою ошибку и принять помощь, если у меня что-то не получается | | | |
| 6. Я готов оказать помощь затрудняющемуся | | | |
| 7. Я могу высказываться так, чтобы окружающие меня поняли | | | |
| 8. Я умею работать в группе на основе уважительного отношения к товарищам | | | |

**ФОТО НА КОНКУРС**

**Задачу на части доктор Айболит решает практически**

*Автор: Е.В. Иванова, Шекснинский район, Вологодская обл.*

По материалам ФГР КИМ ЕГЭ по математике

# 6 ЗАДАЧ ЕГЭ: БЕЗ КОММЕНТАРИЕВ

В этом году ЕГЭ сдавало 735 450 человек

**B1** Сырок стоит 6 рублей 70 копеек. Какое наибольшее число сырков можно купить на 50 рублей?

***Эту задачу (и ей аналогичные) не решило 40 817 выпускников.***

**B1** Летом килограмм клубники стоил 80 рублей. Маша купила 1 кг 750 г клубники. Сколько рублей сдачи она должна получить с 200 рублей?

***Эту задачу (и ей аналогичные) не решило 104 580 выпускников.***

**B1** Шоколадка стоит 31 рубль. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну в подарок). Сколько шоколадок можно получить на 170 рублей в воскресенье?

***Эту задачу (и ей аналогичные) не решило 138 485 выпускников.***

**B5** В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трех городах России (по данным на начало 2010 года).

| Наименование продукта | Кострома | Краснодар | Петрозаводск |
|---|---|---|---|
| Пшеничный хлеб (батон) | 11 | 14 | 13 |
| Молоко (1 литр) | 26 | 23 | 26 |
| Картофель (1 кг) | 17 | 12 | 14 |
| Сыр (1 кг) | 240 | 265 | 230 |
| Мясо (говядина, 1 кг) | 285 | 280 | 280 |
| Подсолнечное масло (1 литр) | 52 | 44 | 38 |

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешевым следующий набор продуктов: 3 л молока, 1 кг говядины, 1 л подсолнечного масла. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

***Эту задачу (и ей аналогичные) не решило 95 976 выпускников.***

**B5** Семья из трех человек планирует поехать из Санкт-Петербурга в Вологду. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 770 рублей. Автомобиль расходует 8 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 километров, а цена бензина равна 17,5 рубля за литр. Сколько рублей придется заплатить за наиболее дешевую поездку на троих?

***Эту задачу (и ей аналогичные) не решило 208 720 выпускников.***

**B9** В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 48 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в см.

***Эту задачу (и ей аналогичные) не решило 512 608 выпускников.***

Т. ЛАВРЕНТИЕВА,
г. Тихвин, Ленинградская обл.

Тема урока:

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРОЦЕНТЫ

*Виленкин Н.Я.* и др. Математика. 5 класс. — М.: Мнемозина, 2008.
Одной из наиболее сложных тем, изучаемых в курсе математики в школе, является тема «Проценты». Я стараюсь с самого начала ее изучения, то есть с 5-го класса, уделять ей достаточно внимания, чтобы ученики имели навык решения самых разнообразных задач на применение процентов, так как подобные задачи есть в каждом варианте ГИА в 9-м классе и в каждом варианте ЕГЭ в 11-м классе. Кроме того, стараюсь показать практическую направленность таких задач, задач, с которыми ученики встретятся в жизни. Предлагаю коллегам один из моих уроков по данной теме.

## Ход урока

*Цели урока*:

— проверить, как усвоено понятие процента, умение переводить число в проценты и наоборот, решать простейшие задачи на проценты;

— продолжать учить решать более сложные задачи с применением процентов;

— продолжать учить работать с текстом;

— показать практическую направленность задач на проценты.

### Математическая разминка

Математическая разминка проводится в виде игры, в которой класс делится на две команды. Побеждает та, которая быстрее и правильно ответит на вопрос, даст разные способы решения (если они есть), правильно обоснует свой ответ.

*Цели разминки*: повторить понятие процента, перевод числа в проценты и наоборот, решение простейших задач на проценты различных видов с практической направленностью.

**1.** Представьте:

а) в виде процентов число 2,1;

б) в виде десятичной дроби 0,7%.

**2.** Верно ли, что 25% — это половина?

**3.** Найдите число, если 10% его равны 3.

**4.** В классе 30 учеников, из них 20% посещают спортивные секции. Сколько ребят посещают секции?

**5.** Из 60 семян гороха взошли 30. Определите процент всхожести семян.

**6.** Возможно ли такое распределение дневной нормы питания человека: утренний завтрак — 25%, второй завтрак — 15%, обед — 45%, ужин — 15%?

Именно такую норму питания рекомендуют врачи.

К материалу есть приложение на CD-диске.

## Тест

*Цели*: проверить, как ученики усвоили понятие процента, перевод числа в проценты и наоборот, как научились решать простейшие задачи с процентами.

Ответив правильно на вопросы теста, ученики должны угадать название птицы — фламинго.

Подводятся итоги выполнения теста, выставляются оценки, разбираются ошибки. Далее демонстрируется небольшой видеофрагмент о жизни фламинго и звучит рассказ учителя: «Фламинго строят свои гнезда из ила. Гнездо имеет форму усеченного конуса (*Показывается конус и усеченный конус, обсуждается, какие предметы в жизни имеют такую форму.*), в верхнем основании которого делается углубление. Туда фламинго откладывают яйца. По высоте гнезда можно узнать, каким будет лето: сухим или влажным. Если лето будет сухим, гнезда фламинго строят низкими, если дождливое — высокими: вода в дождливое лето поднимается и может затопить гнездо».

***Задание на дом***

№ 1542, 568(1), 1600.

Просмотрите условия задач в домашнем задании. Поднимите руки те, кто затрудняется в его выполнении.

## Решение задач с применением процентов

**1.** Некоторый товар поступил в продажу по цене 60 р. В соответствии с принятыми в магазине правилами цена непроданного товара снижается на 10% за каждую неделю. Сколько будет стоить товар на двенадцатый день, если не будет куплен?

**2.** Ручка стоила 12 р. Во время распродажи цена была снижена на 25%. Сколько ручек можно купить по сниженной цене на 100 р.?

**3.** Средний вес девочек того же возраста, что и Маша, равен 36 кг. Вес Маши составляет 110% среднего веса. Сколько весит Маша?

http://img-fotki.yandex.ru/get/5807/marinik59.4b/0_5fc3b_4d8e0cd_XL

## Тест

### Вариант 1

**1.** Представьте в виде десятичной дроби 2,5%.
**А.** 2,5. **Ф.** 0,025. **К.** 0,25. **Л.** 25.

**2.** Представьте дробь 0,06 в виде процентов.
**Л.** 6%. **О.** 60%. **Д.** 0,6%. **Е.** 600%.

**3.** Верно ли, что $\frac{1}{2}$ — это 50%?
**Н.** Нет. **О.** Нельзя определить. **А.** Да.

**4.** Может ли выполняться следующее условие:
В первый день Коля прочитал 36% книги, во второй день — 49%, а в третий день — остальные 25%?
**М.** Нет. **Р.** Да. **С.** Нельзя определить.

**5.** Найдите число, если 15% его равны 30.
**Е.** 20. **А.** 2000. **И.** 200. **О.** 2.

**6.** В 100 г раствора содержится 20 г соли. Найдите процентное содержание соли в растворе.
**А.** 2%. **Г.** 200%. **Н.** 20%. **П.** 0,2%.

**7.** В твороге содержится 5% жира. Сколько грамм жира в 200 г творога?
**Д.** 1 г. **К.** 100 г. **Г.** 10 г. **Ж.** 1000 г.

**8.** Верно ли, что 5% числа — это $\frac{1}{20}$ часть числа?
**А.** Нет. **О.** Да. **Я.** Нельзя ответить.

### Вариант 2

**1.** Представьте в виде десятичной дроби 1,2%.
**Ф.** 0,012. **О.** 0,12. **М.** 1,2. **Е.** 0,0012.

**2.** Представьте дробь 0,8 в виде процентов.
**А.** 8%. **С.** 0,8%. **Л.** 80%. **Е.** 800%.

**3.** Верно ли, что $\frac{1}{4}$ дороги — это 10% дороги?
**А.** Нет. **О.** Да. **Е.** Нельзя ответить.

**4.** Может ли выполняться следующее условие:
В музыкальную школу ходят 13% учащихся класса, спортивные секции посещают 43% класса, остальные 44% ничем не увлекаются.
**И.** Нет. **М.** Да. **Б.** Нельзя определить.

**5.** Банк выплачивает 2% годовых. Сколько прибыли получит вкладчик, если положит в банк 500 р.?
**А.** 100 р. **И.** 10 р. **О.** 1000 р. **Е.** 1 р.

**6.** Сколько процентов составляет 2 р. от 10 р.?
**А.** 2%. **С.** 200%. **Н.** 20%. **Р.** 0,02%.

**7.** Женя прочитал 16 страниц, что составляет 8% всей книги. Сколько страниц в книге?
**Г.** 200. **М.** 20. **К.** 2000. **Л.** 2.

**8.** Верно ли, что 20% дороги — это $\frac{1}{10}$ часть дороги?
**О.** Нет. **Е.** Да. **Ю.** Нельзя определить.

Т. КОЧЕРГИНА,
дер. Добрунь, Брянская обл.

6 класс

# РЕМОНТ ДЕЛАЕМ САМИ

На представленном уроке была смоделирована жизненная ситуация — облицовка плиткой поверхности пола. Также была проведена профориентационная работа по специальности облицовщик-плиточник. Было показано, что математические расчеты — часть работы освоившего эту профессию. Мы планируем и в дальнейшем заниматься вопросами ремонта. Например, узнаем:
— сколько надо купить линолеума или краски для покрытия поверхности пола в комнате;
— какое количество обоев нужно приобрести для оклеивания стен в комнате.

## Ход урока

***Учитель.*** Сегодня на уроке мы будем заниматься проектной деятельностью. Опыт такой работы у нас уже есть. А тему проектной работы попробуйте отгадать.

**Загадка.** Этим делом в своих квартирах горожане занимаются в период отпусков, в преддверии больших праздников, во время зимних каникул, а сельские жители — в свободное от сезонных работ время. Что это за дело?

[Ремонт.]

*Вопросы*

**1.** Назовите одним словом, что обычно ремонтируют в своих квартирах жители.

[Поверхности.]

**2.** Установите соответствия между словами: ПОЛ, СТЕНА, ПОТОЛОК, ПОБЕЛКА, ОБЛИЦОВКА, ОКЛЕИВАНИЕ.

**3.** Какая детская игра (пазл, мозаика, лото) напоминает облицовку поверхности?

[Мозаика.]

**4.** С чего следует начинать облицовку поверхности стен, пола?

[С расчетов.]

Попытайтесь сформулировать тему исследования.

### Тема: «Математика в профессии плиточника-облицовщика»

В ходе урока мы:

— докажем, что без математических расчетов плиточнику не обойтись;

— познакомимся с историей и полем деятельности этой профессии;

— узнаем, какими качествами должен обладать специалист-плиточник.


Фото автора

**Задача** (*основная*). Сколько квадратных плиток со стороной 20 см понадобится для настилки пола в комнате, длина которой 5,6 м, а ширина 4,4 м? Решите задачу двумя способами.

*Способ I* (*арифметический*).

1) $5{,}6 \cdot 4{,}4 = 24{,}64$ м$^2$ = 246 400 см$^2$ — площадь пола;

2) $20 \cdot 20 = 400$ см$^2$ — площадь одной плитки;

3) 246 400 : 400 = 616 — количество плиток для заполнения площади пола без зазоров.

*Способ II* (*алгебраический*).

Обозначим буквой $x$ количество плиток, необходимых для заполнения площади пола без зазоров плитки. Тогда

$$0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot x = 5{,}6 \cdot 4{,}4,$$
$$x = 56 \cdot 44 : 4,\ x = 616.$$

*Ответ*: 616.

## Дополнительные вопросы и задания

**1.** В упаковке бывает 12, 15, 18, 25 плиток. От чего зависит количество плиток в упаковке:

[От размеров плитки. Чем меньше ее размер, тем больше плиток в упаковке.]

**2.** Рассчитайте количество упаковок, если в упаковке 12 плиток. Не забываем, что нам нужно 616 штук.

[616 делим на 12, получаем в частном 51, а в остатке 4.]

Что означает частное и остаток?

[Нужна 51 упаковка, но не хватает 4 плиток.]

Что делать?

[Купить еще одну упаковку, тогда 8 оставшихся плиток — запас. Купить плитку другой формы или других размеров.]

**3.** Где можно купить плитку?

[В специализированном магазине, на рынке, на оптовом складе.]

**4.** Сколько будет стоить выполненная работа? Чтобы ответить на этот вопрос, используйте таблицу расценок агрофирмы «Культура», помните, что площадь отделки 24,64 м$^2$.

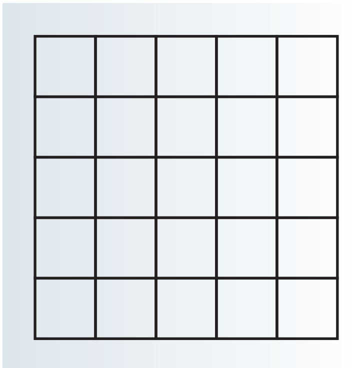
| Вид работы | Стоимость работы в рублях за 1 м$^2$ | С учетом коэффициента $k = 2$ |
|---|---|---|
| Отделка плиткой | 250 | 500 |
| Оклеивание | 6 | 12 |
| Покраска | 11,90 | 23,80 |

$$24{,}64 \cdot 250 = 6160{,}00 \text{ р.} = 6160 \text{ р.}$$

**5.** Рассчитайте, сколько квадратных плиток со стороной 20 см можно уложить без зазоров на площади 1 м$^2$?

[1 м$^2$ = 10 000 см$^2$;
10 000 : 400 = 25 плиток.]

**6.** Вырежьте из цветной бумаги два квадрата со стороной 20 см. Наклейте их на демонстрационную модель.



## Итоги

Чтобы облицевать поверхность плиткой, нужно:

1) составить эскиз, учитывая дизайн комнаты;

2) рассчитать количество материала и объем работы;

3) закупить плитку по выгодной цене;

4) обсудить со специалистом стоимость работы, учитывая семейный бюджет.

Облицовщик-плиточник — востребованная профессия. (Сообщения учащихся с использованием материалов из Интернета.)

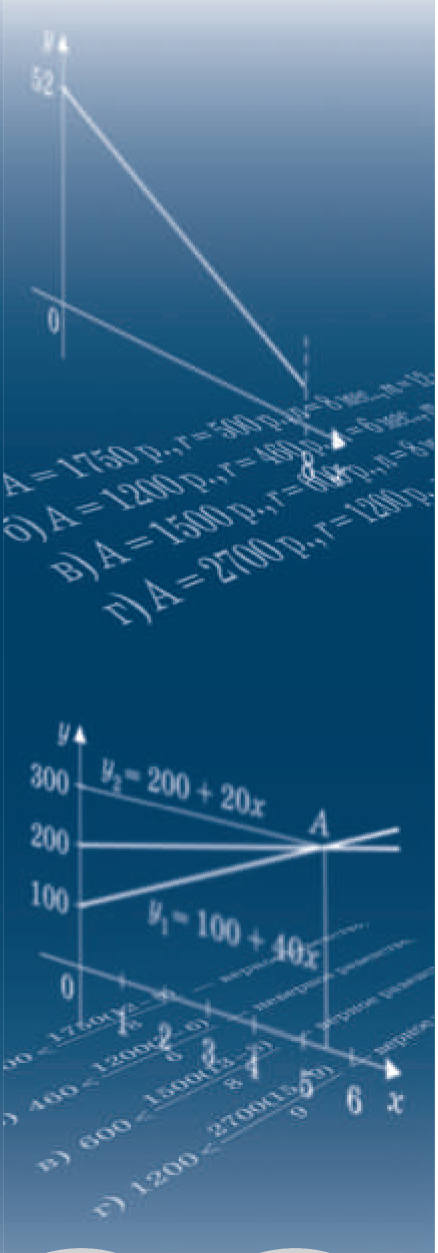
***Задание на дом***

**Задача.** Сколько прямоугольных плиток размером $20 \times 30$ см потребуется для облицовки стены возле раковины на кухне вашей квартиры? Выполните эскиз и все необходимые расчеты.

Ш. МУЗЕНИТОВ,
г. Ставрополь

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ С ЭКОНОМИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

Для повышения интереса учащихся к изучению математики мы решаем на уроках задачи с экономико-производственным содержанием, отражающие рыночные отношения. В этих задачах часто встречаются зависимости, которые выражаются линейной или квадратичной функциями.
В экономике линейная функция может выражать зависимость между ценой товара и спросом, между нормой прибыли и прибавочной стоимостью, между производством продукции и расходом материала и т. д.



Простейшим примером применения в экономике линейной зависимости является выражение себестоимости продукции любого вида. В общую себестоимость входят расходы, зависящие от объема выпущенной продукции, и расходы, которые не зависят от этого. Назовем их условно расходами первой и второй группы. К расходам первой группы относятся стоимость сырья и заработная плата рабочих. К расходам второй группы относятся заработная плата служащих, стоимость отопления здания, освещения и т.д., то есть расходы, которые не зависят от объема выпущенной продукции. Если расходы первой группы обозначить через $k$, а второй группы — через $b$, то себестоимость $C$ при выпуске $x$ единиц продукции составит:

$$C = kx + b.$$

При этом задача теряет смысл при $x < 0$, при $x = 0$ — производство остановлено, при $x > 0$ постоянно увеличиваются расходы первой группы, которые могут повлечь увеличение расходов и второй группы за счет расширения производства, ввода новых производственных объектов.

В экономических расчетах используют уравнение прямой, проходящей через две данные точки:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

где $(x_1;\ y_1)$ — координаты первой точки; $(x_2;\ y_2)$ — координаты второй точки, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$.

Рассмотрим пример расчета стоимости перевозок по железной дороге.

**Пример 1.** Перевозка лесоматериала по железной дороге от станции Ставрополь до станции Григорополисская (расстояние 150 км) стоит 44 рубля, а до станции Прохладный (расстояние 505 км) — 105 рублей. Определить стоимость перевозки такого же объема материала до станций Кисловодск (472 км) и Пятигорск (434 км).

*Решение*. Стоимость перевозки продукции до станции Прохладный больше, чем до станции Григорополисская на (105 – 44) р., а расстояние больше на (505 – 150) км. Пусть перевозка такого же груза на $x$ км стоит $y$ р. Это дороже, чем до станции Григорополисская, на ($y$ – 44) р.

и дальше на ($x$ –150) км. Полагая, что разность стоимостей перевозок пропорциональна разности расстояний, получим пропорцию:

$$\frac{y-44}{105-44}=\frac{x-150}{505-150}.$$

Отсюда

$$y=\frac{61}{355}x+\frac{6470}{355}.$$

Вычислим с точностью до трех значащих цифр коэффициент при $x$ и свободный член.

Тогда $y = 0{,}172x + 18{,}2$.

С помощью найденной функции определим стоимость перевозки до любой станции. Стоимость перевозки до станции Пятигорск:

$$y = 0{,}172 \cdot 434 + 18{,}2 = 92{,}55 \text{ р.}$$

Стоимость перевозки до станции Кисловодск:

$$y = 0{,}172 \cdot 472 + 18{,}2 = 99{,}38 \text{ р.}$$

**Пример 2.** Себестоимость перевозки груза по шоссейной дороге выражается функцией $C = 0{,}25x – 1{,}6$, а по железной дороге — функцией $C = 0{,}2x + 3{,}6$, где $10 \le x \le 1000$ — расстояние в километрах, а $C$ — транспортные расходы. Определить, какой вид транспорта выгоднее для перевозки одного и того же груза и начиная с какого расстояния?

*Решение*. При $x = 100$ км для автотранспорта стоимость перевозки составляет 23,4 р., а для железнодорожного — 23,8 р. При $x = 300$ км стоимость перевозки автотранспортом составляет 73,4 р., а железнодорожным — 63,8 р. Следовательно, на малых расстояниях выгоднее перевозить груз по шоссейной дороге, а на больших — по железной дороге.

Выясним, начиная с какого расстояния выгодно пользоваться железнодорожным транспортом.

Очевидно, что на определенном расстоянии стоимость перевозки тем и другим видом транспорта обходится одинаково. Это расстояние мы найдем, решив уравнение $0{,}25x - 1{,}6 = 0{,}2x + 3{,}8$, откуда $x = 108$.

Значит, начиная со 108 км перевозки железнодорожным транспортом экономичнее (рентабельнее).

Учащимся объясняем, что эта задача сводится к нахождению абсциссы точки пересечения двух прямых.

**Пример 3.** Расходы при перевозке груза двумя видами железнодорожного транспорта вычисляются по формулам:

$$y_1 = 100 + 40x,\ \ y_2 = 200 + 20x,$$

где $x$ — расстояние перевозок в сотнях километров, а $y$ р. — транспортные расходы по перевозке груза первым и вторым видами транспорта. Найти, на какие расстояния и каким видом транспорта перевозки груза будут более экономичными.

*Решение*. В одной координатной плоскости построим графики транспортных расходов (рис. 1).

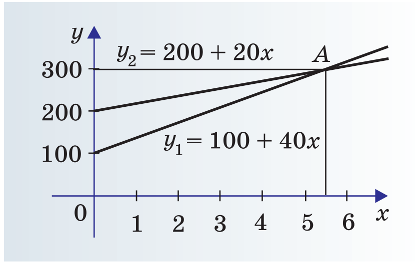


Рис. 1

По этим графикам определяем, каким видом транспорта и на какие расстояния перевозки груза будут более экономичными.

Так, если груз нужно перевезти на расстояние менее чем пять сотен километров, его лучше перевозить первым видом транспорта, а если груз нужно перевезти на расстояние более пяти сотен километров, то его экономичнее перевозить вторым видом транспорта.

**Пример 4.** Стоимость производства некоторой продукции в количестве 1400 шт. бригадой из 5 человек составляет 680 р., а при выпуске 4500 шт . — 1900 р. Определить стоимость продукции при выпуске: а) 2700 шт.; б) 5480 шт.

*Решение*. Стоимость производства продукции возросла на (1900 – 680) р., а количество продукции возросло на (4500 –1400) шт.

Если завод выпускает $x$ единиц продукции, то при сравнении с выпуском в первом случае стоимость составит ($C$ – 680) р., а количество ($x$ – 1400) шт. В этом случае разница по стоимости пропорциональна разнице выпуска, то есть

$$\frac{C-680}{1900-680}=\frac{x-1400}{4500-1400},$$

откуда $C = 0{,}394x + 128{,}4$.

Эта функция определяет стоимость продукции, выпускаемой данным заводом.

Стоимость производства при выпуске продукции в количестве 2700 шт. составит

$C(2700) = 0{,}394 \cdot 2700 + 129 = 1192{,}2$ р.

Стоимость выпуска 5400 шт. составит

$C(5400) = 0{,}394 \cdot 5400 + 129 = 2256{,}0$ р.

Стоимость единицы продукции $C_1$ будет равняться:

$$C_1=\frac{C}{x}=\frac{0{,}394x+129}{x}=0{,}394+\frac{129}{x},$$

для случая «а» $C_1 = 0{,}44$ р., а для случая «б» $C_1 = 0{,}42$ р.

Следовательно, а случае «б» производство продукции будет выгоднее, то есть увеличение выпуска продукции ведет к снижению ее себестоимости.

Если считать, что любой станок переносит свою стоимость на изготавливаемую с его помощью продукцию равномерно, то и стоимость станка будет уменьшаться линейно. В этом случае на оси $y$ откладываем отрезок, отвечающий первоначальной стоимости станка $b = 52$ тыс. р., а на оси $x$ — срок его службы $a = 8$ лет (рис. 2).

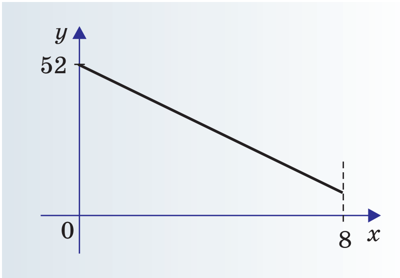



Рис. 2

**Пример 5.** В 2009 г. один завод выпустил 12 000 машин, а другой завод, где некоторые виды работ были автоматизированы, выпустил 13 800 машин, хотя рабочих было на 350 человек меньше, чем на первом заводе. Известно, что средняя годовая производительность труда одного рабочего на втором заводе на 4 машины больше, чем на первом заводе. Определить:

а) количество рабочих на первом и втором заводах;

б) среднюю годовую производительность труда одного рабочего на первом и втором заводах;

в) среднемесячную зарплату рабочего на этих заводах;

г) себестоимость одной машины на каждом заводе, если годовой фонд зарплаты рабочих на первом заводе составляет 81 млн р., а прочие расходы — 33 млн р., а на втором заводе соответственно 72 млн р. и 32 млн р., а расходы на реконструкцию заводов составляют по 14 млн р.

*Решение.* Пусть $x$ — количество рабочих на первом заводе, тогда $x - 350$ — количество рабочих на втором заводе, $\frac{12\,000}{x}$ м. — средняя годовая производительность труда одного рабочего на первом заводе, а $\frac{13\,800}{x-350}$ м. — средняя годовая производительность труда одного рабочего на втором заводе.

Из условия следует, что

$$\frac{13\,800}{x-350}-\frac{12\,000}{x}=4.$$

Упростив данное уравнение, получим квадратное уравнение

$$x^2 - 180x - 1\,050\,000 = 0,$$

откуда $x_1 = 1500$, $x_2 = -700$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи.

Найдем искомые величины.

а) Количество рабочих на первом заводе 1500, а на втором — 1150 человек.

б) Среднегодовая производительность труда одного рабочего на первом заводе составляет 8 машин, на втором — 12 машин.

в) Среднемесячный заработок рабочих на первом заводе 4500 р., на втором — 5217,4 р.

г) Себестоимость машин на первом заводе 10 667 р., на втором — 8550,7 р.

**Пример 6.** Стоимость трактора равна $A$, а его капитального ремонта — $r$. Установлено, что трактор может работать без ремонта $n$ месяцев, а с ремонтом $m$ месяцев. При каких соотношениях между $A$, $r$, $n$, $m$ затраты на ремонт являются рентабельными? При этом нужно учесть, что после ремонта мощность трактора равна мощности нового трактора.

*Решение.* $\frac{A}{n}$ — средняя стоимость месячной эксплуатации нового трактора; $A + r$ — суммарная стоимость трактора и ремонта; $\frac{A+r}{m}$ — средняя стоимость месячной эксплуатации трактора после ремонта.

Капитальный ремонт трактора будет рентабельным, то есть окупит себя, только в том случае, если средняя месячная стоимость эксплуатации трактора после ремонта будет не больше, чем средняя стоимость эксплуатации до ремонта. Поэтому получим нестрогое неравенство

$$\frac{A+r}{m}\le\frac{A}{n},$$

откуда

$$r\le\frac{A(m-n)}{n}.$$

**Пример 7.** Используя результат решения предыдущей задачи, выяснить, в каких случаях надо ремонтировать машины, а в каких нет:

а) $A = 1750$ р., $r = 500$ р., $n = 8$ мес., $m = 12$ мес.;

б) $A = 1200$ р., $r = 460$ р., $n = 6$ мес., $m = 7$ мес.;

в) $A = 1500$ р., $r = 600$ р., $n = 8$ мес., $m = 13$ мес.;

г) $A = 2700$ р., $r = 1200$ р., $n = 9$ мес., $m = 15$ мес.

*Решение.* Подставим числовые данные в каждом случае в неравенство $r\le\frac{A(m-n)}{n}$ и определим, когда капитальный ремонт машины будет рентабельным:

а) $500<\frac{1750(12-8)}{8}$ — верное равенство. Капитальный ремонт рентабелен;

б) $460<\frac{1200(7-6)}{6}$ — неверное равенство. Капитальный ремонт нерентабелен;

в) $600<\frac{1500(13-8)}{8}$ — верное равенство. Капитальный ремонт рентабелен;

г) $1200<\frac{2700(15-9)}{9}$ — верное равенство. Капитальный ремонт рентабелен.

Н. ЩЕРБАКОВА, А. СЕНИЧ,
г. Москва

# ЗАДАЧИ О НАШЕМ ЯСЕНЕВО

http://yasenevo.uzaomos.ru/getfile.aspx?DocID=40764

Наш район Ясенево постоянно меняет свой облик, реставрируются и восстанавливаются исторические усадьбы, строятся новые жилые и административные комплексы, появился плавательный бассейн, проводятся различные акции сотрудниками Битцевского лесопарка. Учащиеся являются свидетелями этих изменений, и мы считаем необходимым использовать этот материал при составлении задач на уроках математики. Приведем примеры таких задач из нашего сборника «Ясеневская арифметика».

◆ На участке площадью 0,575 га в Ясенево построен Дворец спорта «Содружество», причем само здание занимает 2270 м$^2$. Сколько процентов участка не занято под здание?

◆ Учащиеся Центра образования № 1694 «Ясенево» собирали макулатуру. При сдаче 40 кг макулатуры можно спасти 1 дерево. Сколько целых деревьев они спасли, если они сдали 792 кг макулатуры?

◆ Жилая площадь территории района Ясенево равна 640 га, что составляет 25,23% всей территории района. Найдите площадь территории района.

◆ Завершилась акция по сбору отработанных батареек! Силами школьников и местных жителей было собрано 1597 батареек. Докажите, что это число является простым.

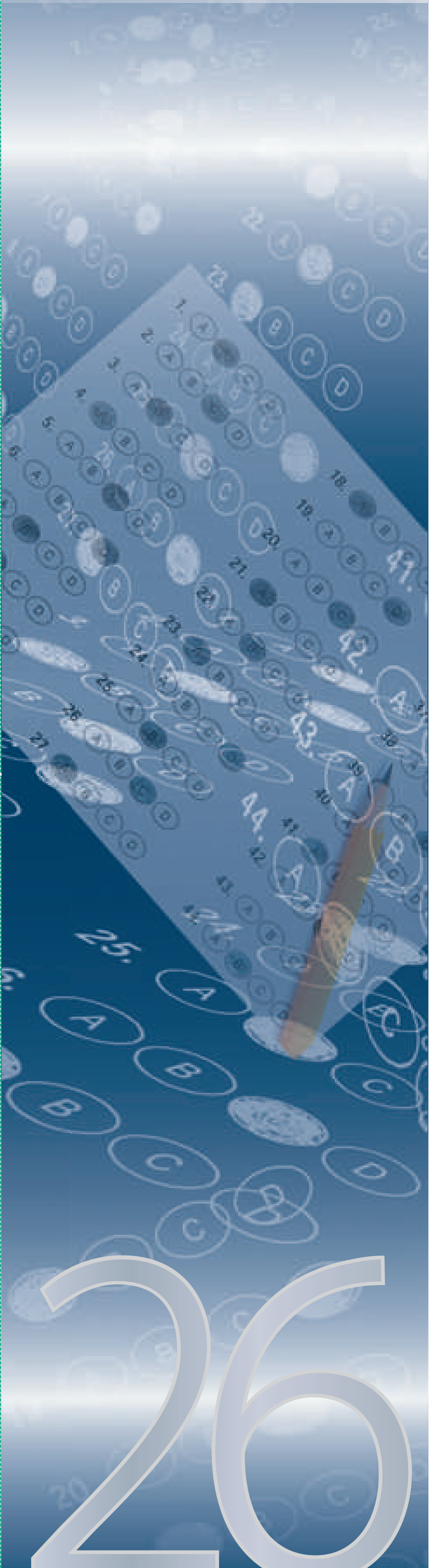
◆ В районе Ясенево проживает примерно 172 300 человек. Сколько человек в Ясенево будет проживать через три года, если ежегодный прирост населения составит 11%?

◆ Флора Битцевского леса насчитывает 500 видов, в том числе 75 видов мхов и 30 видов лишайников. Какая часть флоры занята:

а) мхами;
б) лишайниками;
в) мхами и лишайниками;
г) не занята ни мхами, ни лишайниками?

◆ Фауна Битцевского леса включает 6 видов земноводных, 2 вида пресмыкающихся, 78 видов гнездящихся птиц, 33 вида млекопитающих. По этим данным постройте круговую диаграмму.

Р. ИЗМЕСТЬЕВА,
Москва



# РУБЕЖНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ

## Тематика тестов за II триместр

### Математика

**5-й класс.** Умножение натуральных чисел и его свойства. Площади и объемы. Обыкновенные дроби. Десятичные дроби. Сложение и вычитание десятичных дробей.

**6-й класс.** Умножение и деление обыкновенных дробей. Отношения и пропорции. Положительные и отрицательные числа.

### Алгебра

**7-й класс.** Многочлены. Формулы сокращенного умножения.

**8-й класс.** Квадратные уравнения. Свойства числовых неравенств.

**9-й класс.** Системы уравнений с двумя переменными. Арифметическая и геометрическая прогрессии.

### Геометрия

**7-й класс.** Признаки равенства треугольников.

**8-й класс.** Теорема Пифагора. Декартовы координаты на плоскости.

**9-й класс.** Многоугольники.

## Математика-5 Тест 2 Вариант 1

*В заданиях А1–А9 приведены варианты ответа, из которых верен один. Укажите номер верного ответа.*

**А1.** Найдите периметр прямоугольника, площадь которого равна 40 см$^2$, а одна из его сторон равна 8 см.

1) 26 см 2) 5 см 3) 13 см 4) 200 см

**А2.** Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, длина которого равна 6 см, ширина — 2 см, высота — 3 см.

1) 11 см$^3$ 2) 36 см$^2$ 3) 36 см$^3$ 4) 15 см$^3$

**А3.** Выразите в метрах 3 дм.

1) 0,3 м 2) 0,03 м 3) 0,003 м 4) 30 м

**А4.** В классе 24 ученика, $\frac{3}{8}$ всех учеников класса составляют девочки. Сколько девочек в классе?

1) 64 2) 9 3) 3 4) 8

**А5.** На полке 40 учебников, что составляет $\frac{5}{8}$ всех книг, стоящих в книжном шкафу. Сколько книг в шкафу?

1) 15 2) 8 3) 25 4) 64

**А6.** Вычислите: $3\frac{5}{18}-1\frac{7}{18}$.

1) $2\frac{2}{9}$ 2) $1\frac{8}{9}$ 3) $2\frac{1}{9}$ 4) $1\frac{11}{18}$

К материалу есть приложение на CD-диске.

**А7.** Найдите значение выражения

$$2{,}3 - 1{,}323.$$

1) 1,023 2) 1,077 3) 0,077 4) 0,977

**А8.** Найдите значение выражения

$$2{,}4 + 21{,}84.$$

1) 23,88 2) 45,84 3) 24,24 4) 22,08

**А9.** Расположите в порядке возрастания числа 1,4302, 1,43, 1,437.

1) 1,437, 1,4302, 1,43
2) 1,43, 1,4302, 1,437
3) 1,437, 1,43, 1,4302
4) 1,4302, 1,43, 1,437

*В заданиях В1 и В2 запишите ответ.*

**В1.** Найдите сумму всех натуральных значений $x$, при которых верно двойное неравенство

$$17{,}43 < x < 19{,}01.$$

*Ответ*: ___________

**В2.** Сколько существует натуральных значений $b$, при которых дробь $\frac{b+1}{12}$ будет правильной, а дробь $\frac{5}{b-1}$ — неправильной?

*Ответ*: ___________

*Выполняя задание С1, запишите полное решение и ответ.*

**С1.** Длина прямоугольника равна 78 см. На сколько увеличится площадь прямоугольника, если его ширину увеличить на 5 см?

## Математика-6 Тест 2 Вариант 1

*В заданиях А1–А9 приведены варианты ответа, из которых верен один. Укажите номер верного ответа.*

**А1.** Найдите значение выражения $1\frac{3}{5} \cdot 1\frac{5}{9}$.

1) $1\frac{1}{3}$ 2) $1\frac{14}{15}$ 3) $2\frac{22}{45}$ 4) $2\frac{12}{45}$

**А2.** Частное дробей $\frac{3}{4}$ и $\frac{7}{12}$ равно...

1) $\frac{7}{16}$ 2) $1\frac{1}{3}$ 3) $1\frac{2}{7}$ 4) $\frac{1}{6}$

**А3.** Коля подарил приятелю 40 марок, что составило 16% всех его марок. Сколько марок было у Коли?

1) 64 2) 85 3) 100 4) 250

**А4.** Решите уравнение $1{,}6 : 12 = x : 3$?

1) 22,5 2) 16,2 3) 1,6 4) 0,4

**А5.** В трех одинаковых банках 12 кг варенья. Сколько варенья в восьми таких же банках?

1) 4 кг 2) 16 кг 3) 24 кг 4) 32 кг

**А6.** Для перевозки груза автомашине грузоподъемностью 5 т требуется сделать восемь рейсов. Сколько рейсов потребуется сделать автомашине грузоподъемностью 4 т для перевозки этого же груза?

1) 10 2) 12 3) 6 4) 4

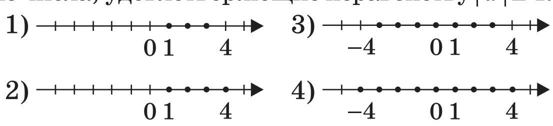
**А7.** Числа $p$ и $c$ расположены на числовой прямой так, как показано на рисунке. Укажите неверное утверждение.


1) $p < c$ 2) $|p| > |c|$
3) $p > c$ 4) число $p$ отрицательно

**А8.** Укажите верное неравенство.

1) $0 < -17$ 2) $6 < -67$
3) $-87 < -35$ 4) $-4 > -2$

**А9.** Укажите рисунок, на котором отмечены все целые числа, удовлетворяющие неравенству $|a| \leq 4$.




*В заданиях В1 и В2 запишите ответ.*

**В1.** Сколько целых чисел заключено между числами $-5\frac{1}{4}$ и $1\frac{2}{7}$?

*Ответ*: ___________

**В2.** Решите уравнение $|x + 4| = 6$.

*Ответ*: ___________

*Выполняя задания С, запишите полное решение и ответ.*

**С1.** Турист должен был пройти 30 км. В первый день он прошел $\frac{2}{5}$ всего пути. Сколько километров осталось пройти туристу?

**С2.** Сначала цена товара повысилась на 10%, а через месяц новая цена понизилась на 10%. Стал товар дороже или дешевле первоначальной цены и на сколько процентов?

## Алгебра-7 Тест 2 Вариант 1

*В заданиях А1–А9 приведены варианты ответа, из которых верен один. Укажите номер верного ответа.*

**А1.** Упростите выражение

$$(5a - 2ab) - (2a - 7ab).$$

1) $7a - 9ab$ 2) $3a + 5ab$
3) $3a - 9ab$ 4) $7a + 5ab$

**А2.** Какому из многочленов равно выражение

$$6x(x - 2y)?$$

1) $6x^2 - 12xy$ 2) $6x^2 - 12y$
3) $6x^2 - 2y$ 4) $6x - 12xy$

**А3.** Выражение $(2m - c)(5m - c)$ тождественно равно...

1) $-(c - 2m)(c - 5m)$ 2) $(c - 2m)(5m - c)$
3) $(2m - c)(c - 5m)$ 4) $(c - 2m)(c - 5m)$

**А4.** Представьте в виде многочлена стандартного вида выражение $(a-3b)^2$.

1) $a^2-6ab+b^2$ 2) $a^2-6ab+9b^2$
3) $a^2-9b^2$ 4) $a^2+6ab+3b^2$

**А5.** Разложите на множители многочлен
$$-25a^2+10ab-b^2.$$
1) $(25a-b)^2$ 2) $(5a-b)^2$
3) $(5a+b)(5a-b)$ 4) $-(5a-b)^2$

**А6.** Найдите произведение двучленов
$$(4x-y)(4x+y).$$
1) $4x^2+y^2$ 2) $16x^2+y^2$
3) $16x^2-y^2$ 4) $4x^2-y^2$

**А7.** Преобразуйте в произведение многочлен
$$c^2-4d^2.$$
1) $(c-4d)(c+4d)$ 2) $(c-2d)(c-2d)$
3) $(c-4d)(c-4d)$ 4) $(c-2d)(c+2d)$

**А8.** Разложите многочлен $ax+by-ay-bx$ на множители.

1) $(y-x)(a+b)$ 2) $(y+x)(a+b)$
3) $(x-y)(a-b)$ 4) $(x-y)(a+b)$

**А9.** Решите уравнение
$$(3x-4)^2+7=(3x-5)(3x+5).$$
1) $-2$ 2) 2 3) 0 4) корней нет

*В заданиях В1 и В2 запишите ответ.*

**В1.** Разложите на множители многочлен
$$n^2-x^2-8x-16.$$
*Ответ*: _________

**В2.** Упростите выражение
$$(a-2)(a^2+2a+4)-a^3.$$
*Ответ*: _________

*Выполняя задания С, запишите полное решение и ответ.*

**С1.** Найдите большее из трех последовательных натуральных чисел, если квадрат меньшего числа на 23 меньше произведения среднего и большего чисел.

**С2.** Докажите, что сумма пяти последовательных степеней числа 2 кратна 31.

## Алгебра-8 Тест 2 Вариант 1

*В заданиях А1–А9 приведены варианты ответа, из которых верен один. Укажите номер верного ответа.*

**А1.** Решите уравнение $x^2-0{,}09=0$.

1) $0{,}3; -0{,}3$ 2) $0{,}3$
3) $0{,}03; -0{,}03$ 4) $0{,}03$

**А2.** Решите уравнение $5x^2+4x-12=0$.

1) $2{,}4; -4$ 2) $2; -1{,}2$
3) $1{,}2; -2$ 4) корней нет

**А3.** Укажите уравнение, которое имеет два различных корня.

1) $3x^2+2x+4=0$ 2) $x^2+25=0$
3) $9x^2-3x-5=0$ 4) $3x^2-3x+12=0$

**А4.** Укажите квадратное уравнение, для которого числа $-2$ и 5 являются корнями.

1) $x^2+3x-10=0$ 2) $x^2-3x+10=0$
3) $x^2-3x-10=0$ 4) $x^2+3x+10=0$

**А5.** Укажите значение коэффициента $c$ квадратного уравнения, если его корнями являются числа $-3$ и 5.

1) 15 2) 2 3) $-15$ 4) $-30$

**А6.** Выделите квадрат двучлена в выражении $x^2-6x+8$.

1) $(x-3)^2+1$ 2) $(x-6)^2+9$
3) $(x-3)^2-1$ 4) $(x-2)^2+3$

**А7.** Укажите верное неравенство, если известно, что $-8x \geqslant -8y$.

1) $x>y$ 2) $x<y$ 3) $x \geqslant y$ 4) $x \leqslant y$

**А8.** Укажите верные неравенства, если известно, что $a>b$.

1) $a+11<b+11$ и $a-3<b-3$
2) $a+11<b+11$ и $a-3>b-3$
3) $a+11>b+11$ и $a-3>b-3$
4) $a+11>b+11$ и $a-3<b-3$

**А9.** Какое неравенство *не следует* из неравенств $3<a<5$ и $2<b<8$?

1) $\frac{3}{8}<\frac{a}{b}<\frac{5}{2}$ 2) $1<a-b<3$
3) $5<a+b<13$ 4) $6<ab<40$

*В заданиях В1 и В2 запишите ответ.*

**В1.** Найдите значение $p$, если число 5 — корень уравнения $x^2+px-30=0$.

*Ответ*: ____________

**В2.** Найдите все значения $x$, при которых дробь $\frac{(2x+1)(x+3)}{4x^2-1}$ равна нулю.

*Ответ*: ____________

*Выполняя задания С, запишите полное решение и ответ.*

**С1.** Из пункта $A$ в пункт $B$ велосипедист проехал по дороге длиной 48 км, обратно он возвращался по другой дороге, которая короче первой на 8 км. Увеличив скорость на обратном пути на 4 км/ч, он затратил на 1 ч меньше, чем на путь из $A$ в $B$. С какой скоростью ехал велосипедист из пункта $A$ в пункт $B$?

**С2.** Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2-5|x|-6=0$.

## Алгебра-9 Тест 2 Вариант 1

*В заданиях А1–А9 приведены варианты ответа, из которых верен один. Укажите номер верного ответа.*

**А1.** Решите систему уравнений $\begin{cases} x-y=4, \\ xy=5. \end{cases}$

1) $(5; 1), (-1; 5)$ 2) $(-1; -5), (5; 1)$
3) $(1; 5), (-5; -1)$ 4) $(-5; 1), (1; -5)$

**А2.** Сумма чисел равна –15, а их произведение равно 56. Найдите эти числа.

1) –8; 7  2) 8; 7  3) –8; –7  4) 8; –7

**А3.** Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{x}, \\ y = x^2 + 3 \,? \end{cases}$$

(Решите графически.)

1) одно  2) два  3) три  4) четыре

**А4.** Арифметическую прогрессию можно задать формулой...

1) $a_m = 6n^2$  2) $a_m = 7 + 3n$

3) $a_m = \dfrac{5}{n-2}$  4) $a_m = 5^n + 4$

**А5.** Найдите шестой член арифметической прогрессии $(a_n)$: 12; 8;...

1) 40  2) –32  3) 32  4) –8

**А6.** Найдите сумму двадцати членов арифметической прогрессии, если $a_n = 3n - 5$.

1) 240  2) 120  3) 570  4) 530

**А7.** Найдите пятый член геометрической прогрессии, первый член которой равен –7, а знаменатель равен 2.

1) –112  2) 112  3) –56  4) 56

**А8.** Найдите сумму пяти членов геометрической прогрессии, первый член которой равен 4, а второй равен –2.

1) 44  2) –2,75  3) 2,75  4) –44

**А9.** Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии, $c_1 = 12$ и $q = -0,6$.

1) 7,5  2) –7,5  3) 7  4) –7

*В заданиях В1 и В2 запишите ответ.*

**В1.** Найдите первый положительный член арифметической прогрессии $(c_n)$, если $c_6 = -16$, $d = 0,2$.

*Ответ*: ______________

**В2.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ x^2 - xy + y^2 = 3. \end{cases}$$

*Ответ*: ______________

*Выполняя задания С, запишите полное решение и ответ.*

**С1.** Два тракториста, работая совместно, могут вспахать поле за 2 ч 40 мин. Сколько времени потребуется каждому трактористу в отдельности для выполнения этой работы, если известно, что один из них может вспахать поле на 4 ч быстрее другого?

**С2.** Сумма второго и четвертого членов геометрической прогрессии равна 12, а сумма третьего и пятого равна –24. Найдите сумму шести членов прогрессии.

## Геометрия-7   Тест 2   Вариант 1

*В заданиях А1–А6 приведены варианты ответа, из которых верен только один. Укажите номер верного ответа.*

**А1.** Треугольник $ABC$ равен треугольнику $KHT$. Длина стороны $AB$ = 5 см, $\angle H = 30^\circ$. Какие из высказываний верны?

1) $KH$ = 5 см; $\angle A = 30^\circ$

2) $TH$ = 5 см; $\angle B = 30^\circ$

3) $KH$ = 5 см; $\angle B = 30^\circ$

4) $KT$ = 5 см; $\angle C = 30^\circ$

**А2.** Какие из высказываний истинны?

а) Если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

б) Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является биссектрисой.

в) Если сторона и угол одного треугольника соответственно равны стороне и углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

1) в  2) б  3) а  4) а и б

**А3.** Отрезки $BD$ и $AC$ пересекаются в точке $O$, которая является серединой каждого. Сравните отрезки $AB$ и $CD$, если $BD > AC$.

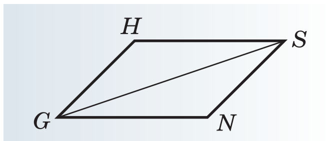
1) $BA < CD$  2) $AB = CD$

3) $AC > BD$  4) сравнить нельзя

**А4.** Отрезки $AK$ и $BP$ пересекаются в точке $O$ так, что $BO = OP$, $\angle KBO = \angle APO$, $OA$ = 10 см. Найдите длину отрезка $AK$.

1) 10 см  2) 15 см  3) 20 см  4) 35 см

**А5.** На рисунке $HS = GN$, $GH = NS$. Найдите равные углы.




1) $\angle HGS = \angle HSG$  2) $\angle SGN = \angle GSN$

3) $\angle GHS = \angle GSN$  4) $\angle HSG = \angle SGN$

**А6.** В равнобедренном треугольнике $KCT$ с основанием $KT$ проведена медиана $CP$. Найдите градусную меру угла $KCT$, если $\angle KCP = 35^\circ$.

1) 70°  2) 35°  3) 20°  4) 7°30′

*В заданиях В1, В2 запишите ответ.*

**В1.** Периметр равнобедренного треугольника равен 66 см, длины основания и боковой стороны относятся как 3 : 4. Найдите длину боковой стороны треугольника.

*Ответ*: ______________

**В2.** Найдите длину биссектрисы $QN$ равнобедренного треугольника $SQL$ с основанием $SL$, если периметр треугольника $SQL$ равен 36 см, а периметр треугольника $SQN$ равен 22 см.

*Ответ*: ______________

*Выполняя задание С1, запишите полное решение и ответ.*

**С1.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC$ проведены две высоты, $AP$ и $CK$. Докажите, что $BP = BK$.

## Геометрия-8 Тест 2 Вариант 1

*В заданиях А1–А6 приведены варианты ответа, из которых верен только один. Укажите номер верного ответа.*

**А1.** Катеты прямоугольного треугольника равны 3 см и 4 см. Найдите длину гипотенузы.

1) 5 см 2) 25 см 3) 7 см 4) $\sqrt{7}$ см

**А2.** Найдите длину биссектрисы равностороннего треугольника, если длина стороны треугольника равна $10\sqrt{3}$.

1) 10 см 2) 5 см 3) 15 см 4) 45 см

**А3.** В треугольнике $ABC$ $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 44^\circ$, $BC = 8$. Найдите длину $AB$.

1) $8\cos 44^\circ$ 2) $8\sin 44^\circ$ 3) $\dfrac{8}{\sin 44^\circ}$ 4) $\dfrac{8}{\cos 44^\circ}$

**А4.** Найдите длину отрезка $AB$, если

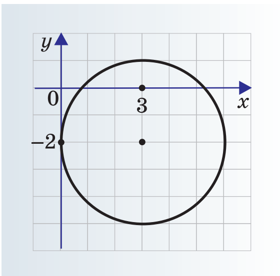
$$A(-5; -1),\ B(-2; -5).$$

1) 85 2) 5 3) $\sqrt{85}$ 4) 6

**А5.** Найдите координаты середины отрезка $AB$, если точка $A(-5; 2)$, а точка $B(-3; -8)$.

1) (1; –5) 2) (–1; 5) 3) (4; 3) 4) (–4; –3)

**А6.** Запишите уравнение окружности, изображенной на рисунке.




1) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$
2) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 2$
3) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 3$
4) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$

*В заданиях В1, В2 запишите ответ.*

**В1.** Найдите радиус окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$.

*Ответ*: ____________

**В2.** Точки $A(-5; -2)$, $B(-3; -8)$ и $C(2; -4)$ являются вершинами параллелограмма $ABCT$. Найдите координаты точки $T$ и запишите в ответе их сумму.

*Ответ*: ____________

*Выполняя задание С1, запишите полное решение и ответ.*

**С1.** Точки $P(-1; -2)$, $K(1; 1)$ и $M(5; -3)$ являются вершинами треугольника $PKM$. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $P$ и $T$, где $T$ — середина стороны $KM$.

## Геометрия-9 Тест 2 Вариант 1

*В заданиях А1–А6 приведены варианты ответа, из которых верен только один. Укажите номер верного ответа.*

**А1.** Найдите меньший угол выпуклого четырехугольника, если градусные меры его углов относятся как 2 : 4 : 5 : 7.

1) 100° 2) 20° 3) 40° 4) 80°

**А2.** Сумма всех углов выпуклого многоугольника равна 1440°. Найдите число сторон.

1) 10 2) 8 3) 12 4) 9

**А3.** Найдите радиус окружности, описанной около правильного четырехугольника, длина стороны которого равна 12 см.

1) 12 м 2) 6 см 3) $6\sqrt{2}$ см 4) $12\sqrt{2}$ см

**А4.** Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен $3\sqrt{3}$ см. Найдите длину стороны этого треугольника.

1) 20 см 2) 6 см 3) $6\sqrt{3}$ см 4) 18 см

**А5.** Найдите площадь параллелограмма, если его стороны, равные $12\sqrt{3}$ см и 8 см, образуют угол, градусная мера которого равна 60°.

1) 144 см² 2) $96\sqrt{3}$ см²
3) $48\sqrt{3}$ см² 4) 72 см²

**А6.** Стороны параллелограмма равны 20 см и 15 см. Длина меньшей высоты равна 6 см. Найдите длину большей высоты.

1) 10 см 2) 8 см 3) 50 см 4) 4,5 см

*В заданиях В1, В2 запишите ответ.*

**В1.** Сумма градусных мер трех внутренних углов семиугольника равна 420°. Найдите сумму градусных мер внешних углов, не смежных с данными.

*Ответ*: ____________

**В2.** Хорда окружности, равная 6 см, стягивает дугу в 60°. Найдите длину этой дуги.

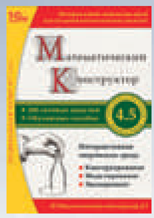
*Ответ*: ____________

*Выполняя задания С, запишите полное решение и ответ.*

**С1.** Вершины треугольника, вписанного в окружность, делят окружность на части, пропорциональные числам 3, 5 и 7. Найдите радиус описанной окружности, если средняя сторона треугольника равна $12\sqrt{3}$ см.

**С2.** В правильный шестиугольник вписана окружность радиуса 6 см. На его большей диагонали как на стороне построен правильный треугольник. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

В. ДУБРОВСКИЙ,
г. Москва



# ДИНАМИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ С «МАТЕМАТИЧЕСКИМ КОНСТРУКТОРОМ»

## Эпизод 7. По следам исчезнувших многоугольников, или Геометрическая палеонтология

В этой заметке, в продолжение предыдущей, мы рассмотрим серию задач на построение с применением преобразований, при исследовании которых на компьютере важную роль играют следы точек. На этот раз теоретической основой решения будет понятие композиции преобразований. Оговоримся сразу, что простейшие задачи данной серии можно решать и без композиции, и вообще без преобразований. Но именно применение композиции позволяет обобщить эти исходные задачи и получить теоремы, казалось бы, совсем от них далекие. Следует сказать, что хотя композиция не такое уж сложное понятие, в стандартном курсе геометрии места ему практически не находится. Тем более ценно, что в ходе работы с динамическими моделями композиция возникнет естественным образом, как бы сама собой; становится понятно не только что это такое, но и как «это», то есть композицию, находить.

**Задача 1.** У многоугольника отметили середины сторон, а затем многоугольник стерли, оставив только отмеченные точки. Восстановить многоугольник.

Ясно, что в такой постановке наша задача всегда имеет решение. Но если взять в качестве середин сторон искомого $n$-угольника произвольные точки $M_1$, $M_2$, ..., $M_n$, то возникает не менее интересная, чем задача *построения* («восстановления») $n$-угольника $A_1A_2...A_n$, задача *исследования*: мы будем выяснять, всегда ли наша задача разрешима и сколько решений она может иметь в зависимости от расположения данных точек. Эту, более общую, задачу мы и рассмотрим.

В простейшем случае ($n = 3$) ее решение очевидно (рис. 1); ясно, что в этом случае для любых трех точек, $M_1$, $M_2$, $M_3$, не лежащих на одной прямой, треугольник $A_1A_2A_3$ существует и притом только один.

Случай четырехугольника исследуем с помощью динамической модели, хотя он и не намного сложнее. Поставим на плоскости, то есть в окне программы, четыре произвольные точки: $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$, возьмем произвольную точку $A_1$, затем построим: точку $A_2$ такую, что $M_1$ — середина $A_1A_2$, точку $A_3$ такую, что $M_2$ — сере-

К материалу есть приложение на CD-диске.

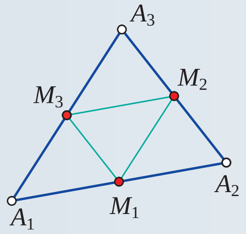



Рис. 1

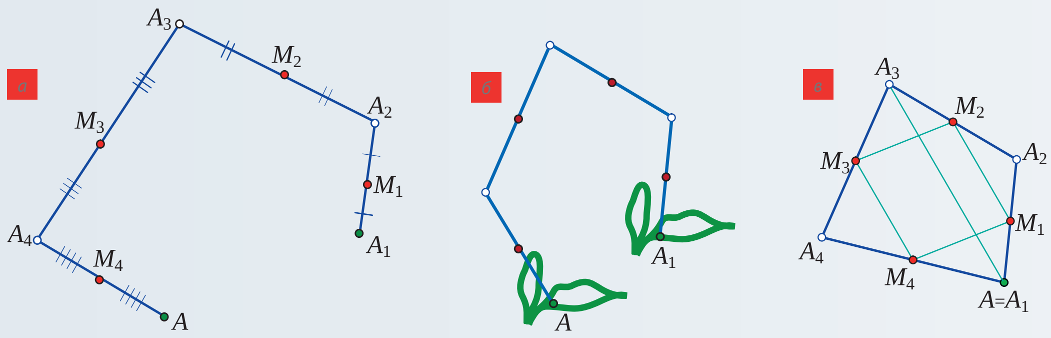



Рис. 2

дина $A_2A_3$, аналогично сторим точку $A_4$ и, наконец, точку $A$ такую, что $M_4$ — середина $A_4A$ (рис 2, а). Построить точку $A_2$ можно, отложив на продолжении отрезка $A_1M_1$ равный ему отрезок компьютерным «циркулем» или применив к $A_1$ одно из преобразований — поворот на 180° или гомотетию с коэффициентом –1 относительно $M_1$. Поскольку аналогичное построение приходится в дальнейшем выполнять несколько раз, целесообразно создать для него специальный инструмент. Для этого нужно выделить точки $A_1$, $M_1$ и $A_2$ и выбрать в меню *Мои инструменты* команду *Новый инструмент*. В открывающемся диалоге можно задать название инструмента (например, «Центральная симметрия») и инструкции, которые будут появляться при его применении в статусной строке внизу окна программы. После нажатия кнопки OK он появится в меню *Мои инструменты*. С его помощью по произвольным точкам $X$ и $Y$ будет строиться точка $Z$, симметричная $X$ относительно $Y$. Инструмент «Центральная симметрия» помещен в модель, прилагаемую к этой заметке (см. приложение на CD-диске).

Итак, нам нужно найти такое положение точки $A_1$, при котором ломаная $A_1A_2A_3A_4A$ замкнется, то есть $A = A_1$. Попробуем двигать точку $A_1$, пытаясь приблизить ее к $A$. Мы увидим, что точка $A$ все время убегает от $A_1$. Можно ли вообще ее догнать? «Подкрасим» $A_1$ и $A$, выделив их и нажав кнопку «Следы» на панели (или клавишу W). Снова подвигаем $A_1$. Теперь ясно видно (рис 2, б), что траектория $A$ — это просто сдвинутая траектория $A_1$, то есть $A$ получается из $A_1$ параллельным переносом. Строгое доказательство дадим чуть позже, а пока, раз не получается найти решение для данных точек-середин подбором исходной вершины, попытаемся подвигать сами середины. На самом деле, достаточно двигать только последнюю из них — точку $M_4$: легко найти такое ее положение, при котором точка $A$ совпадет с $A_4$, то есть ломаная замкнется (рис. 2, в). Как показывает наш эксперимент, замыкание происходит в том случае, когда $M_1M_2M_3M_4$ — параллелограмм, причем при этом условии ломаная остается замкнутой при любых перемещениях точки $A_1$!

Ничего удивительного в этом нет. Хорошо известно, что середины сторон произвольного четырехугольника образуют параллелограмм (параллелограмм Вариньона). Поэтому условие, что $M_1M_2M_3M_4$ — параллелограмм, необходимо для разрешимости нашей задачи. Легко убедиться и в его достаточности. Действительно, применяя теорему о средней линии треугольника к треугольникам $A_1A_2A_3$ и $A_3A_4A$, получаем, что отрезок $A_1A_3$ параллелен отрезку $M_1M_2$ и вдвое длиннее его, а $A_3A \parallel M_3M_4$ и $A_3A = 2M_3M_4$; точнее, с учетом направлений

$$\overrightarrow{A_1A_3} = 2\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{A_3A} = 2\overrightarrow{M_3M_4}.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_3A} = 2\overrightarrow{M_1M_2} + 2\overrightarrow{M_3M_4} = \vec{0},$$

так как $\overrightarrow{M_1M_2} = -\overrightarrow{M_3M_4}$ по условию Вариньона; но это и значит, что $A_1$=$A$.

Заметим, что замкнутая ломаная $A_1A_2A_3A_4$ при перемещении точки $A_1$ может оказаться невыпуклой и даже самопересекающейся. Чтобы не вдаваться в несущественные для нашей темы детали, будем считать многоугольником любую замкнутую ломаную. Тогда при $n = 3$ наша задача имеет единственное решение для любых трех данных точек, а при $n = 4$ она имеет решение, только если данные точки образуют параллелограмм (точнее, если $\overrightarrow{M_1M_2} = -\overrightarrow{M_3M_4}$), причем в этом случае задача имеет бесконечно много решений: любую точку плоскости можно принять за $A_1$.

А что будет при $n > 4$? Чтобы понять это, снова обратимся к нашей модели. Добавим несколько точек $M_i$ и продолжим нашу ломаную, используя их как середины очередных звеньев. «Подкрасим» вершины ломаной (включим для них рисование следов) и нарисуем что-нибудь точкой

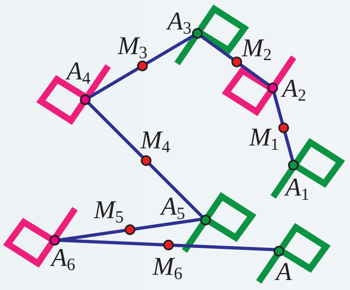



Рис. 3

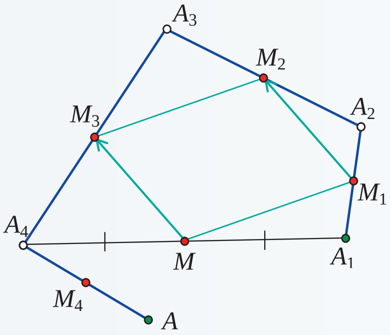



Рис. 4

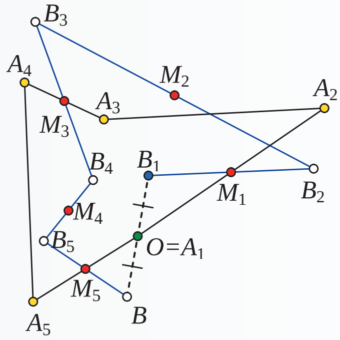



Рис. 5

$A_1$ (рис. 3). Мы увидим, что все фигурки, нарисованные точками с номерами одной четности, получаются одна из другой сдвигами, причем «четные» фигурки (нарисованные точками с четными номерами) перевернуты относительно нечетных. Это подсказывает, что нечетные фигурки получаются из самой первой параллельными переносами, а четные — центральными симметриями. Докажем, что это действительно так.

Очевидно, что точка $A_2$ получается из $A_1$ при центральной симметрии относительно $M_1$; запись

$$A_2 = Z_1(A_1),$$

где $Z_1$ обозначает названную центральную симметрию. В свою очередь,

$$A_3 = Z_2(A_2) = Z_2(Z_1(A_1)),$$

где $Z_2$ – центральная симметрия относительно $M_2$, то есть $A_3$ — образ точки $A_1$ при *композиции* центральных симметрий $Z_1$ и $Z_2$. С помощью символа «$\circ$», которым обозначают композицию, это записывается так:

$$A_3 = (Z_2 \circ Z_1)(A_1)$$

(заметим, что преобразования, составляющие композицию, записываются справа налево), и вообще,

$$A_{k+1} = Z_k(A_k) = (Z_k \circ Z_{k-1} \circ \ldots \circ Z_2 \circ Z_1)(A_1).$$

Решить нашу задачу при некотором $n$ — значит найти такую точку $A_1$, что $A_{n+1}=A_1$, то есть найти *неподвижную точку* композиции

$$F_n = Z_n \circ Z_{n-1} \circ \ldots \circ Z_2 \circ Z_1.$$

Что же представляет собой эта композиция?

Первое преобразование — это центральная симметрия $Z_1$. Второе, $F_2 = Z_2 \circ Z_1$, как и вообще композиция двух центральных симметрий, — это параллельный перенос, так как в силу равенства $\overrightarrow{A_1A_3} = 2\overrightarrow{M_1M_2}$ вектор, соединяющий произвольную точку $A_1$ с ее образом $A_3$ при преобразовании $F_2$, постоянен, не зависит от точки $A_1$. Чтобы найти вид третьего преобразования, $F_3 = Z_3 \circ Z_2 \circ Z_1$, достроим треугольник $M_1M_2M_3$ до параллелограмма $M_1M_2M_3M$, $\overrightarrow{MM_3} = \overrightarrow{M_1M_2}$ (рис. 4). Тогда $F_3 = Z$, где $Z$ — симметрия с центром $M$, потому что, как следует из сказанного для случая $n = 4$, точки $A_1$ и $A_4 = F_3(A_1)$ симметричны относительно $M$. Теперь понятно, что

$$F_4 = Z_4 \circ F_3 = Z_4 \circ Z$$

— это снова параллельный перенос на вектор $2\overrightarrow{MM_4}$, $F_5 = Z_5 \circ F_4 = Z_5 \circ Z_4 \circ Z$ – центральная симметрия и т.д.

Итак, при четном $n = 2m$ композиция $F_n$ — это параллельный перенос (на вектор $\overline{\mathrm{v}}$, равный сумме векторов $2\overrightarrow{M_{2i-1}M_{2i}}$, $I = 1, 2, \ldots, m$). Параллельный перенос либо не имеет неподвижных точек, либо оставляет на месте все точки плоскости; другими словами — является тождественным преобразованием. Следовательно, при любом четном $n$, как и при $n = 4$, наша задача либо не имеет решений, либо, при $\overline{\mathrm{v}} = \overline{0}$, имеет бесконечно много решений, причем за первую вершину $A_1$ искомого многоугольника можно взять любую точку плоскости. Если же $n$ нечетно, то $F_n$ — центральная симметрия. Она имеет единственную неподвижную точку $O$, и наша задача имеет единственное решение для любого набора точек $M_1, \ldots, M_n$: за вершину $A_1$ искомого многоугольника нужно взять точку $O$.

Найти ее можно так: возьмем любую точку $B_1$, построим точки

$$B_2 = Z_1(B_1),$$
$$B_3 = Z_2(B_2), \ldots,$$
$$B = Z_n(B_n) = F_n(B_1);$$

тогда $O$ — середина отрезка $B_1B$ (рис. 5 для $n = 5$).

В рассмотренной задаче роль «останков» многоугольника, по которым мы его восстанавливали, играли середины его сторон. Но это только одна, простейшая возможность. Если вместо середин сторон взять, например, серединные перпендикуляры $p_1, p_2, \ldots, p_n$ к ним, то преобразованием, переводящим вершину $A_i$ в $A_{i+1}$, будет осевая симметрия относительно $p_i$, и исследовать придется композиции осевых симметрий. Интересные факты возникают в случае, когда данные точки — центры правильных многоугольников, построенных на сторонах искомого многоугольника. Об одном из них — теореме Наполеона — мы расскажем в следующей заметке.

З. БАРМИНСКАЯ, Г. ГУТНИК,
г. Северодвинск

# СЧИТАЕМ НАЛОГИ

Актуальность экономической тематики в современных условиях очевидна. Дети буквально на каждом шагу встречаются с такой терминологией, как кредит, бартер, бизнес, налоги и др. Экономическое образование в раннем возрасте помогает учащимся освоить понятийный аппарат, столь необходимый для ориентации в современном рыночном мире.

Одна из важнейших задач современного образования — показать ребятам единство окружающего мира. Для формирования целостной картины мира целесообразно использовать на занятиях межпредметные связи, с их помощью школьники учатся видеть сходные законы и закономерности в развитии тех или иных процессов и явлений.

Реализация поставленных задач может идти путем интеграции экономики с математикой, где экономические знания будут находить практический выход в виде математических расчетов.

Мы для учащихся 8–9-х классов разработали программу факультатива «Математика в экономике», где на занятиях рассматриваем темы: почта, банк, налоговая инспекция, недвижимость, бюджет семьи, и решаем практические задачи.

Ниже мы представляем материалы одного из занятий по теме «Налоги».

Сборщики налогов,
М. ван Реймерсвале, 1542 г.

## Факультативное занятие

## «НАЛОГ НА ДОХОДЫ ФИЗИЧЕСКИХ ЛИЦ»

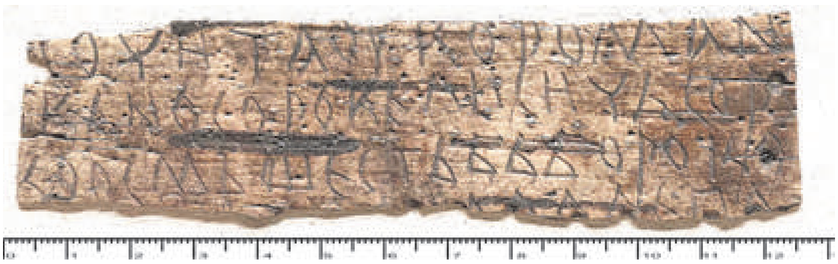
Самая сложная для понимания
в мире вещь — это система налогов.
*Альберт Эйнштейн*

## Ход занятия

### Из истории подоходного налога

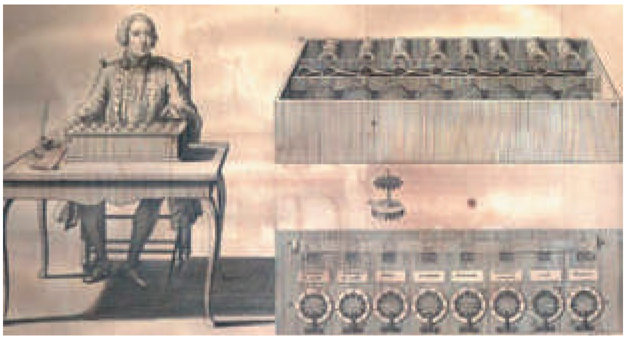
Подоходный налог появился в общемировой практике давно, и сейчас он действует почти во всех странах мира. Место его рождения — Великобритания. Он был введен в 1778 г. как временная мера. Но с 1842 г. подоходный налог окончательно утвердился в английской налоговой практике. В других странах он функционирует с конца XIX в. В России — с 1916 г.

Берестяная грамота. Фрагмент распоряжений сборщикам податей. Новгород, начало XIII в.



http://gramoty.ru/index.php?act=full&id=8

К материалу есть приложение на CD-диске.



http://www.vokrugsveta.ru/img/cmn/2006/12/074.jpg

Суммирующая машина Паскаля получила прозвище «Паскалина». Так ее изобразил Ф. Клемм в своей «Истории техники», изданной в 1735 г.

http://www.vandablog.ru/wp-content/uploads/2010/10/Untitled-1.jpg

Бородовой знак 1705 года – монетовидный медный кружок, по размеру равный копейке

## Интересное о налогах

• Французский математик Блез Паскаль родился в семье председателя налогового управления, который по роду службы часто занимался утомительными расчетами. Помогая отцу, он столкнулся с громоздкими вычислениями и, чтобы облегчить работу отца, создал вычислительное устройство, которое могло помочь упростить расчеты. Суммирующая машина «паскалина» могла складывать и вычитать, умножать и делить, а изобретенный Паскалем принцип связанных колес почти на три столетия стал основой создания большинства арифмометров — прямых предков современного калькулятора.

• Финны — это единственные люди в мире, которые рады платить налоги, ведь в Финляндии создана Ассоциация счастливых налогоплательщиков. А есть страны, где не платят налоги, например — Корея.

• Первым, кто потребовал от подданных налоговую декларацию — основу подоходного налога, стал египетский фараон Амасис.

• Самым известным в истории сборщиком налогов стал инспектор из немецкого города Апольди. Он мечтал вывести новую породу собак, и преуспел в этом. Благодаря необычному хобби скромную фамилию сборщика налогов знает весь мир. А звали его Ф.Л. Доберман.

• Какие только налоги не порождала на свет изобретательность правителей древности. Правитель Галлии Лициний ввел два добавочных месяца, чтобы собирать ежемесячный налог не 12 раз в году, а 14.

• На что готовы люди, чтобы не платить налоги? Жители средневековой Англии в ответ на введенный властями налог на окна просто закладывали их кирпичами.

• Но и сборщики налогов на выдумку хитры. В финансовом управлении Стокгольма служит Эльфрида Карлсон, которая ради выявления неплательщиков налога на собак освоила более 30 разновидностей собачьего лая.

• Брать налоги тоже можно чем угодно. Персидский Надир-шах собирал налоги с туркмен котлами и топорами — пушки лить. Карл Великий предпочитал брать коровами, а турецкие султаны брали налог детьми для пополнения войска.

• Налоговые льготы — это отдельная тема. Англичане, например, снизили почти вдвое налоги на дома с приведениями, так как их владельцам труднее подыскивать жильцов.

• А с теми, кто не платит налоги, разбирались по-разному. В России в эпоху Петра I злостным

Перепись населения для сбора налогов.
Мозаики из церкви Кахрие-джами в Стамбуле, 1315–1320

http://fr.academic.ru/pictures/frwiki/77/Meister_der_Kahriye-Cami-Kirche_in_Istanbul_005.jpg

Эдинбург до наших дней не устает поддерживать имидж наиболее «населенного» приведениями города Великобритании

неплательщикам вырывали ноздри, а потом ссылали на каторгу. Проще и эффективнее поступали ацтеки. Они привязывали у двери неплательщика налогов ягуара и отвязывали только после уплаты.

• Налоги зачастую влияют и на личную жизнь. Самый знаменитый — налог на бездетность. Этот налог удерживался только в СССР и в Монголии и не имеет аналогов в истории.

## Основные понятия НДФЛ

*Налог на доходы физических лиц вычисляется по формуле*:

НДФЛ = (Налоговая база – Вычеты) · 13%.

Налоговая база для НДФЛ — это доходы физического лица (зарплата, отпускные, оплата по больничному листу и др.).

*Стандартные налоговые вычеты*:

— 3000 рублей для лиц, получивших заболевание в результате аварии на Чернобыльской АЭС;

— 500 рублей для инвалидов I и II группы;

— 400 рублей предоставляется лицам, у которых суммарный доход с начала года не превысил 40 000 рублей;

— 1000 рублей в месяц на каждого ребенка;

— 2000 рублей в месяц на ребенка-инвалида или если родитель «единственный» (предоставляется, пока суммарный доход с начала года не превысит 280 000 рублей).

## Решение задач на вычисление НДФЛ

**1.** У работника ООО «Спасатель» в январе доход составил 22 000 р., в феврале — 22 000 р. Рассчитайте НДФЛ за январь и февраль этого работника.

*Решение. Январь.* Так как суммарный доход с начала года не превысил 40 000 р., работник имеет право на стандартный вычет 400 р.

$$\text{НДФЛ}_{\text{янв}} = (22\,000 - 400)\cdot 13\% = 21\,600 \cdot 0{,}13 = 2808 \text{ р.}$$

*Февраль.* Так как суммарный доход с начала года превысил 40 000 р. (22 000 · 2 = 44 000), работник не имеет права на стандартный вычет 400 р.

$$\text{НДФЛ}_{\text{фев}} = 22\,000 \cdot 13\% = 22\,000 \cdot 0{,}13 = 2860 \text{ р.}$$

**2.** У Шурупова один ребенок. Его доход в январе составил 15 000 р., в феврале — 15 000 р., в марте — 15 000 р. Рассчитайте НДФЛ за январь, февраль, март.

*Решение. Январь.* Суммарный доход с начала года — 15 000 р., что меньше 40 000 р., значит, работник имеет право на стандартный вычет на себя и на ребенка.

$$\text{НДФЛ}_{\text{янв}} = (15\,000 - 400 - 1000)\cdot 13\% = 13\,600 \cdot 0{,}13 = 1768 \text{ р.}$$

*Февраль.* Суммарный доход с начала года — 30 000 р., что меньше 40 000 р., значит, работник имеет право на стандартный вычет на себя и на ребенка.

$$\text{НДФЛ}_{\text{фев}} = (15\,000 - 400 - 1000)\cdot 13\% = 13\,600 \cdot 0{,}13 = 1768 \text{ р.}$$

*Март.* Суммарный доход с начала года — 45 000 р., что больше 40 000 р., но меньше 280 000 р., значит, работник имеет право только на стандартный вычет на ребенка.

$$\text{НДФЛ}_{\text{март}} = (15\,000 - 1000)\cdot 13\% = 14\,000 \cdot 0{,}13 = 1820 \text{ р.}$$

**3.** Гражданка Сидорова работает в ООО «У Машенькиной». У нее двое детей, один из них инвалид детства. Зарплата ее составляет 8 500 р. Рассчитайте НДФЛ за первые пять месяцев года. С какого месяца года не будет удержан вычет в размере 400 р.?

**4.** Гражданин Метелкин — чернобылец, он работает на предприятии «Звездочка» сварщиком и его доход за месяц составляет 38 000 р. Вычислите НДФЛ за январь и февраль.

**5.** Рассчитайте НДФЛ за три месяца с начала года у гражданки Шиловой, имеющей троих детей и заработавшей за январь — 17 300 р., за февраль — 19 200 р., за март — 18 500 р.

**6.** Узнайте, какую сумму получит на руки гражданин Елкин, работающий в магазине «Березка», за январь с учетом НДФЛ, если его доход за месяц составил 28 400 р., а также он является «единственным» родителем, имеющим одного ребенка.

**7.** У учителя Петровой доход за январь составил 17 000 р. (12 000 р. — заработная плата, 5000 р. — материальная помощь). Сколько денег она получит на руки, если она имеет ребенка, а материальная помощь не облагается налогом в размере до 4000 р.?

Монеты Древнего Рима

**ОБЩЕРОССИЙСКАЯ МАЛАЯ АКАДЕМИЯ НАУК «ИНТЕЛЛЕКТ БУДУЩЕГО»**
Тел.: (48439) 97295 ■ 249035, Обнинск, Ленина, 129 ■ http://www.future4you.ru
**РОССИЙСКИЕ ОТКРЫТЫЕ ЗАОЧНЫЕ КОНКУРСЫ-ОЛИМПИАДЫ**
**ПРОЕКТ «ИНТЕЛЛЕКТ-ЭКСПРЕСС» 2011–2012 УЧЕБНЫЙ ГОД**
**НАЦИОНАЛЬНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНО-ТВОРЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ РОССИИ»**

# КОНКУРС «МИР МАТЕМАТИКИ» ■ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 7 КЛАССОВ

**Конкурс проводится до 16 декабря 2011 г.**

**■ ЗАДАНИЕ 1.** НАЙДИТЕ КОЛИЧЕСТВО

Количество и его пятая часть дают вместе 6. Найдите количество.

**■ ЗАДАНИЕ 2.** ЗАГАДОЧНЫЕ СТОЛБЫ

Между столбами высотой 9 м каждый натянута веревка длиной 18 м таким образом, что касается земли одной точкой. Каково расстояние между столбами?

**А**. 1 м. **Б**. 9 м. **В**. 2 м. **Г**. 10 м. **Д**. 8 м.

**■ ЗАДАНИЕ 3.** ГОВОРИТЕ ПРАВДУ!

Катя лгала с понедельника по среду и говорила правду в другие дни, а Света лгала с четверга по субботу и говорила правду в другие дни. Однажды они одинаково сказали: «Вчера был один из дней, когда я лгу». Какой день был вчера?

**■ ЗАДАНИЕ 4.** ТРЕНАЖЁРНЫЙ ЗАЛ

Тренажёрный зал посещают 189 человек, из которых 8 ходят на занятия меньше года, 11 человек моложе 40 лет, 70 приходят на утренние тренировки, а 140 – мужчины. Какое наименьшее возможное число членов клуба удовлетворяет сразу четырём условиям: занимаются в зале не меньше года, их возраст больше 40, они посещают утренние тренировки и являются мужчинами?

**А**. 8. **Б**. 140. **В**. 4. **Г**. 2. **Д**. 6.

**■ ЗАДАНИЕ 5.** НАЧИНКА ДЛЯ ПИРОЖКОВ

На свой день рождения Артур приготовил 14 пирожков с вишней, яблоками и повидлом. Пирожков с повидлом наибольшее количество, причём их вдвое больше, чем пирожков с вишней. А пирожков с вишней меньше, чем пирожков с яблоками. Сколько пирожков с яблоками?

**■ ЗАДАНИЕ 6.** ДВЕ ШКАТУЛКИ

В двух шкатулках лежат 50 слитков золота. Когда в первую положили 12, а из второй взяли 8, то в шкатулках их стало поровну. Сколько слитков золота было в каждой шкатулке первоначально?

**А**. 35 и 15. **Б**. 30 и 20. **В**. 10 и 40. **Г**. 36 и 14.

**■ ЗАДАНИЕ 7.** ВОЛШЕБНЫЙ ЭЛИКСИР

Колдовской отвар содержит: 1500 грамм воды, 100 г измельчённой кожи дракона, 100 г хвойной смолы и 300 г волшебного эликсира. Сколько процентов эликсира содержит это зелье?

**А**. 15%. **Б**. 58%. **В**. 66%. **Г**. 10%. **Д**. 1%

**■ ЗАДАНИЕ 8.** СТАРИННЫЕ ЧАСЫ

Старинным часам требуется 30 секунд, чтобы пробить 6 часов. За сколько секунд часы пробьют 12 часов?

**А**. 60. **Б**. 72. **В**. 66. **Г**. 30.

**■ ЗАДАНИЕ 9.** ЭКСПЕДИЦИЯ

В горах заблудилась группа (I) из 9 человек. Провизии на тот момент хватало на 5 суток. Ровно через сутки I группа встречает ещё одну группу альпинистов (II), у них провизии не было. После обьединения этих групп провизии стало хватать на 3 суток. Сколько человек было во второй группе?

**А**. 1. **Б**. 6. **В**. 3. Г. 2. **Д**. 5.

**■ ЗАДАНИЕ 10.** КАКОЕ ЧИСЛО?

Из двух одинаковых равнобедренных треугольников (периметр каждого треугольника равен x) сложили два четырёхугольника, прикладывая треугольники друг к другу: а) основаниями, б) боковыми сторонами. Периметры четырёхугольника будут равны (x+4) и (x+8). Найдите x.

**■ ЗАДАНИЕ 11.** МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ

Какое наибольшее число можно получить, используя четыре единицы?

**■ ЗАДАНИЕ 12.** ДЛИНА ОТРЕЗКОВ

Отрезок AB в два раза короче, чем отрезок CD, в свою очередь CD на 6 см длиннее, чем EF, и на 8 см больше, чем KM. Треть длины KM и длина EF в сумме дают длину CD. Какова длина каждого отрезка в отдельности?

**■ ЗАДАНИЕ 13.** ОДНОКЛАССНИКИ

Какое наибольшее число учеников может быть в классе, если из любых 20 человек не менее 5 – девочки, а из любых 22 не менее 9 – мальчики.

**А**. 20. **Б**. 22. **В**. 42. **Г**. 28. **Д**. 29.

**■ ЗАДАНИЕ 14.** САМЫЙ УМНЫЙ

В классе проводили конкурс на самого умного ученика. В полуфинале участвовало 5 человек, но в финал попали только трое. Сколько различных вариантов троек финалистов существует?

**А**. 10. **Б**. 5. **В**. 12. **Г**. 8. **Д**. 3.

**■ ЗАДАНИЕ 15.** ОХ УЖ ЭТИ СТЕПЕНИ!

Чему равна разность куба суммы квадратов чисел 2 и 3 и квадрата суммы их кубов?

**Условия участия размещены на предыдущей странице журнала, а также на сайте express.future4you.ru (раздел «Интеллект-экспресс, зима 2011-2012», конкурс «Мир математики»).**

Ю. КОЗЛОВА,
г. Москва

# МАТЕМАТИКА НА ТУРИСТИЧЕСКОЙ ТРОПЕ

Математические знания крайне необходимы участнику туристского похода для лучшего ориентирования на местности. Они основаны на здравом смысле, а доказать их учащиеся смогут на уроках геометрии в 8-м классе.

## Измерение расстояний

Для ориентирования в походе важно знать пройденное расстояние, а измерять его можно парами шагов. Для этого потребуется сделать эталон расстояния. С помощью мерной ленты или веревки на открытом ровном участке отмеряют 50 м и обозначают границы колышками. Каждый участник проходит вымеренный участок 6 раз (для точности подсчета) и подсчитывает, сколько у него шагов в 300 м. Считать удобнее парами, например под левую ногу. Проходить эталонное расстояние нужно спокойным, обычным шагом. Полученное количество пар шагов делят на 3 и определяют количество пар шагов в 100 м. Например, количество пар шагов при прохождении расстояния в 300 м составило 180 пар. Следовательно, в 100 м — 60 пар шагов.

Полезно каждому участнику составить индивидуальную таблицу соответствия пар шагов и расстояний:

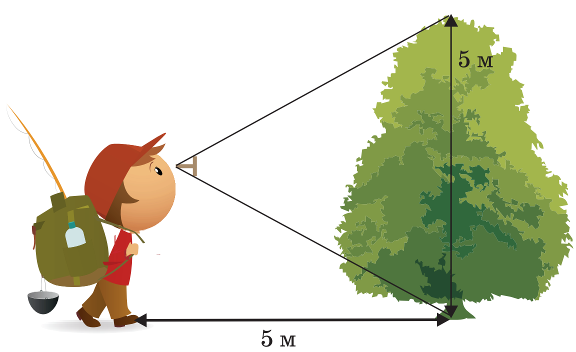
| Расстояние | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 100 | 300 | 500 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Количество пар шагов | | | | | | | | |

Надо сообщить учащимся, что длина шага меняется в зависимости от рельефа местности, а также от нагрузки участников. Например, при беге длина шага увеличивается, а при подъеме по крутому склону — уменьшается.

К материалу есть приложение на CD-диске.

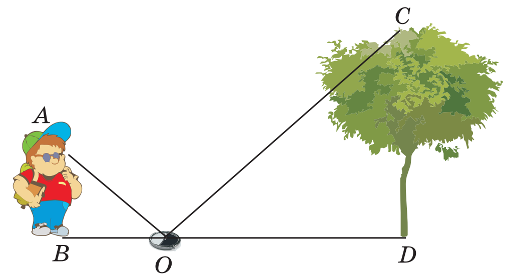
## Измерение высоты дерева

***«Крест дровосека».*** Используют две палочки (ветки) одинаковой длины. Для измерения высоты дерева нужно встать лицом к нему и приставить одну палочку концом к переносице, расположив ее параллельно земле. Вторую палочку следует приставить вертикально к дальнему концу первой. Получится буква «Т», лежащая «на боку». Потом, отступая от дерева или приближаясь к нему, нужно добиться того, чтобы верхушка и подножие дерева совпали с верхним и нижним концами вертикальной палочки. Теперь нужно измерить расстояние от места, где стоит измеряющий, до подножия дерева. Оно и будет равно высоте дерева.

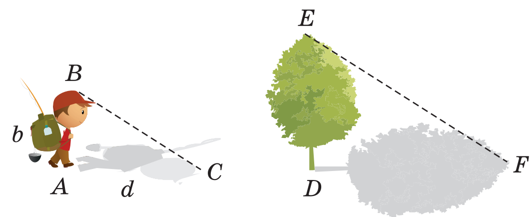



***Измерение с зеркалом.*** Положим на землю небольшое зеркало (можно использовать лужицу) в стороне от дерева. Измеряющий отходит от зеркала на такое расстояние, чтобы увидеть в нем отражение верхушки дерева. Зная, что угол падения равен углу отражения, вычисляем высоту дерева.

Треугольники $ABO$ и $CDO$ — прямоугольные и подобные, поэтому $CD = \frac{AB}{OB} \cdot OD$. Длины отрезков $OB$ и $OD$ мы можем легко измерить, а длина $AB$ равна росту измерявшего, уменьшенному на 8–10 см.




***Измерение по тени дерева.*** Говорят, что таким способом Фалес измерил высоту египетских пирамид. На ровной поверхности измерьте длину своей тени ($d$), длину тени дерева ($DF$). Так как треугольники подобны, то высоту дерева ($ED$) вычисляют по формуле $\frac{b}{d} \cdot DF$, где $b$ — ваш рост.




## В БИБЛИОТЕКЕ

С. ШВАЛЕВА, с. Брёхово, Пермский край

■ В рассказе В. Шукшина «Беседы при ясной луне» «редкого ума человек» Баев объясняет собеседнице Марье свою идею выполнения плана молокопоставок за счет колхозников.

— Допустим, ты должна сдать на молоканку 500 литров молока.

Баев откинул воображаемых 5 кругляшек на воображаемых счетах, посмотрел терпеливо и снисходительно на Марью.

— Так? Это из расчета, что процент жирности молока у твоей коровы такой-то.

Баев еще несколько кругляшек воображаемых отбросил, чуть выше прежних.

— Но вот выясняется, что у твоей коровы жирность не такая, какая тянула на 500 литров, а ниже. Понимаешь? Тогда тебе уже не 500 литров надо отнести, а 575, допустим. Сообразила?

Мария не сообразила пока.

— Снимайте, говорю, один процент жирности у всех — будет дополнительное молоко…

Мария все никак не могла уразуметь…

А вы уразумели? Удачно ли подобрал числовые данные «башковитый» Баев для объяснения? Давайте проверим.

Пусть базисная жирность молока в данной местности $x\%$. Баев говорил, что 500 л молока жирности $x\%$ будет приравнено к 575 л молока жирности $(x - 1)\%$, тогда $500x = 575(x - 1)$. Получаем, что базисная жирность молока превышает 7%, что невозможно.

М. БЕРШТЕЙН, А. БЛИНКОВ,
А. ИВАНИЩУК,
А. МЯКИШЕВ, П. ЧУЛКОВ,
г. Москва

# ТУРНИР АРХИМЕДА
## МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РЕГАТА

Джеймс Эдвард Баттерсворт.
Яхты, огибающие отметку

13 ноября 2010 года состоялась математическая регата 11-х классов, в которой приняли участие 55 команд из Москвы, Долгопрудного, Костромы, Санкт-Петербурга и Переславля. Многие команды-участники показали высокие результаты, поэтому призами была награждена 21 команда. Четырнадцать лучших команд были награждены также дипломами турниров Архимеда. Абсолютным победителем стала одна из команд физико-математической школы № 5 (г. Долгопрудный, Московская обл.), диплом первой степени также получили одна из команд физико-математической школы № 1189 и команда химического лицея № 1303 (обе из Москвы). Полные итоги регаты опубликованы на сервере МЦНМО (http://www.mccme.ru/olympiads).

Как обычно, часть заданий придумывалась специально для этой регаты, а остальные являются математическим фольклором или взяты из популярной математической литературы. Тексты решений публикуются в том виде, в котором они готовились для работы жюри.

**Условия задач**

### Первый тур

(*10 минут; каждая задача — 6 баллов*)

**1.1.** Решите уравнение $x^6 + x^4 + x^2 = 3$.

**1.2.** Существует ли выпуклый многогранник, у которого нечетное количество граней и каждая грань — нечетноугольник?

**1.3.** Решите уравнение $pq + r = r^2$, если $p$, $q$ и $r$ — простые числа.

### Второй тур

(*15 минут; каждая задача — 7 баллов*)

**2.1.** Докажите, что при $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$ выполняется неравенство $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}>1$.

**2.2.** В треугольнике $ABC$ проведена высота $AD$, точки $P$ и $Q$ — середины двух других высот, $H$ — ортоцентр (*точка пересечения высот*), $E$ — середина стороны $BC$. Докажите, что точки $D$, $H$, $P$, $Q$ и $E$ лежат на одной окружности.

**2.3.** Какое наименьшее количество прямых на плоскости надо провести, чтобы получить ровно восемь точек их попарного пересечения (*три прямые через одну точку проходить не могут*)?

## Третий тур

(*20 минут; каждая задача — 8 баллов*)

**3.1.** Найдите наименьшее положительное значение суммы $x + y + z$, если

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z.$$

**3.2.** Можно ли разрезать квадрат на три попарно подобных, но не равных прямоугольника?

**3.3.** Можно ли на шахматной доске поставить 5 ладей на белые и 3 ладьи на черные клетки так, чтобы они попарно не били друг друга?

## Четвертый тур

(*25 минут; каждая задача — 9 баллов*)

**4.1.** Известно, что уравнение $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ имеет ровно три корня. Найдите хотя бы один из них.

**4.2.** Докажите, что $AI + BI + CI \ge 6r$, где $r$ — радиус окружности, вписанной в треугольник $ABC$, $I$ — ее центр.

**4.3.** При каких натуральных значениях $n$ число $\underbrace{10101\ldots101}_{n \text{ единиц}}$ является простым?

## Пятый тур

(*15 минут; каждая задача — 7 баллов*)

**5.1.** Решите уравнение

$$\arcsin [\sin x] = \arccos [\cos x]$$

($[a]$ — *целая часть числа* $a$).

**5.2.** Из точки $P$, лежащей на описанной окружности прямоугольника $ABCD$, опущены перпендикуляры $PM$ и $PN$ на его диагонали. Найдите $MN$, если радиус окружности равен $R$, а угол между диагоналями равен $\alpha$.

**5.3.** Коля, Леня и Миша сложились по целому числу рублей и купили футбольный мяч. Сумма денег, вложенных каждым из них, не превосходит половины суммы, вложенной остальными. Сколько денег вложил Миша, если мяч стоил 600 рублей?

## Ответы, решения, комментарии

**1.1.** $\pm 1$.

Пусть $x^2 = t \ge 0$, тогда уравнение примет вид: $t^3 + t^2 + t = 3$. Далее возможны различные способы решения.

*Способ I.* Функция $f(t) = t^3 + t^2 + t$ возрастает на $[0; +\infty)$, следовательно, уравнение $f(t) = 3$ имеет не более одного неотрицательного корня. Так как $f(1) = 3$, то исходное уравнение равносильно уравнению $x^2 = 1$, то есть $x = \pm 1$.

*Способ II.*

$$\begin{cases} t^3 + t^2 + t = 3, \\ t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t^3 - 1) + (t^2 - 1) + (t - 1) = 0, \\ t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)(t^2 + 2t + 3) = 0, \\ t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ (t+1)^2 + 2 = 0, \end{array}\right. \\ t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 1.$$

Таким образом, $x = \pm 1$.

**1.2.** Нет, не существует.

Предположим, что искомый многогранник существует. Найдем количество его ребер, сложив сначала количество ребер в каждой грани. Получится нечетное число. Но каждое ребро является общим для двух граней, то есть было учтено дважды, значит, при сложении должно получиться четное число. Полученное противоречие показывает, что многогранника, описанного в условии, не существует.

**1.3.** $p = 2$, $q = 3$, $r = 3$ или $p = 3$, $q = 2$, $r = 3$.

Приведем уравнение к виду $pq = r(r - 1)$. Далее можно рассуждать по-разному.

*Способ I.* Правая часть уравнения является четным числом при всех натуральных значениях $r$, следовательно, $p = 2$ или $q = 2$.

Если $r = 2$, то $pq = 2$, то есть $p = 1$ или $q = 1$, что противоречит условию. Следовательно, $r$ — нечетное число, тогда число $r - 1$ четное, то есть $r - 1 = 2d$, где $d$ — натуральное число. Подставляя, получим, что $pq = 2rd$. Если $d \ne 1$, то в левой части равенства два простых множителя, а в правой части — не меньше трех, что невозможно. Значит, $d = 1$ и $r = 3$. При этом если $p = 2$, то $q = 3$ (или наоборот).

*Способ II.* Заметим, что полученное уравнение симметрично относительно переменных $p$ и $q$. Пусть $p \ge q$, тогда, так как $p$ и $q$ — простые числа, то

$$\begin{cases} r = pq, \\ r - 1 = 1 \end{cases} \text{или} \begin{cases} r = p, \\ r - 1 = q. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений, если $p$, $q$ и $r$ — простые.

Так как одно из чисел $r$ или $r - 1$ — четное, из уравнений второй системы следует, что $r - 1 = 2$. Тогда $r = p = 3$, $q = 2$.

В случае, когда $q \ge p$, в силу симметрии получится: $r = q = 3$, $p = 2$.

**2.1.** Добавим к знаменателям данных дробей положительные числа.

Тогда:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}>\frac{x}{y+z+x}+\frac{y}{z+x+y}+\frac{z}{x+y+z}=$$

$$=\frac{x+y+z}{x+y+z}=1,$$

что и требовалось.

*Комментарий.* Отметим, что можно сделать и более точную оценку «снизу» суммы данных дробей. Пусть $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$, тогда

$$\frac{a+b+c}{2}=x+y+z,$$

поэтому

$$x=\frac{a-b+c}{2},\ y=\frac{a+b-c}{2},\ z=\frac{b+c-a}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=\frac{a-b+c}{2b}+\frac{a+b-c}{2c}+\frac{b+c-a}{2a}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-3\right)\geq\frac{3}{2},$$

так как сумма взаимно обратных положительных чисел больше или равна двум. Равенство достигается, если $a = b = c$.

**2.2.** Рассмотрим окружность с диаметром $HE$ (рис. 1). Так как по условию угол $HDE$ — прямой, то точка $D$ лежит на этой окружности. Пусть $BB_1$ и $CC_1$ — высоты треугольника $ABC$. Тогда отрезки $EP$ и $EQ$ — средние линии прямоугольных треугольников $CB_1B$ и $BC_1C$ соответственно. Следовательно, $EP \perp BB_1$ и $EQ \perp CC_1$, то есть отрезок $HE$ виден из точек $P$ и $Q$ под углом $90°$. Значит, точки $P$ и $Q$ также лежат на рассмотренной окружности.

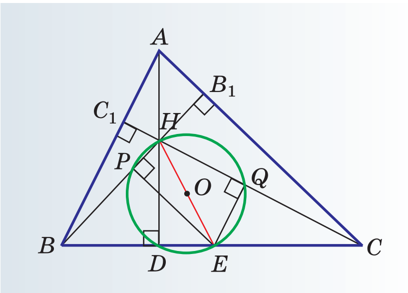


Рис. 1

**2.3.** Пять прямых.

Если $n$ прямых расположены так, что любые две пересекаются и точки пересечения различны, то общее количество точек пересечения равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Для $n = 4$ это число равно 6, поэтому необходимо провести не менее пяти прямых (если какие-то прямые не пересекаются, то количество точек попарного пересечения еще меньше).

Пять прямых можно расположить указанным образом. Один из возможных примеров — см. рисунок 2 (на чертеже есть две пары параллельных прямых).

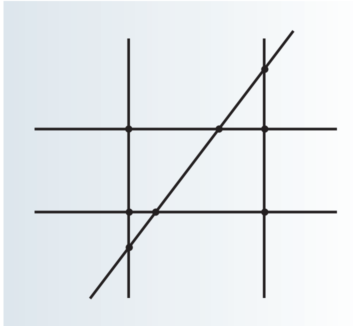


Рис. 2

**3.1.** $\pi$.

Преобразуем данное равенство:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = -\operatorname{tg} z\,(1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y),$$

и рассмотрим два случая:

1. $1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 0$. Тогда $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} y$ — взаимно обратные числа, но в этом случае исходное равенство примет вид

$$\operatorname{tg} x+\frac{1}{\operatorname{tg} x}+\operatorname{tg} z=\operatorname{tg} z,$$

что не выполняется ни при каких значениях $z$.

2. $1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y \neq 0$. Тогда равенство примет вид:

$$\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}=-\operatorname{tg} z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(x + y) = \operatorname{tg}(-z) \Leftrightarrow x + y + z = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Следовательно, наименьшее положительное значение $x + y + z$ равно $\pi$.

Так как функция тангенс определена не везде, то осталось указать какие-нибудь значения переменных, для которых $x + y + z = \pi$ и при этом выполняются условия: $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$ и $\cos z \neq 0$ (условие $\cos(x + y) \neq 0$ для этого случая выполняется автоматически). Такие значения существуют, например, $x=y=z=\frac{\pi}{3}$.

*Комментарий.* Отметим, что существуют и другие способы преобразования данного равенства, в частности использующие формулу суммы тангенсов. При этом при любом способе решения необходимо учитывать изменения областей определений выражений.

**3.2.** Да, можно.

Для удобства рассмотрим квадрат со стороной 1. Разобьем его на три прямоугольника (рис. 3) и докажем, что существуют такие $x$ и $y$ ($0 < x < 1$, $0 < y < 1$), что эти прямоугольники попарно подобны.

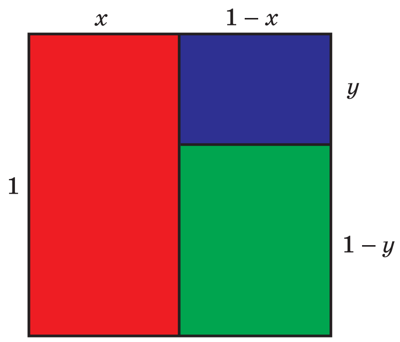



Рис. 3

Подобие прямоугольников означает, что у этих прямоугольников отношение большей стороны к меньшей одинаково, то есть

$$\frac{1}{x}=\frac{1-x}{y}=\frac{1-y}{1-x}.$$

Из первой пропорции получим, что $y = x - x^2$, значит, $1 - y = 1 - x + x^2$. Подставляя эти выражения во вторую пропорцию, получим уравнение

$$\frac{1-x}{x(1-x)}=\frac{1-x+x^2}{1-x}.$$

Так как знаменатели дробей положительны, то оно равносильно кубическому уравнению

$$x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Докажем, что такое уравнение имеет хотя бы один корень в интервале $(0;\ 1)$. Действительно, функция $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$ непрерывная (так как представляет собой многочлен) и при этом $f(0) = -1$, а $f(1) = 1$, то есть на $[0;\ 1]$ функция принимает значения разных знаков. Следовательно, внутри этого отрезка найдется такое число $x_0$, что $f(x_0) = 0$.

Найдем и оценим соответствующее значение $y$:

$$y_0 = x_0 - x_0^2 = -\left(x_0 - 0,5\right)^2 + 0,25.$$

Если $0 < x_0 < 1$, то $0 \le (x_0 - 0,5)^2 < 0,25$, значит, $0 < y_0 \le 0,25$.

При таком значении $y_0$ синий и зеленый прямоугольники не равны. Таким образом, требуемое разрезание квадрата возможно.

*Комментарий.* Можно доказать, что полученный многочлен имеет единственный действительный корень. Для этого достаточно найти его производную: $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$, и проверить, что дискриминант этого трехчлена отрицательный, то есть $f'(x) > 0$. Значит, $f(x)$ — возрастающая функция.

Также можно доказать, что с точки зрения геометрии других вариантов разрезания квадрата на подобные прямоугольники не существует, поэтому указанный в решении способ разрезания — единственный. При этом отношение сторон прямоугольников будет выражаться через кубические корни, поэтому построение такого разбиения произвольного квадрата только с помощью циркуля и линейки невозможно.

**3.3.** Нет, нельзя.

Рассмотрим шахматную доску со стандартной раскраской (левый нижний угол — черный). Занумеруем строки и столбцы шахматной доски так, как показано на рисунке 4, тогда каждой клетке будет соответствовать пара натуральных чисел $(m;\ n)$, где $1 \le m \le 8$ и $1 \le n \le 8$, которую можно считать координатами этой клетки.

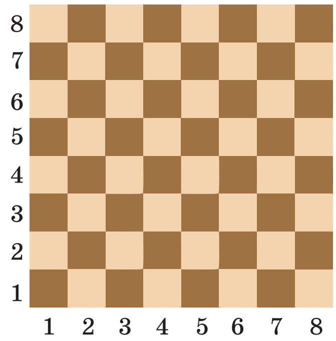



Рис. 4

Пусть восемь ладей не бьют друг друга, тогда в каждой горизонтали и в каждой вертикали стоит ровно по одной ладье. В этом случае сумма координат всех занятых ладьями клеток равна $2(1 + 2 + 3 + \ldots + 8)$ — четному числу. Заметим, что каждая черная клетка имеет четную сумму координат, а каждая белая клетка — нечетную. Таким образом, сумма координат пяти белых клеток, в которых расположены ладьи, нечетна. Следовательно, и сумма координат всех восьми клеток, в которых расположены ладьи, нечетна. Полученное противоречие показывает, что требуемая расстановка невозможна.

**4.1.** Если $a = 0$, то уравнение имеет корень 0; если $a \ne 0$, то один из корней уравнения 1 или –1.

Рассмотрим два случая: 1) $a = 0$; 2) $a \ne 0$.

1. Если $a = 0$, то данное уравнение примет вид:

$$bx^3 + cx^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(bx^2 + cx + b) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ или } bx^2 + cx + b = 0.$$

Таким образом, второе уравнение должно иметь два различных корня, отличных от нуля. Для этого необходимо и достаточно, чтобы оно было квадратным и его дискриминант был положительным, то есть $\begin{cases} b \ne 0, \\ |\,c\,| > 2|\,b\,|. \end{cases}$ Такие уравнения существуют, например, $x^2 + 3x + 1 = 0$.

2. Если $a \ne 0$, то $x = 0$ не является корнем данного уравнения, тогда, разделив обе его части на $x^2$, получим уравнение

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0,$$

равносильное данному.

Заметим, что если число $m$ является корнем полученного уравнения, то и число $\frac{1}{m}$ является его корнем. Следовательно, чтобы количество корней такого уравнения было нечетным, необходимо выполнение условия:

$$x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Осталось показать, что это условие является достаточным, то есть что уравнения указанного вида, имеющие ровно три корня, один из которых равен как 1, так и –1, существуют.

Пусть $x + \frac{1}{x} = y$ ($|y| \geq 2$), тогда исходное уравнение примет вид:

$$ay^2 + by + (c - 2a) = 0.$$

Для того, чтобы исходное уравнение имело три корня, достаточно, чтобы полученное квадратное уравнение имело два корня, $y_1$ и $y_2$, при этом

$$y_1 = 2 \text{ и } y_2 > 2 \text{ или } y_1 = -2 \text{ и } y_2 < -2.$$

Используя обратную теорему Виета, несложно привести примеры:

1) для корня $x = 1$: $y_1 = 2$, и пусть $y_2 = 3$, тогда $a = 1$, $b = -5$, $c = 8$;

2) для корня $x = -1$: $y_1 = -2$, и пусть $y_2 = -3$, тогда $a = 1$, $b = 5$, $c = 8$.

**4.2.** Пусть в треугольнике $ABC$: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$.

*Способ I.* Предварительно докажем лемму. Если $A_1$ — основание биссектрисы этого треугольника, проведенной из вершины $A$, то $\frac{IA}{IA_1} = \frac{b+c}{a}$ (рис. 5).

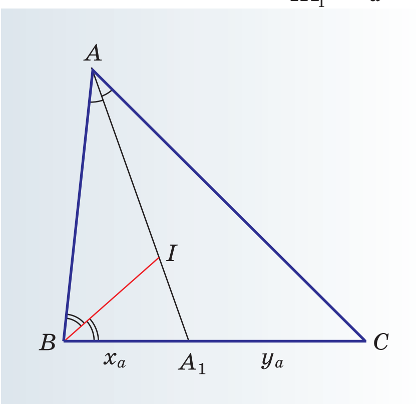



Рис. 5

Для удобства введем следующие обозначения: $BA_1 = x_a$, $CA_1 = y_a$. Тогда, используя свойство биссектрисы треугольника, получим систему уравнений $\begin{cases} \frac{x_a}{y_a} = \frac{c}{b}, \\ x_a + y_a = a. \end{cases}$ Ее решения:

$$x_a = \frac{ac}{b+c},\ y_a = \frac{ab}{b+c}.$$

Используя далее, что $BI$ — биссектриса треугольника $ABA_1$, получим:

$$\frac{IA}{IA_1} = \frac{AB}{BA_1} = \frac{c}{x_a} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a},$$

что и требовалось.

Перейдем к доказательству неравенства. Соединим точку $I$ с точкой $K$ касания вписанной окружности и стороны $BC$ (рис. 6). Если $AB \neq AC$, то точки $A_1$ и $K$ различны, тогда в прямоугольном треугольнике $IKA_1$ должно выполняться неравенство: $IA_1 > IK = r$ (в противном случае $IA_1 = r$). Таким образом, $IA_1 \geq r$.

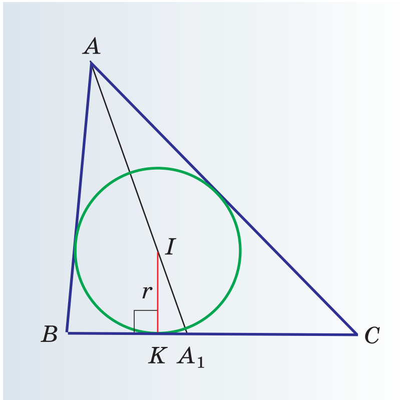



Рис. 6

Используя доказанную лемму, получим, что

$$AI = \frac{b+c}{a} \cdot IA_1 \geq \left(\frac{b+c}{a}\right) r.$$

Аналогичными рассуждениями получим еще два неравенства: $BI \geq \frac{c+a}{b} r$ и $CI \geq \frac{a+b}{c} r$. Сложив почленно три неравенства, получим:

$$AI + BI + CI \geq \left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}\right) r =$$

$$= \left(\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)\right) r \geq 6r$$

(так как сумма взаимно обратных положительных чисел больше или равна двум).

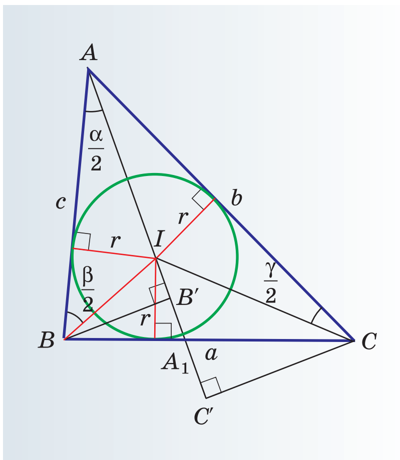



Рис. 7

*Способ II*. Опустим перпендикуляры из точки $I$ на стороны треугольника (рис. 7), тогда

$$AI+BI+CI=\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Тогда останется доказать, что

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\ge 6.$$

Это можно делать по-разному. Приведем как геометрический, так и аналитический способы рассуждений.

*Геометрический способ*. Докажем, что $\sin\frac{\alpha}{2}\le\frac{a}{b+c}$. Действительно, опустим перпендикуляры $BB'$ и $CC'$ на биссектрису $AA_1$ треугольника $ABC$ (см. рис. 7), тогда

$$CC'+BB'=b\sin\frac{\alpha}{2}+c\sin\frac{\alpha}{2}\le BC=a.$$

Аналогично доказывается, что

$$\sin\frac{\beta}{2}\le\frac{b}{a+c} \text{ и } \sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{c}{a+b}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\ge\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}\ge 6$$

(как было показано выше).

*Комментарий.* Отметим, что этот способ решения можно модифицировать, поскольку

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}}$$

(неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим). Тогда останется доказать неравенство

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}.$$

Это можно сделать как способом, указанным выше (выразив каждый синус через стороны треугольника), так и по-другому: отдельно доказать равенство

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{4r}{4R},$$

где $R$ — радиус окружности, описанной около данного треугольника, и использовать затем соотношение $R\ge 2r$.

*Аналитический способ*. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ на $(0;\pi)$ и докажем, что ее график расположен выпуклостью вниз. Действительно,

$$f'(x)=(\sin^{-1}x)'=-(\sin x)^{-2}\cdot\cos x,$$

$$f''(x)=-(-2(\sin x)^{-3}\cdot\cos^2 x-\sin x\cdot(\sin x)^{-2})=$$

$$=\frac{\sin^2 x+2\cos^2 x}{\sin^3 x}>0.$$

Тогда по неравенству Йенсена для функций такого вида:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}\ge f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right).$$

Применяя это неравенство для

$$x_1=\frac{\alpha}{2},\ \ x_2=\frac{\beta}{2},\ \ x_3=\frac{\gamma}{2}$$

получим:

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\ge 3\cdot\frac{1}{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}}=6,$$

так как $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Таким образом, $AI+BI+CI\ge 6r$, что и требовалось.

*Комментарий.* Отметим также, что из приведенных рассуждений следует, что доказанное неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда треугольник $ABC$ — равносторонний.

**4.3.** Только при $n=2$.

При $n=1$ данное число также равно 1, то есть не простое. При $n=2$ данное число равно 101 — простое. Докажем, что при всех $n>2$ число $\underbrace{10101\ldots101}_{n \text{ единиц}}$ будет составным.

*Способ I*. Если $n$ — четное, то число $\underbrace{10101\ldots101}_{n \text{ единиц}}$ делится на 101, то есть оно не простое. Если $n$ — нечетное, то $11\cdot\underbrace{10101\ldots101}_{n \text{ единиц}}=\underbrace{111\ldots11}_{2n \text{ единиц}}$. Последнее число делится на $\underbrace{111\ldots11}_{n \text{ единиц}}$. Так как $n$ нечетно, то числа 11 и $\underbrace{111\ldots11}_{n \text{ единиц}}$ взаимно просты, следовательно, число $\underbrace{10101\ldots101}_{n \text{ единиц}}$ также делится на $\underbrace{111\ldots11}_{n \text{ единиц}}$, то есть оно составное.

*Способ II*. Запишем число $\underbrace{10101\ldots101}_{n \text{ единиц}}$ в виде суммы геометрической прогрессии:

$$\underbrace{10101\ldots101}_{n \text{ единиц}}=1+100+10\,000+\ldots+10^{2n-2}=$$

$$=\frac{10^{2n}-1}{99}=\frac{(10^n-1)(10^n+1)}{99}.$$

При $n>2$ оба множителя в числителе больше 99. Значит, после сокращения исходное число будет представлено в виде произведения двух множителей, отличных от 1, то есть число $\underbrace{10101\ldots101}_{n \text{ единиц}}$ — составное.

*Комментарий.* Завершить это рассуждение можно и по-другому. Полученное дробное выражение является натуральным составным числом, так как при четных $n$ первый множитель делится на 99, а при нечетных $n$ первый множитель делится на 9, а второй — на 11 (по признаку делимости на 11).

**5.1.** $\{2\pi n \mid n\in \mathbf{Z}\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k \mid k\in \mathbf{Z}\right\}.$

Заметим, что [sin $x$] и [cos $x$] могут принимать только три значения: 0; 1 или –1. При этом arcsin 0 = 0 = arccos 1, $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}=\arccos 0$, $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$, а это число не входит в область значений арккосинуса. Таким образом, исходное равенство выполняется, если

$$\begin{cases}\sin x=0,\\ \cos x=1\end{cases} \text{или} \begin{cases}\sin x=1,\\ \cos x=0.\end{cases}$$

Решением первой системы является $x = 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$, а решением второй системы является $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$.

*Комментарий.* Можно также построить в одной системе координат графики функций, стоящих в левой и правой частях равенства на каком-нибудь промежутке длиной $2\pi$, так как это число является общим периодом этих функций.

**5.2.** $R \sin \alpha$.

Пусть точка $P$ располагается, например, на меньшей дуге $BC$ данной окружности (рис. 8). Так как $\angle PMO = \angle PNO = 90°$, то около четырехугольника $MPNO$ можно описать окружность с диаметром $PO$. Треугольник $MON$ вписан в эту окружность, поэтому $\frac{MN}{\sin\angle BOC}=PO$ (по следствию из теоремы синусов). По условию,

$$\angle BOC = \alpha \text{ или } \angle BOC = 180° - \alpha,$$

что в данном случае не существенно, так как

$$\sin (180° - \alpha) = \sin \alpha.$$

Таким образом, $MN = PO \cdot \sin \alpha = R \sin \alpha$.

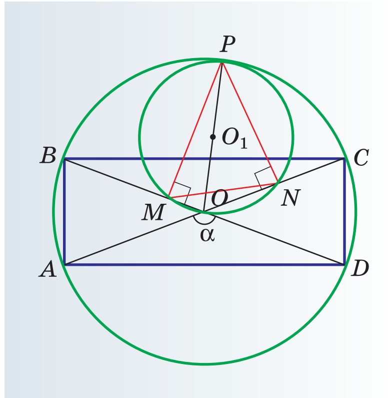



Рис. 8

**5.3.** 200 рублей.

Пусть мальчики заплатили $x$, $y$ и $z$ рублей. Без ограничения общности можно считать, что $x$ — наибольшее из этих чисел, то есть $x \ge y$ и $x \ge z$. По условию, $x\le\frac{y+z}{2}$, поэтому

$$z \le x \le y \text{ или } y \le x \le z.$$

Следовательно, $x = y = z$. Таким образом, все мальчики заплатили поровну, а именно, по 200 рублей.

## ФОТО НА КОНКУРС

### Математические объекты из ниток, ткани, бумаги

Ежегодно в школе мы проводим неделю математики для учащихся 5–11 классов. В этом году неделя проходила под названием «Геометрия вокруг нас», и завершилась она выставкой творческих работ. Некоторые из этих работ можно видеть на фотографии.


*Авторы: О.А. Дерябина, Л.Н. Радзюкевич, О.Г. Шалимова, учителя математики средней школы № 137, г. Самара*

# ПОДПИСКА–2012

журнал

# Математика – Первое сентября

## ТАРИФНЫЕ ПЛАНЫ НА ПОДПИСКУ
1-е полугодие 2012 г.

**Максимальный** – от 999 руб.

*бумажная версия + CD + доступ к электронной версии на сайте*

Подписаться можно на почте по каталогам «Роспечать» (индекс 32030), «Почта России» (индекс 79073) или на сайте www.1september.ru

**Оптимальный** – 594 руб.

*электронная версия на CD + доступ к электронной версии на сайте*

Подписаться можно на почте по каталогам «Роспечать» (индекс 26113), «Почта России» (индекс 12717) или на сайте www.1september.ru

**Экономичный** – 200 руб. **АКЦИЯ–2012** *

*доступ к электронной версии на сайте*

Подписаться по данному тарифному плану можно только на сайте www.1september.ru

**Бесплатный** – 0 руб. **ШКОЛА ЦИФРОВОГО ВЕКА** **

для педагогических работников образовательных учреждений, участвующих в Общероссийском проекте «Школа цифрового века». Подробности – на digital.1september.ru


| Бумажная версия | CD с электронной версией журнала и дополнительными материалами для практической работы | Доступ к электронной версии журнала на сайте. Дополнительные материалы включены | Именные сертификаты – пользователям электронной версии на сайте www.1september.ru |
|---|---|---|---|

**ЭКОНОМИЧНЫЙ** тарифный план

**ОПТИМАЛЬНЫЙ** тарифный план

**МАКСИМАЛЬНЫЙ** тарифный план

На сайте www.1september.ru подписку можно оплатить по кредитным картам VISA MasterCard

* **АКЦИЯ–2012**: подробности на с. 63 этого номера.

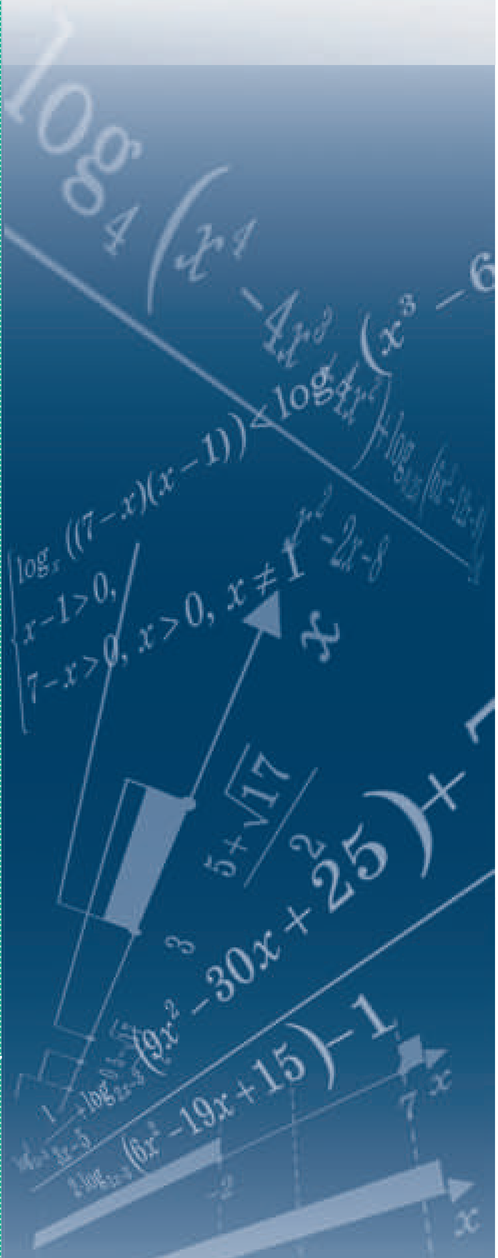
** **ШКОЛА ЦИФРОВОГО ВЕКА**: подробности на с. 34 этого номера.

А. КОРЯНОВ,
А. ПРОКОФЬЕВ,
г. Брянск, г. Москва

Лекция 3

# ГОТОВИМ К ЕГЭ ХОРОШИСТОВ И ОТЛИЧНИКОВ

## РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ



Задание С3 контрольно-измерительных материалов — это задание повышенного уровня сложности, представляющее неравенство, содержащее рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические или модульные выражения. При решении этих неравенств учащиеся должны показать знания теорем о равносильности неравенств определенного вида, умения использовать стандартные и нестандартные методы решения.

Максимальное число баллов за решение этого типа заданий на экзамене в 2010 г. получили лишь 1,5% приступивших к его решению. Наряду с представленным разнообразием методов решения неравенств имело место и многообразие ошибок, допущенных учащимися.

При подготовке по данной теме особое внимание следует уделить применению метода интервалов и использованию свойств функций.

Мы сделали подборку заданий исходя из материалов ЕГЭ последних двух лет и доступных нам пробных и тренировочных вариантов.

Для удобства материал лекций разбит на разделы, что позволит учителю сформировать у учащихся целостное представление о методах решения неравенств и дать им возможность переосмыслить их с единой точки зрения.

Напомним, что полное правильное решение задания С3 с развернутым ответом оценивается 3 баллами. При решении задачи допустимы любые математические методы — алгебраические, функциональные, графические, геометрические и т.д.

При алгебраическом подходе выполняют равносильные преобразования неравенств, в частности, тождественные преобразования отдельных выражений, входящих в неравенство.

При функциональном подходе используют свойства функций (монотонность, ограниченность и т.д.). В некоторых случаях алгебраический и функциональный подходы взаимно заменяемы. Например, утверждение

> Если обе части неравенства $g(x) > h(x)$ возвести в одну и ту же нечетную степень, то получим неравенство $g^{2n+1}(x) > h^{2n+1}(x)$, равносильное данному

можно заменить другим утверждением:

> По свойству строго возрастающей функции $y = t^{2n+1}$, $n \in \boldsymbol{N}$, на $\boldsymbol{R}$ неравенства $g(x) > h(x)$ и $g^{2n+1}(x) > h^{2n+1}(x)$ равносильны.

При решении неравенств используют преобразования (возведение в четную или нечетную степень, логарифмирование, потенцирование), позволяющие привести неравенство к более простому виду. В процессе преобразований исходного неравенства, множество решений которого либо такое же, либо шире (можно получить посторонние решения), либо уже (можно потерять решения). Поэтому важно знать, какие преобразования неравенства являются равносильными, какие преобразования выражений являются тождественными и при каких условиях.

## Сведение неравенства к равносильной системе или совокупности систем

Как правило, равносильные преобразования выполняются для упрощения исходного неравенства и, в частности, для освобождения неравенства от знаков корня, модуля, логарифма и от степеней.

Ниже будут приведены схемы решения некоторых стандартных неравенств определенного вида. При этом отметим, что на практике некоторые цепочки преобразований делают короче, пропуская очевидные преобразования. Например, вместо длинной цепочки преобразований:

$$\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)},\ n \in N \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt[2n]{f(x)}\right)^{2n} > \left(\sqrt[2n]{g(x)}\right)^{2n}, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases}$$

можно использовать краткую схему решения:

$$\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)},\ n \in N \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases}$$

## Расщепление неравенств

Одним из стандартных видов преобразования неравенства является приведение его к неравенству, в котором левая часть представляет собой произведение (частное) двух выражений, а правая — равна нулю. После такого преобразования применяют правило расщепления неравенств, опирающееся на правило знаков при умножении (делении) положительных или отрицательных чисел.

При применении правила расщепления необходимо выписать совокупность систем неравенств в соответствии с логическим перебором случаев, а затем решить каждую из этих систем и объединить в ответе полученные множества решений:

- $f(x) \cdot g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) \leq 0; \end{cases} \end{array}\right.$

- $f(x) \cdot g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \end{array}\right.$

- $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right.$

- $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Аналогичные схемы расщепления записывают для строгих неравенств.

Покажем применение правила расщепления при решении неравенств, содержащих рациональные выражения.

## Неравенства, содержащие рациональные выражения

**Пример 1.** Решить неравенство

$$\frac{x+5}{x-3} \leq 0.$$

*Решение*. Частное двух выражений отрицательно тогда и только тогда, когда выражения, стоящие в числителе и знаменателе, имеют разные знаки. Отсюда получаем совокупность двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+5 \geq 0, \\ x-3 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+5 \leq 0, \\ x-3 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -5, \\ x < 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq -5, \\ x > 3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решения первой системы неравенств образуют промежуток $[-5; 3)$, а вторая система не имеет решений. Объединяя полученные множества решений, получаем промежуток $[-5; 3)$.

*Ответ*: $[-5; 3)$.

## Метод интервалов

В процессе решения может оказаться, что в левой части неравенства количество сомножителей довольно велико, а значит, непосредственное применение правил расщепления приводит к трудоемкому решению. В этом случае оказывается эффективным применение *метода интервалов*.

В основе метода интервалов лежат следующие положения:

1. Знак произведения (частного) однозначно определяется знаками сомножителей (делимого и делителя).

2. Знак произведения не изменится (изменится на противоположный), если изменить знак у четного (нечетного) числа сомножителей.

3. Знак многочлена справа от большего (или единственного) корня совпадает со знаком его старшего коэффициента. В случае отсутствия корней знак многочлена совпадает со знаком его старшего коэффициента на всей области определения.

Сформулируем свойство чередования знака линейного двучлена $ax + b$ $(a \neq 0)$:

> При переходе через значение $x_0 = -\dfrac{b}{a}$ знак выражения $ax + b$ меняется на противоположный.

Знание свойства чередования знака линейного двучлена $ax + b$ позволяет не приводить линейные двучлены к каноническому виду $x - x_0$.

Свойство двучлена $ax + b$ лежит в основе метода интервалов и часто используется при решении алгебраических неравенств более высоких степеней.

Рассмотрим выражение

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x), \qquad (*)$$

где $f_i(x) = a_ix + b_i$, причем все выражения попарно различны. Выражению $(*)$ соответствует разбиение числовой прямой на интервалы точками $x_i = -\dfrac{b_i}{a_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Метод интервалов опирается на следующее свойство чередования знака выражения $(*)$:

> При переходе через точку $x_i = -\dfrac{b_i}{a_i}$ из одного интервала в смежный с ним интервал знак значения выражения $(*)$ меняется на противоположный.

Действительно, при переходе через точку $x = -\dfrac{b_i}{a_i}$ в выражении $(*)$ меняет знак только один множитель: $a_ix + b_i$.

Аналогично можно провести рассуждения для выражения $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — выражения вида $(*)$.

**Пример 2.** Решить неравенство

$$\left(2x^2 - 5x + 3\right)\left(\sqrt[3]{3} - x\right) < 0.$$

*Решение*. Перепишем неравенство в следующем виде:

$$(2x - 3)(x - 1)\left(\sqrt[3]{3} - x\right) < 0,$$

и далее используем метод интервалов.

1. Обозначим $f(x) = (2x - 3)(x - 1)\left(\sqrt[3]{3} - x\right)$.
2. $D(f) = \boldsymbol{R}$.
3. $f(x) = 0$, $(2x - 3)(x - 1)\left(\sqrt[3]{3} - x\right) = 0$. Отсюда получаем корни уравнения: $1$; $1{,}5$; $\sqrt[3]{3}$. Так как $1 < 3 < 1{,}5^3 = 3{,}375$, то $1 < \sqrt[3]{3} < 1{,}5$.
4. Так как $f(0) > 0$, то расставляем знаки в соответствии с правилом знакочередования, как показано на рисунке 1.

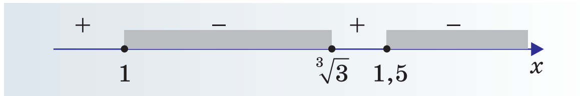



Рис. 1

Получаем все значения $x \in \left(1; \sqrt[3]{3}\right) \cup (1{,}5; +\infty)$, при которых $f(x) < 0$.

*Ответ*: $\left(1; \sqrt[3]{3}\right) \cup (1{,}5; +\infty)$.

Заметим, что при решении неравенств $f(x) \vee 0$ или $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \vee 0$ методом интервалов, где символ «$\vee$» заменяет один из знаков неравенств: «>», «<», «≥», «≤», можно обойтись без промежуточных вычислений, если выражение $f(x)$ или $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ содержит все линейные двучлены с положительными старшими коэффициентами или записано в каноническом виде:

$$(x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)$$

или

$$\frac{(x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)}{(x - b_1) \cdot (x - b_2) \cdot \ldots \cdot (x - b_m)}.$$

В этом случае на самом правом промежутке двучлены положительны, а значит, выражение $f(x)$ или $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ положительно. Далее на промежутках расставляют знаки в соответствии с правилом знакочередования.

**Пример 3.** Решить неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3} > -3.$$

*Решение*. Приведем неравенство к виду

$$\frac{(x - 1{,}5)(x - 2)}{(x - 1)(x - 3)} > 0$$

и используем метод интервалов.

1. Пусть $f(x) = \dfrac{(x - 1{,}5)(x - 2)}{(x - 1)(x - 3)}$.
2. $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$.
3. Из уравнения $f(x) = 0$, или $(x - 1{,}5)(x - 2) = 0$, найдем корни: 1,5 и 2, которые принадлежат $D(f)$.
4. Так как в записи выражения $f(x)$ все двучлены записаны в каноническом виде, то на промежутке $(3; +\infty)$ выражение $f(x)$ положительно. На

остальных промежутках расставляем знаки по правилу знакочередования (рис. 2).

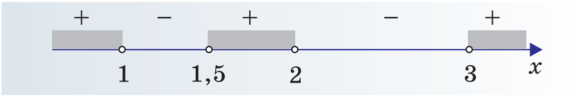



Рис. 2

Следовательно, $f(x) > 0$ при всех значениях $x \in (-\infty; 1) \cup (1{,}5; 2) \cup (3; +\infty)$.

*Ответ*: $(-\infty; 1) \cup (1{,}5; 2) \cup (3; +\infty)$.

## Первое обобщение метода интервалов

Пусть дано выражение вида

$$f(x) = f_1^{k_1}(x) \cdot f_2^{k_2}(x) \cdot \ldots \cdot f_n^{k_n}(x), \qquad (**)$$

где $f_i(x) = a_i x + b_i$, причем все выражения $a_i x + b_i$ попарно различны, а $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — фиксированные натуральные числа.

Для решения неравенства $f(x) \vee 0$, где выражение $f(x)$ имеет вид (**), используется *обобщенный метод интервалов*, который опирается на следующее правило чередования знака выражения:

> При переходе через точку $x_i = -\dfrac{b_i}{a_i}$ из одного интервала в смежный знак значения выражения (**) меняется на противоположный, если $k_i$ — нечетное число, и не меняется, если $k_i$ — четное число.

**Пример 4.** Решить неравенство

$$(x-3)^2\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x-2\frac{16}{25}\right) \le 0.$$

*Решение*. 1. Рассмотрим выражение

$$f(x) = (x-3)^2\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x-2\frac{16}{25}\right).$$

2. $D(f) = \boldsymbol{R}$.

3. Решим уравнение $f(x) = 0$, или

$$(x-3)^2\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x-2\frac{16}{25}\right) = 0.$$

Отсюда $x = 3$, или $x = \sqrt{7}$, или $x = 2{,}64$.

Сравним полученные числа. Так как $7 < 9$, то $\sqrt{7} < \sqrt{9}$ и $\sqrt{7} < 3$.

Аналогично из неравенства $7 > 2{,}64^2 = 6{,}9696$ получаем: $\sqrt{7} > \sqrt{2{,}64^2}$ и $\sqrt{7} > 2{,}64$.

4. Так как в записи выражения $f(x)$ все двучлены записаны в каноническом виде, то на промежутке $(3; +\infty)$ выражение положительно. Далее расставляем знаки, учитывая кратность корней, как показано на рисунке 3.

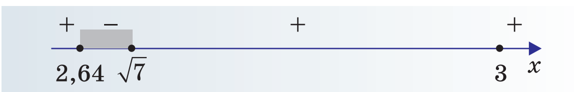



Рис. 3

Отсюда $f(x) \le 0$ при всех значениях

$$x \in \left[2{,}64;\ \sqrt{7}\right] \cup \{3\}.$$

*Ответ*: $\left[2{,}64;\ \sqrt{7}\right] \cup \{3\}$.

***Методические рекомендации.*** Опишем один из способов составления большого количества различных неравенств с заданными ответами.

Используя метод неопределенных коэффициентов, дробь вида

$$\frac{(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot \ldots \cdot(x-a_n)}{(x-b_1)\cdot(x-b_2)\cdot \ldots \cdot(x-b_m)},$$

где $n < m$, можно разложить на сумму дробей

$$\frac{A_1}{x-b_1} + \frac{A_2}{x-b_2} + \ldots + \frac{A_m}{x-b_m}.$$

Например, представим выражение

$$\frac{(x-a)(x-3)}{(x-2)(x-1)(x+2)}$$

в виде суммы дробей $\dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+2}$.

Для этого сложим дроби и приравняем числители. Получим равенство двух многочленов второй степени, верное при всех $x$, не равных $-2$; 1; 2:

$$(x-a)(x-3) =$$
$$= A(x-1)(x+2) + B(x-2)(x+2) + C(x-2)(x-1).$$

Далее подставим последовательно в это равенство $x = 1$, $x = 2$ и $x = -2$. В итоге получим три соотношения:

$$\begin{cases} 2(a-1) = -3B, \\ a-2 = 4A, \\ 5(a+2) = 12C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \dfrac{2(1-a)}{3}, \\ A = \dfrac{a-2}{4}, \\ C = \dfrac{5(a+2)}{12}. \end{cases}$$

Теперь, придавая $a$ разные значения, будем получать значения $A$, $B$, $C$. Например, при $a = 3$ получаем: $A = \dfrac{1}{4}$, $B = -\dfrac{4}{3}$, $C = \dfrac{25}{12}$, то есть

$$\frac{(x-3)(x-3)}{(x-2)(x-1)(x+2)} = \frac{1}{4(x-2)} - \frac{4}{3(x-1)} + \frac{25}{12(x+2)},$$

или

$$\frac{12(x-3)(x-3)}{(x-2)(x-1)(x+2)} = \frac{3}{x-2} - \frac{16}{x-1} + \frac{25}{x+2}.$$

Таким образом, учитель, имея неравенство $\dfrac{(x-3)(x-3)}{(x-2)(x-1)(x+2)} \ge 0$ с готовым ответом, предлагает ученику решить неравенство $\dfrac{3}{x-2} - \dfrac{16}{x-1} + \dfrac{25}{x+2} \ge 0$.

Значения коэффициентов $A$, $B$, $C$ зависят от значения параметра $a$, поэтому, меняя значения для $a$, получаем разные рациональные неравенства с известным ответом.

### Тренировочные упражнения

Решите неравенство (**1–5**).

**1.** $\dfrac{x^2-8x+15}{x-5} \ge 0.$

**2.** $(x-4)^2\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x-2\dfrac{6}{25}\right) \le 0.$

3. $\dfrac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 1.$

4. $\dfrac{x^2-6x+8}{x-1} + \dfrac{x-4}{x^2-3x+2} \le 0.$

5. $\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2+5x+3} < \dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+7x+4}.$

## Неравенства, содержащие иррациональные выражения

Решение иррациональных неравенств основано на свойствах числовых неравенств:

> Если обе части неравенства — положительные числа, то при их возведении в положительную четную степень знак неравенства сохраняется:
> $$0 < a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n},\ n \in N.$$
> Если обе части неравенства возвести в положительную нечетную степень, то знак неравенства сохраняется:
> $$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1},\ n \in N.$$

**Пример 5.** Решить неравенство

$$\sqrt{x+18} < 2 - x.$$

*Решение.* Если $2 - x < 0$ или $2 - x = 0$, то исходное неравенство не выполняется, так как $\sqrt{x+18} \ge 0$.

Пусть $2 - x > 0$, тогда при возведении обеих частей неравенства в квадрат получим на его области определения равносильную систему неравенств:

$$\begin{cases} x+18 < (2-x)^2, \\ x+18 \ge 0, \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)(x+2) > 0, \\ x \ge -18, \\ x < 2. \end{cases}$$

На рисунке 4 представлен графический способ получения решения последней системы неравенств.

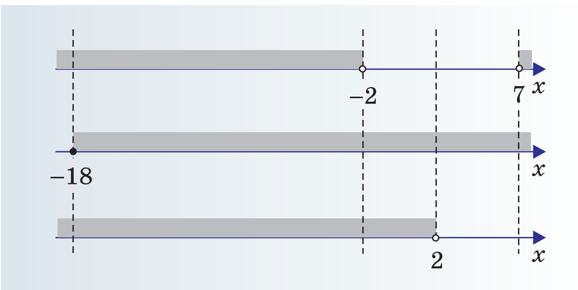



Рис. 4

На рисунке 5 представлен другой способ графического решения последней системы неравенств с использованием одной числовой прямой $Ox$.

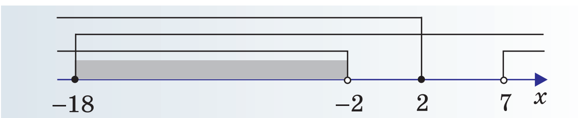



Рис. 5

В итоге получаем: $-18 \le x < -2$ — решение системы.

*Ответ*: $-18 \le x < -2$.

Рассуждения, рассмотренные при решении данного неравенства, позволяют в дальнейшем использовать алгоритм решения неравенств подобного вида:

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x),\ n \in N \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^{2n}(x), \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Аналогично можно получить алгоритмы решения иррациональных неравенств следующих видов: $\sqrt[2n]{f(x)} \vee g(x)$, $\sqrt[2n]{f(x)} \vee \sqrt[2n]{g(x)}$, $\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee \sqrt[2n+1]{g(x)}$, $\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee g(x)$.

**Пример 6.** (*МИЭТ, 1999.*) Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+10x+9} \ge x^2 - 2x - 3.$$

*Решение.* 1. Если $x^2 - 2x - 3 \ge 0$, то обе части неравенства неотрицательны. После возведения в квадрат обеих частей неравенства получим неравенство, равносильное исходному, то есть получим систему неравенств, равносильную данному неравенству:

$$\begin{cases} x^2+10x+9 \ge \left(x^2-2x-3\right)^2, \\ x^2-2x-3 \ge 0. \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Для второго неравенства системы (I) имеем: $x^2 - 2x - 3 \ge 0$ при $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Первое неравенство системы (I) приводим к виду:

$$(x + 1)(x + 9) \ge (x + 1)^2(x - 3)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x + 1)((x + 1)(x - 3)^2 - (x + 9)) \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x + 1)x(x^2 - 5x + 2) \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+1)x\left(x-\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right) \le 0.$$

Заметим, что

$$0 < \frac{5-\sqrt{17}}{2} < \frac{5+\sqrt{17}}{2}.$$

Отметим на числовой прямой (рис. 6) множество решений первого неравенства системы (I).

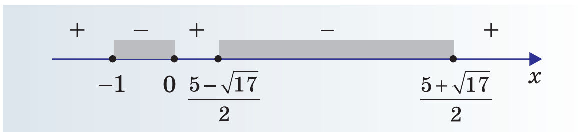



Рис. 6

Тогда решениями системы (I) являются (рис. 7) все значения

$$x \in \{-1\} \cup \left[3; \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right].$$

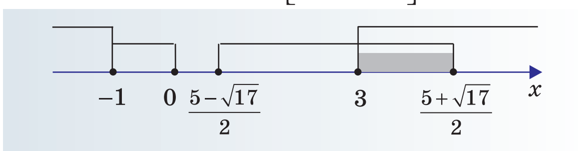



Рис. 7

2. Пусть $x^2 - 2x - 3 < 0$. Так как $\sqrt{x^2+10x+9} \ge 0$, то исходное неравенство выполняется на области его определения, то есть получаем систему неравенств

$$\begin{cases} x^2+10x+9 \ge 0, \\ x^2-2x-3<0. \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Для системы (II) имеем:

$x^2 + 10x + 9 \ge 0$ при $x \in (-\infty; -9] \cup [-1; +\infty)$;

$x^2 - 2x - 3 < 0$ при $x \in (-1; 3)$.

Следовательно, решением системы (II) будет $x \in (-1; 3)$.

Объединяя множество решений систем (I) и (II), получаем ответ.

*Ответ*: $\left[-1; \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right]$.

**Пример 7.** (*МИОО, 2009.*) Решить неравенство

$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3-6x^2+14x-7}}{\sqrt{x-1}}.$$

*Решение*. Выполняя равносильные переходы, получим:

$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3-6x^2+14x-7}}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7-x}\cdot\sqrt{x-1} < \sqrt{x^3-6x^2+14x-7}, \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (7-x)(x-1) < x^3-6x^2+14x-7, \\ 7-x \ge 0, \\ x-1 \ge 0, \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-5x^2+6x>0, \\ 1<x\le 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)(x-3)>0, \\ 1<x\le 7. \end{cases}$$

С помощью числовой прямой (рис. 8) найдем множество решений последней системы неравенств.

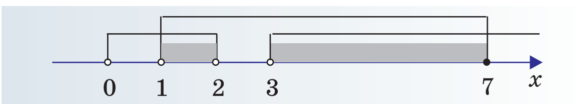



Рис. 8

*Ответ*: $1 < x < 2$, $3 < x \le 7$.

В следующем примере используем метод расщепления неравенства.

**Пример 8.** Решите неравенство

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \ge 0.$$

*Решение*. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x-1 \ge 0, \\ \sqrt{x^2-x-2} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, \\ (x-2)(x+1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2$$

и

$$\begin{cases} x-1 \le 0, \\ \sqrt{x^2-x-2} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1, \\ (x-2)(x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

В итоге получаем ответ.

*Ответ*: $\{-1\} \cup [2; +\infty)$.

### Тренировочные упражнения

**6.** Напишите краткую схему решения неравенств при $n \in \boldsymbol{N}$:

а) $\sqrt[2n]{f(x)} \ge g(x)$; б) $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)}$;

в) $\sqrt[2n+1]{f(x)} \le \sqrt[2n+1]{g(x)}$; г) $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x)$.

Решите неравенство (**7–10**).

**7.** $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$.

**8.** $4x-6 > \sqrt{6x-2x^2}$.

**9.** $\dfrac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{2x^2+6x} \le 0$.

**10.** $\sqrt{5-x} < \dfrac{\sqrt{x^3-7x^2+14x-5}}{\sqrt{x-1}}$.

## Неравенства, содержащие показательные выражения

Рассмотрим некоторые стандартные схемы решения показательных неравенств, в которых используют логарифмирование обеих частей неравенства, основанное на следующем свойстве:

> При логарифмировании неравенства, левая и правая части которого положительны, по основанию, большему единицы, получаем неравенство того же смысла, что и данное, а при логарифмировании его по положительному основанию, меньшему единицы, — неравенство противоположного смысла.

**Пример 9.** Решить неравенство

$$(x^2 + x + 1)^x < 1.$$

*Решение*. Выражение $(x^2 + x + 1)^x$ положительно, так как $x^2 + x + 1 > 0$ при всех значениях $x \in \boldsymbol{R}$. Прологарифмируем обе части данного неравенства:

$$\lg (x^2 + x + 1)^x < \lg 1 \Leftrightarrow x \lg (x^2 + x + 1) < 0.$$

Полученное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x>0, \\ \lg\left(x^2+x+1\right)<0 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

и

$$\begin{cases} x<0, \\ \lg\left(x^2+x+1\right)>0. \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Решим систему (I):

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ 0<x^2+x+1<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x^2+x+1>0, \\ x(x+1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x+1<0 \end{cases} \text{— нет решений.}$$

Решим систему (II):

$$\text{(II)} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0, \\ x^2+x+1>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0, \\ x(x+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0, \\ x+1<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x<-1.$

*Ответ*: $x < -1$.

Результатом решения данного неравенства является алгоритм решения неравенства вида

$$(\varphi(x))^{f(x)} > (\varphi(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>g(x), \\ \varphi(x)>1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)>f(x), \\ 0<\varphi(x)<1. \end{cases} \end{array}\right.$$

В частности:

Если число $a > 1$, то

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x).$$

Если число $0 < a < 1$, то

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x).$$

**Пример 10.** Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)} > 1.$$

*Решение*. Область допустимых значений переменной $x$ определяется условием:

$$x^2-1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1. \end{array}\right.$$

При этих значениях переменной преобразуем левую часть данного неравенства:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)} = \left(2^{-1}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)} = \left(2^{\log_2\left(x^2-1\right)}\right)^{-1} = \left(x^2-1\right)^{-1} = \frac{1}{x^2-1}.$$

Получаем неравенство:

$$\frac{1}{x^2-1}>1 \Leftrightarrow \frac{x^2-2}{x^2-1}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}{(x-1)(x+1)}<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2}<x<-1 \\ 1<x<\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

*Ответ*: $\left(-\sqrt{2};\ -1\right) \cup \left(1;\ \sqrt{2}\right)$.

### Тренировочные упражнения

**11.** Напишите краткую схему решения неравенств:

а) $(\varphi(x))^{f(x)} \geq (\varphi(x))^{g(x)}$; б) $(f(x))^{\varphi(x)} > (g(x))^{\varphi(x)}$.

Решите неравенство (**12–14**).

**12.** $2^{x^2+3x-3} - 2^{x^2+3x-5} - 96 \geq 0$.

**13.** $(2^x - 4)(x^2 - 2x - 3) > 0$.

**14.** $\left(\dfrac{4x^2}{x^4+1}\right)^{3x^2-x} > \left(\dfrac{x^4+1}{4x^2}\right)^{x-2}$.

## Неравенства, содержащие логарифмические выражения

Приведем некоторые стандартные схемы решения логарифмических неравенств, в которых используют потенцирование обеих частей неравенства, основанное на следующем свойстве:

Если $b > c$ и $a > 1$, то $a^b > a^c$.
Если $b > c$, но $0 < a < 1$, то $a^b < a^c$.

**Пример 11.** Решить неравенство

$$\log_{0,1}(x^2 + x - 2) > \log_{0,1}(x + 3).$$

*Решение*. Так как для оснований логарифмов, стоящих в обеих частях неравенства, выполняется условие $0 < 0{,}1 < 1$, то получаем неравенство

$$(0{,}1)^{\log_{0,1}\left(x^2+x-2\right)} < (0{,}1)^{\log_{0,1}(x+3)},$$

равносильное системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2+x-2<x+3, \\ x^2+x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)<0, \\ (x-1)(x+2)>0. \end{cases}$$

Отметим на числовой прямой множество решений последней системы неравенств (рис. 9).


Рис. 9

*Ответ*: $\left(-\sqrt{5};\ -2\right) \cup \left(1;\ \sqrt{5}\right)$.

Отсюда получаем одну из схем решения логарифмического неравенства вида

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x).$$

Если $0 < a < 1$, то

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow g(x) \geq f(x) > 0.$$

Если $a > 1$, то

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) > 0.$$

**Пример 12.** (*МИОО, 2009.*) Решить неравенство

$$\log_x (7 - x) < \log_x (x^3 - 6x^2 + 14x - 7) - \log_x (x - 1).$$

*Решение.* Выполняя равносильные переходы, получим, что данное неравенство равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} \log_x\left((7-x)(x-1)\right)<\log_x\left(x^3-6x^2+14x-7\right), \\ x-1>0, \\ 7-x>0,\ x>0,\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (7-x)(x-1)<x^3-6x^2+14x-7, \\ 1<x<7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-5x^2+6x>0, \\ 1<x<7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)(x-3)>0, \\ 1<x<7. \end{cases}$$

На рисунке 10 представлена графическая интерпретация получения решения последней системы неравенств.

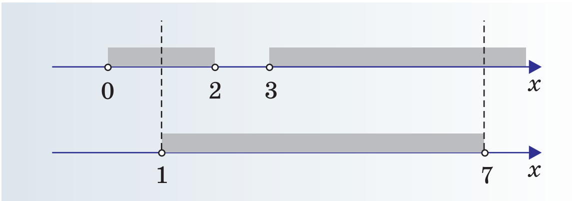



Рис. 10

*Ответ*: (1; 2) ∪ (3; 7).

**Пример 13.** (*ЕГЭ-2010*) Решить неравенство
$$\frac{2\log_{2^{x-1}}|x|}{\log_{2^{x-1}}(x+7)} \le \frac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)}.$$

*Решение.* В соответствии с определением логарифма входящие в неравенство выражения имеют смысл при выполнении условий:
$$\begin{cases} |x| \ne 0, \\ 2^{x-1} \ne 1, \\ x+7>0, \\ x+7 \ne 1, \\ x+12>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0, \\ x-1 \ne 0, \\ x>-7, \\ x \ne -6, \\ x>-12. \end{cases}$$

Из системы получаем все допустимые значения:
$x \in (-7; -6) \cup (-6; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

При этих значениях переменной $x$ по свойствам логарифма справедливы равенства
$$\frac{\log_{2^{x-1}}|x|}{\log_{2^{x-1}}(x+7)} = \log_{x+7}|x|$$
и
$$\frac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)} = \log_{x+7}(x+12),$$
и исходное неравенство приводится к виду
$$2\log_{x+7}|x| \le \log_{x+7}(x+12) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_{x+7} x^2 \le \log_{x+7}(x+12).$$

Последнее неравенство на множестве допустимых значений равносильно совокупности двух систем:
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x+7<1, \\ x^2 \ge x+12 \end{cases} \\ \begin{cases} x+7>1, \\ x^2 \le x+12 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -7<x<-6, \\ x^2-x-12 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>-6, \\ x^2-x-12 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -7<x<-6, \\ (x-4)(x+3) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>-6, \\ (x-4)(x+3) \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -7<x<-6, \\ -3 \le x \le 4. \end{array}\right.$$

С учетом области определения данного неравенства получаем ответ.

*Ответ*: (–7; – 6) ∪ [–3; 0) ∪ (0; 1) ∪ (1; 4].

## Тренировочные упражнения

**15.** Напишите краткую схему решения неравенства
$$\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x).$$

Решите неравенство (**16–20**).

**16.** $\dfrac{\lg x}{x^2-x-6} \ge 0.$

**17.** $\log_{13}(x^2+2x+4) + \log_{13}(x-2) \le \log_{13}(x^3-x^2+4x-3).$

**18.** $\dfrac{\log_{2^{x+10}} 24}{\log_{2^{x+10}}(x^2-16)} \ge \dfrac{\log_2(x^2+11x+24)}{\log_2(x^2-16)}.$

**19.** $(x+1)\log_3 6 + \log_3\left(2^x - \dfrac{1}{6}\right) \le x-1.$

**20.** $\log_{x+4}(5x+20) \le \log_{x+4}(x+4)^2.$

## Неравенства, содержащие выражения с модулями

Геометрическая интерпретация неравенств позволяет легко и красиво решать как простые, так и сложные задачи. Наиболее распространенная интерпретация неравенств связана с модулем или расстоянием на координатной прямой.

Геометрический смысл модуля:

> Модуль разности двух чисел равен расстоянию между точками координатной прямой, координаты которых соответствуют этим числам.

Например, запись $|a-b|$ означает расстояние между точками $a$ и $b$; $|a+b|$ — расстояние между точками $a$ и $-b$; $|a| = |a-0|$ — расстояние между точками $a$ и 0.

**Пример 14.** Решить неравенство
$$|x-2| > 5.$$

*Решение.* Запись $|x-2|$ есть расстояние на координатной прямой от точки $x$ до точки 2. Для решения данного неравенства необходимо на координатной оси найти такие точки, расстояние от которых до точки 2 больше 5. Справа от точки 2 расположена точка 7 на расстоянии 5 единиц, а слева — точка –3. Поэтому данному неравенству удовлетворяют все значения $x \in (-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$.

*Ответ*: $(-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$.

Из решения данного неравенства следует, что неравенству $|x-a| > b$, где $b > 0$, удовлетворяют все точки числовой прямой, расположенные от точки $a$ на расстоянии, большем $b$, то есть имеем:
$$|x-a| > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-a>b \\ x-a<-b. \end{array}\right.$$

Отметим, что указанная равносильность выполняется при любом $b$.

Обобщением этого результата является следующая схема решения неравенства с модулем:
$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>g(x) \\ f(x)<-g(x). \end{array}\right.$$

**Пример 15.** Решить неравенство
$$|x+5| + |x-3| > 8.$$

*Решение.* Так как расстояние между точками $-5$ и $3$ равно 8, то решениями уравнения

$$|x+5|+|x-3|=8$$

являются все числа из отрезка $[-5; 3]$. Для любой точки, расположенной вне отрезка $[-5; 3]$ (справа или слева), сумма расстояний от точек $-5$ и $3$ больше 8.

*Ответ*: $(-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$.

Приведем еще некоторые стандартные схемы для решения неравенств с модулями.

$$|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>-g(x); \end{cases}$$

$$|f(x)|>|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))>0.$$

**Пример 16.** Решить неравенство

$$|x^7+4x^5+x^2+2x-3|<x^7+4x^5-x^2-2x+3.$$

*Решение.* Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^7+4x^5+x^2+2x-3<x^7+4x^5-x^2-2x+3, \\ x^7+4x^5+x^2+2x-3>-\left(x^7+4x^5-x^2-2x+3\right), \end{cases}$$

или после приведения подобных членов:

$$\begin{cases} x^2+2x-3<0, \\ x^5\left(x^2+4\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<x<1, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1.$$

*Ответ*: $0<x<1$.

**Пример 17.** (*МИОО, 2011.*) Решить неравенство

$$\left((x+1)^{-1}-(x+6)^{-1}\right)^2 \le \frac{|x^2-10x|}{\left(x^2+7x+6\right)^2}.$$

*Решение.* Выполнив равносильные преобразования, получим:

$$\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+6}\right)^2 \le \frac{|x^2-10x|}{\left(x^2+7x+6\right)^2} \Leftrightarrow \frac{|x^2-10x|-25}{\left(x^2+7x+6\right)^2} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x^2-10x|-25\ge 0, \\ x^2+7x+6\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2-10x|\ge 25, \\ x\ne -1, \\ x\ne -6. \end{cases}$$

Решим неравенство полученной системы:

$$|x^2-10x|\ge 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-10x\ge 25 \\ x^2-10x\le -25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 5+5\sqrt{2} \\ x\le 5-5\sqrt{2} \\ x=5. \end{array}\right.$$

Учтем также, что $x\ne -1$ и $x\ne -6$.

*Ответ*:

$$(-\infty; -6) \cup \left(-6; 5-5\sqrt{2}\right] \cup \{5\} \cup \left[5+5\sqrt{2}; +\infty\right).$$

### Тренировочные упражнения

Решите неравенство (**21–24**).

**21.** $|x^3+2x^2+8x-7|\le x^3+4x^2-8x+7.$

**22.** $||x^2-8x+2|-x^2|\ge 2x+2.$

**23.** $2<\left|\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)-4\right|\le 3.$

**24.** $x(|x^2-1|-2|x-1|)<0.$

## Метод замены

Как при решении уравнений, так и при решении неравенств достаточно часто бывает эффективным *метод замены*. Возможны два вида замены.

1. В случае, когда неравенство имеет вид $F(f(x)) \vee 0$, где символ «$\vee$» представляет собой один из знаков неравенств «$>$», «$<$», «$\ge$», «$\le$», заменой $f(x)=t$ оно сводится к неравенству (обычно рациональному) $F(t)\vee 0$. Решением последнего неравенства относительно $t$ может оказаться один промежуток или объединение нескольких промежутков. Отметим сразу, что при введении новой переменной удобно не указывать ее область значений при решении нового неравенства с этой переменной. При выполнении обратной замены это нужно учитывать.

- Если в итоге получают $t\in(a; b)$, то далее решают систему неравенств $\begin{cases} f(x)>a, \\ f(x)<b. \end{cases}$
- Если $t\in(-\infty; a)\cup(b; +\infty)$, то решают совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x)<a \\ f(x)>b. \end{array}\right.$

2. Иногда в сложных неравенствах $F(x)\vee 0$ удается достигнуть упрощения путем замены $x=f(t)$. В этом случае получается неравенство $F(f(t))\vee 0$, которое оказывается более простым. Далее после решения последнего неравенства выполняется обратная замена.

## Введение одной новой переменной

**Пример 18.** Решить неравенство

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}>2.$$

*Решение.* Обозначим $\sqrt{x-2}=t$, где $t\ge 0$. Тогда $x=t^2+2$ и, подставляя далее в неравенство вместо переменной $x$ ее выражение через $t$, приведем данное неравенство к виду

$$\sqrt{2t^2+7}>t+2.$$

Так как $t+2>0$, то получаем равносильное неравенство $2t^2+7>t^2+4t+4$, или $t^2-4t+3>0$, при $t\ge 0$.

Отсюда получаем:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t<1 \\ t>3, \end{array}\right. \\ t\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le t<1 \\ t>3. \end{array}\right.$$

Возвращаемся к переменной $x$:

$$\left[\begin{array}{l} 0\le\sqrt{x-2}<1 \\ \sqrt{x-2}>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le x-2<1, \\ x-2>9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\le x<3 \\ x>11. \end{array}\right.$$

*Ответ*: $2\le x<3$, $x>11$.

**Пример 19.** (*МИОО, 2011.*) Решить неравенство

$$\frac{\log^2_{2x-3}\frac{1}{3x-5}+\log_{2x-3}\left(9x^2-30x+25\right)+7}{2\cdot\log_{2x-3}\left(6x^2-19x+15\right)-1}\le 3.$$

*Решение.* Так как $6x^2 - 19x + 15 = (2x - 3)(3x - 5)$ и в соответствии с определение логарифма $2x-3>0$, $3x - 5 > 0$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\log^2_{2x-3}(3x-5)+2\log_{2x-3}(3x-5)+7}{2\cdot\left(1+\log_{2x-3}(3x-5)\right)-1}\le 3.$$

Пусть $\log_{2x-3}(3x-5) = t$. Тогда получаем $\frac{t^2+2t+7}{2t+1}\le 3$, то есть $\frac{(t-2)^2}{2t+1}\le 0$. Решение последнего неравенства есть $t \in (-\infty; -0,5) \cup \{2\}$.

Выполняя обратную замену, получаем:

$$\left[\begin{array}{l}\log_{2x-3}(3x-5)=2\\ \log_{2x-3}(3x-5)<-0,5.\end{array}\right.$$

Решим уравнение совокупности:

$$\log_{2x-3}(3x-5) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x-5=(2x-3)^2,\\ 2x-3>0,\\ 2x-3\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\frac{7}{4},\end{array}\right.\\ x>1,5,\\ x\ne 2\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{7}{4}.$$

Решим неравенство совокупности:

$$\log_{2x-3}(3x-5) < -0,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{2x-3}\left((3x-5)^2(2x-3)\right)\le 0,\\ 3x-5>0.\end{cases}$$

Решая первое неравенство системы, приходится рассматривать два случая:

1) $2x - 3 > 1$, то есть $x > 2$. Тогда и $3x - 5 > 1$, и $(3x - 5)^2(2x - 3) > 1$, а следовательно,

$$\log_{2x-3}((3x - 5)^2(2x - 3)) > 0;$$

2) $0 < 2x - 3 < 1$, то есть $1,5 < x < 2$. Тогда $3x-5 \in (-0,5; 1)$, а с учетом второго неравенства системы $3x - 5 \in (0; 1)$, следовательно,

$$0 < (3x - 5)^2(2x - 3) < 1$$

и

$$\log_{2x-3}((3x - 5)^2(2x - 3)) > 0.$$

Таким образом, ни в том, ни в другом случае неравенство совокупности решений не имеет.

*Ответ*: $\frac{7}{4}$.

## Введение двух новых переменных

**Пример 20.** (*Тренировочная работа МИОО, ЕГЭ-2011.*) Решить неравенство

$$\frac{x^2-2x+1}{(x+2)^2}+\frac{x^2+2x+1}{(x-3)^2}\le\frac{\left(2x^2-x+5\right)^2}{2(x+2)^2(x-3)^2}.$$

*Решение.* Входящие в неравенство выражения имеют смысл при $x \ne -2$ и $x \ne 3$.

При всех остальных $x$ неравенство равносильно следующему:

$$2(x - 3)^2(x - 1)^2 + 2(x + 2)^2(x + 1)^2 \le (2x^2 - x + 5)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 4x + 3)^2 + 2(x^2 + 3x + 2)^2 \le (2x^2 - x + 5)^2.$$

Заметим, что

$$2x^2 - x + 5 = (x^2 - 4x + 3) + (x^2 + 3x + 2).$$

Пусть

$$x^2 - 4x + 3 = u \text{ и } x^2 + 3x + 2 = v.$$

Тогда последнее неравенство примет вид:

$$2u^2 + 2v^2 \le (u + v)^2 \Leftrightarrow 2u^2 + 2v^2 \le u^2 + 2uv + v^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^2 - 2uv + v^2 \le 0 \Leftrightarrow (u - v)^2 \le 0.$$

Отсюда следует, что $u = v$. Выполняя обратную замену, получаем

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 + 3x + 2,$$

то есть $x=\frac{1}{7}$.

*Ответ*: $\frac{1}{7}$.

### Тренировочные упражнения

Решите неравенство (**25–28**).

**25.** $\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}-2}\le 3.$

**26.** $\frac{1}{6x^2-5x}\ge\frac{1}{\sqrt{6x^2-5x+1}-1}.$

**27.** $\sqrt{17\cdot 9^x-4^x}\ge 3^x-3\cdot 2^x.$

**28.** $\frac{\log_4\left(x^4-4x^3+4x^2\right)+\log_{0,25}\left(6x^2-12x-9\right)}{x^2-2x-8}\ge 0.$

## Разбиение области определения неравенства на подмножества

Разбиение ОДЗ неизвестной неравенства на промежутки позволяет упростить решение некоторых неравенств. В этом случае неравенства рассматривают отдельно на каждом промежутке.

**Пример 21.** (*МИЭТ, 2002.*) Решить неравенство

$$\frac{1}{|x-9|}\le\frac{x-3}{4x-11}.$$

*Решение.* Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}x>9,\\ \frac{1}{x-9}\le\frac{x-3}{4x-11}\end{cases}\qquad\text{(I)}$$

и

$$\begin{cases}x<9,\\ \frac{1}{9-x}\le\frac{x-3}{4x-11}.\end{cases}\qquad\text{(II)}$$

Для системы (I) имеем:

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x>9, \\ \dfrac{x^2-16x+38}{(x-9)(4x-11)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>9, \\ \dfrac{\left(x-8+\sqrt{26}\right)\left(x-8-\sqrt{26}\right)}{(x-9)(4x-11)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 8+\sqrt{26}.$$

Для системы (II) имеем:

$$(\mathrm{II}) \Leftrightarrow \begin{cases} x<9, \\ \dfrac{(x-4)^2}{(x-9)(4x-11)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<2{,}75 \\ x=4. \end{array}\right.$$

Объединяя решения (I) и (II), получаем ответ.

*Ответ*: $x < 2{,}75$, $x = 4$, $x \geq 8+\sqrt{26}$.

**Пример 22.** Решить неравенство

$$|x-1|+|x-2| > 3+x.$$

*Решение*. Выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в ноль при $x = 1$ (первое) и при $x = 2$ (второе).

Эти числа разбивают числовую прямую на три промежутка: $(-\infty;\ 1)$, $[1;\ 2)$ и $[2;\ +\infty)$. Освобождаясь от знаков модулей, с учетом знаков выражений, стоящих под ними, решим данное неравенство на каждом из этих промежутков (рис. 11).

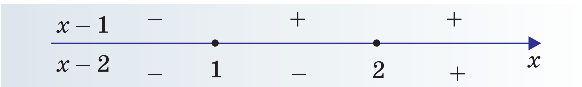



Рис. 11

Если $x < 1$, то исходное неравенство равносильно неравенству:

$$-x+1-x+2 > 3+x \Leftrightarrow x<0.$$

Получаем, что $x < 0$ есть решение исходного неравенства на рассматриваемом промежутке.

Если $1 \leq x < 2$, то исходное неравенство равносильно неравенству:

$$x-1-x+2 > 3+x \Leftrightarrow x<-2.$$

Следовательно, на этом промежутке решений нет.

Если $x \geq 2$, то исходное неравенство равносильно неравенству:

$$x-1+x-2 > 3+x \Leftrightarrow x>6.$$

Получаем, что $x > 6$ есть решение исходного неравенства на рассматриваемом промежутке. Объединяя полученные решения, запишем ответ.

*Ответ*: $x < 0$, $x > 6$.

**Пример 23.** Решить неравенство

$$\log_2\left(x^2-4\right)-3\log_2\frac{x+2}{x-2} > 2.$$

*Решение*. Область определения данного неравенства определяется условием:

$$(x-2)(x+2) > 0.$$

Отсюда получаем два промежутка: $(-\infty;\ -2)$ и $(2;\ +\infty)$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x > 2$. Тогда неравенство примет следующий вид:

$$\log_2(x-2)+\log_2(x+2)-3\log_2(x+2)+3\log_2(x-2) > 2,$$

или

$$2\log_2(x-2)-\log_2(x+2) > 1.$$

Отсюда

$$(x-2)^2 > 2(x+2),\ \text{или}\ x(x-6) > 0.$$

С учетом условия $x > 2$ получаем $x > 6$.

2. Пусть $x < -2$. В этом случае неравенство примет следующий вид:

$$\log_2(2-x)+\log_2(-x-2)-3\log_2(-x-2)+3\log_2(2-x) > 2,$$

или

$$2\log_2(2-x)-\log_2(-x-2) > 1.$$

Отсюда

$$(2-x)^2 > 2(-x-2),\ \text{или}\ x^2-2x+8 > 0.$$

Так как уравнение $x^2 - 2x + 8 = 0$ не имеет корней и старший коэффициент положителен, то последнее неравенство выполняется при всех действительных значениях $x$, то есть на всем рассматриваемом промежутке.

В этом случае все значения $x < -2$ являются решениями неравенства. Объединяя полученные решения, запишем ответ.

*Ответ*: $x < -2$ или $x > 6$.

## Тренировочные упражнения

Решите неравенство **(29–32)**.

**29.** $2x-5+2|x-3| < |x+1|$.

**30.** $\sqrt{x+1}-1 \leq x|x-2|-4x$.

**31.** $\log_{5-x}(x^2-14x+49) \leq 2\log_{5-x}(8x-x^2-7)-2$.

**32.** $1-\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+5}{x+3} \geq \log_9(x+1)^2$.

*Ответы*

**1.** $[3;5)\cup(5;+\infty)$. **2.** $\left[\sqrt{5};\ 2\dfrac{6}{25}\right]\cup\{4\}$. **3.** $(-\infty;-7)\cup(-4;-2)$. **4.** $(-\infty;\ 1)\cup(2;\ 4]$. **5.** $\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{4}{3}\right)\cup(-1;1)$.

**6.** а) $\sqrt[2n]{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq g^{2n}(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right.$

б) $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$

в) $\sqrt[2n+1]{f(x)} \leq \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$;

г) $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^{2n+1}(x)$. **7.** $(3;5]$. **8.** $(2;3]$. **9.** $-3<x<0$, $x=0{,}5$, $x=2$. **10.** $1<x<2$, $4<x\leq 5$.

**11.** а) $(\varphi(x))^{f(x)} \geq (\varphi(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ \varphi(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq f(x), \\ 0 < \varphi(x) < 1 \end{cases} \\ \varphi(x) = 1; \end{array}\right.$

б) $(f(x))^{\varphi(x)} > (g(x))^{\varphi(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x) > 0, \\ \varphi(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$

**12.** $(-\infty; -5] \cup [2; +\infty)$. **13.** $(-1; 2) \cup (3; +\infty)$.

**14.** $-\sqrt{2+\sqrt{3}} < x < -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $-\sqrt{2-\sqrt{3}} < x < 0$, $0 < x < \sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}} < x < \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

**15.** $\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right.$

**16.** $(0; 1] \cup (3; +\infty)$. **17.** $(2; 5]$.

**18.** $[-11; -10) \cup (-10; -8) \cup \left(4; \sqrt{17}\right)$. **19.** $(-\log_2 6; -\log_2 3]$. **20.** $(-4; -3) \cup [1; +\infty)$. **21.** $[-3; 1] \cup [7; +\infty)$. **22.** $(+\infty; 0] \cup [1; 2] \cup [5; +\infty)$.

**23.** $\left[-\frac{127}{384}; -\frac{21}{64}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{6}\right]$. **24.** $(-\infty; -3) \cup (0; 1)$.

**25.** $[0; 1] \cup (4; 16)$. **26.** $0 < x \leq \frac{1}{3}$ или $\frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{6}$.

**27.** $x \geq \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{17}}$. **28.** $(-\infty; -2) \cup \{-1; 3\} \cup (4; +\infty)$.

**29.** $(-\infty; -2) \cup (0; 4)$. **30.** $[0; 4]$. **31.** $[3; 4)$. **32.** $[-7; -5) \cup (-2; -1) \cup (-1; 1]$.

## Литература


**1.** *Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В.* Алгебра и начала анализа: учеб. для 11 кл. общеобразоват. учреждений. — 4-е изд. — М.: Просвещение, 2005. — 448 с.

**2.** Единый государственный экзамен 2011. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся. — М.: Интеллект-Центр, 2010.

**3.** *Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панфёров В.С., Семёнов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Ященко И.В.* ЕГЭ 2011. Математика: Сборник тренировочных работ. — М.: МЦНМО, 2010.


## ФОТО НА КОНКУРС

**Математику люблю.**
**Все задачки я решу**
**И пятерку получу!**

В этом году у меня 5-й класс. Ребята любят математику, любят рисовать газеты на математические темы, сочиняют стихи и песни и с удовольствием участвуют во внеклассной работе. Им очень понравился «Математический праздник», который мы провели на неделе естественных наук. Было сделано много фотографий. Участвовать в конкурсе фотографий предложили ребята, они выбрали фото и сочинили к нему стишок.

*Автор: З.Л. Москалева, средняя школа № 10, г. Артемовский, Свердловская обл.*

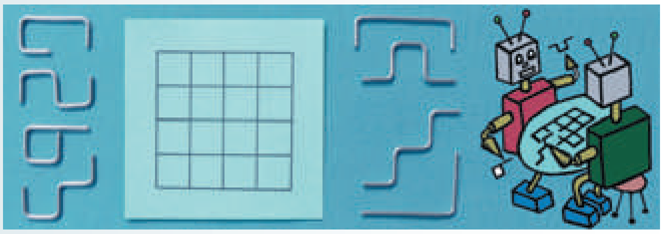
Н. АВИЛОВ,
ст. Егорлыкская, Ростовская обл.

Ведущий рубрики — Николай Иванович Авилов — на фоне своей коллекции головоломок

# КВАДРАТНАЯ СЕТКА

Из восьми кусков проволоки длины 5 единиц, изогнутых таким причудливым образом, как на рисунке, требуется сложить квадратную сетку $4 \times 4$.

Головоломка проста в изготовлении. Имея минимум слесарных навыков, с помощью плоскогубцев буквально за пять минут ее элементы можно сделать из восьми скрепок. Но решать головоломку вы будете значительно дольше, чем изготовлять ее.



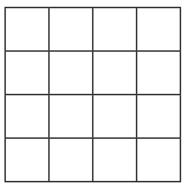
Эта головоломка участвовала в одном из конкурсов по решению занимательных математических задач и головоломок. Кроме решения головоломки, участников конкурса просили придумать подпись к рисунку. Вот некоторые из них:

1. Железная логика.
2. Робот + головоломка = роботоломка.
3. Одна голова хорошо, а две — лучше.
4. Если долго мучиться, то квадрат получится.

Отметим, что «помучиться» придется еще и потому, что головоломка имеет единственное решение, если не считать зеркальные отражения и повороты.

*Советы учителю.* Сообщите ребятам, что решение этой головоломки является одним из решений задачи «а» финала XXVII Всесоюзной олимпиады школьников, которая сформулирована следующим образом:

В квадратной сетке $4 \times 4$, изображенной на рисунке, каждая ячейка имеет размер $1 \times 1$. Можно ли эту сетку представить в виде объединения: а) восьми ломаных, каждая из которых имеет длину 5; б) пяти ломаных, каждая из которых имеет длину 8?



Такое сообщение будет сильным стимулом к поиску решения.

# АКЦИЯ–2012

Полугодовая подписка
на электронную версию журнала

## «Математика»

**200** рублей!


Интернет-холдинг «Электронные образовательные ресурсы «Первое сентября»

программа «Современные образовательные технологии в практической профессиональной деятельности»

специализация «Интернет-технологии в профессиональной деятельности педагога»

Сертификат

по ИКТ-компетентности

удостоверяет, что

активно использует интернет-технологии в профессиональной деятельности и владеет следующими компетенциями в области ИКТ:

- внедряет цифровые образовательные ресурсы в учебный процесс;
- использует в образовательном процессе дидактические материалы, созданные средствами цифровых технологий (раздаточные материалы, презентации);
- использует электронные издания, ориентированные на предметно-профессиональную деятельность;
- владеет приемами организации личного информационного пространства.

№0002377861

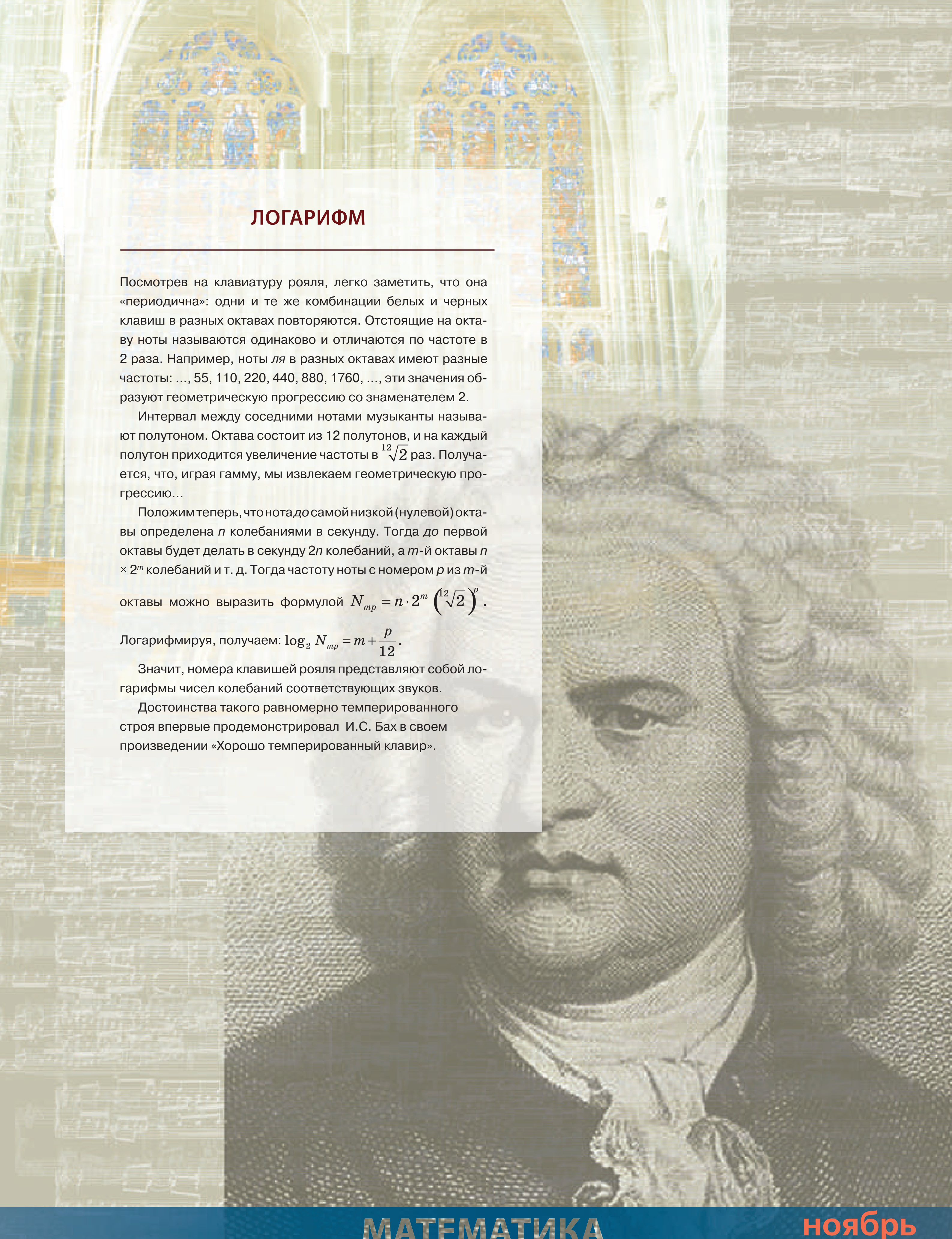
Президент Интернет-холдинга
«Электронные образовательные ресурсы «Первое сентября» С.Л. Островский

www.1september.ru

**Каждый подписчик получает по почте именной сертификат, подтверждающий профессиональную компетентность в использовании ИКТ**

**Акция–2012 проводится в рамках тарифного плана «Экономичный» .
Все тарифные планы – на с. 49 этого номера**

Подписка на сайте www.1september.ru



## ЛОГАРИФМ

Посмотрев на клавиатуру рояля, легко заметить, что она «периодична»: одни и те же комбинации белых и черных клавиш в разных октавах повторяются. Отстоящие на октаву ноты называются одинаково и отличаются по частоте в 2 раза. Например, ноты *ля* в разных октавах имеют разные частоты: ..., 55, 110, 220, 440, 880, 1760, ..., эти значения образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2.

Интервал между соседними нотами музыканты называют полутоном. Октава состоит из 12 полутонов, и на каждый полутон приходится увеличение частоты в $\sqrt[12]{2}$ раз. Получается, что, играя гамму, мы извлекаем геометрическую прогрессию...

Положим теперь, что нота *до* самой низкой (нулевой) октавы определена *n* колебаниями в секунду. Тогда *до* первой октавы будет делать в секунду $2n$ колебаний, а $m$-й октавы $n \times 2^m$ колебаний и т. д. Тогда частоту ноты с номером $p$ из $m$-й октавы можно выразить формулой $N_{mp} = n \cdot 2^m \left(\sqrt[12]{2}\right)^p$.

Логарифмируя, получаем: $\log_2 N_{mp} = m + \dfrac{p}{12}$.

Значит, номера клавишей рояля представляют собой логарифмы чисел колебаний соответствующих звуков.

Достоинства такого равномерно темперированного строя впервые продемонстрировал И.С. Бах в своем произведении «Хорошо темперированный клавир».