МАТЕМАТИКА

ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.
№15 (725)

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

mat.1september.ru

тема номера

К уроку готовится ученик

издательский дом
1september.ru

Первое сентября

октябрь 2011

МАТЕМАТИКА Подписка Роспечать: 32030 (бумажная версия), 26113 (электронная), Почта России: 79073 (бумажная версия), 12717 (электронная)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Главный редактор: Артем Соловейчик (генеральный директор)
Коммерческая деятельность: Константин Шмарковский (финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов: Сергей Островский (исполнительный директор)
Реклама и продвижение: Марк Сартан
Мультимедиа, конференции и техническое обеспечение: Павел Кузнецов
Производство: Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение: Андрей Ушаков
Главный художник: Иван Лукьянов
Педагогический университет: Валерия Арсланьян (ректор)

ГАЗЕТА ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Первое сентября – Е. Бирюкова

ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Английский язык – А. Громушкина,
Библиотека в школе – О. Громова,
Биология – Н. Иванова,
География – О. Коротова,
Дошкольное образование – М. Аромштам,
Здоровье детей – Н. Сёмина,
Информатика – С. Островский,
Искусство – М. Сартан,
История – А. Савельев,
Классное руководство и воспитание школьников –О. Леонтьева,
Литература – С. Волков,
Математика – Л. Рослова,
Начальная школа – М. Соловейчик,
Немецкий язык – М. Бузоева,
Русский язык – Л. Гончар,
Спорт в школе – О. Леонтьева,
Управление школой – Я. Сартан,
Физика – Н. Козлова,
Французский язык – Г. Чесновицкая,
Химия – О. Блохина,
Школьный психолог – И. Вачков

УЧРЕДИТЕЛЬ: ООО «ЧИСТЫЕ ПРУДЫ»
Зарегистрировано ПИ №ФС77-44335 от 21.03.11 в Министерстве РФ по делам печати
Подписано в печать: по графику 12.09.11, фактически 12.09.11 Заказ №
Отпечатано в ОАО «Чеховский полиграфический комбинат»
ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: **(499) 249-3138**
Отдел рекламы: **(499) 249-9870**
Сайт: **1september.ru**

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: **(499) 249-4758**
E-mail: **podpiska@1september.ru**

Документооборот Издательского дома «Первое сентября» защищен антивирусной программой Dr.Web

В НОМЕРЕ

ТЕМА НОМЕРА: К УРОКУ ГОТОВИТСЯ… УЧЕНИК

К материалам, обозначенным этим символом, есть приложение на CD-диске.

Уважаемые подписчики бумажной версии журнала «Математика»!
Теперь вы можете получать и электронную версию нашего журнала.
Для этого:
1. Зайдите на интернет-сайт www.1september.ru
2. Зарегистрируйте личный кабинет (если у вас его еще нет)
3. В личном кабинете в разделе «Издания/Коды доступа» введите код SE-02517-12471.

МАТЕМАТИКА Методический журнал для учителей математики
Издается с 1992 г. Выходит один раз в месяц

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, И. Бокова, О. Макарова
Дизайн макета и обложки: И. Лукьянов
Корректор: Л. Громова
Верстка: Д. Кардановская

Распространяется по подписке
Цена свободная Тираж 10 000 экз.
Тел. редакции: **(499) 249-3460**
E-mail: **mat@1september.ru**
Сайт: **mat.1september.ru**

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Роспечать: бумажная версия – **32030**; электронная версия – **26113;**
Почта России: бумажная версия – **79073**; электронная версия – **12717**

Фото из архива редакции

С ДНЕМ УЧИТЕЛЯ!

Л. РОСЛОВА

Мы помним своих учителей всю жизнь. И ту самую первую учительницу, которая привела нас в класс и провела наш первый урок, и тех, кто давал для нас, как водится — со слезами, звонок последний. Мы помним их радостных и счастливых на пороге школы первого сентября, помним и уставших от наших двоек, расстроенных нашими неудачами, взволнованных и переживающих за нас на экзамене. Мы никогда не забудем их лучшие уроки и те открытия, которые они помогли нам сделать, и мы всегда будем ценить их за ежедневную проверку тетрадей, за индивидуально составленные карточки и подобранные задачи. Мы разделяли с ними их профессиональные успехи, были свидетелями неудач и поражений.

Ученики выросли и сами стали учителями. Какими помнят нас наши ученики?

С. МАЛЕЕВА,
г. Якутск

С Днем учителя!

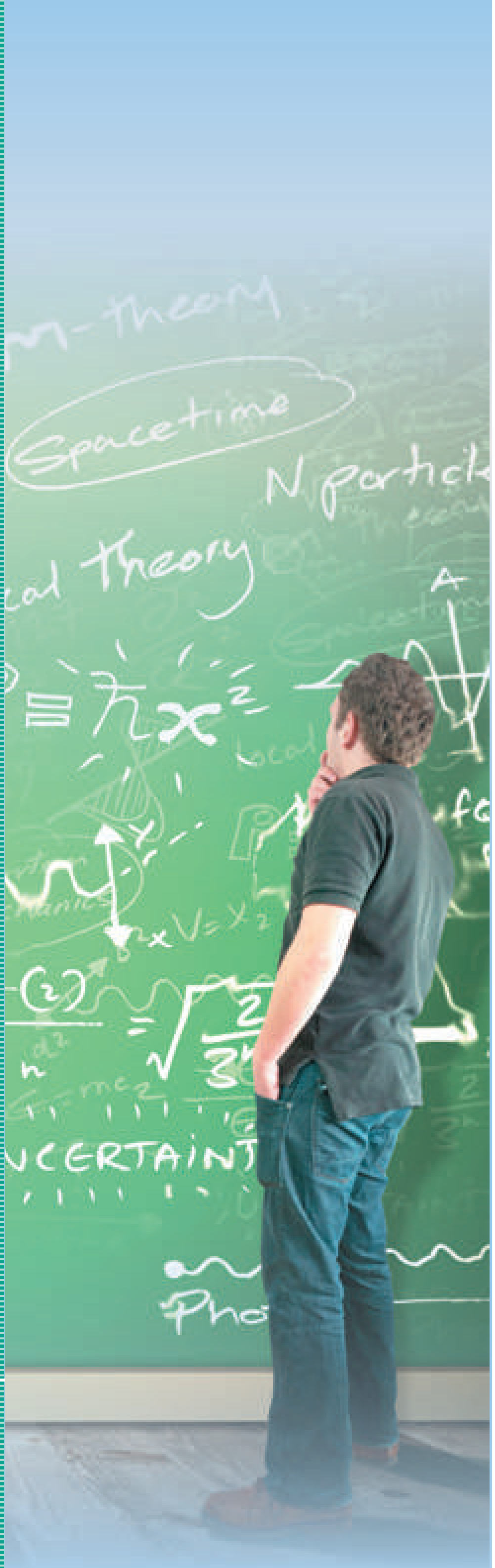
Пусть знаков Зодиака есть немало!
Кто родился под знаком Девы, кто — Тельца,
Вы ж родились под знаком… интеграла…
Талантам вашим,
Словно бесконечной дроби, нет конца!

В вас всё сошлось: и «жар холодных чисел»,
И строгость теорем, и постоянство аксиом,
И локона спираль, и вектор мысли,
Гармония души и безупречность форм!

«Ошибок трудных» проводя анализ,
Внимая трепетно газетным новостям,
ЕГЭ, как крепость, штурмовать пытались,
Как интеграл его вы брали — «по частям»!

Проблемы бытия мы вместе с вами делим,
Приумножаем радость творческих побед,
Возводим в степень опыта модели
И знаем: мастерству предела нет!

Пусть оградят от бед вас асимптоты;
К нулю стремится недругов число!
Пусть покорятся новые высоты!
Чтобы Вам всем!
Во всём!
Всегда!
Везло!



ЧТО ВОЛНУЕТ УЧИТЕЛЯ?

С. ГОРБАЧЕВА,
г. Ярославль

В чем суть профессии учителя?

Каждый из нас, и кто только начинает работать в школе, и кто отдал ей не один десяток лет, задает себе вопрос: в чем суть профессии учителя. Вопрос этот из ряда «вечных», и каждый отвечает на него по-своему. Я благодарю судьбу, что даже в минуты смятенья, измотанности не изменила ребятам и не ушла от них: ни с чем не сравнимая радость стоять у колыбели мысли и личности ученика, видеть процесс взросления, становления человека.

И мы, учителя, не просто причастны к святая святых, от нас зависит и направление, и скорость, и сам характер этого сложного и ответственного процесса.

Как сделать, чтобы годы учения, годы детства, отрочества и юности стали для каждого нашего ученика точкой опоры на всю последующую жизнь?

За годы работы в школе я пришла к убеждению, что урок математики может быть больше, чем сама математика, если это человекоформирующий урок.

Было время, когда рассуждала: главное — обучать! Обучать! Воспитание будет, оно вытекает из знаний, которые даем. И давала. Все больше и больше. А «вытекало» все меньше и меньше. Затем поняла: обучение и воспитание должны протекать одновременно. А за основной критерий работы надо брать не методическую установку, а отношение ученика к предмету. На каком-то этапе оно важнее самого предмета. Сегодня мой главный ориентир — ученик. Не к математике иду, а к нему с математикой, уверовав, что нет таких проблем, которые я не смогу решить на уроке.

Теорема, которую доказывала и доказываю, состоит в следующем: всякий ученик может и хочет учиться, если ощутил практическую пользу и ценность того, чем занимается. Тут-то и рождается нечто большее, чем знание, — отношение к нему.

Никакие концепции, структуры, методы не могут быть реализованы, если нет деятельности самого ученика, нет его отношения к предмету. Сегодня я строю уроки с применением деятельностного метода в технологии личностно ориентированного обучения.

Размышляя о том, как учить и научить всех, боюсь упустить другой аспект: как воспитать всех? Кем-то хорошо сказано: по-настоящему знает камень не тот, кто его раздолбил и познал тайну структуры, а тот, кто из него храм построил.

Наше владение предметом складывается из накопленных знаний и приобретенных навыков — «умений». Умение — это способность использовать накопленные знания; оно, конечно, невозможно без некоторой независимости мышления, оригинальности, изобретательности. Умение в математике — это способность решать задачи, находить доказательства, критически анализировать доводы, с достаточной легкостью пользоваться математическим аппаратом, распознавать математические понятия в конкретных ситуациях.

Самый большой пробел во владении математикой у рядового учителя средней школы — отсутствие опыта активной математической работы, а поэтому его нельзя назвать мастером в той области, знания из которой он обязан передать школьникам.

Можно ли вообще обучать преподаванию? То, что учитель передает своим ученикам, никогда не лучше того, что заключено в нем самом, — преподавание зависит от индивидуальных качеств учителя.

Профессионализм учителя начинается с понимания, что сила ему нужна не для того, чтобы подчинить класс, а для того, чтобы обслуживать интересы учеников — всех и каждого — с максимальной пользой для их развития. Для этого надо действительно быть и старше, и добрее, и много знать, и со вкусом одеваться, и быть в курсе возможных событий — одним словом, во всем быть «сильнее» своих учеников.

Без желания переделать мир — нет учителя. Однако самое трудное — это вырастить себя. Значит, не с предмета (методики, программы, концепции и т.д.), а с того, кто мы есть сами, начинается наш путь к ученику. Личность не уповает на хорошие учебники, программы, материальную оснащенность и т.д., а делает ставку на себя.

Е. КАРАЧИНСКИЙ,
г. Санкт-Петербург

Зачем учителю самореклама

Хотелось бы поделиться некоторыми соображениями относительно нового порядка аттестации учителей в Санкт-Петербурге.

Во-первых, учителя поставлены в неравные условия. Те, кому нужно проходить аттестацию уже сейчас, не имеют достаточно времени, чтобы собрать необходимые документы, так как аттестация предполагает, что учитывается весь период работы за прошедшие 5 лет. Кроме того, результаты ЕГЭ и ГИА есть не у всех учителей, так как, например, ЕГЭ по математике в Санкт-Петербурге был введен лишь 2 года назад; далеко не все учителя имели в это время выпускные классы, это может лишить их сразу 160 баллов.

Во-вторых, вызывает удивление, почему сертификат призера международного конкурса или олимпиады оценивается в 200 баллов, хотя к подготовке победителя олимпиад международного уровня учитель часто не имеет отношения (по математике этим занимаются кружки). Учитель же может подготовить призера олимпиад районного и городского уровней, но за это дается 20 баллов, а должно быть по крайней мере 50.

В-третьих, написание учебников не является функцией учителя. А вот проведение качественных уроков — его основная задача. В экспертном заключении же опять первое оценивается в 200 баллов, а второе — в 10 или 20. Те уроки, отзыв на которые рекомендует распространение опыта, должны давать минимум 50 баллов. Работа в экспертных, апелляционных городских комиссиях должна оцениваться не в 40 баллов, а минимум в 80, тем более что выполняется она наиболее квалифицированными учителями и без дополнительной оплаты.

В-четвертых, никак не учитывается стаж работы учителя. Опыт в преподавательской деятельности очень ценен, за него тоже должны быть баллы.

В-пятых, информация о предполагаемых коэффициентах к заработной плате за первую и высшую категории является пока закрытой, что, наверное, тоже неправильно.

Мне кажется, что можно было бы ограничиться при аттестации несколькими пунктами:

а) заявление, в котором учитель перечисляет свои основные достижения и награды;

б) результаты ЕГЭ и ГИА;

в) отзыв на 2 урока, подписанный районными или городскими методическими службами;

г) отсутствие обоснованных жалоб на педагога.

На мой взгляд, такой порядок аттестации позволил бы учителям сосредоточиться на учебно-воспитательном процессе, который в последнее

время и так оставляет желать лучшего. Предложенный же порядок будет вынуждать учителей заниматься саморекламой и сбором огромного количества документов в ущерб своим прямым обязанностям.

Л. ХОМУТОВА,
г. Москва

Учитель или компьютер? Выбор учеников

В современной школе широко рекламируется внедрение в учебный процесс компьютерных технологий: компьютер, Интернет, интерактивные доски. Контрольные и диагностические работы проверяет часто не учитель, а компьютер. А правильно ли это?

Школа — это часть общества, и мы знаем, какое большое значение сейчас уделяется развитию компьютерных технологий во всех сферах нашей жизни. Но школа — особая среда: в ней взаимоотношения между учителем и учеником являются залогом успешного обучения. Но часто в погоне за чем-то новым, современным мы забываем об учениках, мы начинаем чаще смотреть в экран монитора, а не в глаза ребенка. Я считаю, что учитель должен быть человеком в равной степени консервативным и прогрессивным, чтобы в погоне за модными тенденциями он не забывал о своем главном предназначении — учить детей, а успех в этом достигается в основном при личном контакте учителя с учеником.

Я в своей работе использую современные компьютерные технологии, но пытаюсь придать им «человеческое лицо». Из тех тестов, опросов, которые сейчас предлагаются в Интернете для учащихся, я делаю выборки индивидуально для каждого из своих учеников, и проверяю их сама, обсуждая с учениками их ошибки и недочеты в решении. Я никогда не жду результатов проверки технологических вариантов диагностических работ. Мне важны не только правильные ответы, но и важно понять, как они получены, как ученик решал эту задачу, его рассуждения. На уроках при изложении теоретического материала я использую интерактивную доску, создаю компьютерные презентации. Детям нравится, ведь это красиво и интересно. Все примеры к теоретическому материалу я разбираю на доске, обращая внимание отдельных учеников на те этапы в решении задачи, где у них бывают затруднения. У меня создан персональный сайт в Интернете. На его страницах я размещаю теоретический материал, варианты контрольных работ, объявления, оценки. Но это лишь повторение того, что было сказано, объяснено, обсуждено на уроке. На родительское собрание я распечатываю оценки своих учеников, и мы обсуждаем их, обмениваясь эмоциями, а не ведем «сухую» переписку по электронной почте.

В 2010 г. я стала лауреатом конкурса фонда «Династия» в номинации «Наставник будущих ученых», в которой победителей определяли выпускники школ. Все мои выпускники сдали экзамены на высокие баллы и поступили в технические вузы. Мне кажется, что они выбрали меня, потому что я помогла им преодолеть те трудности, с которыми сталкивается современный выпускник. Компьютер был лишь нашим помощником. От учеников я тоже получаю значительный заряд положительных эмоций, испытываю радость общения, чего не может дать компьютер. На мой взгляд, в современном мире учитель, идя в ногу со временем, должен уметь правильно расставить приоритеты и помнить, что он работает с людьми и для людей, а не с машинами и роботами.

В. ЧЕРКАСОВ,
с. Октябрьское, Оренбургская обл.

Как оценить труд учителя

Сегодня школу и учителя не ругает разве только очень ленивый, не обращая внимания на окружающую школу и учителя действительность. Школа — это голографическое отображение состояния общества в целом. Увидев,

что школа выпускает неграмотного, не умеющего работать и самообучаться молодого человека, мы закричали: «Школа виновата». В действительности же школа отобразила сбой в функционировании человеческого общества, системы. А учитель оказался крайним, хотя на протяжении нескольких лет благодаря своему трудолюбию, ответственности и таланту как-то нивелировал губительное воздействие на школьника проводимых чиновничеством реформ. «Не в соответствии с..., а вопреки...» школа некоторое время продолжала выпускать неплохих ребят. Но, как говорится, «все кончается».

Вот недавно наш уважаемый Президент сказал, что теперь оценку труда учителя будут проводить по конечному результату.

Боюсь, что это невозможно.

Термин «конечный результат» взят из производственной сферы, где конечный продукт — изделие, которое можно быстро протестировать с помощью всевозможных технических средств (химического анализа, дефектоскопа, интерферометра и т.п.), и готовые изделия должны быть абсолютно ***одинаковы*** (в рамках допуска погрешности).

Однако следует заметить, что эта одинаковость противоречит природе человека. Нет и не может быть (а по-видимому, и не должно быть) двух одинаковых людей, в этом заложена суть развития общества.

«Равенство («в смысле одинаковости») — понятие абиологичное. В природе равенства нет. Если бы было равенство — не было бы на Земле развития. Идея равенства позволяет бездарному жить за счет одаренного... все равно, захватив себе даже большую часть, бездарный не получит главного — таланта» (*В. Дудинцев*. «Белые одежды»).

Это только в фантастических романах шагают шеренги абсолютно одинаковых солдат.

Коме того, «готовое изделие» — ученика — полностью протестировать сможет только жизнь, а определить КТУ (коэффициент трудового участия) каждого отдельно взятого учителя в этом готовом изделии просто невозможно.

Оценка труда учителя — это вообще вещь довольно сложная, и, кстати, трудно понять, почему эту оценку дают чиновники от образования, которые подчас сами — неудавшиеся учителя в прошлом.

На мой взгляд, оценить труд учителя сложно из-за наличия в нем творческого начала. Причем оценку учителя в отрыве от оценки контингента обучаемых им учеников производить вообще бессмысленно. Мы все разные. Мы не можем все одинаково петь, рисовать, бегать и прыгать, одинаково грамотно писать, решать задачи. Все это можно реализовать в каждом конкретном случае в определенных разумных (возможных) рамках.

Беда еще в том, что мыслящего учителя школа, а точнее, школьное чиновничество выталкивает всячески из преподавательского дела, тем самым обедняя школу и делая ее серой.

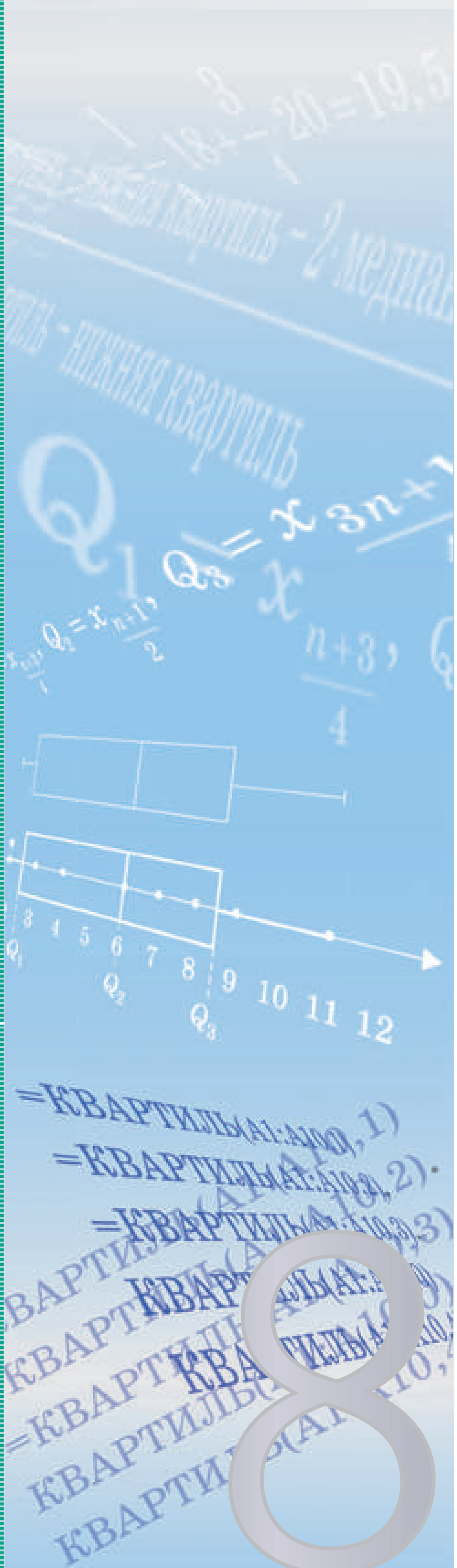
Заканчивается третья учебная четверть, и школы получают распоряжение составить годовой план (на прошедший год) работы с талантливыми детьми. Чиновники и проверяющие будут судить о качестве такой работы не по факту ее выполнения, а по количеству ее бумажного оформления. Я уже не говорю о том, что в школе нет специалистов по данной проблеме, нет никаких методик определения степени талантливости. Да и вообще, что мы имеем в виду под талантливостью вообще? Мы способности-то к определенному виду деятельности определяем на глаз.

Сегодня мы снова пытаемся создать какую-то универсальную таблицу, заполнив которую можно будет в конце (по количеству набранных баллов) получить готовую оценку труда учителя. Не знаю, а точнее — сомневаюсь, что такую таблицу удастся создать: слишком многогранна деятельность учителя и слишком велико число возможных вариантов достижения определенного результата, да и сам результат увидится только через много лет после выпуска ученика из школы.

Г. ФАЛИН, А. ФАЛИН,
г. Москва

КВАРТИЛИ В ОПИСАТЕЛЬНОЙ СТАТИСТИКЕ

В учебных пособиях, используемых при преподавании статистики, рассматриваются лишь простейшие статистические характеристики числового набора (среднее, медиана, мода, дисперсия, размах). Однако одна из основных характеристик положения числового набора, медиана, является частным случаем более интересных характеристик — квартилей. Эти величины позволяют лучше охарактеризовать не только положение, но и разброс чисел набора.



Определение квартилей

В статье [1] мы рассказали о различных мерах положения числового набора — среднем значении, медиане, моде — и провели их сравнительный анализ. В связи с этим мы упомянули, что более точно охарактеризовать положение и разброс чисел набора можно с помощью так называемых квартилей. В этой статье мы подробно расскажем о квартилях и связанных с ними понятиях.

Начнем с того, что кратко повторим определение медианы числового набора. Неформально медиана числового набора $x = (x_1, \dots, x_n)$, *упорядоченного по возрастанию*, определяется как такое число, слева и справа от которого лежит одно и то же количество чисел набора. Точное определение длиннее:

- упорядочим по возрастанию рассматриваемый набор чисел; полученный набор $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется вариационным рядом;
- если этот набор состоит из нечетного количества чисел, $n = 2k - 1$, то его медиана μ_x — это число x_k с номером k;
- если же этот набор состоит из четного количества чисел, $n = 2k$, то его медиана μ_x — это число $\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$, лежащее посредине отрезка $[x_k; x_{k+1}]$.

Если считать, что среднее арифметическое чисел x_k и x_{k+1} (то есть k-го и $(k + 1)$-го членов набора) — это число $x_{k+\frac{1}{2}}$ с «номером» $\left(k+\frac{1}{2}\right)$, то оба случая можно объединить в один, сказав, что медиана — это $\frac{n+1}{2}$-е в порядке возрастания число основного набора.

Значение медианы возрастает, когда ее рассматривают как вторую квартиль Q_2 и в дополнение к ней вычисляют первую квартиль Q_1 (ее обычно называют нижней) и третью квартиль Q_3 (ее обычно называют верхней). Неформально говоря, квартили Q_1, Q_2, Q_3 делят исходный упорядоченный набор на четыре (примерно) равные части. Иначе говоря, нижняя квартиль — это медиана первой половины исходного набора, а верхняя квартиль — медиана второй половины исходного набора. Уточнить это неформальное определение нижней и верхней квартилей можно несколькими способами, которые обычно приводят к разным результатам (хотя и не очень сильно отличающимся) — общепринятого определения квартилей в описательной статистике нет (подробнее по этому поводу см., например, [2, 3]). Скажем, в британском школьном учебнике [4], подготовленном экзаменационным центром OCR (Oxford, Cambridge and Royal Society of Arts), принято следующее определение.

> ***Определение 1.*** Чтобы найти квартили числового набора,
>
> 1) нужно упорядочить числа исходного набора по возрастанию. Если некоторые числа набора повторяются, то они стоят одной группой, то есть учитываются в наборе нужное количество раз;
>
> 2) если набор содержит четное количество чисел, то нужно разделить эту упорядоченную версию исходного набора на две равные (по числу элементов) половины. Медиана первой половины — это нижняя квартиль, а медиана второй половины — верхняя;
>
> 3) если набор содержит нечетное количество чисел, то нужно найти медиану и вычеркнуть ее из набора (так что останется четное количество чисел). После этого нужно оставшиеся числа разделить на две равные (по числу элементов) половины. Медиана первой половины — это нижняя квартиль, а медиана второй половины — верхняя.

Рассмотрим, например, набор 11, 11, 15, 15, 15, 15, 18, 20, 20, 160. Он состоит из 10 чисел, которые уже упорядочены по возрастанию. Первая половина — это набор 11, 11, 15, 15, 15. Он состоит из 5 чисел. Поэтому его медиана — третье по счету число, то есть 15 — это и будет нижняя квартиль Q_1. Вторая половина — это набор 15, 18, 20, 20, 160. Он также состоит из 5 чисел. Поэтому его медиана — третье по счету число, то есть 20, это и будет верхняя квартиль Q_3. Вторая квартиль Q_2 — это медиана исходного набора, то есть среднее арифметическое пятого и шестого чисел исходного набора $Q_2 \equiv \mu_x = \frac{15+15}{2} = 15.$ Итак, для рассмотренного набора $Q_1 = 15$, $Q_2 = 15$, $Q_3 = 20$.

Возьмем теперь набор, содержащий нечетное количество чисел, например, 2, 7, 6, 2, 11, 8, 9, 4, 3 ($n = 9$). После упорядочивания по величине мы получим набор: 2, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11. Медиана этого набора (она будет второй квартилью Q_2) — это пятое по порядку число, то есть 6. Вычеркивая медиану, мы получим набор из восьми чисел: 2, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11. Первая половина — это набор 2, 2, 3, 4. Он состоит из 4 чисел. Поэтому его медиана — среднее арифметическое второго и третьего чисел, то есть 2,5, это и будет нижняя квартиль Q_1. Вторая половина — это набор 7, 8, 9, 11. Он также состоит из четырех чисел. Поэтому его медиана — среднее арифметическое второго и третьего чисел, то есть 8,5 — это и будет верхняя квартиль Q_3. Итак, для рассмотренного набора $Q_1 = 2{,}5$, $Q_2 = 6$, $Q_3 = 8{,}5$.

Именно это определение мы будем использовать дальше в нашей статье.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. В рассмотренном только что примере ниже нижней квартили $Q_1 = 2{,}5$ находится два числа из рассматриваемого набора: $x_1 = 2$ и $x_2 = 2$. Эти два числа составляют $\frac{2}{9} \approx 22\%$ от общего количества чисел набора. Выше верхней квартили $Q_3 = 8{,}5$ находится тоже два числа из рассматриваемого набора: $x_8 = 9$ и $x_9 = 11$. Эти два числа составляют $\frac{2}{9} \approx 22\%$ от общего количества чисел набора. «Центральная» часть набора, которая состоит из чисел, лежащих между нижней и верхней квартилями, содержит 5 чисел, что составляет $\frac{5}{9} \approx 56\%$ от общего количества чисел набора. Поэтому фразу «квартили делят набор на четыре равные части» нельзя понимать буквально.

Еще один распространенный способ определения квартилей связан с определением медианы как $\frac{n+1}{2}$-го в порядке возрастания числа основного набора. В соответствии с этим определением (назовем его определение 2):

> ***Определение 2.*** *i*-я квартиль Q_i — это $\left(i \cdot \frac{n-1}{4} + 1\right)$-е в порядке возрастания число основного набора.

Иначе говоря, нижняя квартиль Q_1 — это $\frac{n+3}{4}$-е в порядке возрастания число основного набора, медиана Q_2 — это (как и следовало ожидать) $\frac{n+1}{2}$-е в порядке возрастания число основного набора, а верхняя квартиль Q_3 — это $\frac{3n+1}{4}$-е в порядке возрастания число основного набора:

$$Q_1 = x_{\frac{n+3}{4}},\ Q_2 = x_{\frac{n+1}{2}},\ Q_3 = x_{\frac{3n+1}{4}}.$$

При этом, по определению, если «номер» $\frac{n+3}{4}$, $\frac{n+1}{2}$ или $\frac{3n+1}{4}$ имеет вид:

- $k+\frac{1}{2}$, где k — некоторое натуральное число, то
$$x_{k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x_k+\frac{1}{2}x_{k+1};$$
- $k+\frac{1}{4}$, где k — некоторое натуральное число, то
$$x_{k+\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}x_k+\frac{1}{4}x_{k+1};$$
- $k+\frac{3}{4}$, где k — некоторое натуральное число, то
$$x_{k+\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}x_k+\frac{3}{4}x_{k+1}.$$

Этот способ определения значений для дробных «номеров», когда значение x_{k+t}, где число k — натуральное, а число t лежит между 0 и 1, определяется по формуле
$$x_{k+t}=(1-t)x_k+tx_{k+1},$$
называется *линейной интерполяцией*. Отметим, что в рассматриваемой ситуации число k называется целой частью числа $k+t$, а число t — дробной.

Применим это новое определение квартилей к рассмотренным ранее наборам.

Набор 11, 11, 15, 15, 15, 15, 18, 20, 20, 160 состоит из $n = 10$ чисел.

Нижняя квартиль Q_1 равна
$$Q_1=x_{\frac{13}{4}}=x_{3+\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4=\frac{1}{4}\cdot 15+\frac{3}{4}\cdot 15=15.$$

Напомним, что в соответствии с первым определением мы получили то же значение нижней квартили.

Верхняя квартиль Q_3 равна
$$Q_3=x_{\frac{31}{4}}=x_{7+\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}x_7+\frac{3}{4}x_8=\frac{1}{4}\cdot 18+\frac{3}{4}\cdot 20=19,5.$$

Хотя первое определение дало для верхней квартили значение 20, отличие не очень большое.

Набор 2, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11 состоит из $n = 9$ чисел. Нижняя квартиль Q_1 равна $Q_1=x_{\frac{12}{4}}=x_3=3$ (определение 1 дало для нижней квартили значение 2,5). Верхняя квартиль Q_3 равна $Q_3=x_{\frac{28}{4}}=x_7=8$ (определение 1 дало для верхней квартили значение 8,5). Как и в первом примере, оба определения дают для квартилей близкие значения.

Термин «квартиль» (англ. quartile) происходит от латинского слова quartus (в средневековой латыни: quartilis) – «четвертый». От этой латинской основы произошли и слова «квартал» — четвертая часть года (три месяца), «квартет» – музыкальный ансамбль из четырех исполнителей. В статистике термин «квартиль» появился в 1879 г. и обычно связывается с именем английского ученого Ф. Гальтона (F. Galton, 1822–1911).

Квартили в зарубежных школьных программах статистики

В странах с давней традицией преподавания статистики в школах понятие квартили и связанные с ним понятия (интерквартильный размах, квартильная диаграмма, выбросы и т.д.) включены в школьные программы изучения статистики. Например, английская (в других регионах Великобритании ситуация аналогична) школьная программа по статистике (см. [5], с. 35, 40 или [6], с. 13, 14) требует, чтобы учащиеся могли:

- вычислять квартили и интерквартильный размах;
- строить, интерпретировать и использовать квартильные диаграммы;
- использовать квартили для выявления аномальных значений (выбросов).

Соответствующий материал излагается в британских школьных учебниках по статистике; например, учебник [7] содержит разделы:

- «Размах и квартили» (с. 95),
- «Интерквартильный и интерперцентильный размах» (с. 96–98),
- «Квартильная диаграмма» (с. 105–106),
- «Измерение асимметрии с использованием квартильного коэффициента» (с. 107),

а учебник [4] — разделы:

- «Интерквартильный размах» (раздел 3.3, с. 45–49),
- «Квартильные диаграммы» (раздел 3.4, с. 50–51),
- «Выбросы» (раздел 3.5, с. 52–53).

Задачи, которые предлагаются на экзаменах по статистике на получение аттестата о среднем образовании (General Certificate of Secondary Education — GCSE; это некоторый аналог отечественной ГИА), часто включают задания по указанным выше темам (см., например, [8], задача 1B, или [9], экзамен 1H, задача 8).

В зарубежных методических изданиях по статистике часто публикуются статьи (см., например, [10–12]), посвященные преподаванию в школах понятия квартилей и связанных с ним более сложных понятий. В них обсуждается как методика преподавания, так и возникающие при этом проблемы с пониманием школьниками этих относительно сложных тем описательной статистики. В некоторых публикациях, скажем в [13], на основе опыта преподавания в разных странах высказывается определенный скептицизм по поводу возможности и необходимости включения квартилей в школьный курс статистики.

Применение компьютеров для вычисления квартилей

Второе определение квартилей реализовано в электронных таблицах Microsoft Office Excel, где для подсчета квартилей можно использовать стандартную функцию КВАРТИЛЬ.

Вернемся к ранее рассмотренному набору чисел

11, 11, 15, 15, 15, 15, 18, 20, 20, 160.

Введем эти данные в ячейки с адресами A1, A2, ..., A10.

Чтобы найти первую квартиль, введем в ячейку A11 формулу =КВАРТИЛЬ(A1:A10,1) (в зависимости от версии Excel для разделения параметров в функциях используется или запятая, или точка с запятой.) Значение функции (т.е. первой квартили) равно 15.

Чтобы найти вторую квартиль (медиану), введем в ячейку A12 формулу =КВАРТИЛЬ(A1:A10,2). Значение второй квартили на этом наборе также равно 15.

Для нахождения третьей квартили введем в ячейку A13 формулу =КВАРТИЛЬ(A1:A10,3). Ее значение равно 19,5.

Отметим, что для функции КВАРТИЛЬ совершенно неважно, упорядочены или нет числа набора. Кроме того, эта функция позволяет найти наибольшее и наименьшее числа набора: формула КВАРТИЛЬ(A1:A10,0) даст наименьшее число набора, а формула КВАРТИЛЬ(A1:A10,4) — наибольшее.

Квартильная диаграмма

Обычно квартили изображают графически с помощью *квартильной диаграммы* (английский термин «box and whisker plot», «box and whisker diagram»; буквально — «ящик с усами»).

Чтобы нарисовать квартильную диаграмму, на числовой прямой нужно отметить квартили и нарисовать два смежных прямоугольника («ящика») одинаковой высоты или, что то же самое, нарисовать прямоугольник на отрезке $[Q_1; Q_3]$ и разделить его на два прямоугольника вертикальным отрезком, проходящим через медиану (рис. 1). Высоту прямоугольника можно взять любой, хотя есть варианты квартильных диаграмм, когда высота несет определенную смысловую нагрузку [14].

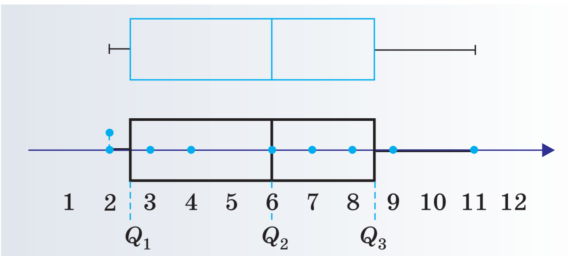


Рис. 1

Кроме того, на числовой оси нужно отметить экстремальные значения исходного числового набора (то есть наибольшее и наименьшее числа) и соединить их горизонтальными отрезками («усами») с серединами соответствующих вертикальных отрезков (проведенных через нижнюю и верхнюю квартили); концы этих отрезков обычно отмечают небольшими вертикальными отрезками.

Ситуация, изображенная на рис.1, соответствует набору 2, 7, 6, 2, 11, 8, 9, 4, 3, рассмотренному выше. Как было показано, в соответствии с определением 1 (которое мы используем как основное), для этого набора $Q_1 = 2{,}5$, $Q_2 = 6$, $Q_3 = 8{,}5$.

Для большей наглядности мы отметили и числа исходного набора. Обратим внимание на число 2. Оно появилось в рассматриваемом наборе два раза. Мы отразили это обстоятельство двумя точками — одна из них стоит на числовой оси, а вторая чуть выше ее.

Часто получившуюся конфигурацию приподнимают над осью абсцисс (мы сделали это на рис. 1) — это удобно для сравнения разных наборов, а иногда размещают вертикально.

Таким образом, квартильная диаграмма в наглядной форме показывает положение чисел набора на числовой оси:

- медиана указывает на «среднее» значение набора;
- ширина «ящиков» показывает разброс (примерно) 50% центральных, наиболее характерных значений;
- длина «усов» показывает, насколько сильно выброшены в сторону (примерно) 25% наименьших и (примерно) 25% наибольших чисел набора;
- сравнивая между собой ширину левого и правого «ящиков», а также длины левого и правого «усов», можно судить о том, насколько несимметричным является рассматриваемый набор.

Графическое описание набора данных с помощью квартильной диаграммы было предложено в 1970 г. известным американским статистиком, профессором университета Принстона, Джоном Тьюки (John Tukey, 1915–2000). Этот метод стал общепринятым после опубликования в 1977 г. его книги [15].

Интерквартильный размах

С помощью верхней и нижней квартилей определяют важную меру рассеивания набора чисел — *интерквартильный размах* (соответствующий английский термин *interquartile range* переводят и как *межквартильный размах*). По определению, интерквартильный размах (его обычно обозначают IQR) — это разность $Q_3 - Q_1$:

$$IQR = Q_3 - Q_1.$$

Интерквартильный размах показывает, насколько разбросаны 50% «центральных» значений рассматриваемого набора чисел. Это понятие было введено в 1882 г. Ф. Гальтоном.

Выбросы

Выбросы — это числа, которые сильно отличаются от остальных чисел набора и в ситуации, которую описывает рассматриваемый набор чисел, являются необычными. Рассмотрим, например, следующий набор из 10 чисел:

$$63, 68, 62, 59, 64, 62, 67, 65, 94, 64$$

(это могут быть оценки ЕГЭ по математике для группы школьников). На рисунке 2 эти числа изображены на числовой оси. Видно, что 9 оценок из 10 стоят плотной группой, а одна оценка, 94, стоит далеко справа. Если бы мы сравнивали эту группу школьников с другой, в которой математика преподается по другой методике (например, чтобы понять, какая из двух методик лучше), то эту оценку было бы неразумно принимать в расчет, так как столь высокая оценка, видимо, связана с математической одаренностью ученика и мало зависит от методики преподавания математики в школе. В рассматриваемой ситуации число 94 и будет выбросом.

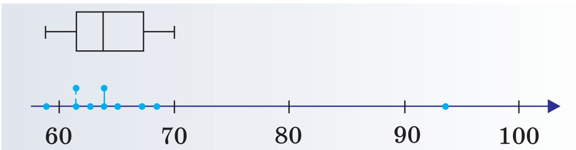


Рис. 2

Однозначного ответа на вопрос, насколько далеко должно лежать число от основной массы значений набора, чтобы его можно было считать выбросом, нет. Джон Тьюки [15] предложил следующий подход, который является общепринятым в описательной статистике:

- числа набора, лежащие между нижней и верхней квартилями (то есть в «ящике» квартильной диаграммы), являются наиболее характерными;
- числа, которые отклоняются от нижней и верхней квартилей не больше, чем на полтора интерквартильных размаха, то есть удовлетворяют неравенству $f_* \le x < Q_1$, где $f_* = Q_1 - 1{,}5 \cdot IQR$, или неравенству $Q_3 < x \le f^*$, где $f^* = Q_3 + 1{,}5 \cdot IQR$, не столь характерны, но должны учитываться как значимые, так как их отклонения от типичных значений не очень большие;
- те числа, которые отклоняются от нижней и верхней квартилей больше, чем на полтора интерквартильных размаха, то есть удовлетворяют неравенству $x < f_*$ или неравенству $x > f^*$, следует считать выбросами.

Чтобы наглядно отразить выбросы, квартильную диаграмму немного модифицируют, а именно, если есть выбросы, то рисуют «усы» не до минимального и максимального чисел набора, а лишь до чисел набора, наиболее удаленных от соответствующих квартилей, но не дальше, чем на $1{,}5 \cdot IQR$. Таким образом, «усы» не переходят через барьеры f_* и f^*. Числа набора, которые не попадают на эту модифицированную квартильную диаграмму (то есть выбросы), отмечают особо. Часто для этого используют не точки, а маленькие крестики.

Для рассматриваемого нами иллюстративного набора такая модифицированная диаграмма изображена на рисунке 2 (в нашем случае медиана равна 64, нижняя квартиль равна 62, верхняя квартиль равна 67, интерквартильный размах равен 5, имеется только один выброс, равный 94).

Если в анализируемом наборе есть выбросы, необходимо разобраться, почему они появились. Иногда выбросы являются следствием ошибок при сборе данных. В этом случае их нужно исправить или, если это невозможно, исключить выбросы из набора. Но чаще выбросы — это верные значения. В этом случае нужно особенно тщательно проанализировать причину их появления. Обычно это позволяет получить важные выводы о реальной ситуации, которую описывает анализируемый набор данных. В частности, необходимо понять, могут ли подобные экстремальные значения появиться в других подобных ситуациях.

Имея в виду проведенные выше рассуждения, уместно сделать несколько замечаний по поводу интерквартильного размаха:

- Важное достоинство интерквартильного размаха заключается в том, что его значение не зависит от выбросов.
- С другой стороны, оставшиеся 50% чисел набора игнорируются — это, конечно, недостаток этой меры рассеивания.
- Поэтому применять интерквартильный размах имеет смысл в тех случаях, когда выбросы не являются типичными значениями, характерными для ситуации, описываемой набором, который мы изучаем, и их следует игнорировать. Вообще, важно понимать, что математика — это только аппарат для исследования реальной ситуации. Если не учитывать важные свойства изучаемого объекта, то формальные математические вычисления могут привести нас не к самым разумным выводам.

Асимметрия набора

Как мы уже отмечали, с помощью квартилей можно понять, насколько несимметричным является рассматриваемый набор.

Если медиана находится точно посередине между нижней и верхней квартилью (т.е. левый и правый «ящики» на квартильной диаграмме имеют одинаковые основания), то из (примерно) 50% «центральных» значений рассматриваемого набора чисел примерно половина лежит в левом «ящике», а вторая половина — в равном ему по размеру правом. Иначе говоря, эти «центральные» значения в целом расположены вокруг медианы симметрично.

Если нижняя квартиль находится от медианы дальше, чем верхняя (то есть левый «ящик» на квартильной диаграмме больше правого), то левая половина «центральных» значений рассматриваемого набора чисел разбросана больше, чем правая. Иначе говоря, эти «центральные» значения в целом расположены вокруг медианы несимметрично, со скосом в левую сторону. Такой набор называют отрицательно асимметричным.

Если же верхняя квартиль находится от медианы дальше, чем нижняя (то есть правый «ящик» на квартильной диаграмме больше левого), то правая половина «центральных» значений рассматриваемого набора чисел разбросана больше, чем левая. Иначе говоря, эти «центральные» значения в целом расположены вокруг медианы несимметрично, со скосом в правую сторону. Такой набор называют положительно асимметричным.

Асимметрию набора можно описать и количественно. В статистике для этого введено несколько разных величин (примерно так же, как положение набора можно описывать средним значением, медианой и модой). Например, можно использовать отношение $\lambda = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_3 - Q_2}$ (при $Q_3 \neq Q_2$). Говорят, что точка Q_2 делит отрезок $[Q_1; Q_3]$ в отношении λ. Число λ показывает, во сколько раз левый «ящик» квартильной диаграммы шире правого:

- если $\lambda = 1$, то эти ящики имеют одинаковую ширину, и распределение является симметричным в смысле данного выше определения;
- если $\lambda > 1$, то «левый» ящик шире правого, и распределение является отрицательно асимметричным в смысле данного выше определения;
- если $\lambda < 1$, то «правый» ящик шире левого, и распределение является положительно асимметричным в смысле данного выше определения.

Единственный недостаток этого, в общем-то естественного определения заключается в том, что для симметричного распределения, то есть с нулевой асимметрией, коэффициент равен 1, для положительно асимметричного распределения коэффициент меньше 1, для отрицательно асимметричного распределения коэффициент больше 1. Хотелось бы ввести такую меру, чтобы для симметричного распределения, т.е. с нулевой асимметрией, она была бы равна 0, для положительно асимметричного распределения — была бы больше 0 (то есть положительна), для отрицательно асимметричного распределения — была бы меньше 0 (то есть отрицательна). Имея это в виду, в качестве меры асимметрии рассматривают число $k = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$. Его обычно называют *квартильный коэффициент* или *асимметрия Баули* (A.L. Bowley, 1869–1957 — английский статистик и экономист). Через квартили квартильный коэффициент выражается следующим образом:

$$k = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1} =$$

$$= \frac{\text{верхняя квартиль} + \text{нижняя квартиль} - 2 \cdot \text{медианы}}{\text{верхняя квартиль} - \text{нижняя квартиль}}.$$

Квартильный коэффициент определен только для наборов, у которых верхняя квартиль не совпадает с нижней, то есть «центральные» 50% значений набора разбросаны по отрезку $[Q_3; Q_1]$ ненулевой длины.

Возможные значения квартильного коэффициента лежат на отрезке $[-1; +1]$. Действительно, двойное неравенство $-1 \le \frac{Q_3 + Q_1 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1} \le 1$ равносильно двум неравенствам:

$$-Q_3 + Q_1 \le Q_3 + Q_1 - 2Q_2$$

и

$$Q_3 + Q_1 - 2Q_2 \le Q_3 - Q_1,$$

которые после приведения подобных членов сводятся к двойному неравенству

$$Q_1 \le Q_2 \le Q_3,$$

которое, очевидно, истинно.

Если квартильный коэффициент равен 0, то это означает, что

$$Q_3 + Q_1 - 2Q_2 = 0,$$

то есть

$$Q_3 - Q_2 = Q_2 - Q_1.$$

Но $Q_3 - Q_2$ — это ширина правого ящика, а $Q_2 - Q_1$ — левого. Поэтому равенство $Q_3 - Q_2 = Q_2 - Q_1$ означает симметрию набора в смысле определения, данного в начале этого раздела.

При изменении параметра λ от 0 до $+\infty$ функция $k(\lambda) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ монотонно убывает от 1 до -1. Таким образом, значение квартильного коэффициента, близкое к -1, равносильно тому, что значение λ велико, что, в свою очередь, означает, что левый «ящик» много шире правого, то есть большую отрицательную асимметрию. Значение квартильного коэффициента, близкое к $+1$, равносильно тому, что значение λ очень мало, что, в свою очередь, означает, что правый «ящик» много шире левого, то есть большую положительную асимметрию.

Особо подчеркнем, что при обсуждении симметрии или асимметрии числового набора мы принимали в расчет только (примерно) 50% «центральных», наиболее типичных чисел, игнорируя числа, которые лежат ниже нижней квартили или выше верхней. В статистике есть и другие меры асимметрии, которые используют все числа набора. Наиболее простым из них (он использует только основные меры положения и рассеивания) является коэффициент асимметрии Пирсона:

$$3\frac{M_x - \mu_x}{s_x} = 3\frac{\text{среднее значение} - \text{медиана}}{\text{стандартное отклонение}}.$$

Он равен нулю для наборов, у которых среднее значение совпадает с медианой, и только для них. Таким образом, этот подход считает характерным свойством симметричных наборов равенство среднего значения и медианы.

Литература

1. *Фалин Г., Фалин А.* О мерах положения числового набора// Математика, 2011 (принято к публикации).

2. *Freund J., Perles B.* A New Look at Quartiles of Ungrouped Data // The American Statistician, Vol. 41, No. 3 (Aug., 1987), p. 200–203.

3. *Hyndman R.J., Fan Y.* Sample Quantiles in Statistical Packages // The American Statistician, Vol. 50, No. 4 (Nov., 1996), p. 361–365.

4. *Dobbs S., Miller J.* Statistics 1. Cambridge University Press, 2009.

5. Specification. Edexcel GCSE in Statistics (2ST01). Edexcel Limited, 2008.

6. GCSE Specification. Statistics (for certification 2011 onwards). AQA, 2008.

7. GCSE Statistics. Complete Revision and Practice. Coordination Group Publication, 2010.

8. Edexcel GCSE Statistics. Paper 1H. Wednesday 18 June 2008.

9. Sample Assessment Materials. Edexcel GCSE in Statistics (2ST01). February 2010.

10. *Pfannkuch M.* Comparing box plot distributions: a teacher's reasoning // Statistics Education Research Journal, 2006, 5(2), p. 27–45.

11. *Kortenkamp U., Rolka K.* Using technology in the teaching and learning of box plots // Proceedings of CERME 6, January 28th February 1st 2009, Lyon France. INRP 2010, p. 1070–1080.

12. *Langford E.* Quartiles in Elementary Statistics // *Journal of Statistics Education, 2006,* Vol. 14, No. 3.

13. *Bakker A., Biehler R., Konold C.* Should Young Students Learn About Box Plots? — Curricular Development in Statistics Education, Sweden, 2004, p. 163–173.

14. *McGill R., Tukey J.W., Larsen W.A.* Variations of Box Plots // The American Statistician, Vol. 32, No. 1. (Feb., 1978), p. 12–16.

15. *Tukey J.W.* Exploratory Data Analysis. Reading MA: Addison-Wesley Publishing Co., 1977.

КАК СТАТЬ АВТОРОМ ЖУРНАЛА «МАТЕМАТИКА»?

Сделать это несложно: надо лишь написать статью и прислать ее в редакцию журнала. И еще одно условие — она должна быть интересна и полезна вашим коллегам.

Требования к оформлению статьи таковы:

Материал должен быть либо напечатан, на компьютере или на пишущей машинке.

Рисунки должны быть четкими, аккуратными, выполненными на белой нелинованной или клетчатой бумаге с помощью чертежных инструментов. Если вы хорошо владеете компьютером, можете воспользоваться для этого программой Corel Draw.

Рисунки надо пронумеровать, нумерация должна соответствовать их нумерации в тексте.

Фотографии должны быть цветными. Формат фотографий, отпечатанных на бумаге, не менее 10 × 15 см. Размер цифровых фотографий не менее 800 × 600 пикселей, формат JPG, качество, используемое при сохранении JPG-файлов, высокое (high).

Прислать статью можно по почте или по электронной почте. Всю необходимую для этого информацию вы найдете на странице 2 журнала.

Для выплаты гонорара необходимо заполнить авторскую карточку.

Приглашаем вас к сотрудничеству
и желаем удачи!

Данные автора

Данные автора		
Фамилия		
Имя		
Отчество		
Дата рождения		
Место рождения		
Паспорт		
Серия	№	Когда выдан
Кем выдан		
Адрес прописки		
Индекс	город	
Улица		
Дом	корпус	квартира
Адрес проживания		
Индекс	город	
Улица		
Дом	корпус	квартира
Телефон		
Номер пенсионного страхового свидетельства		
ИНН (можно не указывать)		

Л. ГОРБОВА,
дер. Большое Уварово,
Московская обл.

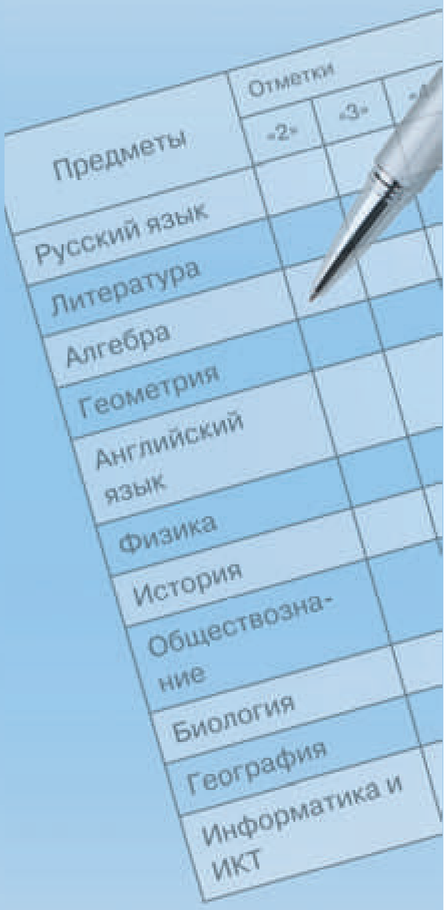
7 класс

КОНСПЕКТЫ УРОКОВ ПО ТЕМЕ «СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ»

В статье представлены планы-конспекты четырех уроков по теме «Статистические характеристики». В ходе этих уроков учащиеся знакомятся с такими характеристиками описательной статистики, как среднее арифметическое, мода, размах, медиана, решают задачи и выполняют исследовательскую работу, материалом для которой являются их же школьные отметки.

Учебник: Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б. Алгебра. 7 класс. — М.: Просвещение, 2008.

Оборудование: интерактивный комплекс, калькулятор.



Урок 1

Тема: «Среднее арифметическое, размах и мода»

Цель: дать определение среднего арифметического, размаха и моды.

Устная работа с использованием интерактивного комплекса

Пример 1. В группе продленного дня ученики должны были записать, сколько минут затратил каждый на выполнение домашнего задания по алгебре. Находим среднее арифметическое этого ряда чисел:

$$(25 + 34 + 30 + 25 + 37 + 21 + 25 + 20 + 34 + 35 + 37 + 20 + 35 + 25) : 14 = 28{,}8 \text{ мин.}$$

Вспоминаем определение среднего арифметического, которое известно из курса 5-го класса.

Изучение нового материала

28,8 мин. — среднее время, затраченное на выполнение домашнего задания по алгебре. Но иногда среднее арифметическое не дает полезной информации. Например:

- средний размер одежды, которую носят ученики вашего класса. Если приобрести в магазине джинсы по этому показателю, то они могут не подойти никому;
- средний размер обуви, которую носят ученики вашего класса. Если приобрести в магазине кроссовки по этому показателю, то они тоже могут не подойти никому.

Анализ приведенного ряда данных показывает, что время, затраченное некоторыми учащимися на выполнение домашнего задания по алгебре, существенно отличается от среднего арифметического.

— Чему равно наибольшее время выполнения домашнего задания? а наименьшее? [37 мин., 20 мин.]

— Найдем разность между ними.

[17]

Эта разность называется *размахом*. Дайте определение, что же такое размах. (*Выслушать несколько ответов.*)

— Найдите размах между наибольшим и наименьшим значениями размеров вашей одежды и обуви. Как вы думает, что показывает размах в этих случаях?

[Колебание от наименьшего до наибольшего.]

— В каких случаях он дает более полную характеристику явления, чем среднее арифметическое?

[Колебание температуры в течение суток или месяца наблюдений.]

Вернемся к нашему первому примеру.

— Какое число там встречается наиболее часто?

[25 — четыре раза.]

Оно называется *модой ряда*. Найдите моду в других примерах.

— Когда мода является наиболее приемлемой характеристикой? Приведите примеры.

[Мода является наиболее приемлемым показателем при изучении спроса в торговле: какой размер обуви, одежды и т.д. является наиболее ходовым. Или в какой фасовке покупатели предпочитают приобретать в магазине или на рынке тот или иной товар.]

Работа с учебником

Прочесть и обсудить текст учебника на с. 33–35.

Решение задач

№ 167(а) — на доске с подробными комментариями;

№ 164 (1, в–а; 2, в–б; 3, в–в; 4, в–г) — самостоятельно с проверкой на интерактивной доске;

№ 170 — устно;

№ 177, 178 — самостоятельно с проверкой на интерактивной доске.

Задание на дом

П. 9, № 169 (по вариантам), 180, 181.

Итог урока

Урок 2

Тема: «Медиана как статистическая характеристика»

Цели:

— дать начальные сведения об основных этапах статистического исследования: сбор, систематизация и анализ статистических данных;

— продемонстрировать удобные способы упорядочивания и систематизации больших объемов информации;

— дать определение медианы.

Проверка домашнего задания

Провести на интерактивной доске, исправить ошибки.

Устная работа

1. В таблице показан расход электроэнергии (в кВт · ч) некоторой семьей в течение года:

Месяц	Январь	Февраль	Март
Расход электроэнергии	85	80	74
Месяц	Апрель	Май	Июнь
Расход электроэнергии	61	54	34
Месяц	Июль	Август	Сентябрь
Расход электроэнергии	32	32	62
Месяц	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
Расход электроэнергии	78	81	82

Найдите моду и размах этого ряда чисел.

2. Что называется модой, размахом ряда чисел?

3. В таблице записаны результаты измерения на метеостанции температуры воздуха (в градусах Цельсия) в течение первой декады марта:

Число	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Температура	–2	–1	–3	0	1	2	2	3	4	3

Найдите среднюю температуру для этого промежутка времени.

[4,5 °C]

4. Что называется средним арифметическим?

5. Где находят применение изученные нами на прошлом уроке характеристики?

6. Что изучает статистика?

Статистика, строгая муза,
Ты реешь над каждой судьбой!
Ничто для тебя не обуза,
Никто не обижен тобой.
Не всматриваешься ты в лица
И в души не лезешь. А все ж
Для каждой людской единицы
В таблицах ты место найдешь.
В рядах твоей жесткой цифири,
В подсчеты и сводки включен,
Живу я, единственный в мире,
Но имя мое — легион.

Умру я. Меня понемногу
Забудут друзья и родня.
Статистика, муза итогов,
Лишь ты не забудешь меня!
В простор без конца и границы
Бессмертной дорогой живых
Шагает моя единица
В дивизиях чисел твоих.

В. Шефнер

Изучение нового материала

Пример 1. Запишите данные таблицы из задания 1 в порядке возрастания (упорядочим данные этой таблицы).

[32, 32, 34, 54, 61, 62, 74, 78, 80, 81, 82, 85]

Какие числа стоят на шестом и седьмом местах?

[62 и 74]

Найдем их среднее арифметическое.

[$(62 + 74) : 2 = 68$]

Число 68 называют *медианой* (от лат. mediana — среднее).

Пример 2. Найдем медиану ряда: 30, 32, 37, 40, 41, 42, 45, 49, 52. Этот ряд уже упорядочен. В нем девять чисел. Следовательно, медиана равна 41, так как это число стоит посередине.

Дайте определение медианы. (*Выслушать возможные варианты.*)

Работа с учебником

Прочесть определение медианы и пример на с. 40.

Решение задач

№ 186 — устно;

№ 187 — по вариантам (двое — у доски, остальные — за партами самостоятельно);

№ 189 — самостоятельно с последующей проверкой на интерактивной доске;

№ 191.

Задание на дом

П. 9, 10, № 190, 192, 193.

Урок 3

Тема: «Решение задач»

Цели:

— дать начальные сведения об этапах статистического исследования: сбор, систематизация и анализ статистических данных;

— продемонстрировать удобные способы упорядочивания и систематизации больших объемов информации.

Проверка домашнего задания

Три ученика пишут решение на доске.

Устная работа

1. Какие этапы статистического исследования вы использовали при выполнении заданий № 190, 192, 193?

[Сбор и обработку статистических данных.]

2. По таблице результатов измерения температуры воздуха (в градусах Цельсия) в течение второй декады марта найдите размах, моду, медиану и среднее арифметическое.

Число	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Температура	–3	–1	–2	0	0	1	2	2	2	4

Дайте определение этих характеристик.

Решение задач

№ 173, 175, 176.

Самостоятельная работа

Заполните таблицу своих отметок за прошлую неделю по всем предметам.

Предметы	Отметки			
	«2»	«3»	«4»	«5»
Русский язык				
Литература				
Алгебра				
Геометрия				
Английский язык				
Физика				
История				
Обществознание				
Биология				
География				
Информатика и ИКТ				

1. Найдите среднее арифметическое, моду и медиану.

2. Сформулируйте три вопроса к данной таблице и запишите их.

Задание на дом

Подготовьте материал для выполнения исследовательской работы по изученной теме в индивидуальных картах.

Урок 4
Исследовательская работа

Цели:

— рассмотреть различные способы представления информации;

— объективно оценить собственные достижения в учебе.

Устная работа

Повторить, что называется средним арифметическим, размахом, медианой и модой.

Заполнение индивидуальных карт исследовательской работы

1. Выписанные ранее данные своей успеваемости внести в таблицу по образцу, выведенному на интерактивную доску.
2. Заполнить в таблице второй столбец.

Неделя	Количество отметок	Отметка				
		«1»	«2»	«3»	«4»	«5»
1-я						
2-я						
3-я						
4-я						
5-я						
6-я						
ФИО учащегося						

3. Составить упорядоченный ряд отметок, выставленных в дневник за шесть недель II четверти.
4. Вычислить среднее арифметическое, результат округлить до десятых.
5. Найти моду этого ряда.
6. Найти медиану этого ряда.
7. Найти размах этого ряда.
8. Представить данные таблицы в виде столбчатой диаграммы (1-й вариант), в виде круговой диаграммы (2-й вариант).
9. Ответить письменно на *вопросы*:

— В какую неделю я учился лучше всего?

— В какую неделю я учился хуже всего?

— Какие отметки я получал чаще всего?

Собрать заполненные индивидуальные карты исследовательской работы для последующей проверки.

Литература

1. *Жилина В., Яценко О.* Статистические характеристики // Математика, 2010, № 15.

2. *Панищева О.В.* Математика в стихах. Задачи, сказки, рифмованные правила. — Волгоград: Учитель, 2009.

ФОТО НА КОНКУРС

Математическая игротека — внеклассное мероприятие для шестиклассников

Автор: Н.Г. Соколова, средняя школа № 641, г. Санкт-Петербург

Л. ДЕНИСОВА,
г. Саратов

УМНОЖЕНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

За неделю до проведения урока учащиеся делятся на пять групп. Каждая группа получает задание: найти метод умножения натуральных чисел, который редко используется в повседневной жизни, и представить его одноклассникам.

Ход урока

Цель урока: способствовать углублению знаний учащихся по теме урока на основе самостоятельно полученных знаний.

Ученики садятся по группам. Урок сопровождается заранее подготовленной презентацией.

Теоретический бой

Ответьте на вопросы:

- Какие числа называются натуральными?
- Как называются компоненты при умножении?
- Как найти неизвестный множитель?
- Какие свойства умножения вам известны?
- Верно ли, что если число умножить на 1, то оно не изменится?
- Произведение каких двух одинаковых множителей равно 121?
- Представьте число 64 в виде произведения двух различных множителей всеми возможными способами.

Проверка домашнего задания

Два ученика делают короткие сообщения по темам «Кто такой Пифагор?», «Таблица Пифагора».

Таблица Пифагора

	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

К материалу есть приложение на CD-диске.

Изучение нового материала

Учащиеся по группам рассказывают о способах умножения натуральных чисел. Приводят примеры.

Группа 1. Таблица Оконешникова.

49	56	63	56	64	72	63	72	81
28	35	42	32	40	48	36	45	54
07	14	21	08	16	24	09	18	27
28	32	36	35	40	45	42	48	54
16	20	24	20	25	30	24	30	36
04	08	12	05	10	15	06	12	18
07	08	09	14	16	18	21	24	27
04	05	06	08	10	12	12	15	18
01	02	03	02	04	06	03	06	09

842 · 9 =

72
+36
+18

7578

7	8	9
4	5	6
1	2	3

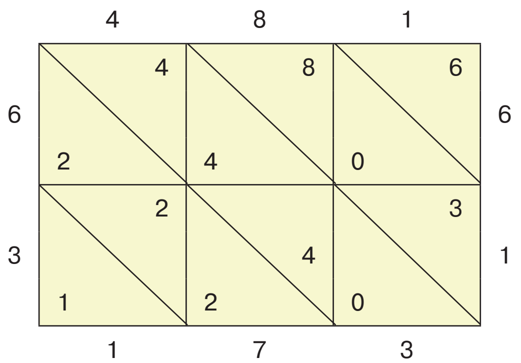
Группа 2. Арабский способ умножения.

$$4568 \cdot 347 = 1\,585\,096$$

	4	5	6	8	
1	12	15	18	24	3
5	16	20	24	32	4
8	28	35	42	56	7
	5	0	9	6	

Группа 3. Индийский способ умножения.

$$481 \cdot 36 = 17\,316$$



Группа 4. Русско-крестьянский способ.

36 · 16 = 576

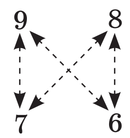
36	16
72	8
144	4
288	2
576	1

18 · 21 =
= 288 + 72 + 18 =
= 378

18	21
36	10
72	5
144	2
288	1

Группа 5. Умножение крестиком.

$$98 \cdot 76 = 7448$$



$$8 \cdot 6 = 48$$
$$7 \cdot 8 + 9 \cdot 6 + 4 = 114$$
$$9 \cdot 7 + 11 = 74$$

Закрепление

Каждая группа получает задание:

1. Выполните действия:

$$163 \cdot 99 + 163 \cdot 17.$$

2. Найдите корень уравнения

$$(y + 15) : 16 = 17.$$

3. Фрекен Бок напекла плюшек. Малыш взял для себя и своих друзей 18 плюшек, а Карлсон в 14 раз больше. После чего осталось только 3 плюшки. Сколько плюшек испекла Фрекен Бок?

Указание. При умножении использовать любой из предложенных методов.

Подведение итогов

Учитель проверяет задания. Выясняет, какие трудности испытывали учащиеся. Ученики говорят о том, что рассмотренные способы умножения не всегда удобны, так как некоторые из них требуют дополнительных чертежей и затрат времени. Формулируется вывод о том, что в школе изучается самый рациональный способ умножения, но методы математики настолько разнообразны, что всегда есть возможность найти другие пути решения.

Н. ЧАНИЛОВА,
г. Саратов

Тема урока:

«МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ»

Предварительно класс разделен на четыре группы. Каждая группа выполняет проект по заданной теме и готовит отчет в виде презентации. Темы проектов:
— «Метод замены переменной»;
— «Метод разложения на множители»;
— «Однородные тригонометрические уравнения»;
— «Уравнения с параметрами».

Ход урока

Цели урока: обобщить, систематизировать и углубить имеющиеся у школьников знания о методах решения тригонометрических уравнений.

Тип урока: обобщение и систематизация знаний с элементами исследования и применением компьютерных технологий.

На этом этапе подготовки каждая группа получает «Лист планирования», который заполняет во время работы над проектом.

Лист планирования

Номер группы	
Тема проекта	
Роли учащихся в группе	
Руководитель группы	
Служба учета времени	
Организатор (менеджер проекта)	
Оформители	
Докладчик	

1. Исследуйте на четность функцию:

а) $y=\arccos x^2+\frac{\pi}{8}$; б) $y = 2x^3\arccos x^6$;

в) $y=\frac{\operatorname{arctg} x}{x^4}$; г) $y = \arcsin x + \operatorname{arctg} x$.

2. Имеет ли смысл выражение:

а) $\arccos\sqrt{5}$; б) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$;

в) $\arcsin\left(3-\sqrt{20}\right)$; г) $\arccos\left(-\sqrt{3}\right)$?

3. Вычислите:

а) $\operatorname{arctg} 1$; б) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; г) $\arccos(-1)$.

К материалу есть приложение на CD-диске.

Каждая группа задает вопросы, подготовленные к уроку.

Примерные *вопросы*:

— В каких точках график функции $y = \operatorname{tg} x$ имеет вертикальные асимптоты?

— Какие частные случаи существуют при решении простейших тригонометрических уравнений?

— Когда уравнение вида $\sin x = a$ не имеет решений?

— Какая из тригонометрических функций четная? Каким свойством обладает график четной функции?

— Дайте определение арккосинуса числа x.

Защита групповых проектов

Докладчик от каждой группы представляет отчет о проделанной работе. Другие группы участвуют в обсуждении и решении, делая записи в тетрадях, задавая дополнительные вопросы. Учитель же направляет дискуссию в нужном направлении.

Самостоятельная работа в группах

Задача руководителя группы состоит в том, чтобы грамотно распределить обязанности между всеми членами группы.

Вариант 1

Решите уравнение (1–5).

1. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.

3. $\sin x = -\sqrt{3}\cos x$.

4. $\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$.

5. $(2\cos x - 1)\sqrt{-\sin x} = 0$.

Вариант 2

Решите уравнение (1–5).

1. $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

2. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

3. $\sin 2x = -\cos 2x$.

4. $\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$.

5. $(2\sin x + 1)\sqrt{-\cos x} = 0$.

Вариант 3

Решите уравнение (1–5).

1. $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

2. $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$.

3. $\cos x - 3\sin x = 0$.

4. $2\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 1$.

5. $\left(2\sin x - \sqrt{3}\right)\sqrt{-\cos x} = 0$.

Вариант 4

Решите уравнение (1–5).

1. $\operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3}$.

2. $4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$.

3. $\sin 2x + \cos 2x = 0$.

4. $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$.

5. $\left(2\cos x + \sqrt{2}\right)\sqrt{-\sin x} = 0$.

Ребята оценивают работу соседних групп, выставляя оценки в «Оценочный лист».

Оценочный лист

	1-я группа	2-я группа	3-я группа	4-я группа
Защита проекта				
Докладчик владеет терминологией, которую использует в своем проекте				
Докладчик смог доказать, что разработанная им структура оптимальна для решения поставленной задачи				
Группа смогла ответить на все вопросы, поставленные конкурентами и преподавателем				
Положительные моменты работы группы				
Недостатки в работе группы				
Пожелания				
Примечание. Отметки выставляются по пятибалльной системе				

А. НОВОСЕЛЬСКАЯ,
г. Москва

ТАБЛИЦЫ РАЦИОНАЛЬНОГО СЧЕТА

Письменные работы и устные ответы учащихся на уроках математики демонстрируют низкий уровень вычислительных навыков. Для изменения этой ситуации я разработала таблицы рационального счета, некоторые начинаю использовать уже с 4-го класса. Предлагаю их читателям журнала. Применение приведенных в статье таблиц и схем позволяет в значительной степени развить вычислительные умения учащихся, а заодно и повысить у них интерес к изучению математики.

1. Таблица удвоения чисел (используется, например, при вычислениях по формуле периметра прямоугольника в 4-м классе).

2. Квадраты чисел, оканчивающихся на 5. Эта таблица подходит и для учеников начальной школы, и для пятиклассников, так как для ее создания надо знать только простейшую таблицу умножения чисел в пределах сотни. А изучать ее надо поэтапно: начиная с 15 и до 95.

$15^2 = 225$;	$45^2 = 2025$;	$75^2 = 5625$;
$25^2 = 625$;	$55^2 = 3025$;	$85^2 = 7225$;
$35^2 = 1225$;	$65^2 = 4225$;	$95^2 = 9025$.

Очевидно, что результат возведения в квадрат чисел, оканчивающихся на 5, оканчивается на 25. Чтобы получить число, которое нужно подставить перед числом 25 справа от знака равенства, надо число, стоящее перед цифрой 5 слева от знака равенства, умножить на следующее за ним число в натуральном ряду. Например, $75^2 = 5625$. Для получения результата 7 умножено на 8 — это 56, после него приписано 25 (всегда!).

3.

$$105^2 = 11\,025. \qquad (*)$$

Число 110 получается путем умножения $11 \cdot 10$, а не $10 \cdot 11$, так как здесь лучше применить переместительный закон умножения.

4. При изучении распределительного закона умножения надо научить учащихся умножать на 8, 9, 11, 12, представляя числа в следующем виде:

$11 = 10 + 1$; $\quad 12 = 10 + 2$;
$9 = 10 - 1$; $\quad 8 = 10 - 2$.

В этом случае автоматически повторяется таблица удвоения чисел.

5. Далее надо учить наизусть таблицу квадратов натуральных чисел от 11 до 20 при прохождении темы «Степень. Ква-

К материалу есть приложение на CD-диске.

драт и куб числа». Полезно знать таблицу степени числа 2 с показателем от 1 до 10, а также 3^2, 3^3, 3^4 (это то же, что 9^2), 3^5, 4^2 (это то же, что 2^4), 4^3, 4^4 (это то же, что и 16^2, и 2^8), 4^5 (это то же, что 2^{10}), 5^2, 5^3, 5^4 (это то же, что 25^2), 6^2, 6^3, 7^2, а вот число $7^3 = 7^2 \cdot 7$ лучше считать как $(50 - 1) \cdot 7$, 8^2, 8^3 (это то же, что 2^9), 9^2 (это то же, что 3^4).

Ученики начинают увлекаться подобной игрой. А нам только этого и надо!

6. Распространим правило возведения в квадрат чисел, оканчивающихся на 5, рассмотренное в пункте 2, для чисел от 115 до 185.

$115^2 = 13\,225$,

$11 \cdot 12 = 11 \cdot (11 + 1) = 11^2 + 11 = 121 + 11 = 132$,

или

$11 \cdot 12 = 11 \cdot (10 + 2) = 110 + 22 = 132$.

$125^2 = 15\,625$ ($12 \cdot 13 = 12^2 + 12 = 156$);

$135^2 = 18\,225$ ($13 \cdot 14 = 13^2 + 13 = 182$);

$145^2 = 21\,025$ ($14 \cdot 15 = 14^2 + 14 = 210$);

$155^2 = 24\,025$ ($15 \cdot 16 = 15^2 + 15 = 240$);

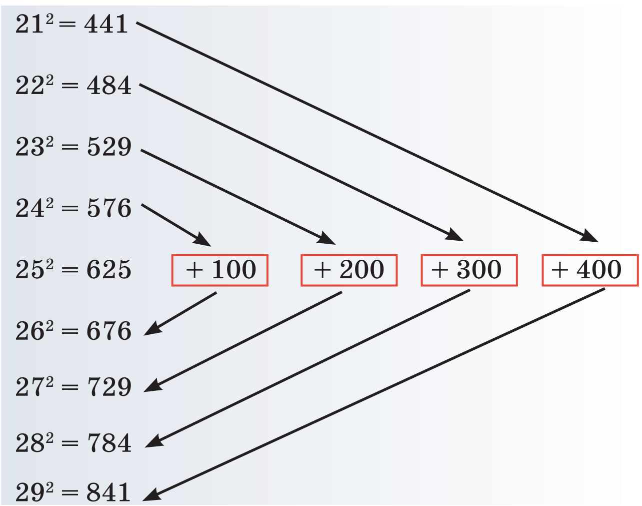
$165^2 = 27\,225$ ($16 \cdot 17 = 13^2 + 16 = 272$);

$175^2 = 30\,625$ ($17 \cdot 18 = 17^2 + 17 = 306$);

$185^2 = 34\,225$ ($18 \cdot 19 = 18^2 + 18 = 342$).

Для того чтобы возводить в квадрат числа, оканчивающиеся на 5, от 115 до 185, достаточно знать квадраты чисел от 11 до 18, а распределительное свойство умножения относительно сложения и вычитания изучалось ранее в главе «Упрощение выражений».

7. Как изучить таблицу квадратов от 21 до 29? Самое легкое — это $21^2 = 441$. Для сравнения вспомним, что $12^2 = 144$. Ведь 21 — это число 12, которое записано справа налево. И их квадраты записываются, как зеркальное отображение. Сама схема подсказывает!



Основное в этой таблице — это $25^2 = 625$ (ученики уже с этим знакомы), это центральная часть схемы. Далее:

- 24 на 1 меньше, а 26 на 1 больше, чем 25, поэтому, запомнив 576 (результат возведения в квадрат 24), прибавляем к нему 100, чтобы получить 26^2, то есть 676;
- 23 на 2 меньше, а 27 на 2 больше, чем 25, поэтому, запомнив результат 529 (возведения в квадрат числа 23), прибавляем к нему 200, чтобы получить 27^2, то есть 729;
- 22 на 3 меньше, а 28 на 3 больше, чем 25, поэтому, запомнив результат 484 (возведения в квадрат числа 22), прибавляем к нему 300, чтобы получить 28^2, то есть 784;
- 21 на 4 меньше, а 29 на 4 больше, чем 25, поэтому, запомнив результат 441 (возведения в квадрат числа 21), прибавляем к нему 400, чтобы получить 29^2, то есть 841.

У учеников начинает работать зрительная память!

8. Продолжаем изучать таблицу:

$195^2 = 38\,025$ ($19 \cdot 20 = 19 \cdot 2 \cdot 10 = 380$), применяется таблица удвоения и умножение на 10;

$205^2 = 42\,025$ ($20 \cdot 21 = 21 \cdot 2 \cdot 10 = 420$), применяется таблица удвоения и умножение на 10.

9.

$215^2 = 87\,025$ ($21 \cdot 22 = 21^2 + 21 = 441 + 21 = 462$),

то есть надо знать таблицу квадратов от 21 до29.

$225^2 = 50\,625$ ($22 \cdot 23 = 22^2 + 22 = 484 + 22 = 506$);

$235^2 = 55\,225$ ($23 \cdot 24 = 23^2 + 23 = 529 + 23 = 552$);

$245^2 = 60\,025$ ($24 \cdot 25 = 24^2 + 24 = 576 + 24 = 600$);

$255^2 = 65\,025$ ($25 \cdot 26 = 25^2 + 25 = 625 + 25 = 650$);

$265^2 = 70\,225$ ($26 \cdot 27 = 26^2 + 26 = 676 + 26 = 702$);

$275^2 = 75\,625$ ($27 \cdot 28 = 27^2 + 27 = 729 + 27 = 756$);

$285^2 = 81\,225$ ($28 \cdot 29 = 28^2 + 28 = 784 + 28 = 812$).

10. $295^2 = 46\,225$ ($29 \cdot 30 = 29^2 + 29 = 841 + 29 = 870$), как в пункте 9,

или

$29 \cdot 30 = 29 \cdot 3 \cdot 10 = 870$,

или

$29 \cdot 30 = (30 - 1) \cdot 30 = 900 - 30$.

$305^2 = 93\,025$ ($30 \cdot 31 = 31 \cdot 3 \cdot 10 = 930$);

$315^2 = 99\,225$ ($31 \cdot 32 = 31 \cdot (30 + 2) = 930 + 62 = 992$).

11. Часто в упражнениях встречаются три основных произведения:

$5 \cdot 2 = 10$;

$25 \cdot 4 = 100$;

$125 \cdot 8 = 1000$.

И это все можно учить в I полугодии 5-го класса, чтобы далее применять в теме «Десятичные дроби».

Например:

$2\cdot5=10$	$25\cdot4=100$	$125\cdot8=1000$
$0{,}2\cdot5=1$ $2\cdot0{,}5=1$ $0{,}02\cdot5=0{,}1$ $2\cdot0{,}05=0{,}1$ $0{,}02\cdot0{,}05=$ $=0{,}0001$	$2{,}5\cdot4=10$ $25\cdot0{,}4=10$ $2{,}5\cdot0{,}4=1$ $0{,}25\cdot4=1$ $25\cdot0{,}04=1$	$12{,}5\cdot8=100$ $1{,}25\cdot8=10$ $0{,}125\cdot8=1$ $125\cdot0{,}8=100$ $125\cdot0{,}08=10$ и т.д.

12. Необходимо знать наизусть основные случаи перевода обыкновенных дробей в десятичные. Например.

Обязательные для запоминания:

$\frac{1}{2}=0,5;$ $\quad\frac{1}{4}=0,25;$ $\quad\frac{1}{5}=0,2;$

$\frac{3}{4}=0,75;$ $\quad\frac{2}{5}=0,4;$

$\frac{1}{8}=0,125;$ $\quad\frac{3}{5}=0,6;$

$\frac{4}{5}=0,8.$

Желательно знать:

$\frac{3}{8}=0,375;$ $\quad\frac{5}{8}=0,625;$ $\quad\frac{7}{8}=0,875.$

13. При изучении темы «Проценты» в 5-м классе я предлагаю выучить соответствующие соотношения между процентами и обыкновенными дробями.

$1\% — \frac{1}{100};$ $\quad 25\% — \frac{1}{4};$ $\quad 20\% — \frac{1}{5};$

$10\% — \frac{1}{10};$ $\quad 50\% — \frac{1}{2};$ $\quad 40\% — \frac{2}{5};$

$75\% — \frac{3}{4};$ $\quad 60\% — \frac{3}{5};$

$80\% — \frac{4}{5}.$

14. Желательно в 6-м классе научить учащихся умножать на 5 следующим образом: сначала умножить на 10, а затем разделить пополам. Здесь пригодится в качестве повторения таблица удвоения чисел. Деление на 5 происходит в обратном порядке; сначала удваиваем число, а затем результат делим на 10.

ФОТО НА КОНКУРС

А Вы умеете рисовать по координатам?

Автор: Л.Г. Егорова, Емёткинская средняя школа, Козловский район, Чувашская Республика

В. ДУБРОВСКИЙ,
г. Москва

ДИНАМИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ С «МАТЕМАТИЧЕСКИМ КОНСТРУКТОРОМ»

Фото Н. Куксиной

Эпизод 6. Следы на экране

Программы динамической геометрии позволяют увидеть траектории, «следы», движущихся объектов. След точки — это то, что в геометрии принято называть ее «геометрическим местом» (в компьютерных программах вместо этого громоздкого и несколько анахроничного термина стали иногда использовать английское, а точнее, греческое слово «локус», от которого, собственно, и произошло наше ГМТ). «Задачи на ГМТ» — самое очевидное, но вовсе не единственное применение следов. Намного интереснее их эвристическая функция, которую мы и продемонстрируем с помощью следующего примера.

Задача 1. Внутри угла AOB дана точка M. Требуется соединить стороны угла отрезком так, чтобы точка M делила его пополам.

Это довольно легкая задача, и ее решение можно записать в две строки. Мы уделим ему больше места, чтобы рассказать, как провести в классе вместе с учениками очень простые компьютерные эксперименты, с помощью которых можно не только увидеть ответ, но и догадаться до решения задачи, и даже до того, как его обосновать.

Модель с данными (углом и точкой) здесь построить совсем легко. Попробуем решить задачу экспериментально: возьмем точку X на стороне OA угла, проведем прямую XM и отложим на ней отрезок $MY = XM$ (рис. 1). Теперь подвинем точку X так, чтобы точка Y попала на сторону OB, — вот и получился нужный отрезок!

Хотя проку от такого «решения», казалось бы, немного, но оно предстанет в другом свете, если «подкрасить» точку Y, включив для нее рисование следа. Выполнив наш бесхитростный «эксперимент» еще раз (рис. 2), мы увидим, что Y рисует прямую! Теперь искомое построение стало очевидным: берем какие-нибудь два положения X_1 и X_2 точки X, строим для них соответствующие точки Y_1 и Y_2 и находим точку Y_0 пересечения прямых Y_1Y_2 и OB. Это и будет один из концов искомого отрезка. И сразу возникает законный вопрос: как это доказать?

К материалу есть приложение на CD-диске.

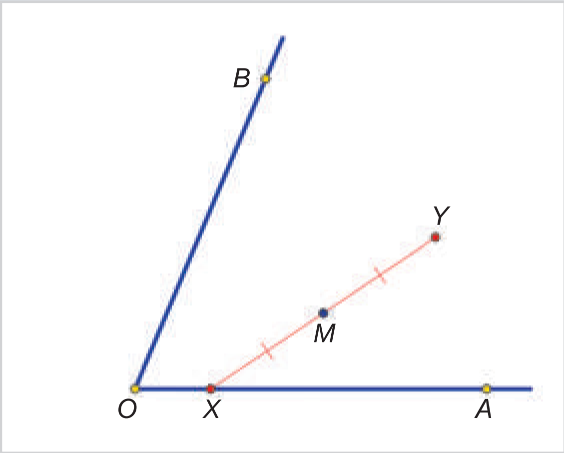


Рис. 1

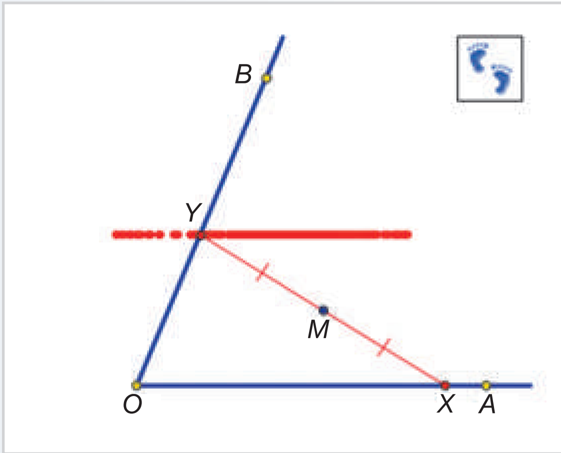


Рис. 2

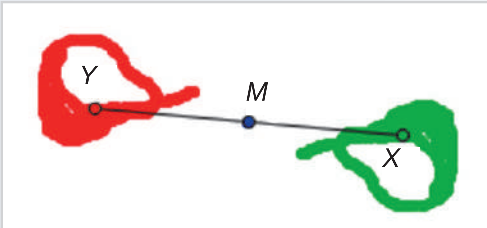


Рис. 3

Собственно говоря, нам нужно доказать, что геометрическим местом точки Y является прямая, а точнее, луч (параллельный стороне OA). Хотя в данном случае это легко сделать с помощью самых простейших средств — свойств параллелограммов; мы используем более «продвинутый» метод — метод преобразований. Он позволяет, действуя так же, как в нашей простой задаче, решить множество других задач того же типа, хотя порой и совсем по-другому звучащих.

Итак, давайте выясним, каким преобразованием связаны точки X и Y. Построим еще раз, отдельно, отрезок XY с фиксированной серединой M. Обратим внимание, что строить его нужно в порядке, описанном выше: сначала поставить точку M, потом X и потом построить Y (если построить отрезок XY и взять его середину M, то такой «экспериментальный прибор» работать не будет, так как M будет зависеть от Y, а не наоборот). Включим рисование следов для точек X и Y и нарисуем какую-нибудь фигурку точкой X. Мы увидим (рис. 3), что точка Y рисует ту же самую фигурку, только перевернутую, точнее, симметричную первой относительно точки M. В этом-то и дело: очевидно, Y получается из X симметрией относительно M, и, следовательно, когда точка X пробегает сторону угла — луч OA, точка Y пробегает луч, симметричный OA относительно M.

Приведем еще несколько задач, которые можно решить аналогичным образом.

Задача 2. Через общую точку двух окружностей проведите прямую так, чтобы окружности высекали на ней равные, но не совпадающие хорды.

Задача 3. Даны прямая и две окружности по разные стороны от нее. Постройте квадрат так, чтобы две его противоположные вершины лежали на окружностях, а две другие вершины — на прямой.

Задача 4. Даны три параллельные прямые. Постройте равносторонний треугольник так, чтобы на каждой из прямых лежала одна его вершина.

Задача 2 аналогична задаче 1, только точки X и Y нужно строить не на двух лучах (сторонах угла), а на двух окружностях. Задача 3 тоже сводится к построению точек X и Y на данных окружностях, но в ней точки должны быть симметричны относительно данной оси (а не центра, как в задачах 1 и 2; см. рис. 4). Наконец, в задаче

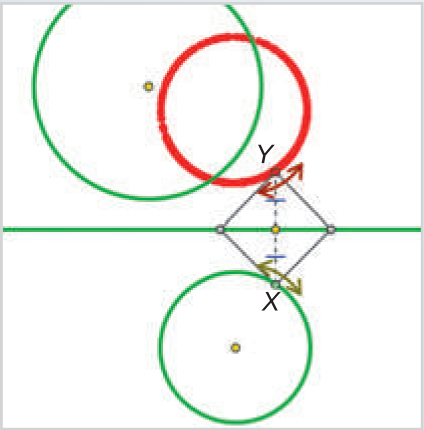


Рис. 4

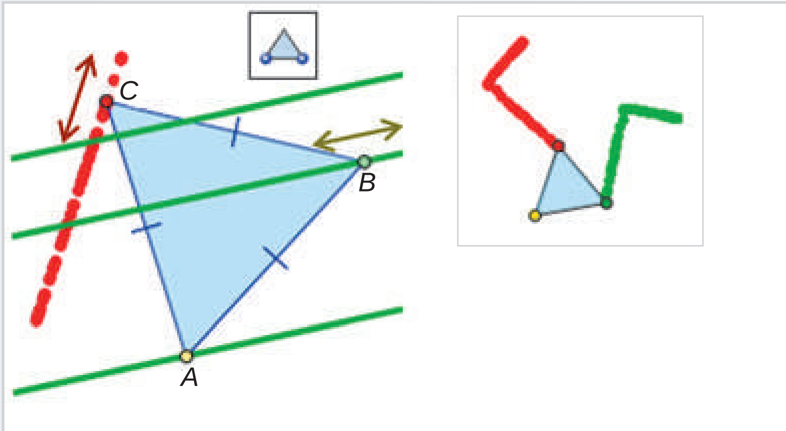


Рис. 5

4 вершину A искомого треугольника ABC можно взять на любой из прямых произвольно и зафиксировать; тогда вершина B будет переходить в C при повороте на 60° вокруг A. На рисунке 5 показаны моменты компьютерного исследования этой задачи с помощью следов, соответствующие аналогичным моментам в решении задачи 1. Конструирование моделей станет совсем простым, если воспользоваться инструментом для построения правильного треугольника по двум вершинам, который находится в выпадающем списке инструментов построения многоугольников на инструментальной панели (а также в меню *Построения*).

Описанный метод применим к множеству задач, например, к большинству содержательных задач на построение с помощью преобразования в учебнике геометрии Л. С. Атанасяна и др. Но иногда не так уж легко догадаться, что та или иная задача решается этим методом. Подумайте, например, как с его помощью решить классическую задачу о построении треугольника по трем медианам (она сводится к построению отрезка с данной серединой и концами на двух данных окружностях). Много других примеров приведено в статье автора «Преобразования плоскости в задачах на построение» в журнале «Квант», 1987, № 8 (старые номера «Кванта» выложены в Интернете).

ФОТО НА КОНКУРС

Самая интересная книга для будущего военного – учебник алгебры!

Автор: Н.Э. Васильченко, учитель математики лицея при Гомельском инженерном институте Министерства по чрезвычайным ситуациям Республики Беларусь

А. ПОЛОВИНКИН,
В. ШАРИЧ,
г. Долгопрудный,
Московская обл.

ЗНАНИЯ ЧЕРЕЗ ИНТЕРНЕТ

Миссия Центра дистанционного обучения «100EGE.ru» в том, чтобы соединить высокую концентрацию хороших преподавателей в столице и развитие коммуникационных технологий в одно решение. Профессиональные ученые-преподаватели, оставаясь жить в столице, проводят занятия у себя в кабинете перед web-камерой, а любой школьник из России или зарубежья может подключиться к этим занятиям.

Востребованность

Добротное образование — залог успеха в жизни. Сейчас принято хвалить советскую школу — мол, были первыми в мире по уровню школьного образования. Также сейчас принято ругать современную школу — мол, уже даже не входим в десятку. И выпускники ничего не знают, ничего не умеют.

Однако в этом ничего удивительного нет. В советские времена действовала система «распределения» после вуза: надо было ехать туда, куда скажут. Благодаря этой системе способные выпускники столичных вузов отправлялись в глубинку, и страна равномерно процветала. Нынешние времена способствуют исключительно тому, что способные выпускники столичных вузов, приехавшие учиться из регионов, стараются всеми силами остаться в столице. Их можно понять: и интереснее, и прибыльнее, и уровень жизни другой, «европейский».

Поэтому мы сталкиваемся с тем, что в регионах способным школьникам зачастую не у кого учиться. И дело не столько в том, что не всегда уровень учителя соответствует уровню ребенка; мы прекрасно знаем, что в регионах есть множество превосходных преподавателей, многие из них — наши друзья. Однако школьный учитель должен думать и о себе и своей семье (помните, какая зарплата у школьного учителя?), а это значит, что для него основной доход — это репетиторство либо работа в компании, не связанной с образованием. И тут уже нет сил и времени, чтобы заниматься дополнительно с талантливыми, равно как нет сил и времени, чтобы заниматься с отстающими. В нынешней школе все настроено *против* детей, выбивающихся из общего канона.

К тому же современные нововведения и реформы образования могут и, скорее всего, приведут к резкому ухудшению обстановки в школах. Однако обсуждение грядущих перемен — не предмет данной статьи. Об этом достаточно говорится и в Интернете, и по телевидению, и в прессе.

В то же время на дворе XXI век — век информационных технологий. Интернет, электронная почта, сотовая связь. Подростки не представляют жизни без компьютера, а в сайтах ориентируются лучше, чем в улицах собственного города. Виртуальная жизнь становится все более реальной: онлайн-покупки, онлайн-общение… Это и удобно, и безопасно — можно лишний раз не выходить из дому. Информационный диаметр мира стал близок к нулю: общение в режиме реального времени на большие расстояния —

явление нормальное, хотя еще двадцать лет назад мобильные телефоны были у единиц. Нам представляется, что современные школьники должны воспринимать обучение через Интернет даже более естественно, нежели в классе. Не говоря об эффективности — ведь тут не получится отвлекаться, перешептываясь с соседом по парте. А увлечь заинтересованного школьника — это задача, с которой наши преподаватели прекрасно справляются уже потому, что это их призвание.

Миссия Центра дистанционного обучения «100EGE.ru» заключается в том, чтобы соединить эти два обстоятельства — высокую концентрацию хороших преподавателей в столице и развитие коммуникационных технологий — в одно решение. Профессиональные ученые-преподаватели, оставаясь жить в столице, проводят занятия у себя в кабинете перед web-камерой с микрофоном и наушниками, а любой школьник из России или зарубежья может подключиться к этим занятиям, слышать и видеть преподавателя, задавать ему и отвечать на его вопросы, то есть речь идет о полном подражании уроку в классе. В основном мы работаем с преподавателями МГУ, МФТИ или ВШЭ.

Становление

Проект зародился на кафедре высшей математики при участии кафедры общей физики МФТИ весной 2009 г. Анализ существующих систем онлайн-обучения показал, что, как правило, преподаватель на подобных занятиях использует планшетные технологии и заранее заготовленные методические материалы. Все это облегчает нагрузку на пропускную способность Интернета, но делает присутствие преподавателя на занятии номинальным. Поэтому было решено использовать реальное изображение преподавателя на фоне классической меловой доски. При этом достигается эффект присутствия, так как проводимое занятие практически не отличается от привычного школьного, и слушателю не нужно привыкать к новым форматам. Изначально занятия проводились только по математике для учащихся 8–11-х классов школ города Москвы. При этом в школу приезжал студент Физтеха, который выполнял две функции: настраивал оборудование (Интернет, нетбук, проектор привозились с собой) и следил за порядком в классе во время занятия, а после занятия отвечал на вопросы школьников и получал обратную связь. Осенью 2009 г. начались занятия по физике, а весной 2009 г. стало возможным школьникам к занятиям подключаться из дома. «Домашнее» подключение можно считать новым витком развития центра.

В начале осени 2010 г. в Центре дистанционного обучения произошел кризис: не были выполнены поставленные на лето задачи по написанию сайта и единой web-системы проведения занятий. Был выбор: или ждать еще год, или сделать все возможное в кратчайшие сроки. Мы выбрали второй вариант. За месяц был написан сайт, приведены в порядок методические программы по математике, физике, добавлен новый предмет — информатика. При поддержке МФТИ были проведены бесплатные занятия для слушателей, находящихся в школах, а в зимнюю студенческую сессию — онлайн-консультации по математике и физике для студентов I–III курсов МФТИ. Количество студентов на консультациях превышало 200 человек; это больше, чем может с комфортом разместиться в любой учебной аудитории.

В течение всего года проводились регулярные занятия для 8–11-х классов по математике, для 9–11-х классов — по информатике и физике. Занятия по математике и физике проводились отдельно по базовому и повышенному уровням.

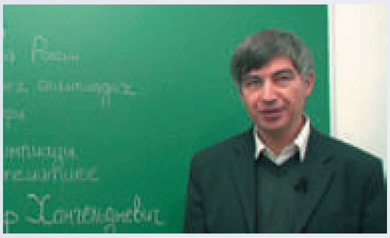
В декабре – январе совместно с МФТИ на базе тестирующей системы 100EGE.ru была проведена онлайн-олимпиада «Физтех»-2011, в начале весны мы провели подготовку к очному этапу олимпиады «Физтех», а под конец учебного года — экспресс-подготовку к ЕГЭ (математика, физика, информатика, русский язык) для учащихся 11-х классов и к ГИА (математика, русский язык) для учащихся 9-х классов. Кроме этого, на базе ЦДО проводились открытые (доступные всем) разборы регионального этапа Всероссийской олимпиады по математике и по физике, разборы олимпиад «Покори Воробьевы горы» и «Физтех».

Весной 2011 г. на базе системы 100EGE.ru проводились дистанционные занятия СУНЦ МГУ при поддержке компании «Яндекс», в них принимали участие призеры Всероссийской олимпиады по математике.

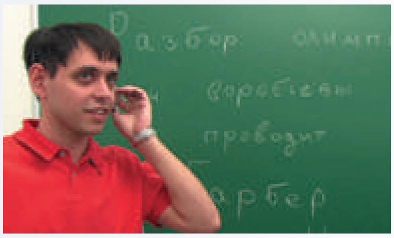
Также весной 2011 г. были проведены первые занятия по русскому языку, где была апробирована технология по выведению текста на доску по принципу субтитров в фильмах. Были сомнения, что занятия по русскому языку с использованием меловой доски будут столь же эффективны, как занятия по математике, физике и информатике. Тем не менее эксперимент прошел успешно, собрали большую аудиторию и обозначили перспективы развития ЦДО. Осенью 2011 г. в нашем центре появятся занятия по русскому языку для школьников 8–11-х классов; их будет вести Людмила Викторовна Великова, автор школьных пособий и учебников, книг, на которых не стоит официальных грифов, но которые есть почти в каждой школе. А в перспективе — занятия по обществознанию.

Преподаватели

Все наши преподаватели — профессионалы и в науке, и в педагогике. Среди них есть такие яркие деятели математического образования как:



Агаханов Назар Хангельдыевич, к.ф.-м.н., руководитель сборной России и председатель консультативного совета Международных олимпиад по математике



Гарбер Алексей Игоревич, к.ф.-м.н., младший научный сотрудник МГУ, ассистент МФТИ, член методической комиссии, жюри и тренерского совета Всероссийской олимпиады по математике

Кожевников Павел Александрович, к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики МФТИ, тренер и заместитель руководителя сборной России на Международных олимпиадах по математике

Подлипский Олег Константинович, к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики МФТИ, председатель жюри 11-го класса Всероссийской олимпиады по математике

Процесс

Занятие начинается с того, что школьник, зарегистрировавшись в системе, заходит в свой личный кабинет и запускает определенную программу на своем компьютере. Преподаватель в это время находится в студии. В назначенный момент начинается занятие. Это обычное занятие, преподаватель рассказывает материал, иногда спрашивает мнение учеников или формулирует им задачку, выслушивает ответ или отвечает на вопросы. Разница лишь в том, что все наши преподаватели умеют доступно и интересно объяснять сложные вещи. Подбор преподавателей — наш конек.

Занятия по физике сопровождаются показом опытов (в записи), демонстрирующих применение на практике теоретического материала, разобранного на занятии. Преподаватель в режиме реального времени комментирует происходящее на экране и отвечает на вопросы слушателей.

После окончания занятия школьники могут приступить к выполнению проверочного задания. Специально разработанная тестирующая система и специально подобранные задачи позволяют закрепить полученные знания и выявить непонятные места, о которых можно спросить на следующем занятии. Все результаты хранятся в личном кабинете и позволяют отслеживать успеваемость.

Обучаясь в ЦДО, можно приблизиться к решению нескольких проблем: подготовка к ЕГЭ и поступлению в вуз, поднятие своего уровня или ликвидация пробелов. Конечно, мы можем лишь дополнить школьное образование. Поэтому участие дешево и доступно: заведомо дешевле репетиторства и не нужно никуда ехать.

Планы

Прошло два года с момента возникновения решимости создать Центр дистанционного обучения; прошел год с момента запуска проекта на полную мощь. Это был трудный год: необходимо было принимать важные решения, с нуля наполнять базу, формировать коллектив преподавателей, решать множество технических и идейных трудностей. Однако можно сказать, что год удался. Сформировался дружный коллектив преподавателей; разработаны программы подготовки «на все случаи жизни»: к ЕГЭ, к вузовским олимпиадам; есть удобная тестирующая система, наполненная хорошими задачами.

Мы постоянно что-то меняем в проекте, что-то добавляем, что-то убираем, чтобы он стал удобнее и полезнее. Появляются новые дисциплины, новые программные решения. В 2011/12 учебном году мы будем проводить бесплатные занятия по математике и физике углубленного уровня для школ России. С подробностями такого сотрудничества можно ознакомиться на нашем сайте. Также в этом учебном году в нашем центре будет осуществляться подготовка к вузовским олимпиадам «Ломоносов»-2012, «Покори Воробьевы горы»-2012, «Физтех»-2012. На онлайн-занятиях преподаватели разберут все типы задач, встречающиеся на этих олимпиадах. В течение года мы проведем серию бесплатных разборов этапов олимпиад. Подробное расписание смотрите на нашем сайте.

Приглашаем подключиться к проекту! Заходите на http://100EGE.ru, регистрируйтесь и участвуйте в занятиях.

Т. КАЧУРИНА,
г. Лесосибирск,
Красноярский край

Фото автора

ЛЕТНЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

В современных условиях развития образования в России актуальным является создание условий для дополнительного образования, ориентированного на свободный выбор подростком различных видов и форм деятельности, формирование его собственных представлений о мире, развитие познавательной мотивации и способностей личности.

Сейчас получили достаточное распространение такие формы дополнительного образования, как выездные интенсивные школы; чаще всего это летние школы.

На базе средней школы № 5 г. Лесосибирска из учащихся 5, 7 и 8-х классов был сформирован профильный отряд «Летняя математическая школа». Занятия проводились в компьютерном классе на базе мастерских школы № 5 и в здании школы № 6.

Летняя математическая школа (ЛМШ) — образовательная структура, предоставляющая дополнительное образование в области математики и информатики, реализующая работу по социализации подростков и являющаяся экспериментальным полигоном для отработки новых технологий педагогической, социальной, методической работы.

Цель работы школы: создание условий для освоения способов и методов решения математических заданий различной степени трудности с учетом возрастных особенностей учащихся; расширение математических знаний, получаемых учащимися в школе; ознакомление с миром профессий.

Задачи:

— обучение школьников различным приемам и способам решения олимпиадных задач;

— формирование математической культуры учащихся;

— проведение экскурсий;

— формирование здорового образа жизни, основ безопасности жизнедеятельности.

В результате обучения школьники познакомились с различными методами и способами решения математических задач, освоили приемы поиска информации в сети Интернет. Учащиеся научились работать над проектами с помощью Н.И. Патрушевой — библиотекаря школы; основным приемам поиска информации в системном каталоге, справочниках, электронных энциклопедиях их научила заведующая детской городской библиотекой М.Н. Яськова; поближе познакомиться с основными этапами исследовательской деятельности им помогла учитель химии Л.Н. Антипова.

С целью формирования опыта творческого общения проводились коллективные занятия.

«Чтобы научиться решать задачи, нужно их решать». Следуя этому правилу, в летней школе проведены различные математические соревнования:

— устные и письменные личные олимпиады;

— устные командные олимпиады;

— математические конкурсы;

— математические бои;

— математические викторины.

Задачи, предлагаемые на соревнованиях, обсуждались на последующих занятиях.

В рамках занятий школы проведена экскурсия в Лесосибирский педагогический институт — филиал Сибирского федерального университета — и встреча со студентами физико-математического факультета под руководством декана Е.Н. Яковлевой. Учащиеся посетили редакцию газеты «Новости Лесосибирска», молодежный центр, Лесосибирское телевидение, хлебозавод ООО «Импульс» и везде увидели применение знаний математики в представленных профессиях.

С целью изучения правил пожарной безопасности была организована экскурсия в пожарную часть пос. Новоенисейск.

За время работы школы были проведены два конкурса: аппликации из геометрических фигур и костюмов из нетрадиционных материалов. В ходе проведения Дня науки на конкурсе презентаций ребята и их научные руководители (О.К. Троицкая, Л.Н. Антипова, Т.В. Качурина, Н.В. Назмутдинова) представили свои работы. Вместе с преподавателем русского языка и литературы Н.А. Армаш участники летней школы «побывали» на планете Фантазия, придумали карты своих стран, облик жителей и их языки. С целью сохранения здоровья учащихся в перерывах между занятиями организовывались подвижные игры, конкурсы рисунков на асфальте, проведен День здоровья и спорта.

Опыт организации профильного отряда «Летняя математическая школа» нашел свое продолжение: на базе Лесосибирского педагогического института была организована физико-математическая школа для учащихся 9–11-х классов. В рамках ее работы студенты университета могли попробовать свои силы в проведении занятий для школьников, приобрести опыт преподавания математики, физики и информатики. В будущем мы планируем привлечение студентов к проведению занятий в профильных отрядах летней математической школы. Я думаю, что такое сотрудничество будет способствовать не только формированию образовательной культуры в предметной области, но и повышению качества обученности школьников.

РОССИЙСКИЕ ОТКРЫТЫЕ ЗАОЧНЫЕ КОНКУРСЫ-ОЛИМПИАДЫ ■ 2011–2012

КОНКУРС ПО МАТЕМАТИКЕ ■ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 5 КЛАССОВ «ТАЙНЫ МАТЕМАТИКИ»

ЗАДАНИЯ КОНКУРСА

Условия участия в конкурсе – в предыдущем номере журнала и на сайте http://www.future4you.ru

■ ЗАДАНИЕ 1. СУММА ЦИФР

Найти сумму цифр всех четырёхзначных чисел, которые можно получить, используя только 0, 5, 7 и 3, если цифры в числе не повторяются.

а) 96660; б) 270; в) 180; г) 32220; д) 90.

■ ЗАДАНИЕ 2. СЛАДКОЕЖКА

Малышу 1 января 2010 г. (пятница) подарили мешок с 222 конфетами. Каждый день, начиная с 1 января, он съедал одну конфету.

По воскресеньям к нему прилетал Карлсон, и Малыш угощал его парой конфет. Сколько конфет съел Карлсон?

а) 9; б) 24; в) 52; г) 50; д) 48.

■ ЗАДАНИЕ 3. ПУНКТУАЛЬНОСТЬ

Мои часы спешат на 15 мин. Если я выйду по этим часам в 17.25, то опоздаю на поезд на 10 мин. Во сколько я должен выйти по точным часам, чтобы прийти на поезд на 10 мин. раньше?

■ ЗАДАНИЕ 4. МАТЕМАТИКА НА КАРТЕ

На карте отмечены несколько городов, лежащих на одной прямой. Между ними встречаются расстояния 1, 2, 3, 4 и 5 см. Какое наименьшее количество городов может быть отмечено?

а) 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) 6.

■ ЗАДАНИЕ 5. РАССТАВИТЬ ЗНАКИ

В записи 1 2 3 4 5 6 7 8 9 поставить один знак умножения и один знак деления, чтобы получилось выражение, значение которого 929990.

■ ЗАДАНИЕ 6. ЮНЫЕ СПОРТСМЕНЫ

В 4 классе семеро ребят играют в футбол, 8 – в волейбол и 6 в – баскетбол. При этом и в волейбол и в баскетбол играют 3 человека, и в волейбол и в футбол играют 2 человека; и в баскетбол и в футбол играют 4 человека; а один мальчик играет и в футбол, и в волейбол, и в баскетбол. Сколько человек не занимаются ни одним из трёх видов спорта, если всего в 4 классе 25 человек?

а) 4; б) 12; в) 11; г) 13; д) невозможно определить.

■ ЗАДАНИЕ 7. ЧИСЛОВОЙ РЕБУС

ВЕТЕР * ДУЛ = КАРАУЛ

Какая цифра в ребусе соответствует букве «Л»?

а) 0; б) 5; в) 1; г) нет решения; д) 8.

■ ЗАДАНИЕ 8. ЗАМЕНА

Какое максимальное количество цифр в числе 3702812 можно заменить семёрками, чтобы оно по-прежнему делилось нацело на 4?

а) 4; б) 1; в) 6; г) 5; д) 3.

■ ЗАДАНИЕ 9. РАЗНЫЕ СОСЕДИ

Сколькими способами можно выстроить в ряд эти кубики, чтобы одинаковые числа не стояли рядом?

1	3

4	2

2	1

3	4

а) 6; б) 8; в) 10; г) 12; д) 24.

■ ЗАДАНИЕ 10. КРОЛИК-БИЗНЕСМЕН

Винни Пух привёз Кролику некоторое количество капусты. В тот же день Кролик продал 128 кочанов. На следующий день Винни привёз столько капусты, сколько осталось накануне, и Винни продал 250 кочанов. На третий день опять Кролику привезли столько кочанов, сколько оставалось накануне, и он продал 300 кочанов. При этом у него не осталось ни одного кочана капусты. Сколько кочанов привёз Винни Пух в самый первый раз? Ответ запишите в таблицу.

■ ЗАДАНИЕ 11. ВЕСЕННИЙ БУКЕТ

В саду в понедельник распустились 80 тюльпанов и 20 нарциссов. Каждый день, начиная со вторника, 2 тюльпана увядали, а 3 нарцисса распускались. В какой день недели количество цветущих тюльпанов станет равно количеству цветущих нарциссов?

а) Пн; б) Вт; в) Ср; г) Сб; д) Вс.

■ ЗАДАНИЕ 12. КУБИКИ

На этой картинке четыре кубика одинаковые, а пятый – не такой, как все? Какой лишний?

1 2 3 4 5

Заранее благодарим за выполненную работу!

Оргкомитет

Конкурс проводится до **1 декабря**. Таблица для ответов на сайте **http://www.future4you.ru**

МАН «Интеллект будущего» ■ http://www.future4you.ru ■ Тел.: (48439) 97295 ■ 249035, Обнинск, Ленина, 129

КОНКУРС ПО МАТЕМАТИКЕ ■ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 6 КЛАССОВ

«ТАЙНЫ МАТЕМАТИКИ»

ЗАДАНИЯ КОНКУРСА

Условия участия в конкурсе – в предыдущем номере журнала и на сайте http://www.future4you.ru

■ ЗАДАНИЕ 1. ПУТЕШЕСТВЕННИКИ

Чебурашка с крокодилом Геной одновременно вышли от Шапокляк и направились домой. Чебурашка половину времени, затраченного им на переход до дома, шёл по 5км в час, а затем по 4 км в час. Гена первую половину пути шёл по 4 км за час, а потом по 5 км за час. Первым дойдёт до дома:
а) Чебурашка; б) Гена; в) одновременно.

■ ЗАДАНИЕ 2. ИЗМЕНИТЬ ЧАСТНОЕ

Если из делителя вычесть его треть, то частное увеличится:

а) в 2 раза; б) в полтора раза; в) в 3 раза; г) не изменится; д) невозможно определить.

■ ЗАДАНИЕ 3. «РОГАТЫЙ» РЕБУС

Какую цифру можно поставить вместо буквы «р» в ребусе:

БЫК x БЫК = КОРОВКА

а) 2; б) 0; в) 1; г) 3; д) нет решений.

■ ЗАДАНИЕ 4. СПОРТСМЕНЫ

Белоснежка бежит по стадиону навстречу гномам. Её скорость в два раза меньше скорости первого гнома, в три раза меньше скорости второго, в четыре раза меньше скорости третьего и в пять раз меньше скорости четвёртого гнома. Она стартует с ними одновременно, но бежит в противоположную сторону. Сколько раз она встретится с гномами в течение одного круга (встречу на финише не считать), если гномы бегают до тех пор, пока Белоснежка не финиширует?

а) 18; б) 9; в) 10; г) 12; д)14.

■ ЗАДАНИЕ 5. ЗАГАДОЧНАЯ ОКРУЖНОСТЬ

На окружности расставлены семь чисел таких, что разность каждой пары соседних чисел не меньше четырёх, а сумма каждой пары соседних чисел не меньше десяти. Запишите в таблицу ответов минимальную сумму всех семи чисел.

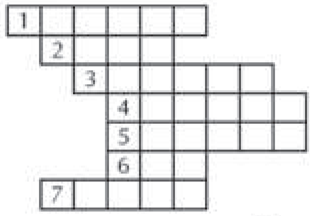
■ ЗАДАНИЕ 6. КУЛИНАРЫ

Незнайка и Кнопочка готовили салат. У них было 8 овощей: перец, лук, огурец, помидор, брокколи, картофель, морковь и укроп. Сколько вариантов салатов из семи овощей можно приготовить, если Знайка поставил им условие, что суммарное количество гласных букв в положенных овощах должно быть не более 16:

а) 8; б) 6; в) 3; г) 7; д) 4.

■ ЗАДАНИЕ 7. МАТЕМАТИКА И ГЕОГРАФИЯ

Отгадайте кроссворд, и в одном из столбцов прочтите слово, которое относится к математике.



1. Столица этого государства – Оттава. 2. Столица одного из Скандинавских государств. 3. Столица этого государства – Каир. 4. Столица Армении. 5. Столица Германии. 6. Столица Италии. 7. Столица Чехии.

■ ЗАДАНИЕ 8. НЕ МЕЛОЧИТЕСЬ

Требуется составить сумму в 99 копеек из 22 монет по 2, 3 и 5 копеек. Сколько пятикопеечных монет потребуется, если хотя бы по одной монете каждого достоинства обязательно присутствует и двухкопеечных монет больше, чем трёхкопеечных?

■ ЗАДАНИЕ 9. СТОРОНЫ СВЕТА

Нарисуйте пять фигур по данному шифру и в таблицу ответов запишите номер лишней фигуры:

1) ЮЮЮВСССЗ; 2) ЗСВВВВЮЗЗЗ;
3) ВССЗЗЮЮВ; 4) СЗЮЮВС; 5) ЮЗСССВЮЮ.

■ ЗАДАНИЕ 10. НЕОБЫЧНЫЙ ПРИМЕР

5 – 4 = ГРОЗА
7 – 5 = СОПЕНИЕ
8 – 6 = ПЛАСТИКА
7 – ? = ПЫЛЕСОС

Вместо «?» надо поставить:

а) 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) 6.

■ ЗАДАНИЕ 12. СЫТЫЕ БЕЛКИ

Четыре белки съели 1999 орехов, каждая не менее 100. Первая белка съела больше всех. Вторая и третья вместе съели 1265 орехов, при этом вторая съела на один больше третьей. Сколько орехов съела первая белка?

Уважаемые друзья!

Если вы хотите заработать дополнительные баллы, то можете выполнить ещё одно задание, размещенное на сайте **http://www.future4you.ru.**

Конкурс проводится до **1 декабря**. Таблица для ответов на сайте **http://www.future4you.ru**

МАН «Интеллект будущего» ■ http://www.future4you.ru ■ Тел.: (48439) 97295 ■ 249035, Обнинск, Ленина, 129

Д. ПРОКОПЕНКО,
Москва

Автор благодарен П.В. Чулкову, А.Д. Блинкову за ценную критику, Ю.А. Блинкову за предоставленные материалы для проведения нескольких занятий кружка.

КРУЖОК «ПЛАНИМЕТРИЯ»

В последние годы наблюдается падение интереса к геометрии и математике вообще. Не обошла эта напасть и нашу школу. Как лечить эту болезнь? Конечно, прежде всего на уроках. Но не только. «Застарелые случаи» (особенно в старших классах) лучше лечить на кружке. При определенной организации занятий учащиеся могут заниматься каждый «в своем темпе» (чего практически невозможно добиться на уроках), и появляется время для ликвидации пробелов. В статье рассказано об организации такого кружка по ликвидации пробелов.

Кружок предназначен для учащихся 9–11-х классов. На занятиях принята так называемая «система листков». Каждому ученику выдается листок с 10 задачами по определенной теме, которые расположены по возрастанию трудности. В листок желательно включать яркие задачи, с короткими и красивыми решениями, имеющими интересные «продолжения» в других задачах. Первые несколько занятий связаны с темой «Окружность». На эту тему легко подобрать красивые задачи практически любой степени трудности.

Основная часть занятия проходит так: учащиеся решают задачи и сдают их преподавателю устно. После того как решены все задачи «листка» (может быть, кроме некоторых, обозначенных звездочкой), ученики переходят к следующему листку и так далее.

Первое, что пришлось отрабатывать с учащимися в ходе занятий, — это умение делать грамотный чертеж, который *действительно* помогает решить задачу. Вначале приходилось долго обсуждать, как правильно построить чертеж, с чего начать.

Типичная ситуация: ученик читает условие — «Вокруг треугольника описана окружность...» — и рисует треугольник, а затем пытается нарисовать окружность, описанную около треугольника и т.д. Если взять циркуль, на построение чертежа теряется много времени. Гораздо проще сделать наоборот — нарисовать окружность и вписать в нее треугольник.

Или, например, в условии той же задачи говорится о биссектрисе внутреннего угла. Можно делить угол пополам на глазок, но гораздо точнее соединить вершину и середину противолежащей дуги. И таких деталей довольно много. Через некоторое время, после того как были «открыты» эти и другие удобные правила, качество чертежей заметно улучшилось.

Более того, стало возможным принимать решения некоторых задач без подробной записи, если на чертеже отображен весь ход решения, отмечены равные углы, стороны и т.д.

В начале каждого занятия обычно 10–20 мин. обсуждаем решение наиболее трудных задач прошлого занятия. Если такой необходимости нет, то доказываем разными способами теоремы школьного курса или красивые и простые геометрические факты, на подробный разбор которых на уроке учителю времени не хватает. Поскольку задачи простые, в их решении принимают

К материалу есть приложение на CD-диске.

участие практически все учащиеся. Различные методы доказательства позволяют связать данную теорему с другими, указать ее место в общем курсе и установить новые для учащихся факты. Бывает и наоборот, в новой конструкции можно разглядеть знакомые очертания, тогда это повод для повторения и очередная тренировка в умении видеть чертеж. Также полезно в качестве разминки решить одну-две простые олимпиадные задачи.

Дополнительные построения выглядят для школьников как фокус, поэтому целесообразно уделять им больше внимания. С этой целью можно рекомендовать книгу И. Кушнира «Альтернативные способы решения задач (геометрия)», изданную в Киеве.

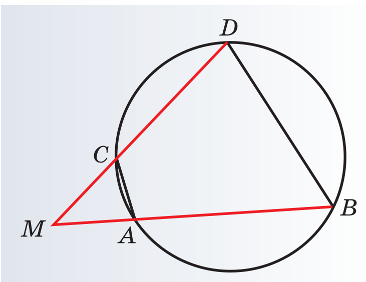
В качестве примера организации занятий приведу занятие по теме **«Степень точки относительно окружности»**. В ходе изучения темы вводится и используется при решении задач понятие радикальной оси (радикальной точки) двух (трех) пересекающихся окружностей как множества точек, степени которых относительно окружностей равны. В итоге мы получили мощный инструмент для доказательства того, что три точки лежат на одной прямой, три прямые проходят через одну точку и еще один признак вписанного четырехугольника.

По этой теме проводится два занятия (и, соответственно, два листка с заданиями). На первом занятии собраны задачи попроще, решение которых, как правило, не требует много времени, на втором — более трудные.

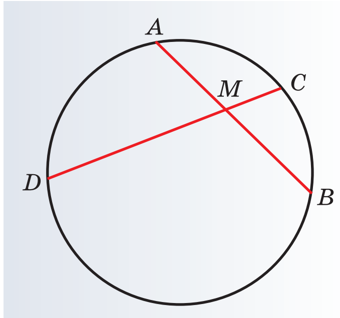
В начале занятия целесообразно повторить теорему о произведении отрезков секущей к окружности и теорему о пропорциональных отрезках в круге (прямая и обратная).

Введем для удобства обозначение $\sigma(M;\ \omega) = MA \cdot MB$ для некоторой секущей AB к окружности ω, проходящей через точку M.

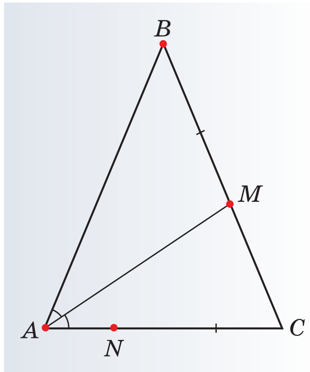
Теорема. Величина $\sigma(M;\ \omega) = MA \cdot MB$ **постоянна для любых секущих,** проведенных из точки M к ω (для любых хорд, проходящих через точку M, если точка M внутри окружности).



Обратная теорема о секущих (признак вписанного четырехугольника). Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке M. Тогда если выполняется равенство $MA \cdot MB = MC \cdot MD$, то точки A, B, C и D лежат на одной окружности. Доказательство проводим устно на доске.



Пример 1. (*Киев, 2008 г., международный фестиваль.*) В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AM. На луче CA отложен отрезок CN, равный BM. Докажите, что точки A, B, M и N лежат на одной окружности.



Доказательство. По свойству биссектрисы:

$$\frac{CM}{BM} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{BC}.$$

Следовательно,

$$CM \cdot BC = AC \cdot BM = AC \cdot CN,$$

и, по обратной теореме о секущих, точки A, N, M и B лежат на одной окружности. Что и требовалось доказать.

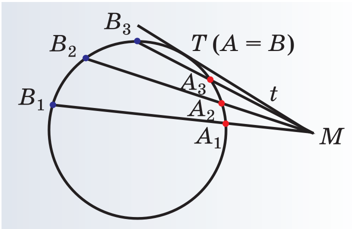
После чего переходим к решению задач из листка.

Задачи первого листка

Задача 1. Пусть степень точки имеет положительное значение t^2. Дайте геометрическую интерпретацию длины t (теорема о касательной и секущей).

Задача 2. Степень точки A относительно окружности равна $d^2 - R^2$, где d — расстояние от точки A до центра окружности, R — ее радиус.

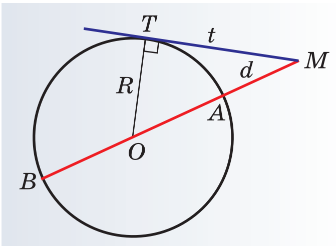
Когда большая часть учеников решит эти задачи, мы обязательно обсуждаем решения вместе. Рассмотрим решение задач 1 и 2 с общей точки зрения. У нас есть постоянная величина $\sigma(M;\ \omega)$ (произведение отрезков секущих), как ее посчитать, какой в ней геометрический смысл? В таких довольно общих теоремах полезно рассмотреть частные случаи. Выберем наиболее удобные для расчета положения секущей. Какие это положения?



Первое — это *предельное положение*, когда секущая переходит в касательную. Начнем поворачивать прямую AB вокруг точки M. Точки A и B начнут сближаться; когда они совпадут, секущая AB перейдет в касательную AT и $MA = MB = MT$. При этом величина $\sigma(M;\ \omega) = MA \cdot MB$ остается постоянной, поэтому $\sigma(M;\ \omega) = MT^2$. Следовательно, $\sigma(M;\ \omega)$ равна квадрату касательной к окружности (первая задача).

Мы доказали теорему о касательной и секущей. Надо сказать, что подобные рассуждения непривычны для школьников 8–9-х классов, поскольку здесь нет ни равенства, ни подобия треугольников, поэтому вызывают повышенный интерес. Особенно их впечатляет фраза «Касательная — это предельное положение секущей». Это позволяет по-новому взглянуть на такое привычное понятие, как касательная к окружности.

Рассмотрим еще один важный частный случай, когда секущая направлена вдоль *оси симметрии*, то есть через точку M и центр окружности.



Тогда

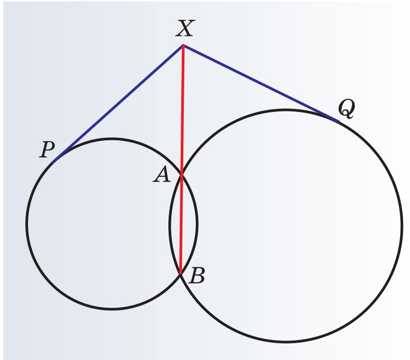
$$\sigma(M;\ \omega) = MA \cdot MB = (d + R) \cdot (d - R) = d^2 - R^2.$$

Мы подсчитали величину $\sigma(M;\ \omega)$ двумя способами и получили разные ответы, нет ли здесь противоречия? Проверим. Из прямоугольного треугольника MOT получаем, что $d^2 - R^2 = t^2$. Величина $d^2 - R^2$ как раз и называется степенью точки относительно окружности. Для удобства будем так называть и произведение отрезков секущих. Заметим, что если точка M лежит внутри окружности, то величина $d^2 - R^2$ становится отрицательной, поэтому в этом случае при решении задач удобно рассматривать величину

$$\sigma(M;\ \omega) = MA \cdot MB = R^2 - d^2.$$

Пример 2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Точка X лежит на прямой AB вне окружностей. Докажите, что длины всех касательных, проведенных из точки X к окружностям, равны.

Решение. По теореме о касательной и секущей (задача 1) $XP^2 = XA \cdot XB = XQ^2$. Следовательно, $XP = XQ$ для любой точки прямой AB. Мы использовали очень важную идею, что степени точек прямой AB относительно этих окружностей равны. Запомним это.

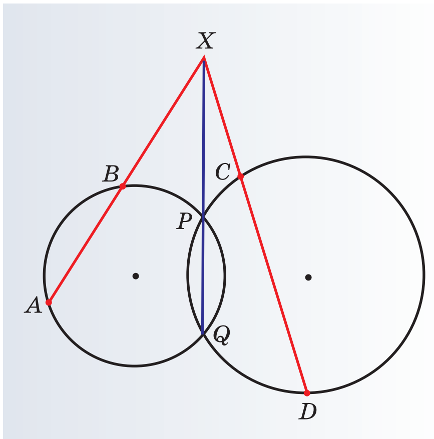


Верна и более общая теорема.

Теорема. Множество точек, для которых степени относительно двух неконцентрических окружностей равны, является прямой, перпендикулярной их линии центров.

Эта прямая называется **радикальной осью** этих окружностей. Мы рассмотрели только частный случай, когда окружности пересекаются.

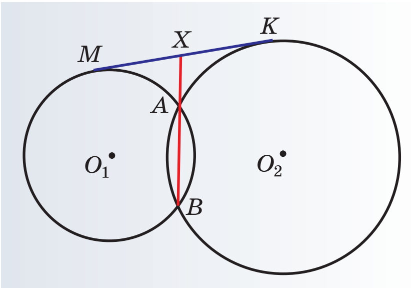
Задача 3. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Точка X лежит на прямой PQ, но не на отрезке PQ. Пусть точки A и D лежат на разных окружностях. Прямые XA и XD пересекают окружности второй раз в точках B и C соответственно. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.



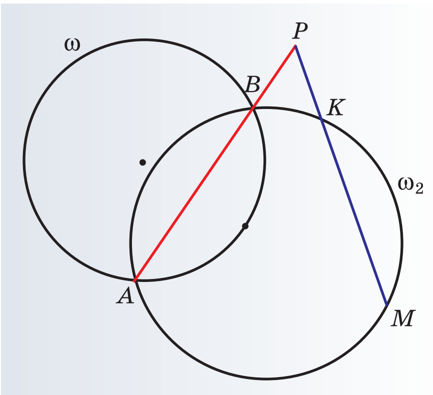
Решение. $XA \cdot XB = XQ \cdot XP = XC \cdot XD$. Следовательно, по признаку вписанного четырехугольника, точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

Задача 4. Две окружности пересекаются в точках A и B; MK — общая касательная к ним. Докажите, что прямая AB делит отрезок MK пополам.

Решение. По задаче 3 имеем: $XM = XK$.



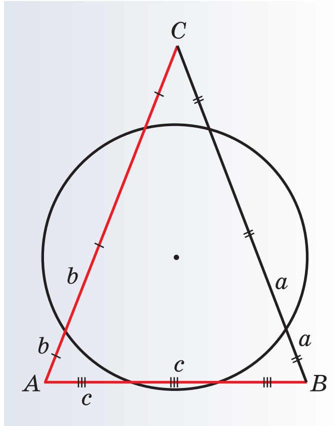
Задача 5. Дана окружность ω и точки P и K вне ее. Через точку P проведена секущая к окружности ω, пересекающая ее в точках A и B. Докажите, что вторая точка пересечения прямой PK с окружностью, проходящей через точки K, A, B, не зависит от выбора секущей AB.



Решение. Проведем через точку P секущую PB и пусть точка M — вторая точка пересечения прямой PK с окружностью ω_2, проходящей через точки K, A, B. Тогда, по теореме о секущих, $PK \cdot PM = PB \cdot PA$. Последнее произведение есть степень точки P относительно окружности ω и не зависит от выбора секущей PB. Следовательно, величина $PK \cdot PM$ постоянна для любых секущих PA, проведенных к окружности ω. Поскольку точки P и K фиксированны, то и длина отрезка PM не меняется, то есть точка M тоже фиксированна. Следовательно, все окружности ω_2 проходят через одну и ту же точку. Доказано.

Задача 6. Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник правильный.

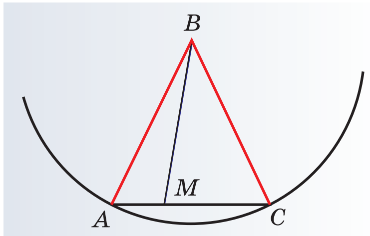
Решение. Рассмотрим секущие к окружности, проходящие через точку A. Тогда $b \cdot 2b = c \cdot 2c$.



Следовательно, $b = c$. Аналогично докажем, что $a = c$. Поскольку $a = b = c$, то треугольник правильный.

Задача 7. Доказать, что если на основании AC равнобедренного треугольника ABC взять произвольную точку M, то

$$BC^2 - BM^2 = AM \cdot CM.$$



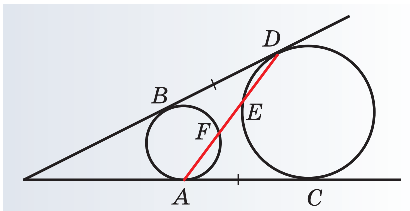
Решение. Рассмотрим окружность с центром в точке B и радиусом BC. Тогда, по задаче 2, степень точки M равна

$$AM \cdot CM = BC^2 - BM^2.$$

Что и требовалось доказать.

Заметим, что здесь мы использовали еще один характерный прием, а именно: построили вспомогательную окружность, которая довольно часто выручает в задачах на равнобедренный треугольник.

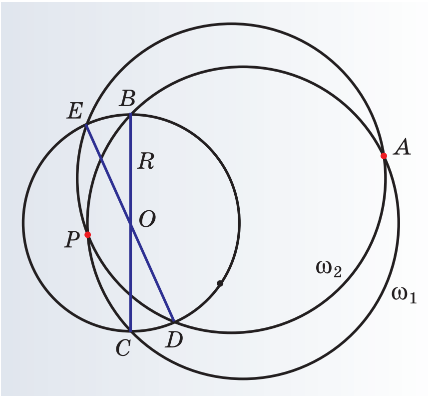
Задача 8. В угол вписаны две окружности. Одна из них касается сторон угла в точках A и B, а другая — в точках C и D. Докажите, что на прямой AD эти окружности высекают равные хорды.



Решение. Степень точки A относительно второй окружности равна $AE \cdot AD = AC^2$, аналогично для точки D: $DF \cdot DA = BD^2$. Поскольку $AC = BD$ (почему?), то $AE = DF$. Следовательно, $AF = DE$.

Задача 9. Доказать, что все окружности, проходящие через данную точку A и пересекающие данную окружность в диаметрально противоположных точках, проходят одновременно через некоторую точку P, отличную от A.

Решение. Рассмотрим две такие окружности, ω_1 и ω_2, которые пересекают данную окружность в точках B, C, D и E соответственно.



Пусть они второй раз пересекаются в точке P. Степень точки O относительно первой и второй окружностей равна R^2. Следовательно, $O \in AP$, при этом $OP \cdot OA = R^2$. Поскольку OA и R постоянны, то и точка P на прямой AO фиксирована.

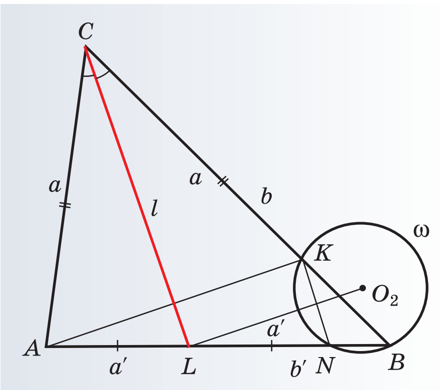
Перед вторым занятием можно доказать формулу длины биссектрисы.

Пример 3. Если CL — биссектриса треугольника ABC, то

$$CL^2 = ab - a'b',$$

где

$$AC = a,\ BC = b,\ AL = a',\ BL = b'.$$



Доказательство. Пусть точки K и N симметричны точке A относительно биссектрисы CL и точки L соответственно. Тогда

$$CK = a \text{ и } LN = a'.$$

Обозначим окружность, описанную около треугольника KNB, как ω, степени точек C и L относительно окружности — как s и s'.

Тогда

$$s = ab = CO_2^2 - R^2 \text{ и } s' = a'b' = LO_2^2 - R^2,$$

где R — радиус окружности ω. Найдем разность:

$$s - s' = ab - a'b' = CO_2^2 - LO_2^2.$$

Докажем, что угол CLO_2 — прямой. $AL = LK = LN$, следовательно, $AK \perp KN$. Окружность с центром в L и радиусом LN и окружность ω имеют общую хорду KN. Следовательно, $LO_2 \perp KN$. Тогда $LO_2 \parallel AK$; $AK \perp CL$, следовательно, $LO_2 \perp CL$. Тогда, по теореме Пифагора,

$$l^2 = CO_2^2 - LO_2^2 = ab - a'b'.$$

Задачи второго листка

1. Радикальные оси трех неконцентрических окружностей пересекаются в одной точке или параллельны.

2. Две окружности касаются внешне в точке K. Через эту точку проведена прямая, которая, пересекаясь с окружностями, образует хорды KP и KQ. Из точек P и Q проведены к окружностям касательные PT_1 и QT_2, где T_1 и T_2 — точки касания. Докажите, что $PT_1^2 + QT_2^2 = PQ^2$.

3. Вершина C прямого угла треугольника ABC лежит внутри окружности с центром O и радиусом R, проходящей через концы гипотенузы AB, CH — высота треугольника ABC. На прямой AB взята точка K так, что $KH = OH$. Найдите CK.

4. В треугольнике ABC угол B — тупой. Постройте на AC точку D такую, что $AB^2 = AD \cdot AC$.

5. Постройте на данной прямой точку, из которой данный отрезок виден под наибольшим углом.

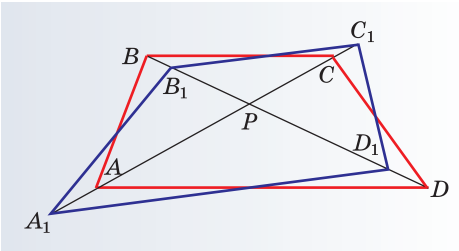
6. Вневписанные окружности треугольника ABC, касающиеся сторон BA и BC, отразили относительно середин этих сторон. Докажите, что общая хорда получившихся окружностей проходит через точку B.

7. В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AB и AC, AH — высота. Окружности, описанные вокруг треугольников BHN и CHM, пересекаются вторично в точке P. Докажите, что отрезок PH проходит через середину MN.

Задачи 6 и 7 взяты из всероссийских олимпиад (10-й и 9-й класс, соответственно). Использование этого метода позволяет участникам кружка решать задачи на олимпиадах разного уровня. Рассмотрим задачу из Турнира городов, 11-й класс.

Пример 4. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$. Точка A_1 — это точка пересечения описанной окружности треугольника BCD с прямой AC, отличная от C. Аналогично определяются точки B_1, C_1, D_1. Докажите, что $A_1B_1C_1D_1$ тоже трапеция.

(Далее приведено решение Стекловой Лидии.)



Решение. Заметим, что точки A_1, B, C, D лежат на одной окружности, поэтому

$$A_1P \cdot PC = BP \cdot PD.$$

Для остальных четверок точек записываем аналогичные равенства:

$$C_1P \cdot PA = BP \cdot PD,\ B_1P \cdot PD = AP \cdot PC,$$
$$D_1P \cdot PB = AP \cdot PC.$$

Разделив первое равенство на второе, а третье на четвертое, получим:

$$\frac{A_1P \cdot PC}{C_1P \cdot PA} = 1,\ \frac{B_1P \cdot PD}{D_1P \cdot PB} = 1.$$

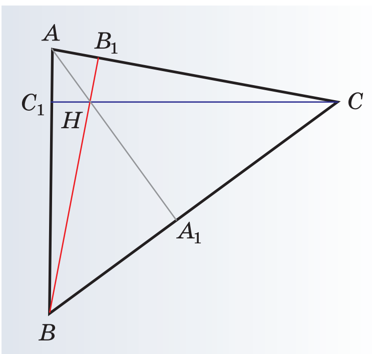
Отсюда следует, что

$$\frac{A_1P}{C_1P} = \frac{AP}{CP} \text{ и } \frac{B_1P}{D_1P} = \frac{BP}{DP}.$$

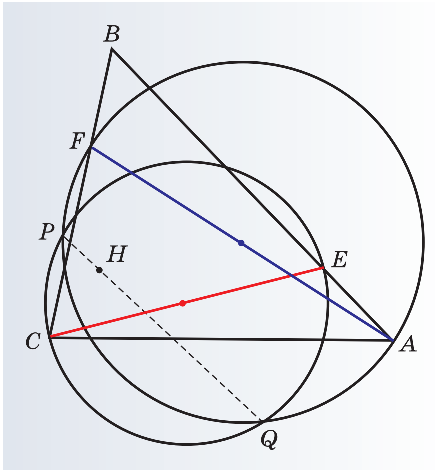
Из подобия треугольников APD и CPB следует равенство $\frac{AP}{CP} = \frac{DP}{BP}$. Следовательно, $\frac{A_1P}{C_1P} = \frac{D_1P}{B_1P}$. А так как $\angle B_1PC_1 = \angle A_1PD_1$, то треугольники B_1PC_1 и A_1PD_1 подобны. Получается, что прямые A_1D_1 и B_1C_1 параллельны. Докажем, что прямые A_1B_1 и C_1D_1 непараллельны. Предположим, что они параллельны. Тогда четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм. Следовательно, P — середина A_1C_1 и B_1D_1. Получается, что P — середина AC и BD. Следовательно, $ABCD$ — параллелограмм, что противоречит условию. Значит, прямые A_1B_1 и C_1D_1 непараллельны. То есть $A_1B_1C_1D_1$ — трапеция, что и требовалось доказать.

Задачи разных листков обычно связаны между собой. Рассмотрим, например, две задачи о свойствах ортоцентра.

Пример 5. Доказать, что произведение длин отрезков, на которые ортоцентр разбивает высоты треугольника, одинаково для всех высот.



Пример 6. Если две окружности построены на двух чевианах как на диаметрах, то их точки пересечения и ортоцентр лежат на одной прямой.



В доказательстве примера 5 используется задача 1 того же листка: *Точка, симметричная ортоцентру относительно стороны, принадлежит описанной окружности*, а также факт, что искомое произведение в два раза меньше, чем степень ортоцентра относительно описанной окружности. В примере 6 (с помощью примера 5) надо доказать, что степени ортоцентра относительно этих окружностей равны. Тем, кто решил эти задачи, предлагается подумать, что будет в случае трех окружностей. Результат они должны сформулировать самостоятельно. На учеников производит сильное впечатление противоречие между сложностью задачи и тем, что они решили ее за несколько минут. Они при этом забывают, что сначала решили целый листок на степень точки, а потом все задачи о свойствах ортоцентра. Такая эмоциональная составляющая способствует повышению интереса к геометрии.

В 10-м классе мы решаем задачи на преобразования. Это очень мощное средство, которое надо уметь применять. По возможности вводятся классические задачи, например, точка Торричелли, задача Фаньяно. В этом случае, конечно, уместно упомянуть авторов, историю задачи.

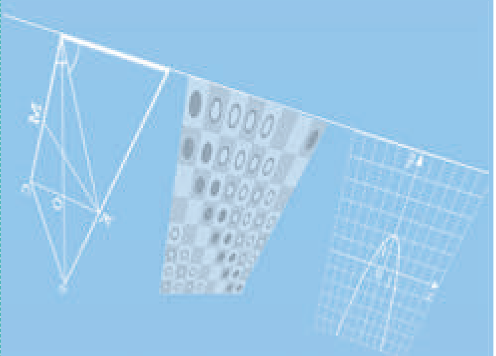
Последние занятия кружка в 9-м классе в конце учебного года мы посвятили повторению. Например, доказывали теорему Птолемея с использованием прямой Симпсона и формулы для сторон педального треугольника; доказали, что высоты треугольника пересекаются в одной точке, используя более привычное доказательство (его называют «способ Гаусса») через серединный треугольник (пересечение серединных перпендикуляров) и через вневписанные окружности (пересечение биссектрис) и др. Некоторым ученикам 9-го класса это принесло пользу на экзамене по геометрии.

А. БЛИНКОВ, О. ГОРСКАЯ,
А. ИВАНИЩУК, П. ЧУЛКОВ,
г. Москва

ТУРНИР АРХИМЕДА

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РЕГАТА

А. Сислей. Регата в Молси. 1874



Календарь математических соревнований турнира Архимеда по традиции открывала математическая регата 9-х классов, которая состоялась 9 октября 2010 года.

В регате 9-х классов участвовало 88 команд из Москвы, Костромы, Переславля и Черноголовки.

Математической литературой (традиционно предоставляемой МЦНМО) были награждены 22 команды, из которых 13 лучших получили также дипломы I, II или III степени. Абсолютным победителем регаты стала одна из команд гимназии № 1514, дипломов первой степени удостоились также еще одна команда гимназии № 1514 и одна из команд школы № 179 (все из Москвы).

Полные итоги регаты опубликованы на сервере МЦНМО (http://www.mccme.ru/olympiads). Там же можно найти материалы регат предыдущих лет, которые ежегодно публикуются и на страницах журнала «Математика». Подробно о том, как проводятся математические регаты, и материалы всех прошедших регат см.: Московские математические регаты / Сост.: А.Д. Блинков, В.М. Гуровиц, Е.С. Горская. — М.: МЦНМО, 2007.

Как обычно, часть заданий придумывалась авторами специально для этой регаты, а остальные являются математическим фольклором или взяты из популярной математической литературы.

Условия задач

Первый тур

(*10 минут; каждая задача — 6 баллов*)

1.1. На координатной плоскости изображен график функции $y = ax^2 + c$ (рис. 1). В каких точках график функции $y = cx + a$ пересекает оси координат?

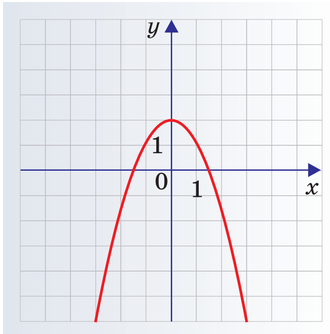


Рис. 1

1.2. В равнобокой трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 12 и 6 соответственно, а высота равна 4. Сравните углы BAC и CAD.

1.3. На доске записаны числа 1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5. Разрешается стереть любые два числа и вместо них записать их разность — неотрицательное число. Может ли на доске в результате нескольких таких операций остаться только число 15?

Второй тур

(15 минут; каждая задача — 7 баллов)

2.1. Известно, что $5(a - 1) = b + a^2$. Сравните числа a и b.

2.2. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 45°, AM и CN — его высоты, O — центр описанной окружности, H — ортоцентр (точка пересечения высот). Докажите, что $ONHM$ – параллелограмм.

2.3. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число $A = n^3 + 12n^2 + 15n + 180$ делится на 23.

Третий тур

(20 минут; каждая задача — 8 баллов)

3.1. Пятеро друзей скинулись на покупку. Могло ли оказаться так, что любые два из них внесли менее одной трети общей стоимости?

3.2. Существует ли прямоугольный треугольник, в котором две медианы перпендикулярны?

3.3. Какое наибольшее суммарное количество белых и черных шашек можно расставить в клетках доски 8×8, так, чтобы выполнялось следующее условие: в каждой горизонтали и в каждой вертикали белых шашек должно быть в два раза больше, чем черных?

Четвертый тур

(25 минут; каждая задача — 9 баллов)

4.1. Для различных положительных чисел a и b выполняется равенство $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}=\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$. Докажите, что a и b — взаимно обратные числа.

4.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle BAC = 20°$, $\angle BCA = 35°$, $\angle BDC = 40°$, $\angle BDA = 70°$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника.

4.3. Найдите все простые числа p, q и r, для которых выполняется равенство $p + q = (p - q)^r$.

Пятый тур

(15 минут; каждая задача — 7 баллов)

5.1. Найдите наибольшее натуральное n такое, что $n^{200} < 5^{300}$.

5.2. В трапеции $ABCD$ биссектриса тупого угла B пересекает основание AD в точке K — его середине, M — середина BC, $AB = BC$. Найдите отношение $KM : BD$.

5.3. Существует ли натуральное число, которое при делении на сумму своих цифр как в частном, так и в остатке дает число 2011?

Ответы, решения, комментарии

1.1. В точках (0,5; 0) и (0; –1).

Так как данный график пересекает ось y в точке (0; 2), то $c = 2$. Кроме того, он проходит через точку (1; 1), значит, $1 = 2 + a$, то есть $a = -1$.

Таким образом, новая функция задается уравнением $y = 2x - 1$. Ее график пересекает ось x в точке (0,5; 0), а ось y – в точке (0; –1).

1.2. Угол BAC больше, чем угол CAD.

Способ I. Так как $AD \parallel BC$, то $\angle CAD = \angle BCA$ (рис. 2). Пусть BH — высота трапеции. Тогда $AH=\frac{AD-BC}{2}=3$, $BH = 4$, следовательно, из прямоугольного треугольника ABH, $AB = 5$.

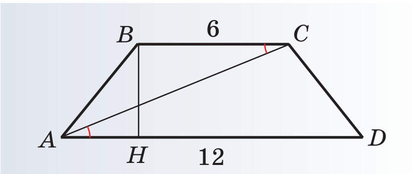


Рис. 2

Таким образом, в треугольнике ABC $BC > AB$, значит, $\angle BAC > \angle BCA$ (против большей стороны треугольника лежит больший угол). Следовательно, $\angle BAC > \angle CAD$.

Способ II. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке E (рис. 3). Так как $BC \parallel AD$ и $BC=\frac{1}{2}AD$, то BC — средняя линия треугольника AED. Вычислив боковую сторону трапеции (аналогично первому способу решения), получим, что $AE = 2AB = 10$.

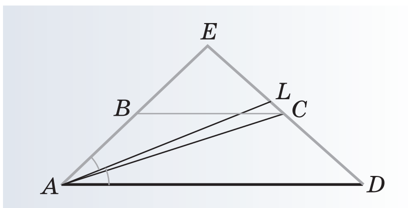


Рис. 3

Проведем биссектрису AL треугольника AED. По свойству биссектрисы $\frac{LD}{LE}=\frac{AD}{AE}=\frac{12}{10}>1$, значит, точка L лежит между точками C и E. Следовательно, $\angle BAC > \angle CAD$.

1.3. Да, может.

Искомая последовательность операций видна из следующей записи:

$$15 = 32 - 16 - (8 - 4 - 2 - 1).$$

Комментарий. Отметим, что в результате указанных операций можно получить любое нечетное число от 1 до 31. Это можно доказать, например, методом математической индукции.

2.1. $a > b$.

Перепишем условие задачи в виде: $b = -a^2 + 5a - 5$. Выясним знак разности $a - b$. Получим:

$$a - b = a + a^2 - 5a + 5 = (a - 2)^2 + 1 > 0.$$

Следовательно, $a > b$.

Комментарий. Если в системе координат $(a; b)$ построить графики функций $b = -a^2 + 5a - 5$ и $b = a$, то первый график располагается ниже, чем второй. Исходя из расположения графиков, можно получить ответ, но строгим доказательством это не является.

2.2. *Способ I.* Проведем серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC данного треугольника, которые пересекаются в точке O (рис. 4). Так как в прямоугольном треугольнике BNC $\angle NBC = 45°$, то $BN = NC$, следовательно, точка N лежит на серединном перпендикуляре NK к стороне BC. Тогда $NO \parallel HM$. Аналогично, рассмотрев прямоугольный равнобедренный треугольник AMB, получим, что $MO \parallel HN$.

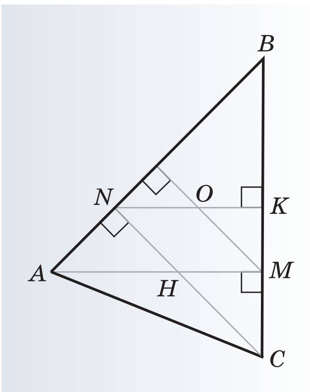


Рис. 4

Таким образом, $ONHM$ — параллелограмм (по определению).

Способ II. Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC (рис. 5). Так как этот треугольник — остроугольный, то ее центр O лежит внутри треугольника, причем треугольник AOC — равнобедренный и $\angle AOC = 2\angle ABC = 90°$. Кроме того, $\angle ANC = \angle AMC = 90°$, поэтому точки N, O и M лежат на окружности с диаметром AC.

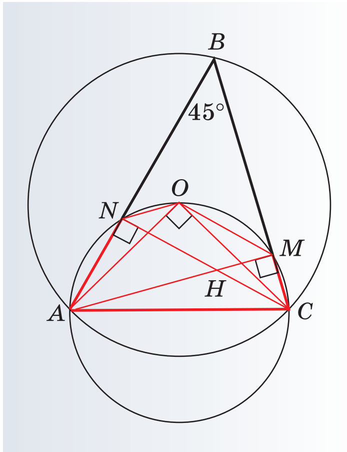


Рис. 5

Тогда

$\angle ONC = \angle OAC = 45°$,

$\angle ONB = \angle BNC - \angle ONC = 45°$,

$\angle MAB = 90° - \angle ABM = 45°$.

Из равенства углов ONB и MAB следует параллельность прямых NO и AM. Аналогично доказывается, что $MO \parallel CN$.

Следовательно, $ONHM$ — параллелограмм.

2.3. $n = 10$.

Разложим данный многочлен на множители способом группировки:

$$n^3 + 12n^2 + 15n + 180 =$$
$$= n^2(n + 12) + 15(n + 12) = (n + 12)(n^2 + 15).$$

Число A делится на простое число 23, если в любом его разложении на натуральные множители присутствует число, делящееся на 23. Наименьшее значение n, при котором первый множитель делится на 23, равно 11, а для второго множителя такое n равно 10.

Комментарий. Возможен также непосредственный перебор всех натуральных значений n от 1 до 10, но он сопряжен с некоторыми вычислительными трудностями. Перебор можно упростить, заменив число 180 на меньшее число, имеющее такой же остаток при делении на 23, например, на –4.

3.1. Нет, не могло.

Пусть друзья внесли a, b, c, d и e рублей соответственно. Тогда общая сумма внесенных денег равна $a + b + c + d + e = S$.

Предположим, что любые два друга внесли меньше, чем $\frac{1}{3}S$ рублей, тогда выполняются неравенства: $a+b<\frac{1}{3}S$, $a+c<\frac{1}{3}S$, …, $d+e<\frac{1}{3}S$ (всего таких неравенств — десять). Складывая их почленно, получим, что $4(a+b+c+d+e)<\frac{10}{3}S$, то есть $0,4S<\frac{1}{3}S \Leftrightarrow 1,2S < S$ — противоречие, так как $S > 0$. Следовательно, указанная ситуация невозможна.

3.2. Да, существует.

Пусть в треугольнике ABC $\angle C = 90°$, CP и BK — медианы, M — их точка пересечения (рис. 6).

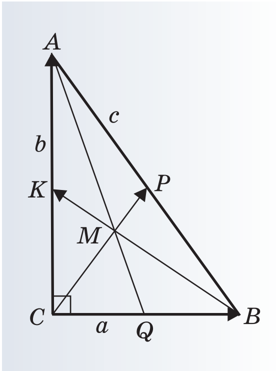


Рис. 6

Способ I. Обозначим: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Тогда

$$CP = \frac{1}{2}c,\ CM = \frac{2}{3}CP = \frac{1}{3}c,\ BK^2 = a^2 + \frac{1}{4}b^2,$$

$$BM^2 = \frac{4}{9}BK^2 = \frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{9}b^2.$$

Отрезки CM и BM перпендикулярны тогда и только тогда, когда $CM^2 + BM^2 = BC^2$, то есть

$$\frac{1}{9}c^2 + \frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{9}b^2 = a^2.$$

Учитывая, что $c^2 = a^2 + b^2$, получим: $\frac{4}{9}a^2 = \frac{2}{9}b^2$, то есть $b = a\sqrt{2}$.

Таким образом, в прямоугольном треугольнике с катетами $CB = a$ и $CA = a\sqrt{2}$ медианы CP и BK перпендикулярны.

Комментарий. Отметим, что медианы прямоугольного треугольника, проведенные к катетам, не могут быть перпендикулярны. Действительно, если AQ — еще одна медиана, то в четырехугольнике $CKMQ$ углы MKC и MQC — острые, а угол KCQ — прямой, значит, $\angle KMQ > 90°$.

Способ II. Пусть $\overline{CB} = \overline{a}$, $\overline{CA} = \overline{b}$, тогда

$$\overline{CP} = \frac{1}{2}\left(\overline{CA} + \overline{CB}\right) = \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b},$$

$$\overline{BK} = \overline{BC} + \overline{CK} = \frac{1}{2}\overline{b} - \overline{a}.$$

Два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. Значит,

$$\overline{CP}\cdot\overline{BK} = \frac{1}{4}\overline{b}^2 - \frac{1}{2}\overline{a}^2 - \frac{1}{4}\overline{a}\cdot\overline{b} = \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}a^2,$$

так как $\overline{a} \perp \overline{b}$ (a и b — модули соответствующих векторов). Следовательно,

$$\overline{CP}\cdot\overline{BK} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}a^2 = 0 \Leftrightarrow b = a\sqrt{2}.$$

Комментарий. Заметим, что можно было сразу привести пример требуемого прямоугольного треугольника, указав отношение его катетов или другую тригонометрическую функцию любого из его острых углов, и доказать, что для такого треугольника выполняется перпендикулярность двух медиан. Для этого, в частности, можно было использовать известный факт, что медианы CP и BK перпендикулярны тогда и только тогда, когда $c^2 + b^2 = 5a^2$. Возможны также аккуратные рассуждения, использующие понятие непрерывности.

3.3. 48 шашек (32 белых и 16 черных).

Заметим, что в любой горизонтали не может быть более двух черных шашек (иначе белых будет не менее шести, а в сумме — не менее девяти), значит, белых шашек — не более четырех. Следовательно, всего черных шашек не более 16, а белых — не более 32.

Один из возможных примеров расстановки 48 шашек, удовлетворяющих условию, — смотри рисунок 7.

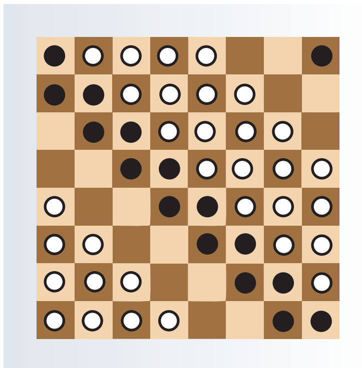


Рис. 7

4.1. Разобьем правую часть исходного равенства на два одинаковых слагаемых и преобразуем его:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} + \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{ab}-a}{(1+a)\left(1+\sqrt{ab}\right)} + \frac{\sqrt{ab}-b}{(1+b)\left(1+\sqrt{ab}\right)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)}{1+a} - \frac{\sqrt{b}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)}{1+b} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(\frac{\sqrt{a}}{1+a} - \frac{\sqrt{b}}{1+b}\right) = 0.$$

Первая скобка равна нулю тогда и только тогда, когда $a = b$, что противоречит условию. Тогда, учитывая, что $a > 0$ и $b > 0$, получим:

$$\frac{\sqrt{a}}{1+a}-\frac{\sqrt{b}}{1+b}=0 \Leftrightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b}+b\sqrt{a}-a\sqrt{b}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(1-\sqrt{ab}\right)=0.$$

Последнее равенство верно тогда и только тогда, когда $a = b$ (что противоречит условию) или $ab = 1$, что и требовалось доказать.

4.2. $75°$.

Докажем, что точка D — центр описанной окружности треугольника ABC. Это можно сделать различными способами.

Способ I. Опишем окружность около треугольника ABC и продолжим отрезок BD до пересечения с этой окружностью в точке K (рис. 8). Так как $\angle BKC = \angle BAC = 20°$, то

$$\angle KCD = \angle BDC - \angle DKC = 20°$$

(угол BDC — внешний для треугольника KDC), следовательно, $DC = DK$.

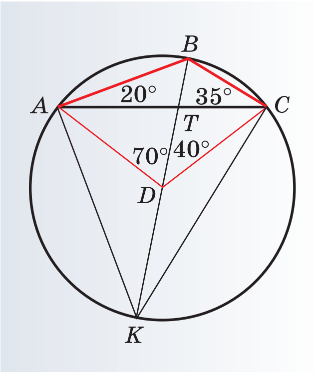


Рис. 8

Аналогично, так как $\angle BKA = \angle BCA = 35°$, а $\angle BDA = 70°$, то $\angle KAD = 35°$, то есть $DK = DA$. Таким образом, D — центр окружности, описанной около треугольника ACK, которая совпадает с окружностью, описанной около треугольника ABC.

Способ II. На луче AD отметим точку M так, что отрезок $DM = DB$ (рис. 9). Тогда

$$\angle DBM = \angle BMD = \frac{1}{2}\angle BDA = 35° = \angle BCA,$$

следовательно, точки A, B, C и M лежат на одной окружности.

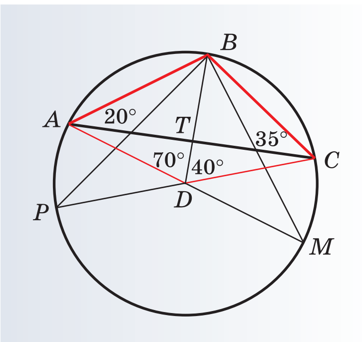


Рис. 9

Аналогично, отметив на луче CD точку P так, что $DP = DB$, получим, что точки A, B, C и P лежат на одной окружности. Так как указанные окружности имеют три общие точки, то эти окружности совпадают, кроме того, точка D равноудалена от точек B, M и P, поэтому она является центром полученной окружности.

Способ III. Центр описанной окружности тупоугольного треугольника ABC лежит в той же полуплоскости относительно прямой AC, что и точка D (см. рис. 8 и 9). Он является пересечением двух ГМТ: из которых отрезок BC виден под углом $\alpha = 2\angle BAC = 40°$, а отрезок AB виден под углом $\beta = 2\angle BCA = 70°$.

В указанной полуплоскости эти ГМТ являются дугами окружностей, которые имеют единственную общую точку. По условию, из точки D эти же отрезки видны под такими же углами, поэтому точка D совпадает с центром описанной окружности треугольника ABC.

Теперь ответим на вопрос задачи. Пусть T — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Из равнобедренного треугольника ADB

$$\angle DBA = \frac{180° - \angle BDA}{2} = 55°,$$

угол BTC — внешний для треугольника BTA, значит,

$$\angle BTC = \angle TAB + \angle ABT = 75°.$$

4.3. $p = 5$, $q = 3$, $r = 3$.

Из условия задачи вытекает, что $p + q$ делится на $p - q$, следовательно, $(p + q) - (p - q) = 2q$ также делится на $p - q$. Если число q — простое, то делителями числа $2q$ могут являться только числа 1, 2, q и $2q$.

Если $p - q = 1$, то левая часть исходного равенства больше правой. Если $p - q = q$, то $p = 2q$, то есть число p не простое. Аналогично, если $p - q = 2q$, то $p = 3q$, то есть и в этом случае p — не простое число. Значит, $p - q = 2$. Тогда исходное равенство примет вид:

$$(q + 2) + q = 2^r \Leftrightarrow q + 1 = 2^{r-1} \Leftrightarrow q = 2^{r-1} - 1.$$

Далее можно рассуждать по-разному.

Способ I. Если $r = 2$, то $q = 1$ — не простое число. Если r – нечетное число, то $(r - 1)$ – четное, тогда $2^{r-1} - 1$ делится на 3. Действительно, если $k \in \mathbf{N}$, то

$$2^{2k} - 1 = 4^k - 1 = (4 - 1)(4^{k-1} + 4^{k-2} + \ldots +1).$$

Таким образом, $q = 3$. Тогда $p = 5$ и $r = 3$.

Комментарий. Доказывать, что $2^{2k} - 1$ делится на 3, можно и другими способами, например, методом математической индукции.

Способ II. Так как

$$q = 2^{r-1} - 1 = \left(2^{\frac{r-1}{2}}\right)^2 - 1 = \left(2^{\frac{r-1}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{r-1}{2}} + 1\right),$$

то q может оказаться простым числом только в случае, когда $2^{\frac{r-1}{2}}-1=1$. Значит,

$$\frac{r-1}{2}=1 \Leftrightarrow r=3.$$

Тогда $q = 3$ и $p = 5$.

5.1. $n = 11$.

Перепишем данное неравенство в виде $(n^2)^{100} < (5^3)^{100}$. Тогда, учитывая, что n — натуральное число, достаточно найти наибольшее натуральное решение неравенства $n^2 < 125$. Так как $11^2 < 125 < 12^2$, то искомое значение равно 11.

5.2. $KM : BD = 1 : 2$.

Так как $\angle ABK = \angle CBK = \angle BKA$, то треугольник ABK — равнобедренный (рис. 10): $AK = AB = BC$. Тогда $ABCK$ — параллелограмм ($BC = AK$, $BC \parallel AK$), и так как $AB = BC$, то $ABCK$ — ромб. Так как $KD = AK = BC$ и $KD \parallel BC$, то $BCDK$ — также параллелограмм.

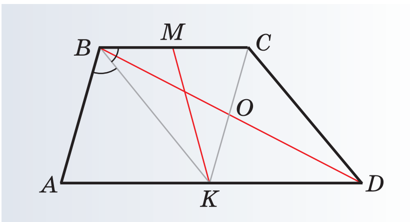


Рис. 10

Пусть O — точка пересечения его диагоналей BD и CK, тогда $BO=\frac{1}{2}BD$. Так как треугольник BCK — равнобедренный ($BC = CK$), то равны его медианы BO и KM, следовательно, $KM=\frac{1}{2}BD$.

5.3. Нет, не существует.

Предположим, что существует натуральное число n с суммой цифр s, которое удовлетворяет условию задачи. Тогда $n = 2011s + 2011$, откуда

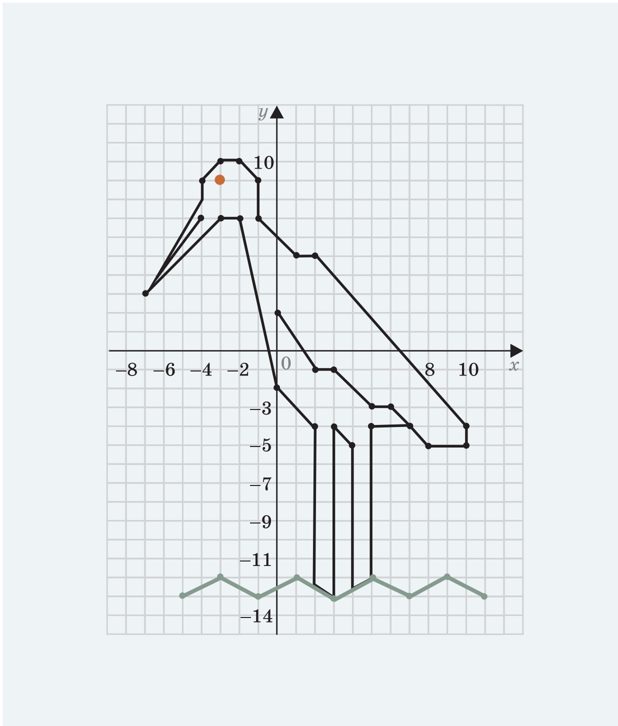
$$n - s = 2010s + 2011.$$

Из обоснования признака делимости на 3 следует, что натуральное число и его сумма цифр имеют одинаковые остатки при делении на 3, поэтому $n - s$ делится на 3. Но число $2010s + 2011$ на 3 не делится, так как $2010s$ кратно 3, а 2011 не кратно 3. Следовательно, равенство $n - s = 2010s + 2011$ выполняться не может, то есть числа n, удовлетворяющего условию задачи, не существует.

ТВОРЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «КООРДИНАТНАЯ ПЛОСКОСТЬ»

Автор: Мартынов Иван.
Учитель: Т.В. Тараканова,
Большетолкайская средняя школа
Самарской области

«Цапля»



(–4; 7), (–7; 3), (–4; 8), (–4; 9), (–3; 10), (–2; 10), (–1; 9), (–1; 7), (1; 5), (2; 5), (10; –4), (10; –5), (8; –5), (7; –4), (5; –4), (5; –12), (4; –12,5), (4; –5), (3; –4), (3; -13), (2; –12,5), (2; –4), (0; –2), (–2; 7), (–3; 7), (–7; 3).

Крыло: (0; 2), (2; –1), (3; –1), (5; –3), (6; –3), (7; –4).

Глаз: (–3; 9).

Болото: (–5; –13), (-3; –12), (–1; –13), (1; –12), (3; –13), (5; –12), (7; –13), (9; –12), (11; –13).

РАБОТА НАД ОШИБКАМИ

Приносим наши извинения авторам статей за ошибку, допущенную в их инициалах: в № 10 (с. 2, 41) следует читать Н. Иофе, в № 12 (с. 2, 16) — М. Иванова.

А. КОРЯНОВ,
А. ПРОКОФЬЕВ,
г. Брянск, г. Москва

Лекция 2

ГОТОВИМ К ЕГЭ ХОРОШИСТОВ И ОТЛИЧНИКОВ

ОТБОР КОРНЕЙ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ (ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБЫ)

Для иллюстрации решения простейших тригонометрических уравнений или неравенств в учебниках используются разные модели: тригонометрический круг или графики тригонометрических функций. В первом случае изображение решений связано с числовой окружностью, во втором — с числовой прямой.

Числовая (или координатная) окружность активно применяется в преподавании тригонометрии, с ее помощью легко демонстрировать множества чисел, объединенных по определенным свойствам. Поэтому рассмотрение примеров в данной лекции будет в основном связано с координатной окружностью. Когда использовать числовую окружность затруднительно, для отбора корней тригонометрического уравнения применяют координатную прямую.

Геометрический способ отбора корней предполагает наличие у учащихся навыков изображения решения простейших тригонометрических уравнений и неравенств на числовой окружности или прямой, поэтому необходимо напомнить им основные действия с точками числовой окружности, связанные с формулами решений простейших тригонометрических уравнений.

Геометрическая иллюстрация решения простейших тригонометрических уравнений

Все числа вида $\alpha + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, соответствуют единственной точке числовой окружности P_α, так как при обходе окружности в положительном или отрицательном направлении на целое число оборотов из данной точки P_α мы приходим в эту же точку.

Уравнения вида $\sin x = a$

Числа вида $\alpha + 2\pi n$ или $-\alpha + \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, на числовой окружности изображаются точкой P_α или точкой $P_{-\alpha+\pi}$ соответственно. Эти точки расположены на окружности симметрично относительно оси y. Эти два множества чисел можно записать в виде $(-1)^n\alpha + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Причем если n — четное число, то получаем числа $\alpha + 2\pi k$, а если n — нечетное, то числа $-\alpha + \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 1. Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Запишем решения данного уравнения: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ или $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Две точки на окружности, $P_{\frac{\pi}{4}}$ и $P_{\frac{3\pi}{4}}$, изображающие решения этого уравнения, расположены симметрично относительно оси ординат (рис. 1).

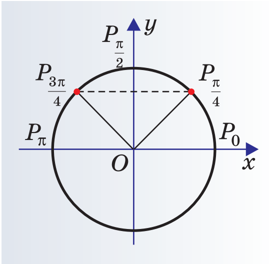


Рис. 1

Уравнения вида cos *x* = *a*

Числа вида $\alpha + 2\pi n$ или $-\alpha + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, на числовой окружности изображаются точками P_{α} или $P_{-\alpha}$ соответственно. Точки расположены на окружности симметрично относительно оси x. Эти два множества чисел можно записать в виде $\pm\alpha + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Запишем решения данного уравнения: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Две точки на окружности, $P_{\frac{\pi}{6}}$ и $P_{-\frac{\pi}{6}}$, изображающие решения этого уравнения, расположены симметрично относительно оси абсцисс (рис. 2).

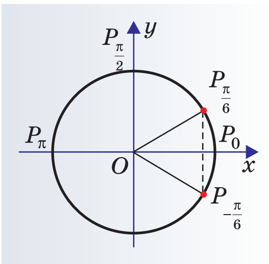


Рис. 2

Уравнения вида tg *x* = *a* или ctg *x* = *a*

Числа вида $\alpha + 2\pi n$ или $\alpha + \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, на числовой окружности изображаются точками P_{α} или $P_{\alpha+\pi}$. Точки расположены на окружности симметрично относительно начала координат. Эти два множества чисел можно записать в виде $\alpha + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 3. Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Решение. Запишем решения данного уравнения: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ или $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Две точки на окружности, $P_{\frac{\pi}{3}}$ и $P_{\frac{4\pi}{3}}$, изображающие решения этого уравнения, расположены симметрично относительно начала координат (рис. 3).

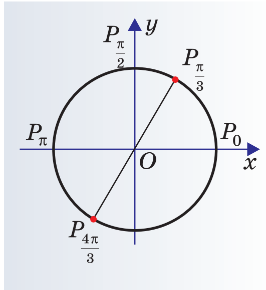


Рис. 3

Пример 4. Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.

Решение. Запишем решения данного уравнения: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Точки $P_{\frac{\pi}{6}}$ и $P_{\frac{7\pi}{6}}$ на окружности, изображающие решения этого уравнения, расположены симметрично относительно начала координат (рис. 4).

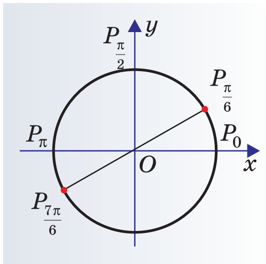


Рис. 4

Уравнения вида *T*(k*x*) = *a*

Для уравнений вида $T(kx) = a$, где через T обозначена одна из простейших тригонометрических функций, изображение решений уравнения связано с точками — вершинами правильного многоугольника.

Числам вида $\alpha + \frac{2\pi n}{k}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \{3; 4; 5; ...\}$, на числовой окружности соответствуют вершины правильного k-угольника, вписанного в окружность.

При $k = 1$ получаем единственную точку на окружности. При $k = 2$ — две диаметрально противоположные точки окружности. Эти случаи были рассмотрены выше.

Пример 5. Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения $\sin 3x = 1$.

Решение. Решениями данного уравнения являются числа вида $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Придавая последовательно значения 0, 1, 2 переменной n, получим три точки (вершины правильного треугольника) на окружности (рис. 5), соответствующие числам $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$.

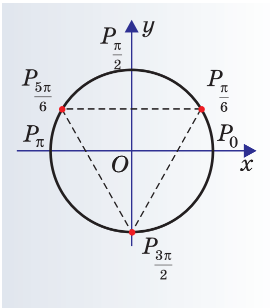


Рис. 5

Методические рекомендации. Успех решения учениками тригонометрических уравнений и неравенств зависит от того, как они усвоили различные способы записи чисел, соответствующих точкам единичной окружности. Упражнения на закрепление способов записи чисел должны быть двух видов: в виде прямой задачи — выписать все числа, соответствующие точкам единичной окружности, указанным на рисунке; в виде обратной задачи — изобразить на единичной окружности точки, соответствующие записанным числам.

Упражнения

1. Запишите все числа, соответствующие точкам числовой окружности (рис. 6, *а–г*).

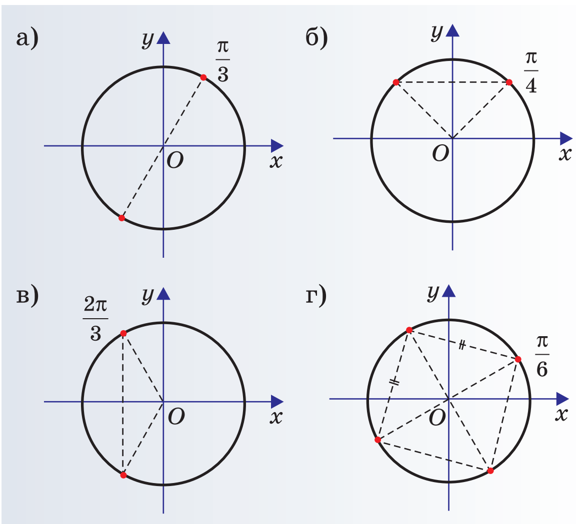


Рис. 6

2. Изобразите на числовой окружности точки, соответствующие углам: 30°, –30°, 30° + 180°, 30° + 360°, 30° + 90°, 180° – 30°, 270° – 30°, 360° – 30°, 30° + 720°, 30° + 360° · n, 30° + 180° · n, 30° + 90° · n, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. Изобразите точки на числовой окружности, соответствующие числам: $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}+\pi$, $\frac{\pi}{3}+2\pi$, $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}$, $\pi-\frac{\pi}{3}$, $2\pi-\frac{\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}+6\pi$, $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

В упражнениях 2 и 3 уместно задать учащимся вопрос о форме записи чисел, соответствующих точкам, расположенным на числовой окружности симметрично относительно: оси абсцисс, оси ординат, начала координат; а также вопрос о том, каким числам соответствует одна точка числовой окружности.

4. Изобразите на числовой окружности точки, соответствующие числам: $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$. Охарактеризуйте расположение точек по отношению к точке $\frac{\pi}{4}$, по отношению к точкам $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π.

5. Изобразите на числовой окружности точки, соответствующие числам $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $\pm\frac{7\pi}{6}+2\pi n$, $\pm 2\pi + 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

6. Изобразите на числовой окружности точки, соответствующие числам $\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Геометрическая иллюстрация решения простейших тригонометрических неравенств

Основная трудность в отборе решений тригонометрических уравнений ложится на решение тригонометрических неравенств и их изображение на числовой окружности.

Неравенства вида sin $x \vee a$ или cos $x \vee a$

Напомним алгоритм решения простейших тригонометрических неравенств вида $\sin x \vee a$ или $\cos x \vee a$, $|a| \le 1$, где символ «$\vee$» заменяет один из знаков неравенств: «>», «<», «≥», «≤».

1. Отмечаем на линии синусов (косинусов) число a и все значения, которые больше (меньше) числа a.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

3. Если выделенная дуга прошла через 0, то для записи граничных точек выбирают разное направление (одно число положительное, другое — отрицательное). Если выделенная дуга не прошла через 0, то для записи граничных точек выбирают одно направление.

4. Записываем общее решение неравенства, добавляя к концам найденного промежутка число, кратное периоду синуса или косинуса.

Сразу отметим, что для отбора решений уравнения нам не потребуется делать аналитическую запись решения тригонометрического неравенства, поэтому последний шаг алгоритма будем опускать.

Пример 6. Изобразить на числовой окружности множество решений неравенства $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. 1. Отмечаем на линии синусов (рис. 7) число $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и все значения, меньшие этого числа.

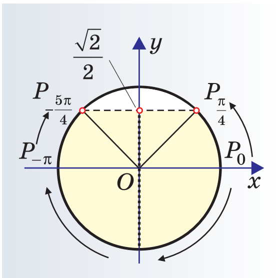


Рис. 7

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, ординаты которых меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Выделенная дуга проходит через нуль, поэтому при положительном обходе от нуля получаем первую граничную точку, которая соответствует положительному числу $\frac{\pi}{4}$. Делаем обход по дуге от нуля в отрицательном направлении до второй граничной точки, соответствующей отрицательному числу $-\frac{5\pi}{4}$. Числа из промежутка $\left(-\frac{5\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ являются решениями данного неравенства (см. рис. 7). Все решения данного неравенства будут иметь вид $\left(-\frac{5\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 7. Изобразить на числовой окружности множество решений неравенства $\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. 1. Отмечаем на линии косинусов (рис. 8) число $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и все значения, меньшие этого числа.

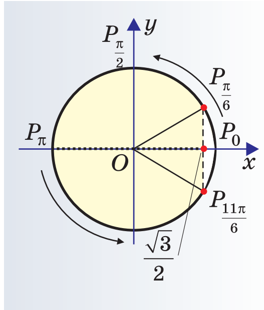


Рис. 8

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, абсциссы которых не больше $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Выделенная дуга не проходит через нуль, поэтому первая точка соответствует положительному числу $\frac{\pi}{6}$. Совершим обход по дуге от точки $P_{\frac{\pi}{6}}$ в положительном направлении до второй точки, соответствующей числу $\frac{11\pi}{6}$. Числа из промежутка $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$ являются решениями данного неравенства (см. рис. 8). Все решения данного неравенства будут иметь вид $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{11\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Неравенства вида tg $x \vee a$ или ctg $x \vee a$

Для решения неравенств с тангенсом и котангенсом удобно использовать линии тангенсов и котангенсов, касающиеся тригонометрической окружности в точках (1; 0) и (0; 1) соответственно.

Напомним алгоритм решения простейших тригонометрических неравенств вида tg $x \vee a$ или ctg $x \vee a$, где символ «$\vee$» заменяет один из знаков неравенств: «$>$», «$<$», «$\ge$», «$\le$».

1. Отмечаем на линии тангенсов (котангенсов) число a и все значения, которые больше (меньше) числа a.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

3. Записываем ответ для соответствующего неравенства:

а) для неравенства tg $x < a$ решение имеет вид $-\frac{\pi}{2}+\pi n < t < \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

б) для неравенства tg $x > a$ решение имеет вид $\operatorname{arctg} a + \pi n < t < \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

в) для неравенства ctg $x < a$ решение имеет вид $\operatorname{arcctg} a + \pi n < t < \pi + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

г) для неравенства $\operatorname{ctg} x > a$ решение имеет вид $\pi n < t < \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 8. Изобразить на числовой окружности множество решений неравенства $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$.

Решение. 1. Отмечаем на линии тангенсов (рис. 9) число $\sqrt{3}$ и все значения, которые больше этого числа.

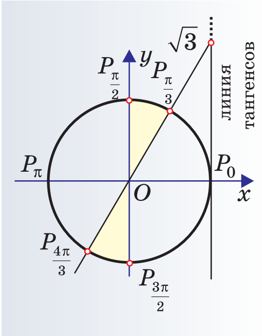


Рис. 9

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

3. Выделенная дуга имеет граничную точку, соответствующую числу $\frac{\pi}{3}$. Совершаем обход по дуге от точки $P_{\frac{\pi}{3}}$ в положительном направлении до второй точки, соответствующей числу $\frac{\pi}{2}$. Числа из промежутка $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ являются решениями данного неравенства. Все решения данного неравенства будут иметь вид $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. На окружности (см. рис. 9) выделены два интервала.

Пример 9. Изобразить на числовой окружности множество решений неравенства $\operatorname{ctg} x \le -1$.

Решение. 1. Отмечаем на линии котангенсов (рис. 10) число -1 и все значения котангенса, меньшие этого числа.

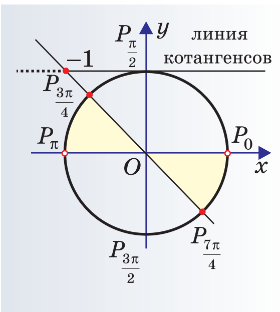


Рис. 10

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

3. Выделенная дуга имеет граничную точку, соответствующую числу $\frac{3\pi}{4}$. Совершаем обход по дуге от точки $P_{\frac{3\pi}{4}}$ в положительном направлении до второй точки, соответствующей числу π. Числа из промежутка $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$ являются решениями данного неравенства. Остальные решения получают добавлением слагаемого πn, $n \in \boldsymbol{Z}$, к концам полученного промежутка. На окружности (см. рис. 10) выделены два промежутка.

Упражнения

7. Изобразите множество решений неравенства, используя числовую окружность:

а) $\sin x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin x < 0$; в) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin x \ge 0{,}7$; д) $\cos x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\cos x < 0$; ж) $\cos x > -\frac{1}{2}$; з) $\operatorname{tg} x > 1$; и) $\operatorname{tg} x < \frac{1}{\sqrt{3}}$; к) $\operatorname{tg} x \le -\sqrt{3}$; л) $\operatorname{tg} x > 0$; м) $\operatorname{ctg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$; н) $\operatorname{ctg} x \ge \sqrt{3}$; о) $\operatorname{ctg} x < 0$.

Отбор корней тригонометрического уравнения на числовой окружности

Тригонометрическую окружность удобно использовать при отборе корней на промежутке, длина которого не превосходит 2π, или в случае, когда значения обратных тригонометрических функций, входящих в серию решений, не являются табличными.

Начнем с рассмотрения примеров, в которых требуется выявить общие корни уравнения или объединить их решения.

Пример 10. Решить уравнение
$$\cos x \cos 5x = 0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos 5x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2}+\pi k\\ x = \frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\end{array}\right. \quad k, n \in \boldsymbol{Z}.$$

Отметим, что функции $\cos x$ и $\cos 5x$, входящие в уравнение, имеют общий наименьший положительный период 2π. Поэтому отбор корней удобно проводить на числовой окружности, при этом используя градусную меру полученных решений: $x = 90° + k \cdot 180°$ или $x = 18° + n \cdot 36°$.

Из рисунка 11 видим, что вторая серия решений включает в себя первую серию.

Ответ: $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

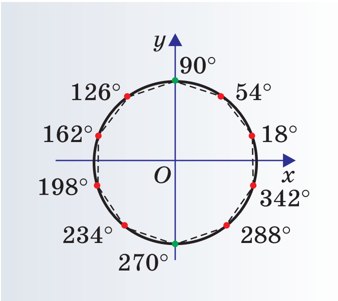


Рис. 11

Следующие примеры связаны с отбором корней уравнения, удовлетворяющих дополнительным условиям.

Пример 11. Определить количество корней уравнения ctg $3x$ sin $6x$ – cos $6x$ – cos $12x$ = 0 на промежутке $[0; 2\pi]$.

Решение. Умножая обе части уравнения на $\sin 3x \neq 0$, получаем:

$$\sin 3x - \sin 3x \cos 12x = 0,$$

$$\sin 3x\,(1 - \cos 12x) = 0.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{cases}\cos 12x = 1,\\ \sin 3x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi n}{6},\\ x \neq \dfrac{\pi k}{3},\end{cases} n,\,k \in \boldsymbol{Z}.$$

Функции cos $12x$ и sin $3x$, входящие в уравнение, имеют основной период, не превосходящий 2π, поэтому проведем отбор корней, используя тригонометрическую окружность. Для этого полученные значения в серии решений и серии ограничений изобразим на тригонометрической окружности (рис. 12) и в ответ запишем количество точек серии решений, не совпавших с точками серии ограничений.

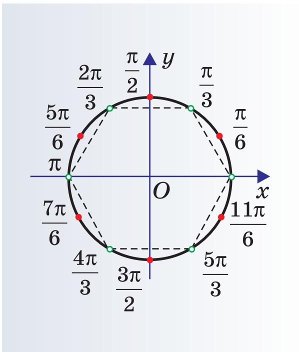


Рис. 12

Ответ: 6.

Пример 12. Найти все корни уравнения

$$(2\sin x + 1)\left(2\sin x - \sqrt{3}\right) = 0,$$

удовлетворяющие неравенству $\cos x > 0$.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = -\dfrac{1}{2}\\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n\\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\end{array}\right.\end{array}\right. n,\,k \in \boldsymbol{Z}.$$

Изобразим полученные решения на тригонометрической окружности (рис. 13). Каждому уравнению соответствуют две точки тригонометрической окружности. В ответ запишем точки, лежащие на дуге окружности, соответствующей неравенству $\cos x > 0$, то есть лежащие в I и IV четвертях.

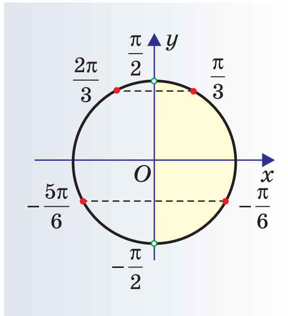


Рис. 13

Ответ: $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Перейдем к рассмотрению примеров, содержащих естественные ограничения, связанные с областью определений или областью значений функций, входящих в уравнение.

Пример 13. Решить уравнение

$$\log_2(-\sin x) + \log_2 \cos x = -2.$$

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}-\sin x > 0,\\ \cos x > 0,\\ \log_2(-\sin x\ \cos x) = -2\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x < 0,\\ \cos x > 0,\\ -\sin x\ \cos x = 0{,}25.\end{cases}$$

Решим уравнение этой системы:

$$-\sin x \cos x = 0{,}25 \Leftrightarrow \sin 2x = -0{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}\\ 2x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{12} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}\\ x = -\dfrac{5\pi}{12} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Функции sin x, cos x и sin $2x$, входящие в уравнение, имеют общий наименьший положительный период 2π. Для отбора корней используем тригонометрический круг (рис. 14).

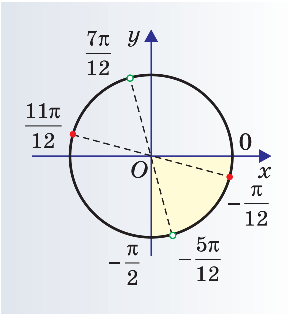


Рис. 14

Условиям $\sin x < 0$ и $\cos x > 0$ удовлетворяют координаты точек, лежащих в IV координатной четверти.

Ответ: $-\frac{\pi}{12}+2\pi n,\ -\frac{5\pi}{12}+2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Пример 14. Решить уравнение

$$|\cos x| = \sqrt{3}\sin x.$$

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \pm\cos x = \sqrt{3}\sin x, \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{6}+\pi n, \\ \sin x \geq 0, \end{cases} n \in \boldsymbol{Z}.$$

Так как функции $\operatorname{tg} x$ и $\sin x$ имеют общий наименьший положительный период 2π, то отбор корней проведем на тригонометрическом круге (рис. 15).

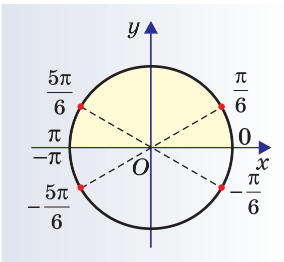


Рис. 15

Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Пример 15. Решить уравнение

$$\frac{(2\cos x+1)\log_{31} 3\operatorname{tg}^2 x}{\log_{13} 2\sin x} = 0.$$

Решение. Данная дробь равна нулю, если $\cos x = -0{,}5$ или $\operatorname{tg} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, при условии, что

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \neq 0, \\ \sin x > 0, \\ \sin x \neq 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in \boldsymbol{Z}, \\ \sin x > 0, \\ \sin x \neq 0,5. \end{cases}$$

Решая первые два уравнения, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n \\ x = \pm\frac{\pi}{6}+\pi k, \end{array}\right. n, k \in \boldsymbol{Z},$$

с ограничениями

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, \\ \sin x > 0, \\ x \neq (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi m, \end{cases} n, m \in \boldsymbol{Z}.$$

Тригонометрические функции, входящие в данное уравнение, имеют общий наименьший положительный период 2π. Изобразим множество решений и ограничения на числовой окружности, выделив промежуток $[-\pi; \pi)$ (рис. 16).

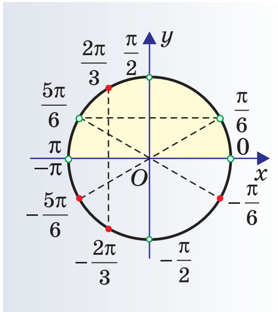


Рис. 16

Используя рисунок, получаем ответ.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Пример 16. (*ЕГЭ-2010, С1.*) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{49}\right)^{\operatorname{tg} x} - 14\left(\frac{1}{7}\right)^{\operatorname{tg} x} + 49 = 0, \\ 3\sqrt{y}\operatorname{tg} x - 5\sqrt{2}\cos x = 0. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что левая часть первого уравнения системы представляет полный квадрат:

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{\operatorname{tg} x} - 14\left(\frac{1}{7}\right)^{\operatorname{tg} x} + 49 = \left(\frac{1}{7}\right)^{2\operatorname{tg} x} - 14\left(\frac{1}{7}\right)^{\operatorname{tg} x} + 49 =$$

$$= \left(\left(\frac{1}{7}\right)^{\operatorname{tg} x} - 7\right)^2.$$

Равенство нулю возможно, если $\left(\frac{1}{7}\right)^{\operatorname{tg} x} - 7 = 0$, то есть $7^{-\operatorname{tg} x} = 7$.

Отсюда $\operatorname{tg} x = -1$ и $x = -\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Рассмотрим второе уравнение системы. Учитывая, что $\operatorname{tg} x = -1$, запишем его в виде

$$3\sqrt{y} = -5\sqrt{2}\cos x.$$

Так как правая часть этого уравнения должна быть неотрицательна, то $\cos x < 0$ (рис. 17). Из множества решений $x = -\frac{\pi}{4}+\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, выбираем точки, лежащие во второй четверти, то есть $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

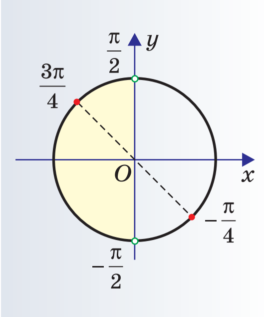


Рис. 17

В этом случае

$$\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } 3\sqrt{y}=-5\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=5.$$

Отсюда $y=\frac{25}{9}$.

Ответ: $\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{25}{9}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

О способах создания учителем набора уравнений различных типов, о включении ученика в процесс конструирования целой системы упражнений по заданиям С1 хорошо описано в статье Г. Ковалевой «Не клонировать, а конструировать» («Математика», 2011, № 5).

Тренировочные упражнения

1. Найдите все корни уравнения

$$\left(\sqrt{2}\sin x+1\right)\left(2\sin x-3\right)=0,$$

удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x < 0$.

2. Найдите все корни уравнения

$$\sqrt{2}\sin^2 x=\sin x,$$

удовлетворяющие неравенству $\cos x < 0$.

Решите уравнение (3–16).

3. $\dfrac{2\sin x-\sqrt{3}}{2\cos x+1}=0.$

4. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{2\cos x-1}=0.$

5. $\dfrac{6\sin^2 x-5\sin x+1}{\sqrt{-\cos x}}=0.$

6. $\dfrac{9^{\sin x}-3}{\sqrt{-2\cos x}}=0.$

7. $(\cos 3x-1)\sqrt{6+5x-x^2}=0.$

8. $\sin 0{,}8x=\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2+x^2-3.$

9. $\sqrt{5\cos x-\cos 2x}=-2\sin x.$

10. $\left(2\cos^2 x-9\cos x+4\right)\sqrt{-2\operatorname{tg} x}=0.$

11. $\sqrt{\cos 2x}=-\sqrt{2}\sin x.$

12. $\log_{\cos x}\sin x=1.$

13. $\log_{\sqrt{5}}\cos x=\log_{\sqrt{5}}\left(1-2\cos^2 x\right).$

14. $(2\cos^2 x-7\cos x+3)\log_{41}(-\sin x)=0.$

15. $|\cos x|-\cos x=2\sin x.$

16. $\sqrt{(x+1)^2+16}=4-\sin^2 \pi x.$

Прием «укрупнения» значений корней

В случае маленьких значений корней можно воспользоваться приемом «укрупнения» этих значений.

Пример 17. Решить уравнение

$$\cos 12x-\sin 4x=0.$$

Решение. Основной период функции $\cos 12x$ равен $\frac{\pi}{6}$, функции $\sin 4x$ — равен $\frac{\pi}{2}$. Так как общий период этих функций равен $\frac{\pi}{2}$, то при умножении на 4 период станет 2π.

Преобразуем данное уравнение:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-12x\right)-\sin 4x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-8x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(8x-\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{32}+\frac{\pi k}{8}\\ x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\\ 4x=\frac{3\pi}{2}+\pi n,\end{array}\right. \quad k, n \in \boldsymbol{Z}.$$

Отметим на окружности полученные значения. Легко увидеть, что эти значения не совпадают (рис. 18).

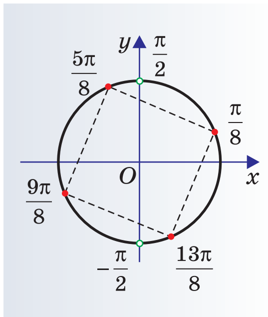


Рис. 18

Ответ: $\frac{\pi}{32}+\frac{\pi n}{8},\ \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Методические рекомендации. При составлении примеров, подобных рассмотренному выше, можно использовать схему $f(kx) = g(mx)$, где k и m — фиксированные натуральные числа, а f или g обозначают синус или косинус. Например, $\cos 15x = \cos 6x$, $\cos 15x = \sin 4x$.

Можно усложнить задачу и взять уравнения вида $\frac{f(kx)}{g(mx)}=0,\ \frac{f(kx)}{\sqrt{g(mx)}}=0,\ f(kx)\sqrt{g(mx)}=0.$

Тренировочные упражнения

17. $\cos 15x = \sin 5x$.

18. $\sin x \sin 5x = \cos 4x$.

Отбор корней тригонометрического уравнения на числовой прямой

Тригонометрическую окружность удобно использовать для изображения точек вида $\alpha + \beta n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, где $2\pi : \beta$ — натуральное число. Например, множеству чисел $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, на окружности соответствуют $2\pi : \frac{\pi}{3}=6$ точек. С другой стороны, числа вида $\frac{1}{4}+3n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, целесообразнее отмечать на координатной прямой, так как число 2π не соизмеримо с числом 3, и на окружности будет бесконечное множество точек. Еще одна причина выбора числовой прямой связана с периодами функций, превосходящих 2π. Например, числа $\frac{\pi}{4}+4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, будут изображаться точкой $P_{\frac{\pi}{4}}$, но число, например $\frac{\pi}{4}+2\pi$, которому также соответствует точка $P_{\frac{\pi}{4}}$, не входит в рассматриваемое множество чисел.

Пример 18. Решить уравнение $\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{3}}=0.$

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos\frac{x}{2}=0,\\ \sin\frac{x}{3}\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pi+2\pi k,\\ x\neq 3\pi n,\end{cases} k,\ n\in \boldsymbol{Z}$$

Основной период функций, входящих в уравнение: $T\left(\cos\frac{x}{2}\right)=4\pi$, $T\left(\sin\frac{x}{3}\right)=6\pi$. Их общий наименьший положительный период равен 12π.

На числовой прямой (рис. 19) рассмотрим промежуток $(-\pi;\ 11\pi]$. Отметим красными точками числа $-\pi$, π, 3π, 5π, 7π, 9π, 11π, соответствующие формуле $x=\pi+2\pi k$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Крестиками отметим точки 0, 3π, 6π, 9π, соответствующие формуле $x\neq 3\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Числа, не отмеченные крестиками, лучше разбить на два множества с разностью 6π и записать общий ответ.

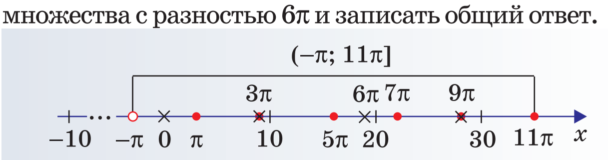


Рис. 19

Ответ: $\pi + 6\pi n$, $5\pi + 6\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Замечание. Исходя из формул системы $\begin{cases}x=\pi+2\pi k,\\ x\neq 3\pi n,\end{cases}$ $k,\ n\in\boldsymbol{Z}$, достаточно было рассмотреть на числовой прямой промежуток $(-\pi;\ 5\pi]$.

Пример 19. Определить количество корней уравнения $\dfrac{2\sin\pi x-\sqrt{3}}{2\cos\pi x+1}=0$ на промежутке $[-3;\ 5]$.

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\sin\pi x=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos\pi x\neq-\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}+2k\\ x=\frac{2}{3}+2k,\end{array}\right.\\ x\neq\pm\frac{2}{3}+2n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{3}+2k,\\ x\neq\pm\frac{2}{3}+2n,\end{cases}$$

$$k,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Изобразим полученные значения решений (красные точки) и ограничений (крестики) на координатной прямой в промежутке $[-3;\ 5]$. В ответ запишем количество точек решений не совпавших с крестиками (рис. 20).

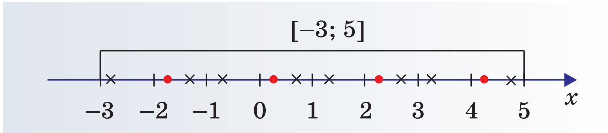


Рис. 20

Ответ: 4.

Методические рекомендации. Для составления задач, подобных примеру 18, можно воспользоваться шаблоном уравнения вида $\dfrac{T_1\left(\frac{x}{m}\right)}{T_2\left(\frac{x}{n}\right)}=0$, где T_1 и T_2 — одна из простейших тригонометрических функций, $m,\ n\in\boldsymbol{N}$.

Задачи по образцу примера 19 легко получить из готовых примеров. Например, уравнение $\dfrac{\cos 2x-\sin x-1}{2\cos x-\sqrt{3}}=0$ является основой для уравнения $\dfrac{\cos 2\pi x-\sin\pi x-1}{2\cos\pi x-\sqrt{3}}=0.$ Формулы решения уравнения содержат слагаемое 2π, то есть последовательные решения отличаются на две единицы, поэтому для отбора корней достаточно взять промежуток, длина которого равна 2.

Тренировочные упражнения

19. Укажите наименьший корень уравнения $\cos 2x + 2 = 3\cos x$, принадлежащий отрезку $[-2{,}5\pi;\ -0{,}5\pi]$.

Функционально-графический способ отбора корней уравнения

При решении простейших тригонометрических неравенств иногда используют графики тригонометрических функций. При этом подходе требуется умение схематичного построения графика тригонометрической функции и применение формул корней соответствующих уравнений.

Пример 20. Решить неравенство:

а) $\sin x < \frac{1}{2}$; б) $\sin x > \frac{1}{2}$.

Решение. Схематично изобразим графики функций $y = \sin x$ и $y = 0,5$ (рис. 21). Для уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ запишем общее решение: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Найдем три корня этого уравнения, последовательно придавая переменной n значения –1, 0 и 1: $-\frac{7\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$. Полученные значения являются абсциссами трех последовательных точек пересечения построенных графиков. Неравенство $\sin x < \frac{1}{2}$ (график функции $y = \sin x$ расположен ниже прямой $y = 0,5$) выполняется на промежутке $\left(-\frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$, а неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$ (график функции $y = \sin x$ расположен выше прямой $y = 0,5$) выполняется на промежутке $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$.

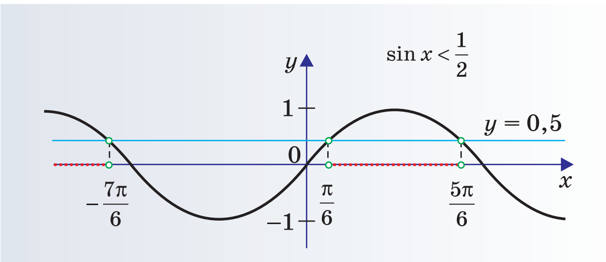


Рис. 21

На рисунке 21 штриховкой показаны решения неравенства $\sin x > \frac{1}{2}$.

Добавляя периоды синуса к концам этих интервалов, получаем окончательное решение.

Ответ: а) $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 21. Решить неравенство:

а) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Схематично изобразим графики функций $y = \cos x$ и $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 22). Для уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ запишем общее решение: $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. При $n = 0$ найдем два корня этого уравнения: $\pm\frac{3\pi}{4}$, при $n = 1$ выберем один корень $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4}$. Полученные значения являются абсциссами трех последовательных точек пересечения построенных графиков.

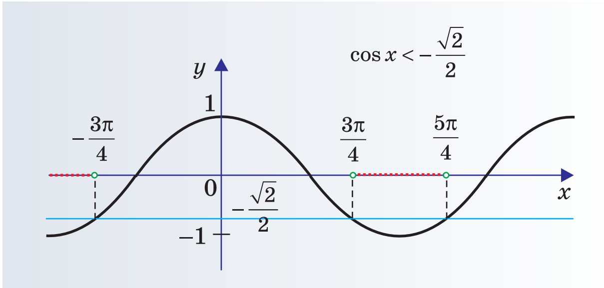


Рис. 22

Неравенство $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ выполняется на промежутке $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right)$, а неравенство $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ выполняется на промежутке $\left(-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$. Добавляя период косинуса к концам этих интервалов, получаем окончательное решение.

Ответ: а) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

б) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 22. Решить уравнение $\frac{2\cos x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}\sin x - 1} = 0$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ \sin x > \frac{1}{2}, \end{cases} k \in \boldsymbol{Z}.$$

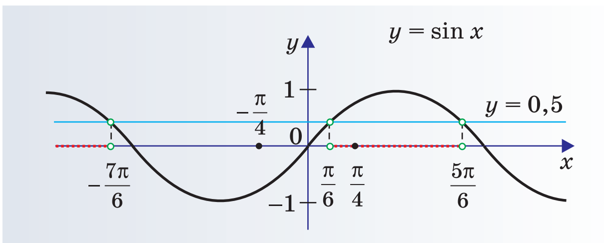


Рис. 23

Из рисунка 23 видно, что на промежутке $\left[-\frac{7\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$, длина которого 2π, неравенству $\sin x>\frac{1}{2}$ удовлетворяет одно число $\frac{\pi}{4}$. Следовательно, все числа вида $\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$, удовлетворяют данному уравнению.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

Пример 23. Решить уравнение

$$\frac{2\sin x-\sqrt{3}}{\sqrt{\operatorname{tg} x-1}}=0.$$

Решение. Из условия получаем:

$$\begin{cases}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \operatorname{tg} x>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k,\\ \operatorname{tg} x>1,\end{cases}\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

На промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, длина которого 2π, неравенству $\operatorname{tg} x>1$ удовлетворяет одно число $\frac{\pi}{3}$ (рис. 24). Следовательно, все числа вида $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$, удовлетворяют данному уравнению.

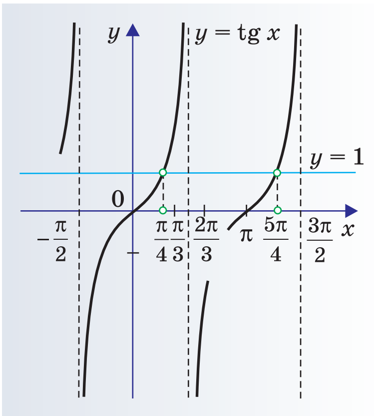


Рис. 24

Ответ: $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

Методические рекомендации. С помощью графиков удобно иллюстрировать решения простейших тригонометрических уравнений и неравенств. Поэтому одной из схем составления заданий являются уравнения вида $\frac{T_1\cdot T_2}{\sqrt[2n]{T_3}}=0,\ T_1\cdot\sqrt[2n]{T_2}=0,\ \frac{T_1\cdot T_2}{\log_a T_3}=0,\ T_1\cdot\log_a T_2=0$, где T_1, T_2 и T_3 — одна из простейших тригонометрических функций, $n\in \boldsymbol{N}$, $a>0$, $a\neq 1$.

Тренировочные упражнения

20. $\frac{2\sin^2 x-\sin x}{\sqrt{-\cos x}}=0.$

21. $(6\sin^2 x-\sin x-1)\log_2\cos x=0.$

22. $\begin{cases}\frac{16\sin^4 x-9}{\sqrt{\cos x}}=0,\\ \sqrt{y+6}+2\sin x=0.\end{cases}$

Ответы к тренировочным упражнениям

1. $-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **2.** $\pi+2\pi n,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **3.** $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **4.** $\pi k,\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$. **5.** $\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **6.** $\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$. **7.** $-1,6,0,\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$. **8.** $\frac{5\pi}{8}$. **9.** $-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **10.** $\pi n,\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **11.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **12.** $\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$. **13.** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **14.** $-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **15.** $2\pi n,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **16.** -1. **17.** $\frac{\pi}{40}-\frac{\pi n}{10},\ \frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5},\ n\in \boldsymbol{Z}$. **18.** $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5},\ k\in \boldsymbol{Z}$. **19.** $-\frac{7\pi}{3}$. **20.** $\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \pi+2\pi n,\ k,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **21.** $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ -\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n,\ 2\pi m,\ k,n,m\in \boldsymbol{Z}$. **22.** $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;-3\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

Литература

1. ЕГЭ-2011. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. — М.: Национальное образование, 2010.

2. *Мордкович А.Г.* Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень). — 10-е изд., стер. — М.: Мнемозина, 2009.

3. *Шестаков С.А., Захаров П.И.* ЕГЭ 2011. Математика. Задача С1 / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2011.

4. *Шабунин М.И., Прокофьев А.А., Олейник Т.А., Соколова Т.В.* Математика. Алгебра Начала математического анализа. Профильный уровень: методическое пособие для 11 класса. — М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2010.

Модульные курсы «Навыки личной эффективности»

Педагогический университет Первое сентября

Лицензия 77 № 000349, рег. № 027477 от 15.09.2010, выдана Департаментом образования г. Москвы

Модульные курсы предоставляют уникальную возможность:

- начать обучение в любой момент;
- выбирать удобный график освоения материалов и самостоятельно определять срок окончания изучения модуля (минимальный срок обучения – 1 месяц);
- выполнять контрольную работу в режиме онлайн;
- осваивать знания из психологии, менеджмента, экономики, которые позволят: лучше понять себя и других людей; психологические причины возникновения стрессов и различных заболеваний и сохранить свое здоровье; оптимизировать свою деятельность и др.

Нормативный срок освоения каждого модуля – 6 часов. Форма обучения – дистанционная. После успешного окончания модуля выдается сертификат.

Стоимость одного модульного курса – 200 руб.

ПЕРЕЧЕНЬ МОДУЛЬНЫХ КУРСОВ

очень популярен!

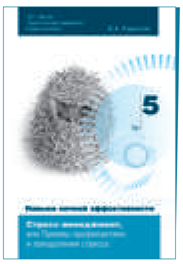
Тайм-менеджмент, или Как эффективно организовать свое время.

Тайм-менеджмент для детей, или Как научить школьников организовывать свое время.

Приемы конструктивного разрешения конфликтных ситуаций, или Конфликты в нашей жизни: способы решения.

очень популярен!

Профессиональное выгорание, или Как сохранить здоровье и не «сгореть» на работе.



Стресс-менеджмент, или Приемы профилактики и преодоления стресса.

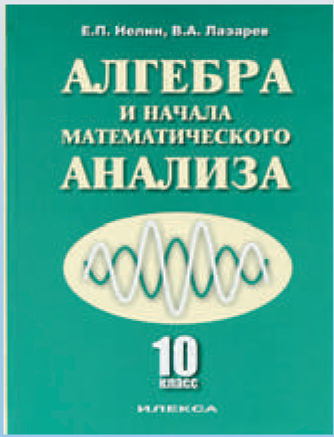
Управление имиджем, или Как создать свой стиль.

ПОДАЙТЕ ЗАЯВКУ НА ОБУЧЕНИЕ НА САЙТЕ http://edu.1september.ru

Получить более подробную информацию можно на сайте, по электронной почте: **module@1september.ru** или по телефону **(499) 249-47-82**

Е. НЕЛИН, В. ЛАЗАРЕВ,
г. Харьков, г. Москва

НОВЫЙ ДВУХУРОВНЕВЫЙ УЧЕБНИК



В 2011 г. вышел из печати учебник для 10-го класса учебно-методического комплекта «Алгебра и начала анализа» (базовый и профильный уровни) авторов Е.П. Нелина, В.А. Лазарева и сопутствующие ему пособия: «Алгебра, 7–11 классы. Определения, свойства, методы решения — в таблицах» и «Дидактические материалы».

Учебник включен в Федеральный перечень учебников, допущенных к использованию в образовательном процессе на 2011/2012 учебный год.

Это двухуровневый учебник, содержащий материал как базового, так и профильного уровней стандарта (номера параграфов, включающих дополнительный материал для профильного уровня, в содержании напечатаны на синем фоне; этот же дополнительный материал может использоваться и для организации индивидуальной работы учащихся при их обучении на базовом уровне).

Укажем основные отличия предполагаемого учебника от других учебников по алгебре и началам математического анализа.

Учебник предоставляет возможность каждому ученику находить свое соотношение между научностью изучаемого материала и его доступностью. Для этого основной материал для усвоения учащимися структурирован в форме справочных таблиц в начале параграфа. Эти таблицы содержат теоретический материал и способы деятельности с ним в форме ориентиров по решению задач. Приведем фрагмент такой справочной таблицы из § 29. «Решение иррациональных неравенств».

Таблица 51

Ориентир	Пример
1. Метод интервалов (для неравенств вида $f(x) \geq 0$)	
1) Найти ОДЗ неравенства. 2) Найти нули функции $f(x)$ ($f(x) = 0$). 3) Отметить нули функции на ОДЗ и найти знак функции в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ. 4) Записать ответ, учитывая знак неравенства.	$\sqrt{x+4} > x+2$. ▶ Заданное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{x+4} - x - 2 > 0$. Обозначим $f(x) = \sqrt{x+4} - x - 2$. ОДЗ: $x + 4 \geq 0$, то есть $x \geq -4$. Нули $f(x)$: $\sqrt{x+4} - x - 2 = 0$, $\sqrt{x+4} = x+2$, $x + 4 = x^2 + 4x + 4$, $x^2 + 3x = 0$, $x_1 = 0$ — корень, $x_2 = -3$ — посторонний корень. *Ответ:* $[-4; 0)$.

В первую очередь учащиеся должны усвоить материал, который содержится в таблицах. Все необходимые пояснения и обоснования тоже приведены в учебнике, но каждый ученик может выбирать свой собственный уровень ознакомления с ними. (Естественно, что при объяснении нового материала целесообразно использовать работу с учебником по соответствующим таблицам, рисункам и схемам.)

Решению упражнений предшествует выделение общих ориентиров по решению таких задач. Поэтому важной составляющей работы с предложенными пособиями является обсуждение выбора соответствующих ориентиров и планов решения задач. Объяснение методов решения представлено в виде таблиц. В левой колонке записано решение задачи, в правой — комментарий, как можно рассуждать при решении такой задачи.

При такой подаче учебного материала комментарий, в котором объясняется решение, не мешает воспроизведению основной идеи и плана решения задач определенного вида. Это позволяет ученику, уже усвоившему способ решения, с помощью приведенного примера вспомнить, как решать задание, а ученику, которому нужна консультация по решению, — получить детальную консультацию, которая содержится в комментарии. Это же позволяет ученику, пропустившему урок, где объяснялся соответствующий материал, самостоятельно освоить его.

Отметим особенности методики обучения решению уравнений и неравенств, реализованной в учебнике. Как и в других учебниках, здесь детально рассматривается решение простейших уравнений и неравенств каждого вида. Для более сложных уравнений и неравенств предлагается двухуровневая система ориентиров:

1) общие методы (для решения уравнений: равносильные преобразования и использование уравнений-следствий — п. 3.1, использование свойств функций — п. 3.2; для решения неравенств: равносильные преобразования и общий метод интервалов — § 4), с которыми учащиеся знакомятся уже в первом разделе учебника 10-го класса;

2) специальные методы решения конкретных видов уравнений и неравенств (например, для тригонометрических уравнений — § 20, для показательных — § 32).

Такая структуризация методов позволяет, во-первых, предложить учащимся определенные ориентиры по поиску и реализации планов решения уравнений и неравенств, а во-вторых, многократно повторить и закрепить общие методы решения уравнений и неравенств конкретных видов (например, если ученик по какой-то причине не усвоил использование уравнений-следствий при решении иррациональных уравнений в § 26, то ту же самую схему деятельности ему предлагают реализовать при решении логарифмических уравнений в § 35).

Особо следует отметить раннее (в § 4 учебника 10-го класса) введение общего метода интервалов для решения любых неравенств вида $f(x) > 0$, ($f(x) < 0$, $f(x) \ge 0$, $f(x) \le 0$), где $f(x)$ — элементарная функция. Метод обосновывается исходя из наглядно-образных представлений учащихся и уточняется в учебнике 11-го класса как свойство непрерывных функций. Такой подход позволяет уже в 10-м классе выделить общую схему метода интервалов и использовать ее для решения неравенств всех видов (иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических). Отметим также, что раннее введение общего метода интервалов позволяет в тех случаях, когда учитель работает на базовом уровне, снять проблему типа «нет времени на доказательство теорем о равносильности иррациональных неравенств и на их решение», так как эти неравенства можно успешно решать общим методом интервалов, умея решать только иррациональные уравнения (и это показано в учебнике — см. пример выше). Весьма эффективным такой подход оказывается при подготовке учащихся к решению заданий С3 ЕГЭ, поскольку они содержат только элементарные функции.

Авторы постарались уделить должное внимание и решению задач с параметрами, для которых в учебниках рассмотрены как аналитические, так и графические методы их решения (соответствующие задачи рассматриваются в учебнике в § 7, 23, 30, 37). Приведем фрагмент § 7. «Уравнения и неравенства с параметрами».


Пример 2 Сколько корней имеет уравнение $|x^2 - 4|x|| = a$ в зависимости от значения параметра a?

Решение	Комментарий
► Построим графики функций $y = \|x^2 - 4\|x\|\|$ и $y = a$.	Поскольку в этом задании речь идет о количестве решений уравнения, то для анализа заданной ситуации попробуем использовать графическую иллюстрацию решения. 1. Строим график функции $y = \|x^2 - 4\|x\|\|$ (учитывая, что $x^2 = \|x\|^2$, построение может происходить, например, по таким этапам: $x^2 - 4x \to \|x\|^2 - 4\|x\| \to \|x^2 - 4\|x\|\|$). 2. Строим график функции $y = a$. 3. Анализируем взаимное размещение полученных графиков и записываем ответ (количество корней уравнения $f(x) = a$ равно

Учебник в значительной степени нацелен на подготовку учащихся к поступлению в вузы. В нем много заданий, которые предлагались на вступительных экзаменах в различные вузы страны и на Едином государственном экзамене (ЕГЭ). За счет четкого выделения общих ориентиров работы с практическими заданиями курса удается часть «нестандартных» задач перевести в разряд «стандартных» (например, уравнения, для решения которых приходится применять свойства функции). Даже если ученик изучает математику на базовом уровне, ему предоставляется возможность познакомиться с методами и идеями решения заданий вступительных экзаменов по математике, а также с методами решения и оформления заданий второй части (С) ЕГЭ по математике.

ПОДПИСНАЯ КАМПАНИЯ ОТКРЫТА

журнал

Математика – Первое сентября

ТАРИФНЫЕ ПЛАНЫ НА ПОДПИСКУ
1-е полугодие 2012 г.

Максимальный — от 999 руб.

бумажная версия + CD + доступ к электронной версии на сайте

Подписаться можно на почте по каталогам «Роспечать» (индекс 32030), «Почта России» (индекс 79073) или на сайте www.1september.ru

Оптимальный — 594 руб.

электронная версия на CD + доступ к электронной версии на сайте

Подписаться можно на почте по каталогам «Роспечать» (индекс 26113), «Почта России» (индекс 12717) или на сайте www.1september.ru

Экономичный — 200 руб.

доступ к электронной версии на сайте

Подписаться по данному тарифному плану можно только на сайте www.1september.ru

Бесплатный — 0 руб.

для педагогических работников образовательных учреждений, участвующих в Общероссийском проекте «Школа цифрового века». Подробности — на digital.1september.ru

Бумажная версия

CD с электронной версией журнала и дополнительными материалами для практической работы

Доступ к электронной версии журнала на сайте. Дополнительные материалы включены

Именные сертификаты – пользователям электронной версии на сайте www.1september.ru

ЭКОНОМИЧНЫЙ тарифный план

ОПТИМАЛЬНЫЙ тарифный план

МАКСИМАЛЬНЫЙ тарифный план

На сайте www.1september.ru подписку можно оплатить по кредитным картам

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

Утверждение, известное как принцип Дирихле, устанавливает связь между некоторыми объектами (предметами, кроликами, голубями и пр.) и контейнерами (ящиками, клетками и т.п.). Наиболее распространена следующая формулировка этого принципа:

> Если кролики рассажены в клетки, причём число кроликов больше числа клеток, то хотя бы в одной из клеток находится более одного кролика.
>
> Если число клеток больше, чем число кроликов, то как минимум одна клетка пуста.

Решение задачи с помощью принципа Дирихле сводится к выбору «кроликов» и «клеток». Иногда не совсем очевидно, кто в данной задаче является «кроликом», а что служит «клеткой».

Сформулировал принцип в 1834 году немецкий математик Дирихле, внёсший существенный вклад в математический анализ, теорию функций и теорию чисел, член многих академий наук, в том числе Петербургской. Правда, немцы называют этот принцип *Schubfachprinzip*, «принцип ящиков», а в английском и некоторых других языках он же известен как «принцип голубей и ящиков» (англ. *Pigeonhole principle*), здесь объектами являются голуби, а контейнерами — ящики.

По материалам Википедии