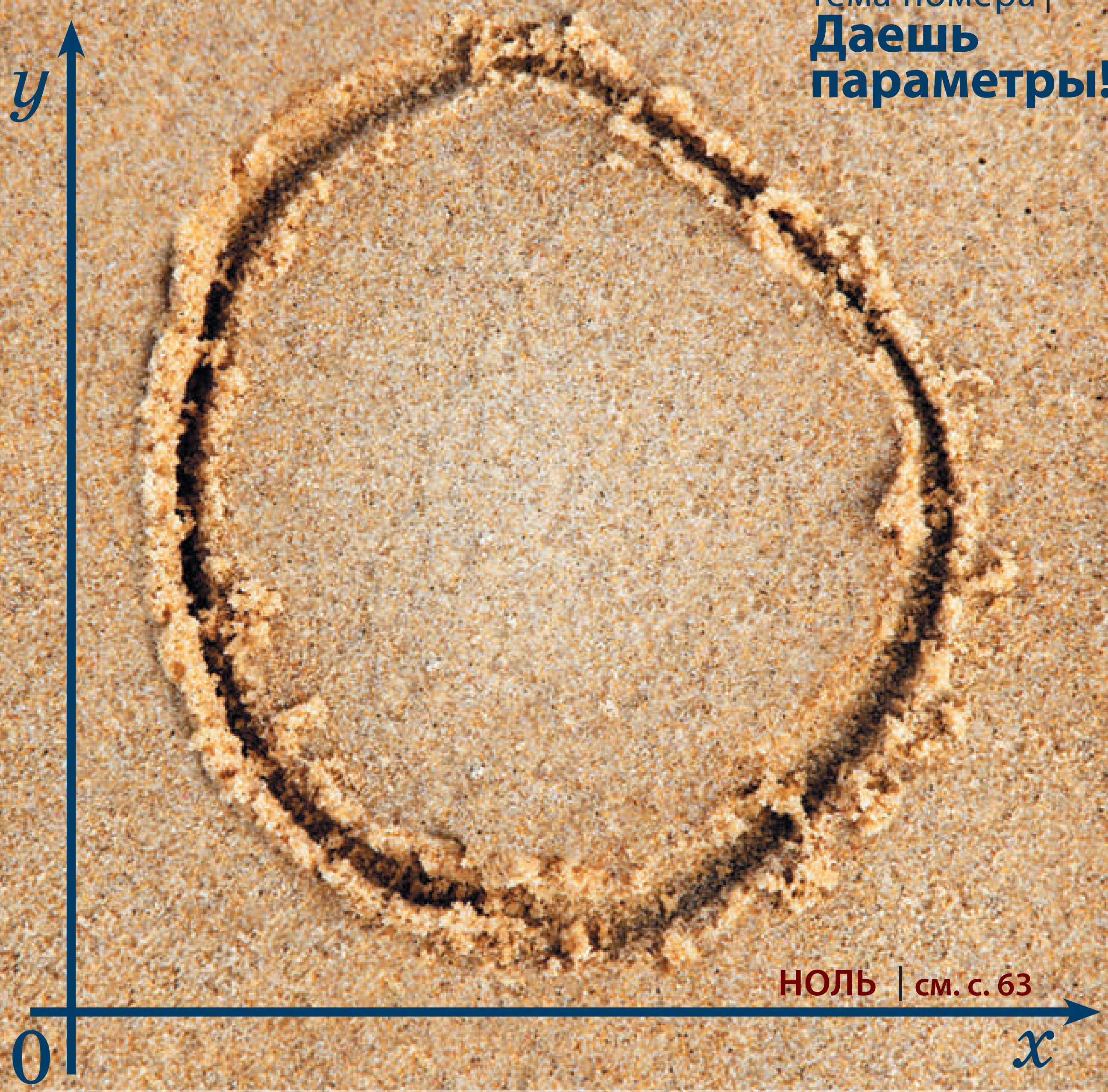
МАТЕМАТИКА

ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.
№14 (724)

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

mat.1september.ru

тема номера | **Даешь параметры!**



НОЛЬ | см. с. 63

теория, примеры решения задач

От логарифмических неравенств к рациональным

с. 24

контроль в 5-9 классах

Рубежное тестирование

с. 37

решение сложных задач

Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников

с. 50

издательский дом
1september.ru

Первое сентября | сентябрь 2011

МАТЕМАТИКА Подписка Роспечать: 32030 (бумажная версия), 26113 (электронная), Почта России: 79073 (бумажная версия), 12717 (электронная)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Главный редактор: Артем Соловейчик (генеральный директор)
Коммерческая деятельность: Константин Шмарковский (финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов: Сергей Островский (исполнительный директор)
Реклама и продвижение: Марк Сартан
Мультимедиа, конференции и техническое обеспечение: Павел Кузнецов
Производство: Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение: Андрей Ушаков
Главный художник: Иван Лукьянов
Педагогический университет: Валерия Арсланьян (ректор)

ГАЗЕТА ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Первое сентября – Е. Бирюкова

ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Английский язык – А. Громушкина,
Библиотека в школе – О. Громова,
Биология – Н. Иванова,
География – О. Коротова,
Дошкольное образование – М. Аромштам,
Здоровье детей – Н. Сёмина,
Информатика – С. Островский,
Искусство – М. Сартан,
История – А. Савельев,
Классное руководство и воспитание школьников – О. Леонтьева,
Литература – С. Волков,
Математика – Л. Рослова,
Начальная школа – М. Соловейчик,
Немецкий язык – М. Бузоева,
Русский язык – Л. Гончар,
Спорт в школе – О. Леонтьева,
Управление школой – Я. Сартан,
Физика – Н. Козлова,
Французский язык – Г. Чесновицкая,
Химия – О. Блохина,
Школьный психолог – И. Вачков

УЧРЕДИТЕЛЬ: ООО «ЧИСТЫЕ ПРУДЫ»
Зарегистрировано ПИ №ФС77-44335 от 21.03.11
в Министерстве РФ по делам печати
Подписано в печать: по графику 15.08.11,
фактически 15.08.11 Заказ №
Отпечатано в ОАО «Чеховский полиграфический комбинат»
ул. Полиграфистов, д. 1,
Московская область,
г. Чехов, 142300

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: **(499) 249-3138**
Отдел рекламы: **(499) 249-9870**
Сайт: **1september.ru**

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: **(499) 249-4758**
E-mail: **podpiska@1september.ru**

В НОМЕРЕ:

ТЕМА НОМЕРА: ДАЕШЬ ПАРАМЕТРЫ!

К материалам, обозначенным этим символом, есть приложение на CD-диске.

МАТЕМАТИКА Методический журнал для учителей математики
Издается с 1992 г. Выходит один раз в месяц

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, И. Бокова, О. Макарова
Дизайн макета и обложки: И. Лукьянов
Корректор: Л. Громова
Верстка: Д. Кардановская

Распространяется по подписке
Цена свободная Тираж 10 000 экз.
Тел. редакции: **(499) 249-3460**
E-mail: **mat@1september.ru**
Сайт: **mat.1september.ru**

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Роспечать: бумажная версия – **32030**; электронная версия – **26113;**
Почта России: бумажная версия – **79073**; электронная версия – **12717**

ЕСЛИ ЗВЕЗДЫ ЗАЖИГАЮТ, ЗНАЧИТ, ЭТО КОМУ-НИБУДЬ НУЖНО?

Л. РОСЛОВА

Фото С. Михеева, «Российская газета»

В июле прошла очередная международная олимпиада по математике среди школьников. У нас два «золота»: его завоевали 10-классник школы № 131 г. Казани Михаил Григорьев и 11-классник из Ульяновска, последние два года обучающийся в московском СУНЦе, Алексей Пахарев. У остальных ребят «серебро»: это 11-классники Дмитрий Егоров (школа № 239 г. Санкт-Петербурга), Александр Циглер (школа № 5 г. Магнитогорска), Ольга Бурова («Вторая школа» г. Москвы) и 9-классник Дмитрий Крачун (школа № 239 г. Санкт-Петербурга). Ребят поздравляем – они молодцы.

Но знали мы и лучшие времена, когда вся наша команда возвращалась «золотой». По словам руководителя команды Н.Х. Агаханова, вариант был сложным, и наши ребята фактически ни одной сложной задачи «не взяли». Выступили ребята ровно, что обеспечила подготовка команды, а вот решить сложные задачи не смогли. Причина тому есть объективная – это переживаемый сейчас серьезный демографический спад, который не мог не сказаться и на рождении «звездочек». К сожалению, они пока не видны, и ситуация в таком виде продержится еще 2-3 года.

В неофициальном командном зачете мы третьи. Проиграли китайцам и американским китайцам (команда США тоже состоит из китайцев – это уже тенденции мировой демографии) – у них сейчас команды объективно более сильные.

Что можно противопоставить законам демографии. Тренеры команды сделали ставку на хорошую, добротную подготовку. И это дало результаты. А вот губернатор Магаданской области решил использовать экономические рычаги: он распорядился увеличить размер персональных стипендий, которые устанавливают в регионе для поощрения талантливой молодежи. На основании областного закона стипендия за серьезные успехи в обучении для учащихся, студентов и воспитанников учреждений образования, культуры и спорта составит 2500 рублей. Пусть это и не так много, но зато какая-нибудь «звездочка» получит дополнительную возможность принять участие в каком-нибудь турнире, летней школе, позаниматься с хорошим преподавателем или купить компьютер.

Давайте зажигать звезды! Нам нужен их свет.

М. ФАЛИЛЕЕВА,
г. Казань

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ
ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРАМИ

Умение решать уравнения и неравенства с параметрами — одно из требований, предъявляемых к выпускникам 9-х и 11-х классов. Но, как ни печально констатировать, на данный момент не существует методик обучения решению задач с параметрами. А в учебниках если и существует параграф на эту тему, то его содержание сводится к общему определению сути уравнения с параметром и разбору двух-трех примеров.

На наш взгляд, не существует целостной концепции, позволяющей вводить задачи с параметрами на протяжении всего курса алгебры и начал анализа общеобразовательных учреждений. Противоположная точка зрения состоит в том, что уравнения и неравенства с параметрами — это более общий случай изучаемых в школе уравнений и неравенств, соответственно, и методы их решения не отличаются от методов решения уравнений без параметров. Да, это так. Так почему же большинство учащихся не могут решать задачи с параметрами? Дело в том, что, решая задачи с параметрами, ученик должен использовать эвристики, которые связаны с наличием у него исследовательских умений. Поэтому многие методисты относят задачи с параметрами к уровням выше среднего или повышенной сложности. В связи с вышесказанным возникает потребность в разработке методических приемов, обеспечивающих развитие исследовательских умений, необходимых учащимся для решения задач с параметрами.

В этой статье мы опишем использование частных случаев как прием обучения и вспомогательное средство в обучении решению задач с параметрами. Прилагательное «**частный**» будем толковать в смысле «представляющий собою какую-либо отдельную часть, подробность, деталь чего-либо» (*Д. Ушаков*).

Использование частных случаев при решении задач с параметрами позволяет:

- учителю осуществлять плавный переход от решения задач без параметров к задачам с параметрами;
- учителю проводить качественную актуализацию знаний по решению уравнений, неравенств и их систем; по исследованию функций; по решению текстовых задач;
- учащимся определять сущность уравнения (неравенства) с параметром и находить соответственный метод решения;
- учащимся находить «особые» значения параметра и проводить проверку ответа.

Далее при решении уравнений и неравенств с параметрами мы подробно рассмотрим каждый из приведенных выше пунктов.

Определение частного случая уравнения (неравенства) с параметром

Напомним, что уравнение (неравенство) с параметром — это множество уравнений (неравенств) определенных видов. Напри-

К материалу есть приложение на CD-диске.

мер, общий вид уравнения с одной переменной и одним параметром таков:

$$F(x;\ a) = 0. \qquad (1)$$

К этому виду относятся уравнения различных степеней (линейные, квадратные, кубические и др.), дробно-рациональные, показательные, тригонометрические и другие с одной неизвестной и одним параметром. Например:

$$ax^2 + 5x - a = 0;$$
$$ax^2 - \frac{1}{ax^2} = 0; \qquad (2)$$
$$\cos^2 x + \sin x + a + 2 = 0.$$

Частным случаем уравнения с параметром будем называть уравнение с конкретным числовым значением параметра. Так, приведенные уравнения при $a = 3$ принимают вид:

$$3x^2 + 5x - 3 = 0;$$
$$3x^2 - \frac{1}{3x^2} = 0; \qquad (3)$$
$$\cos^2 x + \sin x + 5 = 0.$$

Неравенства с одной переменной и одним параметром в общем виде можно записать как:

$$F(x;\ a) < 0,\ \ F(x;\ a) > 0,$$
$$F(x;\ a) \le 0,\ \ F(x;\ a) \ge 0. \qquad (4)$$

При различных значениях a уравнение (1) или неравенства (4) могут иметь различные множества корней. Тогда решение уравнения (неравенства) с параметром и состоит в том, чтобы рассмотреть все случаи параметра a и найти решение в каждом случае.

Определение сущности и метода решения уравнения (неравенства) с параметром

На первом этапе изучения уравнения (неравенства) с параметром учащиеся должны понять его сущность (то есть при каких значениях параметра уравнение линейное, квадратное, дробно-рациональное, иррациональное и пр.) — что далее позволит определить метод решения уравнения (неравенства). Например, нам предлагают решить уравнение $ax^2 + x + 2 = 0$. При $a = 0$ уравнение принимает вид линейного, в остальных случаях — квадратного. Поэтому при $a = 0$ уравнение решаем как линейное, а при $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ — как квадратное. Под сущностью уравнения (неравенства) с параметром будем понимать определение вида уравнения (неравенства) при различных значениях параметра.

Задача 1. Определите вид уравнения

$$(a^2 - 4)x = a + 2$$

при различных значениях параметра a.

Предлагая это упражнение, скорее всего, вы услышите неверные ответы, так как учащиеся не сразу улавливают отличие параметра от переменной. Здесь на помощь приходят частные случаи уравнений при различных значениях параметра. Дав параметру конкретное числовое значение, мы из множества уравнений выделяем одно — соответствующее выбранному значению параметра. Конечно, может оказаться так, что вы случайным образом взяли такое значение параметра, что данное уравнение приняло вид тождества, или неверного числового равенства, или уравнения другого вида (например, из квадратного при каком-то значении параметра стало линейным), поэтому подставляйте несколько различных значений параметра.

Решение. Подставим вместо параметра a в уравнение несколько чисел, например, 4, 1, –3. Какие уравнения мы получили? Это линейные уравнения. Здесь коэффициент при переменной не равен нулю: $12x = 6$, $-3x = 3$, $5x = -1$. Найдем значения a, при которых коэффициент при x равен нулю, то есть $a^2 - 4 = 0$. Тогда при $a = 2$ и $a = -2$ уравнение принимает вид соответственно: $0 \cdot x = 4$ и $0 \cdot x = 0$. В первом случае, это неверное числовое равенство $0 = 4$, во втором — тождество.

Ответ: если $a = 2$, то неверное числовое равенство; если $a = -2$, то тождество; если $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$, то линейное уравнение.

Отбор частных случаев

При решении первых уравнений (неравенств) с параметром желательно разобрать как можно больше частных случаев. Можно представить частные случаи и общее решение в виде сравнительной таблицы. В этом случае учащиеся увидят общие тенденции в решении частных случаев и общего решения.

Задача 2. Решите уравнение

$$\frac{x-a}{a-2} = 0.$$

Решение. Определим вид уравнения при различных значениях параметра. Рассмотрим частные случаи при $a = 5, 2, -10, 14$ (табл. 1).

На основе частных случаев делаем вывод, что только в случае равенства знаменателя нулю уравнение $\frac{x-a}{a-2} = 0$ не имеет корней, в остальных случаях $x = a$.

Ответ: если $a = 2$, то решений нет; если $a \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$, то $x = a$.

(В таблице случаи, входящие в ответ, выделены розовым цветом.)

Таблица 1

	Частные случаи				Решение
Если	$a = 5$	$a = 2$	$a = -10$	$a = 14$	$a \neq 2$
то	$\frac{x-5}{3}=0$	$\frac{x-2}{0}=0$	$\frac{x+10}{-12}=0$	$\frac{x-14}{12}=0$	$\frac{x-a}{a-2}=0$
уравнение	линейное	неверное равенство	линейное	линейное	линейное
Тогда	$x - 5 = 0$		$x + 10 = 0$	$x - 14 = 0$	$x - a = 0$
Ответ	$x = 5$	не имеет решения	$x = -10$	$x = 14$	$x = a$

При решении частных случаев для учителя и ученика важным становится вопрос об отборе таких значений параметра, которые могли бы проиллюстрировать многообразие решений уравнений (неравенств) с параметрами. Как и когда это делать? Пару первых частных случаев можно взять произвольно. Если все этапы решения одинаковы, то можно решить задачу в общем виде. Например, в задаче 2 сначала вы рассмотрели частные случаи при $a = 5$ и $a = -10$; их алгоритмы решения идентичны, что позволяет провести решение уравнения с параметром. При решении возникает случай равенства знаменателя нулю, тогда возникает частный случай при $a = 2$.

Конечно, учителю нужно заранее отобрать те частные случаи, которые позволят с большей эффективностью провести обучение решению задач с параметрами. Например, при решении первых примеров желательно отобрать те значения параметров, при подстановке которых уравнения будут иметь как различные, так и одинаковые алгоритмы решения. А на последних этапах обучения можно подобрать такие значения параметра, которые создадут ложную картину общего решения задачи (создание проблемной ситуации). Значения параметров можно подбирать или в начале, или по ходу решения задачи с параметром (если в процессе решения возникают затруднения), или в конце для проверки ответа.

Запись ответа

Важным умением является правильная формулировка и запись ответа.

Форма ответа должна показывать решение в зависимости от параметра, то есть:

«Если $a = \text{const}$, то $x = f(a)$».

При этом значения параметра должны выражаться конкретным числовым значением, а значение переменной x — либо числовым или пустым множеством, либо алгебраическим выражением через параметр a.

Так, например, в задаче 2 ответ сформулирован так:

«Если $a = 2$, то решений нет; если $a \in (-\infty; 2) \cup \cup (2; +\infty)$, то $x = a$».

Обратите внимание, что при объединении всех значений перечисленных параметров в ответе должно получиться множество действительных чисел, то есть $\{2\} \cup (-\infty; 2) \cup (2; +\infty) = (-\infty; +\infty) = \boldsymbol{R}$.

Решение в общем виде. «Особые» частные случаи

Введем несколько понятий, которые на первых этапах обучения решению задач с параметрами помогут как учителю, так и учащемуся. Они вводятся исключительно с методической целью, для проведения некоторой систематизации в решении задач с параметрами.

Первое понятие — это **«особые» частные случаи**, второе — **решение в общем виде.**

В задаче 2 видим, что при $a = 5, -10, 14$ частные случаи решения представлены в последнем столбце (табл. 1). Значение $a = 2$ является исключением, при подстановке в данное уравнение оно меняет вид уравнения и дает ответ, не удовлетворяющий $x = a$. Решение из последнего столбца назовем «решением в общем виде», а частный случай при $a = 2$ назовем «особым».

Примеры этих понятий рассмотрим далее.

Задача 3. Решите уравнение

$$(a^2 - 5a + 6)x = a^2 - 4.$$

Решение. Рассмотрим частный случай, например, при $a = 1$. Подставив это значение, получим линейное уравнение (табл. 2). Таким образом, если коэффициент при переменной x не равен нулю, то уравнение линейное; иначе, принимает вид верного или неверного числового равенства. Если допущены неточности в определении вида уравнения при каких-то значениях параметра, то дальнейшее решение позволяет их устранить.

Действуем аналогично и в общем случае. Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$x=\frac{(a-2)(a+2)}{(a-2)(a-3)},$$

при этом рекомендуем ничего не сокращать, не отбрасывать при решении уравнения (в этом уравнении была возможность сократить $a-2$, но мы этого не сделали!). Любое значение a, которое тем или иным образом фигурирует в уравнении, необходимо проверить, то есть подставить в исходное уравнение. Здесь эти значения -2, 2, и 3. Тогда при $a=-2$ получим линейное уравнение, при $a=2$ — числовое тождество, а при $a=3$ — неверное равенство. Поскольку при $a=-2$ решение соответствует решению в общем виде, мы не будем его выделять, а частные случаи при $a=2$ и $a=3$ отнесем к «особым».

Только после исключения значений a особых частных случаев можно записать, что при остальных значениях параметра $x=\frac{a+2}{a-3}$.

Ответ: если $a=2$, то x — любое действительное число; если $a=3$, то решений нет; если $a\in(-\infty;2)\cup(2;3)\cup(3;+\infty)$, то $x=\frac{a+2}{a-3}$.

При объединении всех значений перечисленных в ответе параметров получим: $\{2\}\cup\{3\}\cup$ $\cup(-\infty;2)\cup(2;3)\cup(3;+\infty)=(-\infty;+\infty)$.

Таким образом, **решение в общем виде** — это решение, определяющее одинаковые закономерности в этапах решения при бесконечном множестве значений параметра.

Решений в общем виде у одного уравнения (неравенства) может быть несколько.

«Особые» случаи — это частные случаи, алгоритм решения которых отличается от алгоритма решения в общем виде.

Например, в задаче 3 решение в общем виде (в последней колонке табл. 2) каждым своим этапом соответствует решениям при $a=1$ и $a=-2$. При $a=2$ и $a=3$ решения не соответствуют решению в общем виде, поэтому они «особые» случаи.

Выделим некоторые признаки, по которым проводим отбор значений параметра в «особые» частные случаи:

1. В уравнении (неравенстве) обращаются в ноль коэффициенты при неизвестных или знаменатель алгебраического выражения.

2. При решении в общем виде создают ограничения в области допустимых значений переменной.

Задача 4. Решите уравнение

$$\frac{x^2-49}{x+a}=0.$$

Решение. Определим вид уравнения при различных значениях параметра. Рассмотрим частные случаи при $a=5$ и $a=-2$ (табл. 3). После решения двух частных случаев видим, что и в том, и в другом случае фигурируют значения переменной 7 и –7, поэтому рассмотрим их отдельно в столбце «Особые частные случаи».

При решении особых случаев при $a=7$ и $a=-7$ получаем корни, отличные от корней решения в общем виде. В ответ включаем решение в общем виде и особые частные случаи.

Ответ: если $a=7$, то $x=7$; если $a=-7$, то $x=-7$; если $a\in(-\infty;-7)\cup(-7;7)\cup(7;+\infty)$, то $x=7$, $x=-7$.

Таблица 2

	Частные случаи				Решение
			особые		
Если	$a=1$	$a=-2$	$a=2$	$a=3$	$a\ne2,\ a\ne3$
то	$2x=-3$	$20x=0$	$0\cdot x=0$	$0\cdot x=5$	$(a^2-5a+6)x=$ $=a^2-4$
уравнение	линейное	линейное	тождество	неверное равенство	линейное
Преобразуем	$x=-\frac{3}{2}$	$x=\frac{0}{20}$	$0=0$	$0=5$	$x=\frac{a^2-4}{a^2-5a+6}$, $x=\frac{(a-2)(a+2)}{(a-2)(a-3)}$
Ответ	$x=-\frac{3}{2}$	$x=0$	x — любое число	нет корней	$x=\frac{a+2}{a-3}$

Таблица 3

	Частные случаи				Решение
			особые		
Если	$a = 5$	$a = -2$	$a = 7$	$a = -7$	$a \neq 7,\ a \neq -7$
то	$\frac{x^2-49}{x+5}=0$	$\frac{x^2-49}{x-2}=0$	$\frac{x^2-49}{x+7}=0$	$\frac{x^2-49}{x-7}=0$	$\frac{x^2-49}{x+a}=0$
уравнение	дробно-рациональное	дробно-рациональное	дробно-рациональное	дробно-рациональное	дробно-рациональное
Преобразуем	$\frac{(x-7)(x+7)}{x+5}=0$	$\frac{(x-7)(x+7)}{x-2}=0$	$\frac{(x-7)(x+7)}{x+7}=0$	$\frac{(x-7)(x+7)}{x-7}=0$	$\frac{(x-7)(x+7)}{x+a}=0$
Ответ	$x = 7,\ x = -7$	$x = 7,\ x = -7$	$x = 7$	$x = -7$	$x = 7,\ x = -7$

Актуализация

Рассмотрение частных случаев позволяет провести на уроке продуктивную актуализацию знаний и умений учащихся. Например, на уроке планируется повторить тему «Решение квадратных уравнений».

Задача 5. Найти все значения a, при которых уравнение $ax^2 + 3x + 2 = 0$: 1) имеет два корня; 2) не имеет корней; 3) имеет один корень. Найти корни.

Решение. Определим вид уравнения при различных значениях параметра. Рассмотрим частные случаи при $a = 3$, $a = -2$, и получим уравнения, имеющие разные решения (табл. 4): при $a = 3$ — корней нет, при $a = -2$ — два корня. Это позволяет решение в общем виде разделить на три случая. Особым случаем является значение $a = 0$, при котором уравнение принимает вид линейного и поэтому имеет метод решения, отличный от метода решения квадратного уравнения через дискриминант.

Ответ: 1) если $a \in (-\infty; 0) \cup \left(0; 1\frac{1}{8}\right)$, то $x_1 = \frac{-3+\sqrt{9-8a}}{2a}$, $x_2 = \frac{-3-\sqrt{9-8a}}{2a}$; 2) если $a = 0$,

Таблица 4

	Частные случаи			Решение		
			особый			
Если	$a = 3$	$a = -2$	$a = 0$	$a \neq 0$		
то	$3x^2 + 3x + 2 = 0$	$-2x^2 + 3x + 2 = 0$	$3x + 2 = 0$	$ax^2 + 3x + 2 = 0$		
уравнение	квадратное	квадратное	линейное	квадратное		
Решим	$D = -15$	$D = 25$, $x_1 = \frac{3+5}{4} = 2$, $x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$	$3x = -2$	$D = 3^2 + 4 \cdot a \cdot 2 = 9 - 8a$		
				Если $D > 0$ (то есть $a < 1\frac{1}{8}$), $x_1 = \frac{-3+\sqrt{9-8a}}{2a}$, $x_2 = \frac{-3-\sqrt{9-8a}}{2a}$	Если $D = 0$ (то есть $a = 1\frac{1}{8}$), $x = -\frac{4}{3}$	Если $D < 0$ (то есть $a > 1\frac{1}{8}$), нет корней
Ответ	нет корней	$x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{2}{3}$	$x_1 = \frac{-3+\sqrt{9-8a}}{2a}$, $x_2 = \frac{-3-\sqrt{9-8a}}{2a}$	$x = -\frac{4}{3}$	нет корней

то $x=-\dfrac{2}{3}$; если $a=1\dfrac{1}{8}$, то $x=-\dfrac{4}{3}$; 3) если $a\in\left(1\dfrac{1}{8};+\infty\right)$, то корней нет.

Таким образом, учащиеся повторили решение квадратных уравнений при различных значениях дискриминанта, увидели зависимость решения уравнения от значения старшего коэффициента. Это более качественная актуализация, чем решение нескольких различных уравнений. Она позволяет перейти к обсуждению других исследовательских вопросов по теме «Решение квадратных уравнений». Например, существуют ли квадратные уравнения, у которых при любом значении параметра нет корней (один корень, два корня)?

Проверка ответа

Рассмотренные частные случаи можно использовать для проверки ответа. Проведем проверку ответа задачи 5.

Проверка:

1. Обратимся к первому частному случаю: если $a = 3$, то нет корней.

2. Смотрим в ответ: $3\in\left(1\dfrac{1}{8};+\infty\right)$, следовательно, корней нет.

Ответ в частном случае соответствует общему ответу.

3. Обратимся ко второму частному случаю: если $a = -2$, то $x_1 = 2$, $x_2=-\dfrac{1}{2}$.

4. Смотрим в ответ: $-2 \in (-\infty; 0)$. Следовательно,

$$x_1=\frac{-3+\sqrt{9-8\cdot(-2)}}{2\cdot(-2)}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2},$$

$$x_2=\frac{-3-\sqrt{9-8\cdot(-2)}}{2\cdot(-2)}=\frac{-8}{-4}=2.$$

Ответ в частном случае соответствует общему ответу при $a = -2$.

Задача 6. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $2x^2 - x + a > 0$ верно при любом значении x.

Решение. Старший коэффициент не содержит параметра, поэтому неравенство квадратичное при всех значениях параметра. Рассмотрим частные случаи при $a = 3$ и $a = -2$ (табл. 5).

Рассмотрев частные случаи, делаем вывод, что в зависимости от значений дискриминанта $D = 1 - 8a$ функция $f(x) = 2x^2 - x + a$ либо имеет нули, либо не имеет.

Ответ: если $a\in\left(1\dfrac{1}{8};+\infty\right)$, то неравенство $2x^2 - x + a > 0$ верно при любом значении x.

Проверка:

1. Обратимся к первому частному случаю: если $a = 3$, то неравенство верно при любом значении x.

2. Смотрим в ответ: число 3 входит в найденный интервал $\left(\dfrac{1}{8};+\infty\right)$.

Таблица 5

	Частные случаи		Решение	
Если	$a = 3$	$a = -2$	$a \neq 0$	
то	$2x^2 - x + 3 > 0$	$2x^2 - x - 2 > 0$	$2x^2 - x + a > 0$	
неравенство	квадратичное			
Решим	$f(x) = 2x^2 - x + 3$. Найдем нули $f(x)$: $D = -23$. Нулей функции нет, ветви параболы направлены вверх, следовательно, $f(x)$ принимает только положительные значения	$f(x) = 2x^2 - x - 2$. Найдем нули $f(x)$: $D = 17$. Следовательно, два нуля функции, и $f(x)$ принимает положительные и отрицательные значения	$f(x) = 2x^2 - x + a$. Найдем нули $f(x)$: $D = 1 - 8a$	
			Если $D \geq 0$ (то есть $a\leq\frac{1}{8}$), то $f(x)$ имеет нули и принимает положительные и отрицательные значения	Если $D < 0$ (то есть $a>\frac{1}{8}$), то нулей функции нет, ветви параболы направлены вверх, следовательно, $f(x)$ принимает только положительные значения
Ответ	верно при любом значении x	верно при некоторых значениях x	$a>\frac{1}{8}$	

Ответ в частном случае соответствует общему ответу.

3. Обратимся ко второму частному случаю: если $a = -2$, то неравенство верно при некоторых значениях x.

4. Смотрим в ответ: число -2 не входит в найденный интервал $\left(\frac{1}{8}; +\infty\right)$.

Ответ в частном случае соответствует общему ответу.

Задача 7. Решите уравнение

$$a^2 - \frac{a^2-1}{2x-x^2} = \frac{x+2}{x-2}.$$

Решение. Возьмем лишь один частный случай при $a = 2$, который дает представление о методе решения дробно-рационального уравнения с параметром (табл. 6). При решении частного случая выделяем следующие этапы решения:

- приведение к общему знаменателю;
- нахождение области допустимых значений x;
- приведение подобных членов;
- решение квадратного уравнения;
- проверка принадлежности корней квадратного уравнения области допустимых значений.

Эти этапы полностью соответствуют этапам решения в общем виде.

Особенность этого примера в том, что параметр в уравнении всегда в квадрате, то есть ответы при $a = \pm m$ будут одинаковы.

Обратите внимание, что особые случаи при $a = \pm 1$ видны еще до решения уравнения с параметром, а случаи при $a = \pm 3$ возникают после проверки принадлежности корней уравнения ОДЗ. Поэто-

Таблица 6

	Частные случаи		Решение	
		особый		особый
Если	$a = 2$ ($a = -2$)	$a = 1$, $a = -1$	$a \neq 1$, $a \neq -1$, $a \neq 3$, $a \neq -3$	$a = 3$, $a = -3$
то	$4 - \frac{3}{2x-x^2} = \frac{x+2}{x-2}$	$1 = \frac{x+2}{x-2}$	$a^2 - \frac{a^2-1}{2x-x^2} = \frac{x+2}{x-2}$	$9 - \frac{8}{2x-x^2} = \frac{x+2}{x-2}$
уравнение	дробно-рациональное	неверное равенство	дробно-рациональное	дробно-рациональное
Решим	Приведем к общему знаменателю: $\frac{4(x^2-2x)+3-x(x+2)}{x(x-2)} = 0.$ ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq 2$. Тогда $4(x^2-2x) +$ $+ 3 - x(x+2) = 0,$ $3x^2 - 10x + 3 = 0;$ $\frac{D}{4} = 5^2 - 3^2 = 16;$ $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Проверим принадлежность ОДЗ: $x_1 \neq 0$, $x_1 \neq 2$, $x_2 \neq 0$, $x_2 \neq 2$	Если дробь равна единице, то числитель равен знаменателю. При любом x верно, что $x - 2 \neq x + 2$, то есть $-2 \neq 2$	Преобразуем: $\frac{a^2(x^2-2x)+a^2-1-x(x+2)}{x(x-2)} = 0.$ ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq 2$. Тогда $a^2(x^2-2x) + a^2 - 1 -$ $- x(x+2) = 0,$ $(a^2-1)x^2 - 2(a^2+1)x +$ $+ (a^2-1) = 0;$ $\frac{D}{4} = (a^2+1)^2 - (a^2-1)^2 = 4a^2;$ $x_1 = \frac{a^2+1-2a}{a^2-1} = \frac{a-1}{a+1},$ $x_2 = \frac{a^2+1+2a}{a^2-1} = \frac{a+1}{a-1}.$ Принадлежность к ОДЗ: 1) $x_1 \neq 0$, $\frac{a-1}{a+1} \neq 0$, $a \neq 1$; 2) $x_1 \neq 2$, $\frac{a-1}{a+1} \neq 2$, $a \neq -3$; 3) $x_2 \neq 0$, $\frac{a+1}{a-1} \neq 0$, $a \neq -1$; 4) $x_2 \neq 2$, $\frac{a+1}{a-1} \neq 2$, $a \neq 3$	Приведем к общему знаменателю и приведем подобные члены: $\frac{2x^2-5x+2}{x(x-2)} = 0.$ ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq 2$. Тогда $2x^2 - 5x +$ $+ 2 = 0;$ $D = 5^2 - 4 \cdot 2^2 = 9;$ $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Проверим принадлежность ОДЗ: $x_1 \neq 0$, $x_1 = 2$, $x_2 \neq 0$, $x_2 \neq 2$
Ответ	$x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$	нет корней	$x_1 = \frac{a-1}{a+1}$, $x_2 = \frac{a+1}{a-1}$	$x = \frac{1}{2}$

му особый случай при $a = 3$, $a = -3$ был решен в последнюю очередь.

Ответ: если $a = \pm 3$, то $x=\frac{1}{2}$; если $a = \pm 1$, то нет корней; если $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; -1) \cup (-1; 1) \cup \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$, то $x_1=\frac{a+1}{a-1}$, $x_2=\frac{a-1}{a+1}$.

Сформулировать задачу для учащихся с обязательным решением частных случаев можно следующим образом.

Задача 8. Решите уравнение

$$\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}.$$

Рассмотрите частные случаи при $a = 4$ и $a = -3$.

Решение. Рассмотрим частные случаи при $a = 4$ и $a = -3$ (табл. 7). При решении уравнений с квадратными радикалами часто используется возведение в квадрат левой и правой частей уравнения. При этом необходимо помнить, что возводить в квадрат можно части, имеющие одинаковые знаки. В частном случае при $a = 4$, прежде чем возводить в квадрат в первый раз, учитываем условие: так как $\sqrt{x+4}\ge 0$, то $4-\sqrt{x}\ge 0$; во второй раз — условие $\frac{3}{2}\ge 0$. При $a = -3$ одна часть уравнения положительна, а вторая — отрицательна при любом x, поэтому оно не имеет корней. Эти рассуждения повторяются в общем решении.

Необходимо помнить о принадлежности корней уравнения (неравенства) области допустимых значений переменной x.

Ответ: если $a = 0$, то $x = 0$; если $a \in \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$, то нет корней; если $a \in [1; +\infty)$, то $x=\frac{(a-1)^2}{4}$.

Литература

1. *Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Сурвилло Г.С.* и др. Алгебра: Учеб. пособие для учащихся 8 кл. с углубл. изучением математики. — М.: Просвещение, 2001.
2. *Горнштейн П.И.* Задачи с параметрами. — Киев, 1992.
3. *Дорофеев Г.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А.* и др. Математика: алгебра. Функции. Анализ данных: учеб. для 9 кл. общеобразоват. учреждений / под ред. Г.В. Дорофеева. — М.: Просвещение, 2005.
4. *Козко А.И., Чирский В.Г.* Задачи с параметром и другие сложные задачи. — М.: МЦНМО, 2007.
5. *Кочагин В.* Курс «Уравнения и неравенства с параметрами» // Математика, 2002, № 33.
6. *Маргулис А.Я., Мордкович А.Г., Радунский Б.А.* Внимание: в уравнении — параметр! // Квант, 1970, № 9.
7. *Мордкович А.Г., Мишустина Т.Н., Тульчинская Е.Е.* и др. Алгебра. 8 кл: Ч. 2: Задачник для общеобразоват. учреждений. — 5-е изд. — М.: Мнемозина, 2003.

Таблица 7

	Частные случаи			Решение	
			особый		
Если	$a=4$	$a=-3$	$a=0$	$a\ne 0$	
то	$\sqrt{x+4}=4-\sqrt{x}$	$\sqrt{x-3}=-3-\sqrt{x}$	$\sqrt{x}=-\sqrt{x}$	$\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$	
уравнение	иррациональное				
Решим	ОДЗ: $x+4\ge 0$, $x\ge 0$ и $4-\sqrt{x}\ge 0$, то есть $x\in[0;16]$. Возведем в квадрат: $x+4=\left(4-\sqrt{x}\right)^2$, $x+4=16+x-8\sqrt{x}$, $8\sqrt{x}=12$, $2\sqrt{x}=3$, $\sqrt{x}=\frac{3}{2}$. Возведем в квадрат: $x=\frac{9}{4}\in[0;16]$	$\sqrt{x-3}\ge 0$ и $-3-\sqrt{x}<0$. Поэтому $\sqrt{x-3}\ne -3-\sqrt{x}$	ОДЗ: $x\ge 0$, то есть $x\in[0;+\infty)$. $2\sqrt{x}=0$, $\sqrt{x}=0$, $x=0\in$ $\in[0;+\infty)$	Если $a\ge 0$, то ОДЗ: $x+a\ge 0$, $x\ge 0$, $a-\sqrt{x}\ge 0$. Следовательно, $0\le x\le a^2$. Возведем в квадрат: $x+a=\left(a-\sqrt{x}\right)^2$, $x+a=a^2+x-2a\sqrt{x}$, $2a\sqrt{x}=a^2-a$. Делим на a: $2\sqrt{x}=a-1$. Чтобы снова возвести в квадрат, необходимо, чтобы $a-1\ge$ ≥ 0, то есть если $a\ge$ ≥ 1. $\left(2\sqrt{x}\right)^2=(a-1)^2$	Если $a<0$, то $\sqrt{x+a}\ge 0$ и $a-\sqrt{x}<0$
Ответ	$x=\frac{9}{4}$	нет корней	$x=0$	$x=\frac{(a-1)^2}{4}$	нет корней

Элективный курс

Е. БЕЛОНОГОВА,
г. Москва

«ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ»
В 8-М ЛИЦЕЙСКОМ КЛАССЕ

При проектировании элективного курса важно сформулировать основные цели, которые будут решаться с его помощью, и подобрать адекватные этим целям средства. Какими могут быть цели элективного курса для учащихся лицейского класса в основной школе? Подходят ли для их реализации задачи с параметрами? В статье описан опыт удачного построения такого курса.

В прошедшем учебном году в школе № 544 города Москвы в порядке эксперимента был разработан и проведен элективный курс «Задачи с параметрами» в 8-м лицейском классе. При этом ставились следующие цели:

— развивать логическое мышление учащихся;

— прививать графическую культуру: учить строить графики различной степени сложности и применять их как иллюстрацию к задаче;

— учить анализировать и обобщать результаты решения задач;

— учить искать подходы к решению нестандартных задач.

Почему для реализации этих целей были выбраны именно задачи с параметром? Каковы особенности этих задач в сравнении с традиционными задачами?

Во-первых, при введении в задачу параметра возникает серия задач и потому появляется проблема выбора, которая формулируется в нестандартном виде. Во-вторых, для решения задачи требуется искать путь, способ решения; нужно «организовать перебор» значений параметра. В-третьих, итогом решения является обобщение полученных результатов, на основе которого дается ответ, сама форма которого нетрадиционна. То есть задачи с параметром дают богатый материал для решения поставленных целей.

При построении курса, подборе задач, выборе форм проведения занятия приходилось учитывать следующие аспекты.

Содержательный аспект: мал объем знаний, на которые можно опираться при построении курса (линейные уравнения и их системы; линейная функция и ее график; понятие модуля). Задачи трудны для понимания.

Психологический аспект: совершенно новый подход к решению задач.

Учитывая изложенное выше, в основу для построения курса «Задачи с параметрами» были положены следующие принципы.

- Обязательная согласованность курса с курсом алгебры как по содержанию, так и по последовательности изложения.
- Каждая тема курса начинается с повторения соответствующей темы курса алгебры.
- Курс является развивающим дополнением к курсу алгебры.
- В курсе реализуется возможность более детального рассмотрения некоторых тем курса алгебры (например, «Задачи с модулем»).

К материалу есть приложение на CD-диске.

Перейдем к содержательной части курса.

Программа курса содержит следующие темы.

1. Линейные уравнения с параметром (8 ч).
2. Линейная функция и ее график (8 ч).
3. Функция $y = |x|$ и ее график. Преобразование графиков (12 ч).
4. Системы линейных уравнений (8 ч).
5. Линейные неравенства и системы линейных неравенств (10 ч).
6. Квадратные уравнения (14 ч).

Проиллюстрируем содержание курса некоторыми задачами.

Задача 1. Найдите значения параметра k, при которых прямая $y = kx$ не имеет общих точек с графиком функции $y = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ (рис. 1).

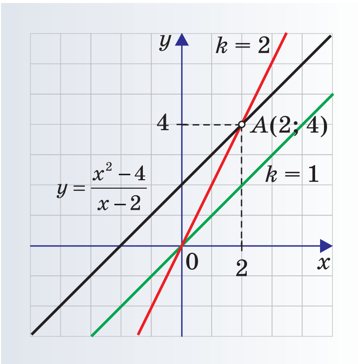


Рис. 1

В этой задаче впервые «проявляет» себя параметр: k — это не просто число, значения которого надо найти, а k — множество чисел, при каждом из которых получается прямая, проходящая через начало координат. Из этого множества прямых нужно выбрать те, которые удовлетворяют условию. Учащиеся находят очевидный ответ: параллельная прямая ($k = 1$), и только при подсказке учителя находят вторую прямую ($k = 2$).

Задача 2. Найдите значения параметра c, при которых прямая $y = c$ пересекает график функции $y = \begin{cases} 2x+2, & x<1, \\ (x-2)^2, & x \ge 1 \end{cases}$ (рис. 2) в двух точках.

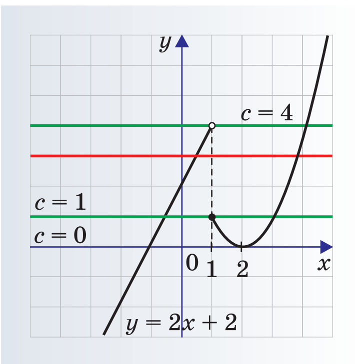


Рис. 2

При решении этой задачи требуется более высокая графическая культура: строится график функции, заданной разными формулами на разных участках оси Ox, к тому же график функции имеет разрыв в точке $x = 1$.

Параметр проявляет себя в полной мере: рассматриваются все прямые, параллельные оси Ox, из которых нужно выбрать удовлетворяющие условию задачи.

Ответ: $c = 0$, $1 < c < 4$.

Задача 3. Найдите графически значения параметра a, при которых уравнение $\dfrac{|x|}{x}(x-1)^2 = a$ имеет один корень (рис. 3).

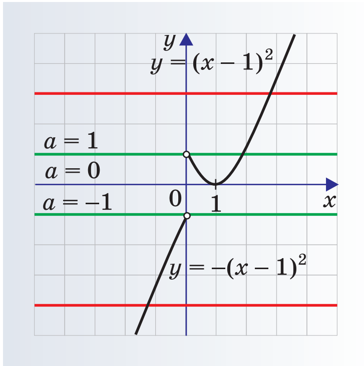


Рис. 3

Для решения задачи построим график функции $y = \dfrac{|x|}{x}(x-1)^2$ и рассмотрим число точек пересечения этого графика с прямыми $y = a$ в зависимости от значений параметра a.

По сравнению с предыдущей задачей, здесь еще более сложный график.

Ответ: $a < -1$, $a = 0$, $a \ge 1$.

Учитывая разный уровень подготовки учащихся, в курсе рассматривались задачи разной степени трудности.

Задача 4. (*уровень А*). Для каждого значения параметра m найдите число корней уравнения $|(x-2)^2 - 4| = m$ (рис. 4).

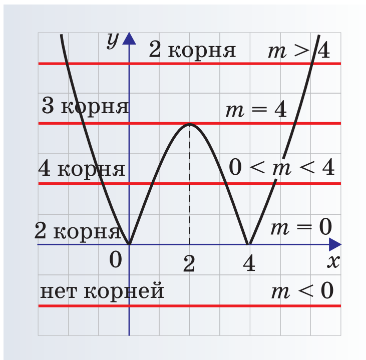


Рис. 4

Задача 5. (*уровень B*). Для каждого значения параметра c найдите число корней уравнения $||2x-6|-2|=-x+c$ (рис. 5).

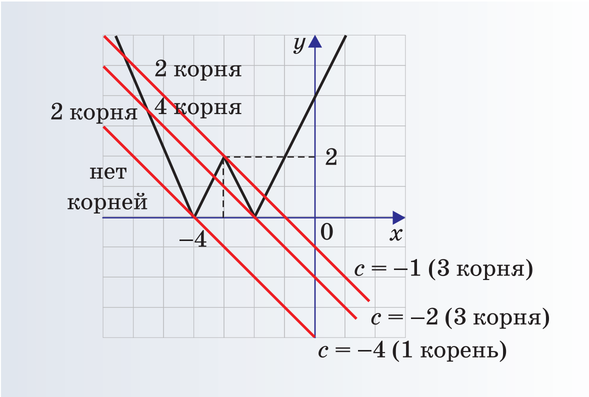


Рис. 5

Здесь, по сравнению с предыдущей задачей, более сложный график и более сложное семейство прямых, но снова находится только число корней.

Задача 6. (*уровень C*). Найдите графически в зависимости от значений параметра c число корней уравнения $||2x-1|-|x-1||=c$. При каких значениях c уравнение имеет четыре корня? Найдите эти корни (рис. 6).

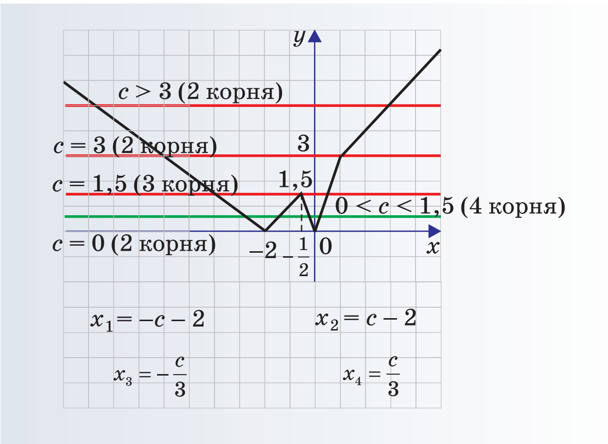


Рис. 6

В данной задаче более сложный график, хотя семейство прямых ($y = c$) проще, чем в предыдущей задаче.

Сложность увеличивается тем, что нужно найти корни уравнения, то есть решить еще соответствующие системы.

Задача 7. (*уровень C*). В зависимости от значений параметра k найдите число корней уравнения $|x-1|-|2x+1|+x=kx-1$ (рис. 8). При каких значениях k уравнение имеет три корня? Найдите эти корни.

График проще, чем в предыдущем примере, но множество прямых сложнее. Поэтому сложнее перебор значений параметра.

В заключение приведем пример задачи логического характера.

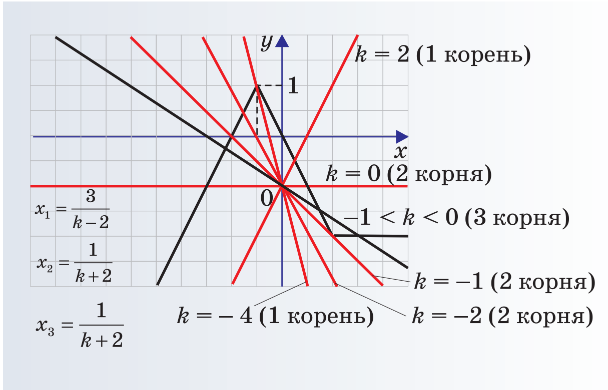


Рис. 7

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение $(ax-2)((5-a)x-3)=0$ имеет единственный корень? Найдите этот корень.

Решение. Уравнение равносильно совокупности $ax-2=0$ или $(5-a)x-3=0$.

Совокупность имеет единственный корень, когда одно из уравнений не имеет корней, а другое имеет единственный корень или оба уравнения имеют корни, но они совпадают.

Первое уравнение не имеет корней при $a=0$; второе при этом принимает вид $5x-2=0$ и имеет единственный корень $x_1=\frac{3}{5}$.

Второе уравнение не имеет корней при $a=5$; первое уравнение при $a=5$ принимает вид $5x-2=0$ и имеет единственный корень $x_2=\frac{2}{5}$.

Если $a\neq 0$ и $a\neq 5$, то каждое из уравнений имеет единственный корень: $x_1=\frac{2}{a}$ и $x_2=\frac{3}{5-a}$, и при $a=2$ $x_1=x_2=1$.

Ответ: при $a=0$ $x=\frac{3}{5}$; при $a=5$ $x=\frac{2}{5}$; при $a=2$ $x=1$.

По окончании курса была проведена итоговая работа: каждый ученик получил большое домашнее задание, состоящее из 10 задач по разделам курса. Всего было составлено 11 вариантов по трем степеням трудности. В течение месяца для учащихся проводились консультации. Итоговый контроль состоялся в форме устного зачета.

Подводя итоги, следует отметить, что проведенный курс в основном выполнил те задачи, о которых говорилось вначале, и основной массе учеников оказался доступен.

Как отмечали ученики в проведенном анкетировании, они стали понимать, что такое параметр, научились строить графики, рассуждать логически, анализировать уравнения и решать задачи с параметром.

С. ШАРОВА,
г. Урюпинск, Волгоградская обл.

11 класс

РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Задачи с параметром вызывают у многих учащихся если не панический страх, то, по крайней мере, неудобства. Между тем многие из задач можно решить различными способами. Чем больше способов решения одной параметрической задачи ребята будут знать, тем быстрее они научатся их решать.

Фото О. Шмелёвой

Важнейшая задача цивилизации —
научить человека мыслить.
Т. Эдисон

Владение приемами решения задач с параметрами можно считать критерием знаний основных разделов школьной математики, уровня математического и логического мышления. Введением темы «Решение задач с параметрами» достигается цель развития у учащихся тех общих дидактических и исследовательских навыков, которые должны сформироваться у выпускника школы. К задачам с параметрами, рассматриваемыми в школьном курсе, относятся, например, задачи, в которых отыскивается решение линейных и квадратных уравнений в общем виде, исследуется количество их корней в зависимости от значений коэффициентов. Параметр, будучи фиксированным, но неизвестным числом, имеет как бы двойственную природу. Во-первых, предполагаемая известность позволяет «общаться» с параметром как с числом, а во-вторых, степень общения ограничивается его неизвестностью. И вот эти задачи с параметром вызывают у многих если не панический страх, то, по крайней мере, неудобства. Между тем многие из задач можно решить различными способами. Чем больше способов решения одной параметрической задачи ребята будут знать, тем быстрее они научатся их решать. Это и есть основная образовательная цель разработанного урока: рассмотреть различные способы решения задач с параметрами на примере иррационального уравнения. Кроме того, при отыскании различных способов решения задач у школьников формируется познавательный интерес, развиваются творческие способности, вырабатываются исследовательские навыки.

Перед проведением урока по рассматриваемой теме учителю необходимо обобщить и систематизировать способы решения иррациональных уравнений, иррациональных неравенств, ознакомить учащихся с методами решения параметрических задач с использованием теорем расположения корней квадратного трехчлена.

Урок спаренный — 2 академических часа. На уроке используется групповая и индивидуальная формы работы.

К материалу есть приложение на CD-диске.

Структура урока выбрана не случайно. Большое внимание уделяется домашнему заданию, так как оно носит характер индивидуальной самостоятельной деятельности. И ученик, не будучи скованным временными рамками, может выполнять задания в привычном для себя темпе, пользоваться более подходящими способами. Кроме того, домашняя работа важна для формирования у учащихся навыков самообразования и воспитания ответственности за результаты своего труда. В силу сложности домашнего задания, учащиеся по совету учителя объединились в группы по интересам, потому что совместная творческая работа способствует развитию мыслительной деятельности учащихся, будит их инициативу, фантазию, творческий поиск. Такая форма работы очень нравится учащимся.

На уроке вызывается по одному представителю от каждой группы с тем, чтобы ознакомить всех учащихся с различными способами решения этого домашнего задания. Решение задач учащиеся готовят в виде презентации.

Форма урока также выбрана не случайно. На уроках-практикумах учащиеся проявляют больше самостоятельности, а учитель имеет возможность лучше учесть их индивидуальные особенности.

Цели урока:

образовательные: дальнейшее формирование умений систематизировать, обобщать, видеть закономерности; формирование умения решать задачи разными способами, привлекая разнообразный теоретический материал из всего курса; формирование умения решать задачи с параметрами; формирование графической культуры учащихся;

развивающие: развитие мыслительных операций посредством наблюдений, сравнений, сопоставления, сознательного восприятия учебного материала; развитие математической речи учащихся, потребности к самообразованию, способствование развитию творческой деятельности учащихся;

воспитательные: воспитание познавательной активности, чувства ответственности, уважения друг к другу, взаимопонимания, уверенности в себе.

Оборудование: мультимедийный проектор.

Ход урока

I

Учитель. Задачи с параметрами относятся к наиболее трудным заданиям, предлагаемым на экзаменах. Это связано с тем, что они требуют хорошего понимания «глубинных» свойств функций, и их решение носит творческий характер. Однако знание некоторых простых правил и алгоритмов необходимо. И вот мы на предыдущем уроке на примере задачи «Найти все значения параметра a, при которых не имеет корней уравнение $\sqrt{2x^2+ax+2a+10}=x-1$» рассмотрели пять различных способов решения этой задачи с параметром: аналитические и графический. На дом вы получили задачу: «Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x^4-7x^2-2(a-5)x+2a+6}=x^2-4$ имеет хотя бы один корень». Это было творческое долгосрочное домашнее задание. Вы разбились на группы согласно вашим интересам. И каждая группа решала эту задачу своим способом, а вашим групповым консультантом была я. Цель сегодняшнего занятия определена темой урока: «Различные способы решения задач с параметрами». Вам прекрасно известно, что полезнее решить одну задачу несколькими способами, чем несколько задач — одним.

Сейчас я предлагаю каждой группе представить свой способ решения предложенной на дом задачи, чтобы мы могли сравнить их.

(*На экране появляются последовательно решения задачи разными способами, которые комментируются ребятами.*)

1-я группа

$$\sqrt{x^4-7x^2-2(a-5)x+2a+6}=x^2-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2(a-5)x+2(a-5)=0, \\ |\,x\,|\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{x^2+10x-10}{2(x-1)}, \\ |\,x\,|\ge 2. \end{cases}$$

График левой части уравнения $y = a$ — прямая, параллельная оси Ox. Построим график правой части уравнения $y=\dfrac{x^2+10x-10}{2(x-1)}$.

1. $D(y) = R\backslash\{1\}$.
2. Точки пересечения с осями:
   а) с Oy: $(0;\ 5)$;
   б) с Ox: $\left(\dfrac{-10\pm\sqrt{140}}{2};\ 0\right)$.
3. Найдем производную функции и её критические точки:

$$y'=\frac{2x(x-2)}{4(x-1)^2}.$$

$y' = 0$ при $x = 0$, $x = 2$ (рис. 1).

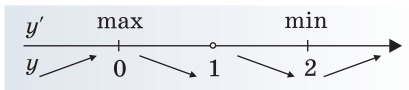


Рис. 1

4. Найдем экстремумы функции:

$$y_{\max} = y(0) = 5,\ y_{\min} = y(2) = 7.$$

5. Найдем асимптоты:

$x = 1$ — вертикальная асимптота;

$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{11}{2}$ — наклонная асимптота:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim_{x\to\infty} f(x)-kx\ .$$

6. Найдем значения функции в точках ±2:

$$f(2) = 7,\ f(-2)=\frac{13}{3}.$$

Отметим ограничение, данное в системе: полосу от -2 до 2, включая границы.

Из рисунка 2 видно, что при $a \le 4\frac{1}{3}$, $a \ge 7$ и $|\,x\,| \ge 2$ графики функций $y = a$ и $y = \frac{x^2 + 10x - 10}{2(x-1)}$ пересекаются. Значит, исходное уравнение при $a \in \left(-\infty;\, 4\frac{1}{3}\right] \cup (7;\, +\infty)$ имеет хотя бы один корень.

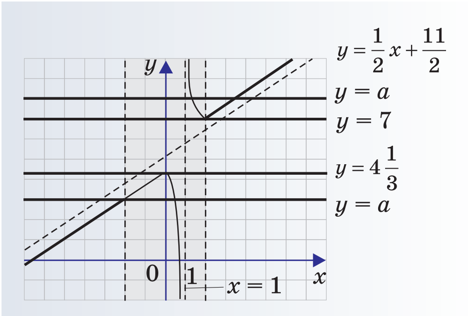


Рис. 2

Ответ: $a \le 4\frac{1}{3}$ и $a \ge 7$.

2-я группа

Решим противоположную задачу: найдем те значения параметра a, при которых уравнение не имеет решения (множество X). Ответ к задаче запишем в виде разности множеств R и X.

$$\sqrt{x^4 - 7x^2 - 2(a-5)x + 2a + 6} = x^2 - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |\,x\,| \ge 2, & \text{(а)} \\ x^2 - 2(a-5)x + 2(a-5) = 0. & \text{(б)} \end{cases}$$

Условие (а) не выполняется при $x \in (-2;\, 2)$.

Условие (б) не выполняется в двух случаях:

1. Уравнение (б) не имеет корней, то есть $D < 0$:

$$(a-5)^2 - 2(a-5) < 0 \Leftrightarrow a \in (5;\, 7). \qquad (*)$$

2. Уравнение (б) имеет корни, но они принадлежат интервалу $(-2;\, 2)$ (рис. 3).

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ f(-2) > 0, \\ f(2) > 0, \\ -2 < x_1 < 2, \\ -2 < x_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-5)^2 - 2(a-5) \ge 0, \\ a > \frac{13}{3}, \\ a < 7, \\ -2 < (a-5) \pm \sqrt{(a-5)^2 - 2(a-5)} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{13}{3} < a \le 5. \qquad (**)$$

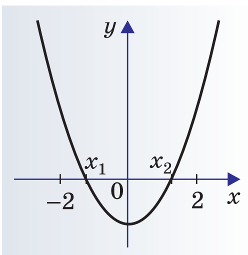


Рис. 3

Объединяя множества (*) и (**), получаем:

$$a \in \left(\frac{13}{3};\, 7\right).$$

Итак, если $a \in \left(\frac{13}{3};\, 7\right)$, то уравнение не имеет решений, значит, при всех других значениях a решения есть.

Ответ: $a \le \frac{13}{3}$ и $a \ge 7$.

Не так уж и трудно задачи решать:
Проблема дает вдохновенье.

Подводя итог этой части урока, отмечу, что, решая задачу разными способами, мы привлекаем разнообразный теоретический материал курса, тем самым повторяя его и готовясь к экзаменам.

II

Перейдем от разбора домашней задачи к другой, более простой задаче с параметром. Это связано с рамками учебного времени.

(*На доске появляется задание и советы к его решению.*)

> Найти значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+1} = x + a$ имеет только одно решение.

Возможные *способы решения*:

— используя теорему равносильности;

— используя замену переменной;

— графический способ;

— ваши варианты.

Вы можете воспользоваться этими указаниями либо придумать что-то свое. А после выполнения этого задания представители групп расскажут о своих результатах и мы сравним ответы.

III

Способ I (используем теорему равносильности):

$$\sqrt{x+1} = x + a \Leftrightarrow \begin{cases} x + a \ge 0, \\ x + 1 = (x+a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + a \ge 0, \\ x^2 + (2a-1)x + \left(a^2 - 1\right) = 0. \end{cases}$$

Для того, чтобы исходное уравнение имело ровно один корень, надо потребовать, чтобы получившееся квадратное уравнение имело:

1) один корень, для которого выполнено условие $x + a \ge 0$;

2) два корня, x_- и x_+, но такие, что $x_- + a < 0$, $x_+ + a \ge 0$, то есть $x_- < -a \le x_+$.

1. Квадратное уравнение имеет ровно один корень, если $D = 0$, то есть

$$D = (2a-1)^2 - 4(a^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow a = 1{,}25.$$

2. Рассмотрим случай, когда квадратное уравнение имеет два корня, то есть $D > 0$:

$5 - 4a > 0 \Leftrightarrow a < 1{,}25$;

$$x_+ = \frac{-(2a-1)+\sqrt{5-4a}}{2},\quad x_- = \frac{-(2a-1)-\sqrt{5-4a}}{2};$$

$$x_- < -a \le x_+,\quad \frac{1-2a-\sqrt{5-4a}}{2} < -a \le \frac{1-2a+\sqrt{5-4a}}{2},$$

$$1-2a-\sqrt{5-4a} < -2a \le 1-2a+\sqrt{5-4a},$$

$$1-\sqrt{5-4a} < 0 \le 1+\sqrt{5-4a}.$$

$1+\sqrt{5-4a} \ge 0$ при всех $a < 1{,}25$.

Рассмотрим неравенство $1-\sqrt{5-4a} < 0$:

$$\sqrt{5-4a} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-4a \ge 0, \\ 5-4a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 5-4a > 1 \Leftrightarrow a < 1.$$

Итак, $a \in (-\infty; 1) \cup \{1{,}25\}$.

Ответ: $a < 1$ и $a = 1{,}25$.

Способ II (используем замену переменной):

$$\sqrt{x+1} = x + a.$$

Пусть $\sqrt{x+1} = t,\ t \ge 0,\ x = t^2 - 1$.

$$t^2 - t - 1 + a = 0. \qquad (*)$$

Исходное уравнение имеет один корень при тех и только тех значениях a, при которых уравнение (*) имеет один неотрицательный корень.

1. $D = 0$, $D = 1 - 4(-1 + a) = 5 - 4a$, $5 - 4a = 0$, $a = 1{,}25$; $t = 0{,}5 > 0$. Значит, исходное уравнение при $a = 1{,}25$ имеет один корень.

2. Если $D > 0$, то есть $a < 1{,}25$, то уравнение (*) имеет два корня. При этом если $a - 1 < 0$, то эти корни разных знаков, то есть только один из них положительный.

$$\begin{cases} a < 1{,}25, \\ a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow a < 1.$$

Итак, если $a < 1$, то уравнение (*) имеет один положительный корень и исходное уравнение имеет один корень.

Ответ: $a < 1$, $a = 1{,}25$.

Способ III (графический способ). Преобразуем уравнение к виду $\sqrt{x+1} - x = a$. Построим график функции, стоящей в левой части уравнения, $y = \sqrt{x+1} - x$.

1. $D(y) = [-1; +\infty)$.

2. Пересечение с осями:

а) с Ox: $y = 0$

$\sqrt{x+1} - x = 0$,

$$\sqrt{x+1} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

б) с Oy: $x = 0$, $y = 1$.

3. Найдем производную, критические точки и экстремумы функции (рис. 4):

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - 1,$$

$$y' = 0,\ \sqrt{x+1} = 0{,}5,\ x = -\frac{3}{4},$$

$$y_{\max} = y(-0{,}75) = 1{,}25.$$

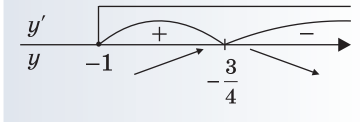


Рис. 4

Из рисунка 5 видно, что при $a < 1$ и $a = \frac{5}{4}$ графики функций пересекаются в одной точке, значит, при $a < 1$ и $a = \frac{5}{4}$ исходное уравнение имеет одно решение.

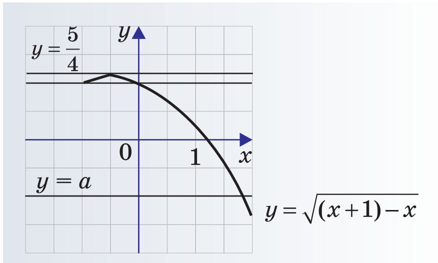


Рис. 5

Ответ: $a < 1$, $a = \frac{5}{4}$.

Способ IV (графический способ). Построим график левой и правой частей уравнения: $y = \sqrt{x+1}$, $y = x + a$.

График функции $y = \sqrt{x+1}$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ с помощью переноса его вдоль оси Ox влево на 1 единицу. График функции $y = x + a$ — прямая, параллельная прямой $y = x$ или совпадающая с ней при $a = 0$.

1. Из рисунка 6 видно, что при $a < 1$ графики функций пересекаются в одной точке, значит, исходное уравнение при $a < 1$ имеет одно решение.

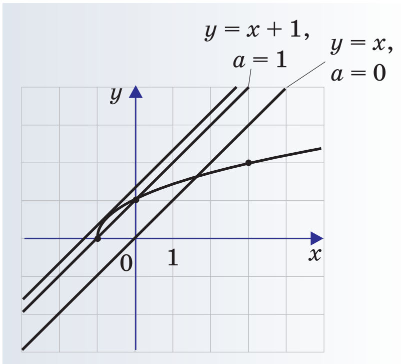


Рис. 6

2. Однако при переносе вверх вдоль оси Oy прямой $y = x$, прямая $y = x + a$ может стать касательной к графику функции $y = \sqrt{x+1}$, тогда графики функций пересекутся в одной точке, а

уравнение прямой будет уравнением касательной в точке x_0 к графику функции $y=\sqrt{x+3}$:

$$y=\sqrt{x_0+3}+\frac{1}{2\sqrt{x_0+3}}(x-x_0).$$

Известно, что прямые совпадают, когда их угловые коэффициенты и свободные члены в уравнениях равны.

Получим систему:

$$\begin{cases}\sqrt{x_0+3}-\dfrac{x_0}{2\sqrt{x_0+3}}=a,\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x_0+3}}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1,25,\\ x_0=-0,75.\end{cases}$$

Итак, при $a=\frac{5}{4}$ уравнение будет иметь один корень.

Ответ: $a<1$ и $a=1{,}25$.

Учитель. Как еще можно решить это уравнение? Есть ли идеи?

IV

Оценка работ групп и отдельных учащихся.

Домашнее задание будет состоять в том, чтобы, исследовав уравнение, найти еще один (не менее одного) способ решения.

Заключение, перспектива работы на будущее.

ФОТО НА КОНКУРС

Ученики, умеющие учиться сами, – вот главный результат работы учителя!

Автор: П.И. Самсонов, учитель математики средней школы №129, г. Москва

РОССИЙСКИЕ ОТКРЫТЫЕ ЗАОЧНЫЕ КОНКУРСЫ-ОЛИМПИАДЫ ■ 2011–2012

КОНКУРС ПО МАТЕМАТИКЕ ■ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 5 КЛАССОВ «ТАЙНЫ МАТЕМАТИКИ» ЗАДАНИЯ КОНКУРСА

Условия участия в конкурсе - в предыдущем номере журнала и на сайте http://www.future4you.ru

■ ЗАДАНИЕ 1. СУММА ЦИФР

Найти сумму цифр всех четырёхзначных чисел, которые можно получить, используя только 0, 5, 7 и 3, если цифры в числе не повторяются.

а) 96660; б) 270; в) 180; г) 32220; д) 90.

■ ЗАДАНИЕ 2. СЛАДКОЕЖКА

Малышу 1 января 2010 г. (пятница) подарили мешок с 222 конфетами. Каждый день, начиная с 1-го января, он съедал одну конфету. По воскресеньям к нему прилетал Карлсон, и Малыш угощал его парой конфет. Сколько конфет съел Карлсон?

а) 9; б) 24; в) 52; г) 50; д) 48.

■ ЗАДАНИЕ 3. ПУНКТУАЛЬНОСТЬ

Мои часы спешат на 15 мин. Если я выйду по этим часам в 17-25, то опоздаю на поезд на 10 мин. Во сколько я должен выйти по точным часам, чтобы прийти на поезд на 10 мин. раньше?

■ ЗАДАНИЕ 4. МАТЕМАТИКА НА КАРТЕ

На карте отмечены несколько городов, лежащих на одной прямой. Между ними встречаются расстояния 1, 2, 3, 4 и 5 см. Какое наименьшее количество городов может быть отмечено?

а) 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) 6.

■ ЗАДАНИЕ 5. РАССТАВИТЬ ЗНАКИ

В записи 1 2 3 4 5 6 7 8 9 поставить один знак «умножения» и один знак «деления», чтобы получилось выражение, значение которого 929990.

■ ЗАДАНИЕ 6. ЮНЫЕ СПОРТСМЕНЫ

В 4А классе семеро ребят играют в футбол, 8 – в волейбол и 6 в баскетбол. При этом и в волейбол и в баскетбол играют 3 человека, и в волейбол и в футбол играют 2 человека; и в баскетбол, и в футбол играют 4 человека; а один мальчик играет и в футбол, и в волейбол, и в баскетбол. Сколько человек не занимаются ни одним из трёх видов спорта, если всего в 4 А классе 25 человек?

а) 4; б) 12; в) 11; г) 13; д) невозможно определить.

■ ЗАДАНИЕ 7. ЧИСЛОВОЙ РЕБУС

ВЕТЕР * ДУЛ = КАРАУЛ

Какая цифра в ребусе соответствует букве «Л»?

а) 0; б) 5; в) 1; г) нет решения; д) 8.

■ ЗАДАНИЕ 8. ЗАМЕНА

Какое максимальное количество цифр в числе 3702812 можно заменить семёрками, чтобы оно по-прежнему делилось нацело на 4?

а) 4; б) 1; в) 6; г) 5; д) 3.

■ ЗАДАНИЕ 9. РАЗНЫЕ СОСЕДИ

Сколькими способами можно выстроить в ряд эти кубики, чтобы одинаковые числа не стояли рядом?

1	3

4	2

2	1

3	4

а) 6; б) 8; в) 10; г) 12; д) 24.

■ ЗАДАНИЕ 10. КРОЛИК-БИЗНЕСМЕН

Винни Пух привёз Кролику некоторое количество капусты. В тот же день Кролик продал 128 кочанов. На следующий день Винни привёз столько капусты, сколько осталось накануне, и Винни продал 250 кочанов. На третий день опять Кролику привезли столько кочанов, сколько оставалось накануне, и он продал 300 кочанов. При этом у него не осталось ни одного кочана капусты. Сколько кочанов привёз Винни Пух в самый первый раз? Ответ запишите в таблицу.

■ ЗАДАНИЕ 11. ВЕСЕННИЙ БУКЕТ

В саду в понедельник распустились 80 тюльпанов и 20 нарциссов. Каждый день, начиная со вторника, 2 тюльпана увядали, а 3 нарцисса распускались. В какой день недели количество цветущих тюльпанов станет равно количеству цветущих нарциссов?

а) Пн; б) Вт; в) Ср; г) Сб; д) Вс.

■ ЗАДАНИЕ 12. КУБИКИ

На этой картинке четыре кубика одинаковые, а пятый – не такой, как все? Какой лишний?

1 2 3 4 5

Заранее благодарим за выполненную работу!

Оргкомитет.

Конкурс проводится до **1 декабря**. Таблица для ответов на сайте **http://www.future4you.ru.**

МАН «Интеллект будущего» ■ http://www.future4you.ru ■ Тел.: (48439) 97295 ■ 249035, Обнинск, Ленина, 129

КОНКУРС ПО МАТЕМАТИКЕ ■ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 6 КЛАССОВ
«ТАЙНЫ МАТЕМАТИКИ»
ЗАДАНИЯ КОНКУРСА

Условия участия в конкурсе - в предыдущем номере журнала и на сайте http://www.future4you.ru

■ ЗАДАНИЕ 1. ПУТЕШЕСТВЕННИКИ

Чебурашка с крокодилом Геной одновременно вышли от Шапокляк и направились домой. Чебурашка половину времени, затраченного им на переход до дома, шёл по 5км в час, а затем по 4 км в час. Гена первую половину пути шёл по 4 км за час, а потом по 5 км за час. Первым дойдёт до дома:
а) Чебурашка; б) Гена; в) одновременно.

■ ЗАДАНИЕ 2. ИЗМЕНИТЬ ЧАСТНОЕ

Если из делителя вычесть его треть, то частное увеличится:
а) в 2 раза; б) в полтора раза; в) в 3 раза; г) не изменится; д) невозможно определить.

■ ЗАДАНИЕ 3. «РОГАТЫЙ» РЕБУС

Какую цифру можно поставить вместо буквы «р» в ребусе:
БЫК x БЫК = КОРОВКА
а) 2; б) 0; в) 1; г) 3; д) нет решений.

■ ЗАДАНИЕ 4. СПОРТСМЕНЫ

Белоснежка бежит по стадиону навстречу гномам. Её скорость в два раза меньше скорости первого гнома, в три раза меньше скорости второго, в четыре раза меньше скорости третьего и в пять раз меньше скорости четвёртого гнома. Она стартует с ними одновременно, но бежит в противоположную сторону. Сколько раз она встретится с гномами в течение одного круга (встречу на финише не считать), если гномы бегают до тех пор, пока Белоснежка не финиширует?
а) 18; б) 9; в) 10; г) 12; д)14.

■ ЗАДАНИЕ 5. ЗАГАДОЧНАЯ ОКРУЖНОСТЬ

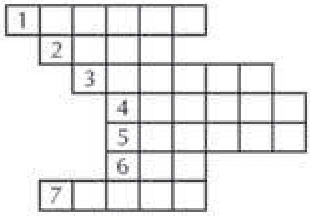
На окружности расставлены семь чисел таких, что разность каждой пары соседних чисел не меньше четырёх, а сумма каждой пары соседних чисел не меньше десяти. Запишите в таблицу ответов минимальную сумму всех семи чисел.

■ ЗАДАНИЕ 6. КУЛИНАРЫ

Незнайка и Кнопочка готовили салат. У них было 8 овощей: перец, лук, огурец, помидор, брокколи, картофель, морковь и укроп. Сколько вариантов салатов из семи овощей можно приготовить, если Знайка поставил им условие, что суммарное количество гласных букв в положенных овощах должно быть не более 16:
а) 8; б) 6; в) 3; г) 7; д) 4.

■ ЗАДАНИЕ 7. МАТЕМАТИКА И ГЕОГРАФИЯ

Отгадайте кроссворд, и в одном из столбцов прочтите слово, которое относится к математике.



1. Столица этого государства – Оттава. 2. Столица одного из Скандинавских государств. 3. Столица этого государства – Каир. 4. Столица Армении. 5. Столица Германии. 6. Столица Италии. 7. Столица Чехии.

■ ЗАДАНИЕ 8. НЕ МЕЛОЧИТЕСЬ

Требуется составить сумму в 99 копеек из 22-х монет по 2, 3 и 5 копеек. Сколько пятикопеечных монет потребуется, если хотя бы по одной монете каждого достоинства обязательно присутствует и двухкопеечных монет больше, чем трёхкопеечных?

■ ЗАДАНИЕ 9. СТОРОНЫ СВЕТА

Нарисуйте пять фигур по данному шифру и в таблицу ответов запишите номер лишней фигуры:
1) ЮЮЮВСССЗ; 2) ЗСВВВВЮЗЗЗ;
3) ВССЗЗЮЮВ; 4) СЗЮЮВС; 5) ЮЗСССВЮЮ.

■ ЗАДАНИЕ 10. НЕОБЫЧНЫЙ ПРИМЕР

5 – 4 = ГРОЗА
7 – 5 = СОПЕНИЕ
8 – 6 = ПЛАСТИКА
7 – ? = ПЫЛЕСОС
Вместо «?» надо поставить:
а) 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) 6.

■ ЗАДАНИЕ 12. СЫТЫЕ БЕЛКИ

Четыре белки сьели 1999орехов, каждая не менее 100. Первая белка сьела больше всех. Вторая и третья вместе сьели 1265 орехов, при этом вторая сьела на один больше третьей. Сколько орехов сьела первая белка?

Уважаемые друзья!
Если вы хотите заработать дополнительные баллы, то можете выполнить ещё одно задание, размещенное на сайте **http://www.future4you.ru.**

Конкурс проводится до **1 декабря**. Таблица для ответов на сайте **http://www.future4you.ru.**

МАН «Интеллект будущего» ■ http://www.future4you.ru ■ Тел.: (48439) 97295 ■ 249035, Обнинск, Ленина, 129

С. КОЛЕСНИКОВА,
г. Москва

ОТ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ К РАЦИОНАЛЬНЫМ!

Фото В. Строковского

В статье рассматриваются такие способы решения логарифмических и показательных неравенств, при применении которых вообще *не надо думать* о том, каково основание по сравнению с 1, и которые за *один* шаг сведут решение самых распространенных неравенств такого типа к решению *рациональных* неравенств.

Практика показала, что есть преподаватели и учащиеся, которые с недоверием относятся к такому повороту событий и продолжают решать по старинке, рассматривая разные случаи. Однако та же практика показывает, что задания ЕГЭ последних лет таковы, что решение по старинке приводит к очень большому числу случаев, а подход, о котором мы расскажем ниже, приводит к победе гораздо быстрее и увереннее.

Так как подход оказался не совсем простым и не совсем обычным, то мы выведем наши условия равносильности и правила в виде несложных теорем.

Неравенства, содержащие логарифм с постоянным основанием

Правила Л1 и Л2

Рассмотрим неравенство $\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0$.

Теорема 1. При любом *допустимом* основании (то есть при $a > 0$ и $a \neq 1$) имеет место равносильность:

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (a-1)(f(x) - g(x)) > 0. \qquad (1)$$

Обозначение $\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$ говорит о том, что неравенства равносильны на ОДЗ исходного неравенства.

Доказательство. 1. Пусть неравенство $\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0$ выполнено. Тогда $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ — выполнено на ОДЗ. При этом:

а) если $a > 1$, то $f(x) - g(x) > 0$. Это известно всем. Но тогда *выполнено* и неравенство $(a-1)(f(x) - g(x)) > 0$;

б) если же $0 < a < 1$, то $f(x) - g(x) < 0$, и по-прежнему *выполнено* то же самое неравенство $(a-1)(f(x) - g(x)) > 0$.

Мы показали, что если $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, то $(a-1)(f(x) - g(x)) > 0$ на ОДЗ.

2. Пусть теперь $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ и выполнено неравенство $(a-1)(f(x) - g(x)) > 0$. Тогда:

а) если $a > 1$, то $f(x) > g(x)$, а тогда и $\log_a f(x) > \log_a g(x)$;

б) если $0 < a < 1$, то $f(x) < g(x)$, а тогда и $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

Таким образом, мы показали, что если $(a-1)(f(x) - g(x)) > 0$, то и $\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0$ на ОДЗ.

Из 1 и 2 следует, что

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (a-1)(f(x) - g(x)) > 0.$$

Утверждение теоремы доказано.

Следствие. Если $g(x) \equiv 1$, то

$$\log_a f(x) > 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (a-1)(f(x)-1) > 0. \qquad (2)$$

Что дают найденные условия равносильности?

При конкретном a неравенство $\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0$, конечно, может быть решено стандартным способом, и объем выкладок тот же. Но используя теорему 1, мы уже имеем некое преимущество, так как не надо задумываться над тем, каково основание логарифма a (больше оно единицы или меньше), надо менять знак неравенства или не надо, возрастает или убывает заданная показательная функция.

Но это еще не все! Есть еще *очень важное* преимущество.

Из формул (1) и (2) следуют *замечательные* правила Л1 и Л2, которые *намного* упростят решение сложных неравенств, содержащих в качестве множителя $\log_a f(x)$ или разность $\log_a f(x) - \log_a g(x)$.

Правило Л1. При любом допустимом основании a ($a > 0$, $a \neq 1$) и любых положительных функциях $f(x)$ и $g(x)$ знак разности $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x)-g(x))$.

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 вытекает, что равносильность (1) справедлива, если оба входящих в него неравенства будут иметь знак «меньше». Отсюда и вытекает справедливость правила.

Следствие. **Правило Л2.** Знак выражения $\log_a f(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x)-1)$ на ОДЗ.

Доказательство. Если $g(x) \equiv 1$, то $\log_a g(x) \equiv 0$, и правило Л1 принимает вид правила Л2.

Эти правила дают возможность просто справиться с неравенствами, решение которых обычным способом потребует гораздо больше вычислений. Теперь, например, можно гораздо *проще* решить неравенства вида

$$h(x)(\log_a f(x) - \log_a g(x)) \geq 0 \ \ (\leq 0)$$

и др. Следующая теорема является прямым непосредственным следствием правила Л1.

Теорема 2. При любом допустимом основании a ($a > 0$, $a \neq 1$) и любых положительных функциях $f(x)$ и $g(x)$ имеет место равносильность:

$$(\log_a f(x) - \log_a g(x))h(x) \geq 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (a-1)(f(x)-g(x))h(x) \geq 0. \qquad (3)$$

Главное преимущество использования условия (3) заключается в том, что мы всего за один шаг избавляемся от всех логарифмов.

Пример 1. Решите неравенство

$$\frac{\lg\left(3x^2-3x+7\right)-\lg\left(6+x-x^2\right)}{(10x-7)(10x-3)} \geq 0.$$

Решение. Найдем сначала ОДЗ числителя:

$$\begin{cases} 3x^2-3x+7>0, \\ -x^2+x+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2;\ 3).$$

При этом мы намеренно не пишем условие того, что знаменатель не равен 0, так как знаменатель в наших выкладках остается вплоть до применения метода интервалов, где его корни автоматически исключаются.

А теперь воспользуемся правилом Л1: знак разности $\lg(3x^2 - 3x + 7) - \lg(-x^2 + x + 6)$ совпадает со знаком $3x^2 - 3x + 7 + x^2 - x - 6$ на ОДЗ:

$$\frac{\lg\left(3x^2-3x+7\right)-\lg\left(-x^2+x+6\right)}{(10x-7)(10x-3)} \geq 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \frac{3x^2-3x+7+x^2-x-6}{(x-0,7)(x-0,3)} = \frac{(2x-1)^2}{(x-0,7)(x-0,3)} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty;\ 0{,}3) \cup \{0{,}5\} \cup (0{,}7;\ +\infty).$$

Учтем ОДЗ числителя и получим ответ.

Ответ: $(-2;\ 0{,}3) \cup \{0{,}5\} \cup (0{,}7;\ 3)$.

Вот так, почти мгновенно, решается пример тренировочного варианта 2010 г.

Пример 2. Решите неравенство

$$\frac{\log_3(10x+3)\cdot\log_3(3x+10)}{\log_3 10x\cdot\log_3 x} \geq 0.$$

Решение. Воспользуемся четырежды правилом Л2:

$$\frac{\log_3(10x+3)\cdot\log_3(3x+10)}{\log_3 10x\cdot\log_3 x} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ \dfrac{(10x+3-1)(3x+10-1)}{(10x-1)(x-1)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (0;\ 0{,}1) \cup (1;\ +\infty).$$

Ответ: $(0;\ 0{,}1) \cup (1;\ +\infty)$.

Неравенства, содержащие логарифм с переменным основанием. Условия равносильности

Правила Л3 и Л4

Рассмотрим выражение $y(x) = \log_{a(x)} f(x)$. По определению, для любого $c > 0$ и $c \neq 1$ полагают, что

$$\log_{a(x)} f(x) = \frac{\log_c f(x)}{\log_c a(x)}, \qquad (\text{О1})$$

то есть $\log_{a(x)} f(x)$ — это частное двух логарифмов. Отсюда естественным образом вытекает, что областью определения, или ОДЗ, является множество X, на котором $f(x) > 0$, $a(x) > 0$ и $a(x) \neq 1$.

Теорема 3. При любых положительных $f(x)$ и $g(x)$ и при $a(x) > 0$ и $a(x) \neq 1$ имеет место равносильность:

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) > 0. \qquad (4)$$

Доказательство. По определению,

$$\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) = \frac{\lg f(x) - \lg g(x)}{\lg a(x)}.$$

В силу Л1 и Л2, знак разности $\lg f(x) - \lg g(x)$ совпадает со знаком разности $f(x) - g(x)$, а знак $\lg a(x)$ совпадает со знаком разности $a(x) - 1$ на ОДЗ. Поэтому

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \frac{\lg f(x) - \lg g(x)}{\lg a(x)} > 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \frac{f(x) - g(x)}{a(x) - 1} > 0 \Leftrightarrow (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) > 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если $g(x) \equiv 1$, то

$$\log_{a(x)} f(x) > 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (a(x) - 1)(f(x) - 1) > 0. \qquad (5)$$

Это также *очень полезное* условие равносильности.

Замечание 1. При традиционном способе решения таких неравенств обычно рассматривают два случая: $a(x) > 1$ и $0 < a(x) < 1$. Затем решают неравенства, ссылаясь на свойства соответствующих логарифмических функций. Но, как видно из определения, функция $y(x) = \log_{a(x)} f(x)$ свойствами логарифмических функций *не обладает*. Однако привычные неравенства имеют место. Действительно, из (4) следует, что:

1) если $a(x) > 1$ и $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) > 0$, то $f(x) > g(x)$ на ОДЗ;

2) если $0 < a(x) < 1$ и $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) > 0$, то $f(x) < g(x)$ на ОДЗ.

Это как раз и дает нам основание работать с частным двух логарифмов как с одним логарифмом $y(x) = \log_{a(x)} f(x)$.

Иногда решение неравенства $a(x) \neq 1$ записать весьма затруднительно — тогда можно обойтись и без него. В этом случае лучше записать ОДЗ числителя:

$$\begin{cases} a(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Тогда условие равносильности примет вид:

$$\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\lg f(x) - \lg g(x)}{\lg a(x)} \geq 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \frac{f(x) - g(x)}{a(x) - 1} \geq 0. \qquad (6)$$

Преимущество приведенных равносильностей состоит в том, что мы *за один шаг* освободились от логарифмов и переменных оснований, и теперь, если основание логарифма и логарифмируемые выражения являются рациональными функциями, можно воспользоваться классическим методом интервалов.

Заметим, что все условия равносильности формально точно такие же, как и для логарифмов с постоянным основанием, а потому легко запоминаются.

Но это еще не все! Найденные условия равносильности дают возможность вывести правила, которые намного упростят решение неравенств, содержащих множители вида $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x)$ или $\log_{a(x)} f(x)$.

Правило Л3. Знак разности $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a(x) - 1)(f(x) - g(x))$ на ОДЗ.

Доказательство. Так как равносильность (4) верна для обоих знаков неравенств, входящих в это условие, то отсюда и следует правило Л3.

Следствие. Если $g(x) \equiv 1$, то получим правило Л4.

Правило Л4. Знак $\log_{a(x)} f(x)$ совпадает со знаком произведения $(a(x) - 1)(f(x) - 1)$ на ОДЗ.

Теорема 4. При любом допустимом основании $a(x)$ (то есть при $a(x) > 0$ и $a(x) \neq 1$) для любых положительных функций $f(x)$ и $g(x)$ и произвольной функции $h(x)$ имеет место равносильность:

$$h(x) \cdot (\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x)) > 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} h(x) \cdot (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) > 0. \qquad (7)$$

Теорема вытекает сразу из правила Л3.

Пример 3. Решите неравенство

$$\log_{\frac{2x+2}{5x-1}} \left(10x^2 + x - 2\right) \leq 0.$$

Решение. Найдем сначала ОДЗ:

$$\begin{cases} \dfrac{2x+2}{5x-1} > 0, \\ \dfrac{2x+2}{5x-1} \neq 1, \\ 10x^2 + x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (0{,}4; 1) \cup (1; +\infty).$$

Теперь воспользуемся (5) и правилом Л4:

$$\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}\left(10x^2+x-2\right)\le 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}\left(\frac{2x+2}{5x-1}-1\right)\left(10x^2+x-3\right)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -0{,}6] \cup (0{,}2; 0{,}5] \cup [1; +\infty).$$

Учтем ОДЗ и получим ответ.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (0{,}4; 0{,}5] \cup (1; +\infty)$.

Пример 4. Решите неравенство

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x)\ge\log_{2x^2-5x+3}(3-x).$$

Решение.

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x)\ge\log_{2x^2-5x+3}(3-x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\lg(3-x)\left(\lg\left(2x^2-5x+3\right)-\lg\left(12x^2-41x+35\right)\right)}{\lg\left(12x^2-41x+35\right)\cdot\lg\left(2x^2-5x+3\right)}\ge 0.$$

Найдем сначала ОДЗ числителя:

$$\begin{cases}12x^2-41x+35>0,\\ 2x^2-5x+3>0,\\ 3-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-\frac{7}{4}\right)\left(x-\frac{5}{3}\right)>0,\\ \left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)>0,\\ x<3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;1)\cup\left(\frac{3}{2};\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{4};3\right).$$

Теперь решим неравенство, применяя правила Л3 и Л4:

$$\frac{(3-x-1)\left(\left(2x^2-5x+3\right)-\left(12x^2-41x+35\right)\right)}{\left(12x^2-41x+35-1\right)\left(2x^2-5x+3-1\right)}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{-(x-2)^2\left(x-\frac{8}{5}\right)}{(x-2)^2\left(x-\frac{17}{12}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$x\in\left(\frac{1}{2};\frac{17}{12}\right)\cup\left[\frac{8}{5};2\right)\cup(2;+\infty).$$

Учтем ОДЗ и получим ответ.

Ответ: $\left(\frac{1}{2};1\right)\cup\left[\frac{8}{5};\frac{5}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{4};2\right)\cup(2;3)$.

Неравенства, содержащие показательные функции с постоянным основанием

Правила П1–П2

Рассуждая, как для неравенств, содержащих логарифм с постоянным основанием, можно получить два правила.

Правило П1. Знак разности $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x)-g(x))$ на ОДЗ.

Правило П2. Знак разности $a^{f(x)} - 1$ совпадает со знаком произведения $(a-1)f(x)$ на ОДЗ.

Пример 5. Решите неравенство

$$x\log_2(4^{x+1}-2^{x+1}+8)<x^2+4x.$$

Решение. Замечательный пример — здесь активно работают правила Л1 и П1:

$$x\log_2(4^{x+1}-2^{x+1}+8)<x^2+4x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(\log_2(4^{x+1}-2^{x+1}+8)-x-4)<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(\log_2(4^{x+1}-2^{x+1}+8)-\log_2 2^{x+4})<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4^{x+1}-2^{x+1}+8>0\Leftrightarrow x\in\boldsymbol{R},\\ x\left(4^{x+1}-2^{x+1}+8-2^{x+4}\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(2^x-4)(2^x-2^{-1})<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)(x+1)<0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(0;2).$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (0; 2)$.

Сложная экспонента

Среди школьных задач встречаются уравнения и неравенства, содержащие выражение вида $a(x)^{f(x)}$, но нигде не написано, каковы свойства функции $y(x) = a(x)^{f(x)}$. Учителя и школьники, не задумываясь, логарифмируют это выражение, чтобы, например, решить уравнение или найти производную этой функции. А где написано, что это можно делать? Какова область определения этой функции? Всегда ли $a(x) > 0$? Прежде чем рассматривать уравнения и неравенства, содержащие выражение вида $a(x)^{f(x)}$, выясним, что это вообще такое. В школьных курсах об этом ничего не говорится. Тем не менее задачи, содержащие его, встречаются, например, в заданиях ЕГЭ. Есть подобные задачи и в классическом задачнике под редакцией М.И. Сканави. Способы их решения там лишь декларируются, но не обосновываются. В заданиях серии С необходимо обосновать решение, причем оценка существенно зависит от правильности и полноты обоснования. Но что можно написать, решая, например, уравнение $x^{x^2}=x^{x+2}$ или неравенство $x^{x^2}\ge x^{x+2}$? Какова ОДЗ этой функции? А можно ли продифференцировать, например, x^x? А можно ли построить график функции $y = x^x$? Если да, то как?

Рассмотрим выражение

$$y(x) = a(x)^{f(x)}.$$

По определению, для любого $c > 0$ и $c \ne 1$ полагают, что

$$a(x)^{f(x)}=c^{f(x)\cdot\log_c a(x)}. \qquad (О2)$$

Чаще всего записывают через натуральное основание:

$$a(x)^{f(x)} = e^{f(x)\cdot\ln a(x)},$$

поэтому функцию называют экспонентой. Многим понятней записать ее через основание 10 или 2:

$$a(x)^{f(x)}=10^{f(x)\cdot\lg a(x)}=2^{f(x)\cdot\log_2 a(x)}.$$

Так или иначе, но это *сложная показательная* функция (и в ней нет *ничего* от степенной), потому что в показатель входит не только показатель данного выражения, но и его основание. Как всякая показательная функция, $y(x) = a(x)^{f(x)}$ принимает только *положительные* значения. Функцию $y(x) = a(x)^{f(x)}$ называют *сложной экспонентой*. Теперь хорошо видно, что *областью определения* сложной экспоненты является множество X, на котором $a(x) > 0$. Сложная экспонента является непрерывной функцией там, где непрерывны $a(x)$ и $f(x)$, и дифференцируемой там, где дифференцируемы $a(x)$ и $f(x)$. Ясно также, по каким правилам дифференцируется сложная экспонента.

Рассмотрим теперь уравнение

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}.$$

Покажем, что

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a(x)=1 \\ \begin{cases} a(x)>0, \\ f(x)=g(x). \end{cases} \end{array}\right. \qquad (8)$$

Решение. Действительно, по определению, $a(x)^{f(x)} = 10^{f(x)\lg a(x)}$, $a(x)^{g(x)} = 10^{g(x)\lg a(x)}$, тогда:

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10^{f(x)\lg a(x)} = 10^{g(x)\lg a(x)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)\lg a(x) = g(x)\lg a(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lg a(x)(f(x) - g(x)) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{l} a(x)=1 \\ \begin{cases} a(x)>0, \\ f(x)=g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Что и требовалось.

Соотношение

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\ln a(x) = g(x)\ln a(x)$$

показывает, что равносильное уравнение получается таким же, как если бы его прологарифмировали как обычную степень по допустимому основанию. Замечательно, что даже ОДЗ левой и правой частей всегда совпадают! Именно поэтому этот равносильный переход обычно называют *логарифмированием* уравнения $a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}$.

Пример 6. Решите уравнение $x^{x^2+3} = x^{1-3x}$.

Решение.

$$x^{x^2+3} = x^{1-3x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} x>0, \\ x^2+3=1-3x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1.$$

Примечание. Целые числа -1, -2, 0, хотя и превращают заданное уравнение в тождество, не принадлежат ОДЗ, а потому не являются его корнями.

Неравенства, содержащие показательные функции с переменным основанием

Правила Л3 и Л4

Теперь рассмотрим неравенство

$$a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)}.$$

Способы решения этого неравенства в методической литературе просто декларируются, потому что определение функции $y = a(x)^{f(x)}$ отсутствует. Приведем несколько полезных для решения подобных неравенств фактов.

Теорема 5. Для любого положительного $a(x)$ имеет место *условие равносильности*:

$$a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} > 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) > 0. \qquad (9)$$

Доказательство. Воспользуемся определением сложной экспоненты, взяв в качестве c число 10 (можно взять любое другое допустимое число), а затем применим правила П1 и П2:

$$a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow 10^{f(x)\lg a(x)} > 10^{g(x)\lg a(x)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (10 - 1)(f(x)\lg a(x) - g(x)\lg a(x)) > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (f(x) - g(x))\lg a(x) > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) > 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если $g(x) \equiv 0$, то из теоремы 5 получаем условие:

$$a(x)^{f(x)} > 1 \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (a(x) - 1)f(x) > 0. \qquad (10)$$

Выведенные условия равносильности справедливы для обоих знаков неравенств, а тогда можно сформулировать еще два правила.

Правило П3. Знак разности $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a(x) - 1)(f(x) - g(x))$ в ОДЗ.

Правило П4. Знак разности $a(x)^{f(x)} - 1$ совпадает со знаком произведения $(a(x) - 1)f(x)$ в ОДЗ.

Приведенные правила существенно упрощают решение, например, неравенств вида

$$h(x)(a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}) \ge 0 \ \ (\le 0).$$

Докажем еще одну полезную теорему.

Теорема 6. Для любого положительного $a(x)$ имеет место *условие равносильности*:

$$h(x)\cdot(a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}) \ge 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} h(x)(a(x) - 1)(f(x) - g(x)) \ge 0. \qquad (11)$$

Доказательство. Решение неравенства $h(x)\cdot(a(x)^{f(x)}-a(x)^{g(x)})\ge 0\ (\le 0)$ зависит от знаков сомножителей, а в силу правила П3, знак разности $a(x)^{f(x)}-a(x)^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a(x)-1)(f(x)-g(x))$ на ОДЗ, что и требовалось доказать.

Пример 7. Решите неравенство

$$\left(2^x+0,09\cdot 2^{-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\ge\left(2^x+0,09\cdot 2^{-x}\right)^{\frac{1}{1-x}}.$$

Решение. Воспользуемся сначала правилом П3, а затем правилом П1:

$$\left(2^x+0,09\cdot 2^{-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\ge\left(2^x+0,09\cdot 2^{-x}\right)^{\frac{1}{1-x}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2^x+0,09\cdot 2^{-x}-1\right)\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{1-x}\right)\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(2^x-\frac{1}{10}\right)\left(2^x-\frac{9}{10}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{x(x-1)}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x-\log_2\frac{1}{10}\right)\left(x-\log_2\frac{9}{10}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{x(x-1)}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[\log_2\frac{1}{10};\ \log_2\frac{9}{10}\right]\cup\left(0;\ \frac{1}{3}\right]\cup(1;+\infty).$$

Ответ: $\left[\log_2\frac{1}{10};\ \log_2\frac{9}{10}\right]\cup\left(0;\ \frac{1}{3}\right]\cup(1;+\infty)$.

В заключение приведем очень простое решение «страшного», на первый взгляд, неравенства.

Пример 8.

$$\frac{(1-x)^{x^2+2x+2}-(1-x)^{4x+5}}{\left(\log_2\left(8x^2+22x+13\right)-3\right)\log_{x^2+8x+16}\left(6x^2+4x+1\right)}\ge 0.$$

Решение. Найдем сначала ОДЗ:

$$\begin{cases}1-x>0,\\ 8x^2+22x+13>0,\\ x+4\ne 0,\\ x+4\ne 1,\\ 6x^2+4x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-4)\cup(-4;-3)\cup$$

$$\cup\left(-3;\ \frac{-11-\sqrt{17}}{8}\right)\cup\left(\frac{-11+\sqrt{17}}{8};\ 1\right).$$

Теперь воспользуемся правилами Л1, Л2 и П3:

$$\frac{(1-x)^{x^2+2x+2}-(1-x)^{4x+5}}{\left(\log_2\left(8x^2+22x+13\right)-3\right)\log_{(x+4)^2}\left(6x^2+4x+1\right)}\ge 0\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}\frac{(1-x-1)\left(x^2+2x+2-4x-5\right)}{\left(8x^2+22x+13-8\right)\left(x^2+8x+16-1\right)\left(6x^2+4x+1-1\right)}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-5)\cup\left(-3;-\frac{5}{2}\right)\cup\left[-1;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{4};0\right)\cup(0;3).$$

Учтем ОДЗ и получим ответ.

Ответ:

$$(-\infty;-5)\cup\left(-3;-\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{-11+\sqrt{17}}{8};-\frac{2}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{4};0\right)\cup(0;1).$$

Литература

1. *Колесникова С.И.* Решение сложных задач ЕГЭ. — М.: Вако, 2010.
2. *Колесникова С.И.* Показательные и логарифмические неравенства. — М.: Азбука, 2010.
3. *Колесникова С.И.* Показательные и логарифмические уравнения. — М.: Азбука, 2010,
4. *Колесникова С.И.* Эффективные методы решения некоторых показательных и логарифмических неравенств // Потенциал, 2005, № 3–4.

ФОТО НА КОНКУРС

Посмотрите, какой у меня оригинальный способ решения!

Автор: Н.Э. Васильченко, учитель математики лицея при Гомельском инженерном институте Министерства по чрезвычайным ситуациям Республики Беларусь


ОБУЧАЙТЕ С УДОВОЛЬСТВИЕМ
В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ
ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ
Σ МАСТЕРСКАЯ учителя математики
Решение сложных задач ЕГЭ по математике
ОТКРЫТЫЕ УРОКИ АЛГЕБРЫ
ОТКРЫТЫЕ УРОКИ МАТЕМАТИКИ
КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
МАТЕМАТИКА
АЛГЕБРА
ГЕОМЕТРИЯ
Полное сопровождение на всех уровнях
Удобство работы и использования
Улучшение результатов обучения
Готовые к использованию материалы
Издательство Вако
www.vaco.ru

Г. ФАЛИН, А. ФАЛИН,
г. Москва

О МЕРАХ ПОЛОЖЕНИЯ ЧИСЛОВОГО НАБОРА

Фото Т.А. Пятковской

■ В школьном курсе статистики вводится три характеристики положения числового набора: среднее арифметическое значение, медиана, мода. При этом практически не затронуты следующие важные и естественно возникающие вопросы:

- Почему нельзя обойтись одной характеристикой?
- Какая из них лучше?
- Каковы их достоинства и недостатки?
- Когда нужно использовать ту или иную характеристику?

Между тем в странах с давней традицией преподавания статистики в школах обсуждение этих вопросов включено в школьные программы изучения статистики. Например, английская (в других регионах Великобритании ситуация аналогична) школьная программа по статистике (см. [1], с. 34, или [2], с.13) требует, чтобы учащиеся:

— понимали сферу применения, достоинства и недостатки каждой из трех мер положения числового набора;

— могли аргументированно выбрать ту меру, которая лучше всего соответствует природе исходных данных и целям исследования;

— могли использовать правильно выбранную меру для анализа простейших ситуаций (включая сравнительный анализ) и интерпретировать результаты вычислений;

— понимали, что в ряде случаев вместо среднего арифметического нужно использовать среднее геометрическое.

Соответствующий материал излагается в британских школьных учебниках по статистике (см., например, [3], раздел «Выбор наилучшего среднего», или [4], раздел 2.9 «Сравнение среднего значения, медианы и моды»). Задачи, которые предлагаются на экзаменах по статистике на получение аттестата о среднем образовании (General Certificate of Secondary Education – GCSE; это некоторый аналог отечественной ГИА), часто включают задания, которые требуют определить, какая из возможных характеристик положения набора лучше соответствует конкретной анализируемой ситуации, и аргументировать свой выбор (см., например, [5], задача 4А, или [6], экзамен 1F, задача 12).

Цель нашей статьи — рассмотреть поставленные выше вопросы относительно характеристик положения числового набора.

Начнем с одного важного общего соображения.

Описательная статистика имеет дело с большими наборами чисел, которые описывают определенную реальную ситуацию. Таким набором может быть, например, строка отметок по математике, полученных учеником (назовем его Петя) за четверть: 4, 2, 5, 2, 3, 5, 4, 5, 5, 2 (всего 10 отметок). В конце четверти учитель должен выставить итоговую отметку. Но что такое «итоговая» отметка? Если мы попытаемся объяснить значение этого термина, мы можем сказать примерно следующее: это одно число (желательно

К материалу есть приложение на CD-диске.

из набора 2; 3; 4; 5), которое «в целом» характеризует успеваемость Пети. В сущности это расширенное определение лишь заменяет слово «итоговая» на два слова: «в целом», и ничего не добавляет к точному смыслу этого термина. Единственное, что мы можем сказать совершенно точно по поводу «итоговой» отметки, которая «в целом» характеризует успеваемость, так это то, что это должно быть одно число.

Следует признать, что найти такую оценку, которая бы содержала в себе всю информацию об успеваемости Пети, НЕЛЬЗЯ, так же как нельзя одним словом или короткой фразой описать характер человека, впечатления от кинофильма и т.д.

Например, про Петю директор школы мог бы сказать, что «Петя — плохой ученик, у него часто бывают двойки; на ЕГЭ могут быть проблемы», в то время как на призывной комиссии в военкомате могли бы отметить, что «Петя — хороший парень, крепкий; отличный солдат будет». Таким образом, короткая характеристика Пети зависит от того, какую цель ставит перед собой человек, дающий эту характеристику.

Примерно так же нет и не может быть «самой хорошей», «самой правильной», «самой объективной» характеристики положения числового набора. Выбор характеристики положения зависит от природы данных, целей статистического исследования и других соображений.

Среднее значение

Среднее значение $M_x = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ числового набора $(x_1, \ldots, x_n)$ используют, прежде всего, в тех случаях, когда важна общая сумма всех значений набора.

Например, для страховой компании чрезвычайно важна общая сумма S выплат за определенный промежуток времени (скажем, месяц) по всем договорам, заключенным этой компанией. Если эти суммарные выплаты больше, чем активы компании, то компания не сможет выполнить все свои обязательства и разорится. Общие потери S формируются из выплат по отдельным договорам: $S = x_1 + \ldots + x_n$, где n — общее число страховых случаев за рассматриваемый промежуток времени, а x_i — сумма страхового возмещения по i-му страховому случаю. Сколько наступило страховых случаев и какая сумма была выплачена по конкретному договору, страховой компании совершенно безразлично. Иными словами, наборы $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_k)$ с равными суммами своих элементов для страховой компании фактически равнозначны (даже если $n \neq k$, то есть наборы имеют разную длину).

С другой стороны, как правило, на число страховых случаев n влияют одни факторы, а на величины страховых возмещений x_i — совсем другие. В качестве примера рассмотрим страхование автомобиля от повреждения при дорожно-транспортном происшествии. Вероятность попасть в аварию зависит от многих факторов, но прежде всего, от возраста застрахованного: она велика для молодых людей (по причине лихачества) и для пожилых людей (из-за замедленной реакции). Большое значение имеет также погода — в дождливые дни, в туман, гололед и т.д. число аварий заметно возрастает. Однако величина расходов на ремонт автомобиля в основном определяется маркой автомобиля. Чтобы явно учесть эти обстоятельства, удобно переписать формулу $S = x_1 + \ldots + x_n$ для общих потерь в виде: $S = nM_x$, где $M_x = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ — средние выплаты в расчете на один страховой случай.

Оценив на основании прошлого опыта (как своего, так и других компаний) значения n и M_x для разных условий, страховая компания может оценить примерные значения n и M_x в наступающем месяце. Тогда по формуле $S = nM_x$ компания сможет оценить размер предстоящих выплат и, если он слишком велик, принять какие-то меры по приведению в соответствие своих активов и ожидаемых обязательств. Конечно, в реальности эта процедура оценки возможного ущерба выглядит гораздо сложнее.

Рассуждая подобным же образом, владельца магазина интересует, прежде всего, общая сумма S денег, израсходованная покупателями в его магазине за определенный промежуток времени. Эта сумма может быть записана в виде: $S = x_1 + \ldots + x_n$, где n — общее число покупателей, посетивших магазин за рассматриваемый промежуток времени, а x_i — стоимость товаров в i-м чеке. Если в каком-то месяце продажи упали, важно понять, уменьшилось ли число покупателей или же они стали меньше тратить (от этого будут зависеть действия по улучшению ситуации). Для этого нужно смотреть на величину $S = x_1 + \ldots + x_n$ как на произведение $S = nM_x$, где $M_x = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ — средняя сумма, израсходованная одним покупателем.

В этих примерах среднее значение является своеобразной «производительностью» застрахованного в примере со страховой компанией или покупателя в примере с магазином. Именно в случаях, когда природа исходных данных $(x_1, \ldots, x_n)$ и цель исследования диктуют важность подобной «производительности», и следует использовать среднее значение.

Когда мы вводим среднее (арифметическое) значение в качестве меры положения набора, мы фактически говорим, что для нас исходный набор (x_1, ..., x_n) равносилен набору $\left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right) = \left(M_x, \ldots, M_x\right)$: в том смысле, что оба набора имеют одну и ту же сумму своих элементов:

$$x_1 + \ldots + x_n = \underbrace{M_x + \ldots + M_x}_{n\text{ слагаемых}}.$$

Если эту эквивалентность понимать шире, то можно сказать, что наборы эквивалентны, так как оба набора приводят к одному и тому же результату в рамках рассматриваемой задачи. Однако в ряде ситуаций таким эквивалентным набором будет не набор из средних арифметических, а набор из величин, которые определяются по более сложным формулам. Скажем, в финансовой математике эти формулы тесно связаны со средними геометрическими.

В качестве иллюстрации рассмотрим инвестора, который может вложить определенную сумму денег S_0 (рублей) в n-летний инвестиционный проект, который за первый год принесет прибыль в размере i_1% годовых, за второй — i_2% и т.д., за n-й год — i_n%. При этом прибыль не изымается, а каждый раз вкладывается в дальнейшее развитие дела и потому зарабатывает проценты в будущем. В этой ситуации

— к концу первого года средства инвестора, вложенные в проект, вырастут до суммы

$$S_1 = S_0 + \frac{i_1}{100} S_0 = \left(1 + \frac{i_1}{100}\right) S_0;$$

— к концу второго года средства инвестора, вложенные в этот проект, вырастут до суммы

$$S_2 = S_1 + \frac{i_2}{100} S_1 = \left(1 + \frac{i_1}{100}\right)\left(1 + \frac{i_2}{100}\right) S_0;$$

и т.д.

— к концу n-го года средства инвестора, вложенные в этот проект, вырастут до суммы

$$S_n = \left(1 + \frac{i_1}{100}\right)\left(1 + \frac{i_2}{100}\right) \ldots \left(1 + \frac{i_n}{100}\right) S_0.$$

Именно сумму S_n получит инвестор по истечении n-летнего периода.

Предположим теперь, что инвестору предлагают альтернативный n-летний проект, который каждый год дает постоянную прибыль i% годовых (как и раньше, прибыль инвестируется, чтобы приносить дальнейший доход). Математически эта ситуация описывается полученными выше формулами при $i_1 = \ldots = i_n \equiv i$. Поэтому по истечении n-летнего периода инвестор получит сумму $S_n^* = \left(1 + \frac{i}{100}\right)^n S_0$. Оба проекта эквивалентны с точки зрения финансовых интересов инвестора, если

$$\left(1 + \frac{i_1}{100}\right)\left(1 + \frac{i_2}{100}\right) \ldots \left(1 + \frac{i_n}{100}\right) S_0 = \left(1 + \frac{i}{100}\right)^n S_0,$$

откуда для «средней» (то есть эквивалентной) величины процентов i мы имеем:

$$i = 100\left(\sqrt[n]{\left(1 + \frac{i_1}{100}\right)\left(1 + \frac{i_2}{100}\right) \ldots \left(1 + \frac{i_n}{100}\right)} - 1\right).$$

Величина $k = 1 + \frac{i}{100}$ в финансовой математике называется коэффициентом накопления, соответствующим процентной ставке i%. С использованием этого понятия приведенная выше формула для «средней» величины процентов i превратится в следующую формулу для «среднего» коэффициента накопления $k = 1 + \frac{i}{100}$:

$$k = \sqrt[n]{k_1 \ldots k_n}.$$

Таким образом, «средний» коэффициент накопления является средним геометрическим коэффициентов накопления за все n лет.

Из ситуаций, в которых использование среднего значения может создать ложное представление о положении числового набора, наиболее важная связана с описанием доходов группы людей.

Рассмотрим следующий пример. В небольшом торговом предприятии работает 10 человек. За апрель они получили следующие зарплаты (в тыс. р.): 11, 11, 15, 15, 15, 15, 18, 20, 20, 160. В соответствии с этими данными среднее арифметическое значение зарплат равно 30 (тыс. р.). Это значение «средней» зарплаты можно считать хорошей характеристикой доходов работников, например для налоговой инспекции, которая на этой основе сможет оценить размер налоговых поступлений. Однако нельзя не отметить, что:

— два работника (самые низко оплачиваемые, наверное — уборщицы или грузчики) получают только около трети от этой «средней» зарплаты;

— четыре работника получают только половину от этой «средней» зарплаты;

— три работника получают около двух третей от этой «средней» зарплаты.

Таким образом, заработок 9 из 10 работников существенно ниже подсчитанного среднего значения, и для них месячная зарплата в 30 тысяч рублей, видимо, малореальная мечта. Но у одного человека (надо полагать – это хозяин предприятия) зарплата примерно в 5 раз превышает подсчитанное среднее значение (этот человек получает больше, чем все остальные работники вместе).

Таким образом, в рассмотренном примере среднее арифметическое значение зарплат дает *совершенно искаженную социальную картину* доходов работников, и потому здесь нельзя использовать среднее значение в качестве меры положения набора.

После этого общего описания ситуаций, в которых оправдано использование среднего значения, отметим еще несколько его достоинств и недостатков.

Важное достоинство среднего значения M_x числового набора $(x_1, x_2, ..., x_n)$ заключается в том, что оно чувствительно к любому изменению значений чисел, входящих в этот набор: если какое-то из чисел, входящих в набор, например x_1, увеличится на величину Δ (так что в наборе $x_1 + \Delta, x_2, ..., x_n$ первое число будет равно $x_1 + \Delta$), то среднее значение нового набора будет равно

$$\frac{x_1+\Delta+x_2+...+x_n}{n}=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}+\frac{\Delta}{n}=M_x+\frac{\Delta}{n}, \qquad (1)$$

то есть увеличится на величину $\frac{\Delta}{n}$.

Однако это достоинство превращается в недостаток, если исходный ряд чисел содержит одно или несколько значений, сильно отличающихся от других чисел в одну сторону (такие нетипичные значения называют выбросами — именно с выбросом мы имели дело в рассмотренном выше примере с зарплатами). Выбросы могут сильно повлиять на значение среднего значения и исказить представление о положении набора. Как показывает соотношение (1), влияние изменения отдельного значения набора на среднее уменьшается с ростом n. Поэтому увеличение размера набора может дать более объективную характеристику его положения.

Отметим, кроме того, что, как правило, среднее значение не является одним из чисел исходного набора. В частности, это может затруднить интерпретацию среднего в случае, когда природа данных такова, что числа набора могут принимать лишь конечное число вполне определенных значений (как, например, школьная оценка, которая может быть только 2, 3, 4 или 5).

Медиана

Неформально медиана μ_x числового набора $(x_1, ..., x_n)$ определяется как такое число, что половина значений набора лежит слева от него, а половина — справа. Точное определение длиннее:

— сначала набор нужно упорядочить по возрастанию;

— если набор состоит из нечетного количества чисел $n = 2k - 1$, то μ_x — это число x_k с номером k (так что ровно $k - 1$ чисел меньше, чем μ_x, и ровно $k - 1$ чисел больше, чем μ_x);

— если набор состоит из четного количества чисел $n = 2k$, то μ_x — это число $\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$, лежащее посредине отрезка $[x_k; x_{k+1}]$ (так что ровно k чисел меньше, чем μ_x, и ровно k чисел больше, чем μ_x).

Медиана менее чувствительна к изменению значений числового набора, чем среднее значение. Если среднее значение реагирует на каждое изменение этих значений, то медиана лишь на некоторые. В частности, медиана не искажается выбросами, что является ее важным достоинством при описании несимметричных наборов, когда небольшое число значений резко отличается от остальных. Скажем, в рассмотренном выше примере с зарплатами медиана равна $\frac{15+15}{2}=15$ (в этом наборе $n = 10$ чисел и потому медиана — среднее арифметическое пятой и шестой по величине зарплат). Конечно, эта сумма дает гораздо более объективное представление о распределении доходов работников. Если бы наибольшая зарплата увеличилась со 160 тыс. р. до 260 тыс. р., то среднее значение увеличилось бы до 40 тыс. р., что создало бы ложное впечатление о росте доходов работников. Однако медиана осталась бы неизменной, что отражает неизменность доходов большинства сотрудников.

Если значения числового набора расположены на числовой оси приблизительно симметрично, то среднее значение набора и его медиана практически совпадают.

Как и среднее значение, медиана не всегда является одним из чисел набора (что в ряде случаев может затруднить ее интерпретацию).

В отличие от среднего значения, вычисление медианы обычно проще. Если числа набора упорядочены и известно, четно или нет их количество, то медиана находится практически мгновенно. Вычисление среднего значения для больших наборов предполагает суммирование большого числа слагаемых, что относительно часто приводит к ошибкам даже при использовании калькулятора или компьютера (из-за ошибок при вводе данных).

Значение медианы возрастает, когда ее рассматривают как вторую квартиль Q_2 и в дополнение к ней вычисляют нижнюю квартиль Q_1 и верхнюю квартиль Q_3. Неформально говоря, квартили Q_1, Q_2, Q_3 делят исходный упорядоченный набор на 4 равные части. Иначе говоря, нижняя квартиль — это медиана первой половины исходного набора, а верхняя квартиль — медиана второй половины исходного набора. Уточнить это неформальное определение нижней и верхней квартилей можно несколькими способами, которые обычно приводят к разным результатам (хотя и не очень сильно отличающимся); общепринятого определения квартилей в описательной статистике нет.

Мода

Напомним, что для числового набора мода — это такое значение, которое встречается чаще всего. Из трех основных мер положения числового набора, среднего значения, медианы, моды, мода является наименее интересной (если не сказать — совсем неинтересной).

Во многих случаях мода создает ложное впечатление о положении чисел набора. Рассмотрим, например, строку отметок по математике, полученных Петей за четверть: 4, 2, 5, 2, 3, 5, 4, 5, 5, 2 (всего 10 отметок). Отметка «2» встречается 3 раза, отметка «3» — 1 раз, отметка «4» — 2 раза, отметка «5» — 4 раза. Поэтому мода равна «5». Но вряд ли кто-нибудь скажет, что Петя — отличник. Среднее арифметическое значение его отметок равно 3,7, что, видимо, лучше отражает успеваемость Пети. При хорошем к нему отношении за четверть можно было бы поставить «4», тем более что медиана равна 4.

Часто мода не определена однозначно, что может привести к абсурдным выводам (если моду рассматривать как меру положения). Например, если бы список отметок Пети немного изменился: 4, 2, 5, 2, 3, 5, 2, 5, 5, 2 (вместо одной из четверок он получил двойку), то и отметка «5», и отметка «2» встречались бы по 4 раза (а «3» и «4» — по одному разу). В этом случае мода принимает два значения: «2» и «5». Как интерпретировать эти данные? Отличник Петя или двоечник?

Для непрерывных данных (когда числа набора могут принимать любые действительные значения из определенного промежутка) часто все числа x_i различны. В этом случае говорить о моде вообще не имеет смысла. Правда, после подходящей группировки данных может оказаться, что в один из интервалов попадает больше чисел, чем в другие. В этом случае вместо моды вводят понятие модального класса. Иначе говоря, для группированных данных модальный класс — это та группа значений, которая содержит больше чисел исходного набора, чем любая другая группа.

Если бы не потенциальная неоднозначность в определении моды и отмеченные выше проблемы с ее интерпретацией, определенным достоинством моды можно было бы считать то, что она всегда является одним из значений набора.

Пожалуй, единственное преимущество моды заключается в том, что она может быть найдена и для нечисловых наборов. Предположим, что в киоске было продано 236 пачек ванильного мороженого, 95 пачек шоколадного мороженого и 143 пачки сливочного мороженого. Эту информацию можно описать набором

$$\Big(\underbrace{\text{в, в, …, в}}_{236\ \text{раз}},\ \underbrace{\text{ш, ш, …, ш}}_{95\ \text{раз}},\ \underbrace{\text{с, с, …, с}}_{143\ \text{раза}}\Big).$$

Его мода, которая указывает на самый популярный вид мороженого, равна «в», то есть «ванильное».

Литература

1. Specification. Edexcel GCSE in Statistics (2ST01). Edexcel Limited, 2008.

2. GCSE Specification. Statistics (for certification 2011 onwards). AQA, 2008.

3. GCSE Statistics. Complete Revision and Practice. Coordination Group Publication, 2010.

4. *S. Dobbs, J. Miller*. Statistics 1. — Cambridge University Press, 2009.

5. Edexcel GCSE Statistics. Paper 1H. Wednesday 18 June 2008.

6. Sample Assessment Materials. Edexcel GCSE in Statistics (2ST01). February 2010.

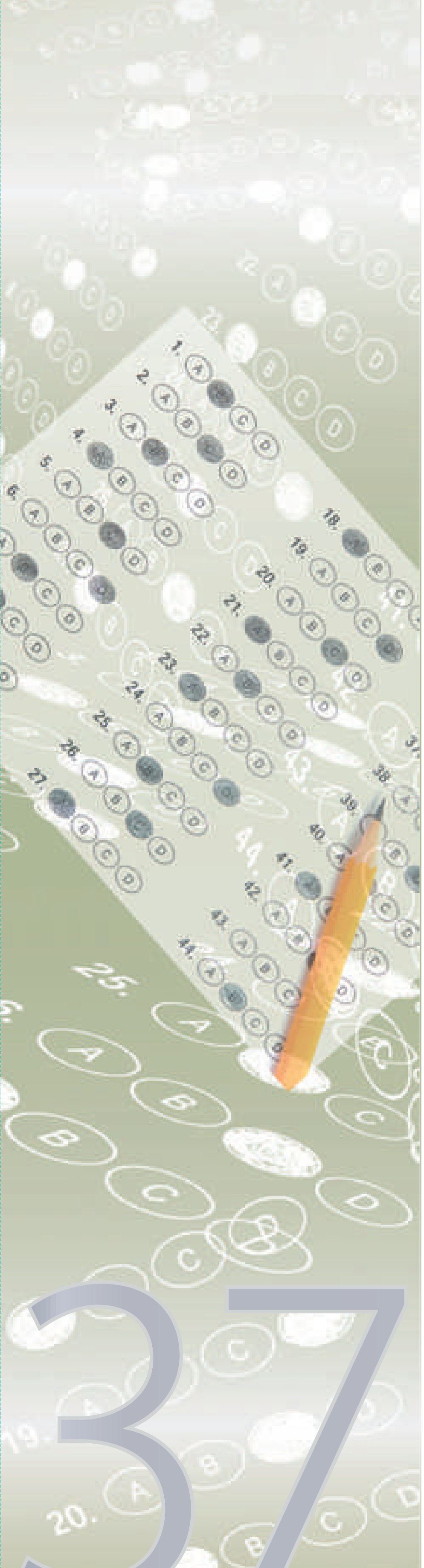
ФОТО НА КОНКУРС

Дай-ка я еще раз измерю. Что-то у меня не сходится…

Во время урока по теме «Объёмы. Объём параллелепипеда»

Автор: Т.В. Качурина, учитель математики основной школы № 5 г. Лесосибирска, Красноярский край

Р. ИЗМЕСТЬЕВА,
г. Москва



7–9 классы

РУБЕЖНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ

Основной целью создания рубежных тестов является оказание методической помощи учителям, работающим в общеобразовательных учреждениях, перешедших на триместровую систему, по программам индивидуального обучения учащихся: на дому, экстерном, в семье, длительно болеющих детей.

Содержание тестов соответствует государственной программе и учебникам для общеобразовательных школ:

Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Шварцбурд С.И. Математика, 5–6 классы;
Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б. Алгебра, 7–9 классы;
Погорелов А.В. Геометрия, 7–9 классы.

Основой содержания рубежных тестов служит проект Московских стандартов образования по математике. Данные авторские методические разработки дают возможность организовать рубежный контроль знаний учащихся с различным уровнем математической подготовки, что соответствует принципам уровнего обучения и способствует подготовке учащихся к сдаче экзаменов в форме ГИА и ЕГЭ.

Каждый тест состоит из заданий трех уровней сложности. Часть А содержит задания базового уровня сложности; часть В содержит задания повышенного уровня сложности; часть С — задания высокого уровня сложности, требующие от учеников творческого подхода к их решению. Отметим, что выполнение заданий части С не требует владения учебным материалом, выходящим за рамки перечисленных выше учебников.

К каждому тесту даны рекомендации к системе оценивания.

Ученику, не справившемуся с заданиями первой части, можно дать возможность после работы над ошибками выполнить аналогичные задания другого варианта. Данные методические разработки дают возможность осуществлять дифференцированный подход к контролю знаний учащихся, что позволяет создать благоприятную психологическую обстановку во время проведения работ.

Каждый вариант итогового теста по математике или алгебре содержит: часть А — 9 заданий; часть В — 2 задания; часть С — 1 или 2 задания. Тесты по геометрии имеют ту же структуру, но в части А всего 6 заданий.

При решении заданий части А учащийся должен выбрать один, верный по его мнению, ответ из четырех предложенных, при решении заданий части В ученик записывает свой ответ в отведенном для этого месте, при решении заданий части С учащийся записывает полное решение и ответ на отдельном листе.

Для выполнения любого теста достаточно одного урока (45 мин.).

К материалу есть приложение на CD-диске.

В тестах, содержащих два задания в части С, ученик может решить одно из них по своему усмотрению. При наличии времени он может решить и другую задачу части С, которая рассматривается как дополнительное задание и оценивается дополнительной положительной отметкой.

Рекомендуемые *критерии оценивания*:

— за верное решение каждого задания части А — 1 балл;

— за верное решение каждого задания части В — 2 балла;

— за верное решение задания части С — 3 балла.

Рекомендации по оцениванию тестов по математике и алгебре:

Балл за работу	Менее 6	6–9	10–13	14–16
Отметка по 5-балльной шкале	2	3	4	5

Рекомендации по оцениванию теста по геометрии:

Балл за работу	Менее 4	4–6	7–10	11–13
Отметка по 5-балльной шкале	2	3	4	5

Тематика итоговых тестов за I триместр

Математика

5-й класс. Натуральные числа и шкалы. Сложение и вычитание натуральных чисел. Умножение и деление натуральных чисел. Свойства умножения и деления натуральных чисел.

6-й класс. Делимость чисел. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями. Умножение и деление обыкновенных дробей.

Алгебра

7-й класс. Выражения, тождества, уравнения. Функции. Степень с натуральным показателем. Одночлены.

8-й класс. Рациональные дроби и их свойства. Квадратные корни.

9-й класс. Квадратичная функция. Целые уравнения и неравенства второй степени.

Геометрия

7-й класс. Основные свойства простейших геометрических фигур. Смежные и вертикальные углы.

8-й класс. Четырехугольники.

9-й класс. Подобие фигур. Решение треугольников.

Математика-5

Вариант 1

В заданиях А1–А9 приведены варианты ответа, из которых верен один. Укажите номер верного ответа.

А1. Найдите сумму: 5728 + 13 253.
1) 1891 2) 18 981 3) 7525 4) 8345

А2. Вычислите разность: 82 134 – 5247
1) 76 887 2) 75 787 3) 87 381 4) 123 567

А3. Выполните умножение: $306 \cdot 207$.
1) 6042 2) 7452 3) 63 342 4) 74 502

А4. Частное 24 336 : 48 равно:
1) 451 2) 57 3) 570 4) 507

А5. В выражении $257 - (135 + 3 \cdot 5) : 25$ последним выполняется действие
1) сложение 2) вычитание
3) умножение 4) деление

А6. Решите уравнение $153 - x = 107$.
1) 261 2) 46 3) 107 4) 44

А7. Найдите корень уравнения $x : 26 = 104$.
1) 130 2) 68 3) 2704 4) 4

А8. При каких значениях y верно равенство $14 \cdot y = 322$?
1) 5348 2) 336 3) 308 4) 23

А9. Упростите выражение $15 - (8 + a)$.
1) $23 + a$ 2) $7 + a$ 3) $7 - a$ 4) $6a$

В заданиях В1 и В2 запишите ответ.

В1. Составьте уравнение для решения задачи.

За три одинаковые ручки и тетрадь стоимостью 2 р. заплатили 20 р. Сколько стоит одна ручка?

Ответ: ____________

В2. В автобусе 37 посадочных мест. Сколько потребуется автобусов, чтобы перевезти 158 детей?

Ответ: ____________

Выполняя задание С, запишите полное решение и ответ.

С. На отрезке $DE = 34$ см отметили точки B и K такие, что $DK = 26$ см и $BE = 17$ см. Найдите длину отрезка KB.

Математика-6

Вариант 1

В заданиях А1–А9 приведены варианты ответа, из которых верен один. Укажите номер верного ответа.

А1. Найдите наименьшее общее кратное чисел 12 и 15.

1) 60 2) 12 3) 3 4) 15

А2. Найдите наибольший общий делитель чисел 27 и 18.

1) 27 2) 9 3) 3 4) 54

А3. Укажите пару взаимно простых чисел.

1) 36 и 45 2) 24 и 14 3) 13 и 26 4) 35 и 16

А4. Какую цифру нужно написать вместо *, чтобы число 21* 350 делилось на 9?

1) 1 2) 7 3) 9 4) 8

А5. Чему равна сумма чисел $\frac{3}{7}$ и $\frac{1}{5}$?

1) $\frac{4}{12}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{22}{35}$ 4) $\frac{4}{7}$

А6. Найдите разность чисел $\frac{7}{8}$ и $\frac{5}{14}$.

1) $\frac{13}{56}$ 2) $\frac{69}{56}$ 3) $\frac{2}{56}$ 4) $\frac{29}{56}$

А7. Вычислите: $5\frac{5}{12}-2\frac{7}{15}$.

1) $2\frac{19}{20}$ 2) $2\frac{1}{20}$ 3) $3\frac{19}{20}$ 4) $3\frac{1}{20}$

А8. Найдите значение выражения $2\frac{5}{18}+1\frac{3}{4}$.

1) $3\frac{4}{11}$ 2) $3\frac{1}{36}$ 3) $4\frac{1}{36}$ 4) $4\frac{4}{11}$

А9. Из чисел $\frac{11}{9}$, $\frac{3}{4}$, 0,6 и $\frac{9}{8}$ выберите наименьшее.

1) 0,6 2) $\frac{9}{8}$ 3) $\frac{11}{9}$ 4) $\frac{3}{4}$

В заданиях В1 и В2 запишите ответ.

В1. Найдите наименьшее общее кратное чисел m и n, если $n = 14m$.

Ответ: ____________

В2. Сколько существует натуральных значений a, при которых дробь $\frac{a+2}{11}$ является правильной?

Ответ: ___________

Выполняя задание С, запишите полное решение и ответ.

С. Найдите две дроби, каждая из которых больше $\frac{8}{13}$ и меньше $\frac{9}{13}$.

Алгебра-7

Вариант 1

В заданиях А1–А9 приведены варианты ответа, из которых верен один. Укажите номер верного ответа.

А1. Найдите значение выражения $5x^2 - 3x + 2$ при $x = 3$.

1) 12 2) 23 3) 38 4) 68

А2. Найдите корень уравнения $3x + 1 = 7x - 7$.

1) –0,8 2) 2 3) –0,2 4) 1,5

А3. Укажите тождественно равные выражения.

1) $x - y$ и $y - x$ 2) $3a + 5$ и $3(a + 5)$
3) $2(x + 3)$ и $6 + 2x$ 4) $3a \cdot 2$ и $5a$

А4. Упростите выражение

$$2(5a - 2ab) - 5(2a - 6ab).$$

1) $20a - 34ab$ 2) $-34ab$
3) $-8ab$ 4) $26ab$

А5. Какая из точек принадлежит графику функции $y = -2x + 2$?

1) $C(2; -2)$ 2) $B(2; 6)$
3) $T(-2; -2)$ 4) $K(2; -3)$

А6. Найдите координаты точки пересечения графика функции $y = 1{,}2x - 3{,}6$ с осью ординат.

1) (3; 0) 2) (0; –3,6)
3) (–3,6; 0) 4) (0; 3)

А7. Выражение $a^{18} : a^3$ тождественно равно...

1) a^{15} 2) a^{21} 3) a^{24} 4) a^6

А8. Представьте выражение $(2a^2b^3)^3$ в виде одночлена стандартного вида.

1) $6a^5b^6$ 2) $8a^5b^6$ 3) $6a^6b^9$ 4) $8a^6b^9$

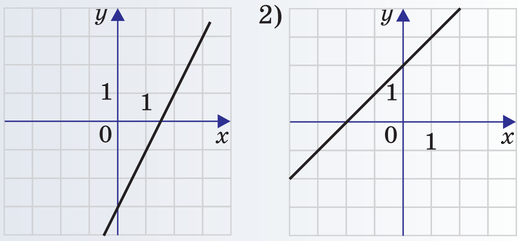
А9. Найдите произведение одночленов $5m^3b^4$ и $7m^2b$.

1) $5m^5b^5$ 2) $35m^5b^4$ 3) $35m^5b^5$ 4) $35mb^3$

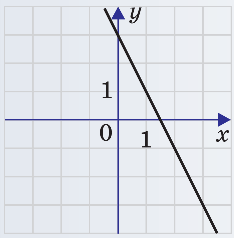
В заданиях В1 и В2 запишите ответ.

В1. Установите соответствие между функциями а) $y = x + 2$, б) $y = -2x + 3$, в) $y = 2x - 3$ и графиками, изображенными на рисунках.

1) 2)



3)



Ответ:

а)	б)	в)

B2. Запишите формулу линейной функции, график которой проходит через точку $A(3; -2)$ и параллелен графику функции $y = 2x - 3$.

Ответ: __________

Выполняя задание C, запишите полное решение и ответ.

C1. Постройте график функции $y = |x+3| - 2$ и найдите координаты точки пересечения графика данной функции с графиком функции $y = -2$.

Алгебра-8

Вариант 1

В заданиях A1–A9 приведены варианты ответа, из которых верен один. Укажите номер верного ответа.

A1. Сократите дробь $\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$.

1) $\frac{a+b}{a-b}$ 2) $\frac{1}{2ab}$ 3) $\frac{b-a}{b+a}$ 4) $\frac{a-b}{a+b}$

A2. Представьте в виде дроби: $\frac{2y-3}{3y} - \frac{1-y}{y^2}$.

1) $\frac{2y^2-3}{3y^2}$ 2) $\frac{y-2}{3y^3}$ 3) $\frac{2y^2}{3}$ 4) $\frac{1}{3y^2}$

A3. Преобразуйте данное выражение в дробь:

$$\frac{3}{a-8} - \frac{2-3a}{8a-a^2}.$$

1) $\frac{6a-2}{8a-a^2}$ 2) $\frac{a-b}{(a-8)(8a-a^2)}$

3) $\frac{2}{a^2-8a}$ 4) $\frac{1-3a}{a^2-8a}$

A4. Выполните умножение:

$$5x^2y \cdot \frac{c^3}{45x^4y^2}.$$

1) $\frac{5yc}{9x^3}$ 2) $\frac{c^3}{9x^2y}$ 3) $\frac{9c}{x^3y}$ 4) $\frac{225x^6y^3}{c^3}$

A5. Представьте в виде дроби:

$$\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right) : \frac{b-a}{a}.$$

1) $\frac{a-b}{b}$ 2) $\frac{b+a}{a}$ 3) $\frac{b-a}{b}$ 4) $\frac{a+b}{b}$

A6. Вычислите: $\sqrt{9{,}8} \cdot \sqrt{0{,}2}$.

1) 14 2) 1,4 3) 0,14 4) 140

A7. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{6}}$.

1) 3,6 2) 36 3) 6 4) 60

A8. В выражении $4\sqrt{5}$ внесите множитель под знак корня.

1) $\sqrt{80}$ 2) $\sqrt{20}$ 3) $\sqrt{100}$ 4) $\sqrt{10}$

A9. Освободитесь от знака корня в знаменателе дроби: $\frac{4}{\sqrt{17}+\sqrt{13}}$.

1) $\frac{\sqrt{17}+\sqrt{13}}{4}$ 2) $\frac{\sqrt{17}-\sqrt{13}}{4}$

3) $\sqrt{17}+\sqrt{13}$ 4) $\sqrt{17}-\sqrt{13}$

В заданиях B1 и B2 запишите ответ.

B1. Найдите значение выражения

$$\frac{3}{2\sqrt{3}+2} - \frac{3}{2\sqrt{3}-2}.$$

Ответ: __________

B2. Найдите значение выражения при $a \neq \pm 3$:

$$\frac{2a}{a+3} + (3-a)^2\left(\frac{1}{a^2-6a+9} + \frac{1}{9-a^2}\right)$$

Ответ: __________

Выполняя задание C, запишите полное решение и ответ.

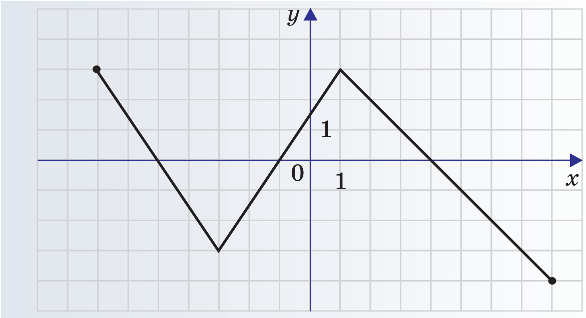
C. Сколько существует целых значений a, при которых значение дроби $\frac{(a-4)^2}{a}$ является целым числом?

Алгебра-9

Вариант 1

В заданиях A1–A9 приведены варианты ответа, из которых верен один. Укажите номер верного ответа.

A1. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите область определения функции.



1) $[-7; 8]$ 2) $[-4; 3]$ 3) $(-7; 8)$ 4) $(-4; 3)$

А2. По графику функции $y = f(x)$, изображенному в задании А1, решите уравнение $f(x) = 0$.

1) $1; -5$ 2) $-5; -1; 4$ 3) $-5; -1$ 4) $-1; 4$

А3. По графику функции $y = f(x)$, изображенному в задании А1, решите неравенство $f(x) > 0$.

1) $[-7; -5] \cup [-1; 4]$ 2) $(-7; -5) \cup (-1; 4)$
3) $[-7; -5) \cup (-1; 4]$ 4) $(-7; -5] \cup [-1; 4)$

А4. Найдите область определения функции

$$y = \frac{x-8}{x+5}.$$

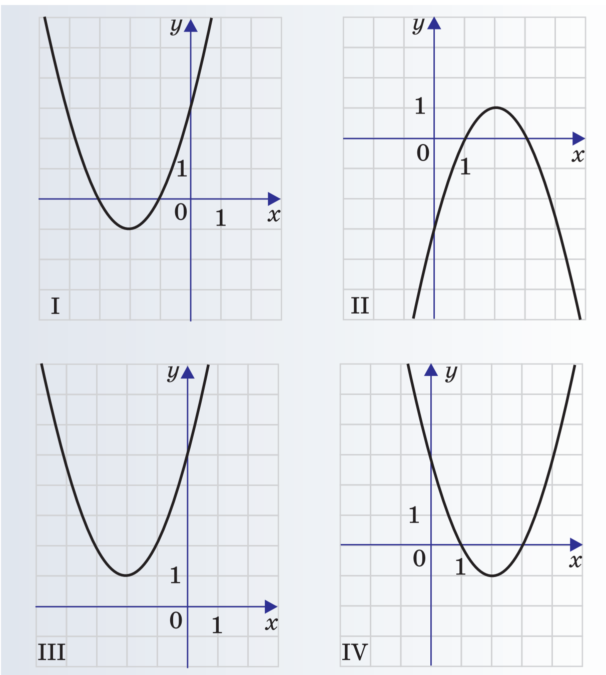
1) $(-5; 8)$ 2) $(-\infty; +\infty)$
3) $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$ 4) $(-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$

А5. Укажите координаты вершины параболы $h(x) = x^2 - 4x + 3$.

1) $(2; 1)$ 2) $(-2; 1)$ 3) $(-2; -1)$ 4) $(2; -1)$

А6. Какой график соответствует функции

$$f(x) = (x - 2)^2 - 1?$$



1) I 2) II 3) III 4) IV

А7. Найдите все значения x, при которых квадратный трехчлен $x^2 + 5x - 6$ принимает отрицательные значения?

1) $[-1; 6]$ 2) $(-1; 6)$
3) $(-6; 1)$ 4) $(-\infty; -6) \cup (1; +\infty)$

А8. Разложите на множители квадратный трехчлен $x^2 - 3x + 2$.

1) $(x + 2)(x - 1)$ 2) $(x - 2)(x - 1)$
3) $(x - 2)(x + 1)$ 4) $(x + 2)(x + 1)$

А9. Решите уравнение $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$.

1) $-3; 3$ 2) $9; -2$
3) $-5; -1$ 4) $\sqrt{2}; -\sqrt{2}; -3; 3$

В заданиях В1 и В2 запишите ответ.

В1. Найдите область определения функции

$$y = \frac{2-x}{\sqrt{3x-x^2}}.$$

Ответ: ___________

В2. Сколько корней имеет уравнение

$$x^2 - 6x + 5 = -\frac{2}{x}?$$

Ответ: ___________

Выполняя задания части С, запишите полное решение и ответ.

С1. Найдите все значения m, при которых график функции $y = 3x^2 - mx + 3$ имеет с осью абсцисс две общие точки.

С2. Для каждого значения a решите неравенство $(x - 2)^2 < a$.

Геометрия-7

Вариант 1

В заданиях А1–А6 приведены варианты ответа, из которых верен один. Укажите номер верного ответа.

А1. Луч OK проходит между сторонами угла AOB. Найдите градусную меру угла AOK, если $\angle AOB = 110°$, а $\angle BOK = 75°$.

1) 185° 2) 45° 3) 35° 4) 25°

А2. Точка C принадлежит отрезку AB. Найдите длину отрезка AB, если $AC = 3{,}6$ см, $BC = 2{,}5$ см.

1) 6,1 см 2) 1,1 см 3) 61 см 4) 5,1 см

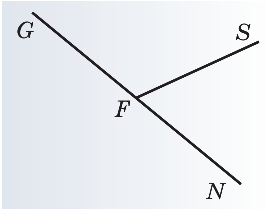
А3. Сколько пар смежных углов образуется при пересечении двух прямых?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

А4. На сколько частей делят плоскость две пересекающиеся прямые?

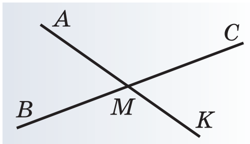
1) 6 2) 2 3) 3 4) 4

А5. Углы GFS и NFS — смежные. Найдите градусную меру угла NFS, если $\angle GFS = 116°$.



1) 66° 2) 74° 3) 64° 4) 76°

А6. Прямые BC и AK пересекаются в точке M. Найдите градусную меру угла AMC, если $\angle AMB + \angle KMC = 130°$.



1) 125° 2) 115° 3) 50° 4) 25°

В заданиях В1 и В2 запишите ответ.

В1. Один из углов, образованных при пересечении двух прямых, в 3 раза больше другого. Найдите градусную меру большего угла.

Ответ: ___________

В2. К сторонам угла через его вершину проведены перпендикуляры, проходящие между его сторонами. Найдите градусную меру данного угла, если градусная мера угла, образованного перпендикулярами, равна 55°.

Ответ: ___________

Выполняя задание С, запишите полное решение и ответ.

С1. Луч OE проходит между сторонами угла DOP, равного 130°, так, что градусные меры углов DOE и EOP относятся как 2 : 3. Вычислите:

а) градусные меры углов DOE и EOP;

б) градусную меру угла, образованного биссектрисами углов DOE и EOP.

Геометрия-8

Вариант 1

В заданиях А1–А6 приведены варианты ответа, из которых верен один. Укажите номер верного ответа.

А1. Сумма градусных мер двух углов параллелограмма равна 150°. Найдите градусную меру большего угла параллелограмма.

1) 75° 2) 105° 3) 150° 4) 115°

А2. Периметр прямоугольника равен 54 см. Длина одной из сторон прямоугольника в 2 раза больше другой стороны. Найдите длину меньшей стороны.

1) 18 см 2) 27 см 3) 9 см 4) 13,5 см

А3. Длины сторон треугольника равны 16 см, 18 см и 20 см. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

1) 25 см 2) 15 см 3) 54 см 4) 27 см

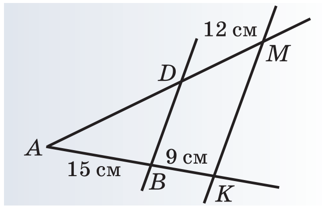
А4. Найдите среднюю линию трапеции, основания которой равны 14 см и 24 см.

1) 19 см 2) 12 см 3) 7 см 4) 38 см

А5. Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 7 см. Найдите длину катета, если косинус прилежащего к нему угла равен 0,5.

1) 7,5 см 2) 14 см 3) 3,5 см 4) 15 см

А6. *Дано*: $BD \parallel MK$. Вычислите длину отрезка DA.



1) 18 см 2) 20 см 3) 7,2 см 4) 11,5 см

В заданиях В1 и В2 запишите ответ.

В1. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса AL угла A делит сторону BC на отрезки $BL = 3$ см, $LC = 5$ см. Найдите периметр параллелограмма.

Ответ: ___________

В2. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) меньшая боковая сторона равна 6 см, а меньшее основание равно 8 см. Острый угол трапеции равен 45°. Найдите периметр трапеции.

Ответ: ___________

Выполняя задание С, запишите полное решение и ответ.

С. На диагонали BD прямоугольника $ABCD$ отложены равные отрезки BM и DK:

а) докажите равенство треугольников ABM и CDK;

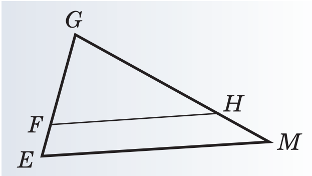
б) определите вид четырехугольника $AMCK$.

Геометрия-9

Вариант 1

В заданиях А1–А6 приведены варианты ответа, из которых верен один. Укажите номер верного ответа.

А1. *Дано*: $FH \parallel EM$; $EM = 10$, $GE = 8$, $FG = 6$. *Найти* FH.



1) $13\frac{1}{3}$ 2) 7,5

3) 4,8 4) 7

А2. Треугольники ABC и PTM подобны. $AB = 8$ см, $PT = 5$ см и $AC = 14$ см. Найдите PM.

1) 7 см 2) 22,4 см

3) 8,75 см 4) 12 см

А3. В треугольнике ABM $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$ и сторона $AM = 9\sqrt{2}$. Найдите длину стороны, противолежащей углу A.

1) 9 2) 4,5

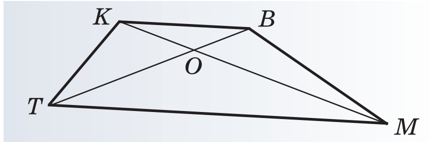
3) 7 4) $9\sqrt{3}$

А4. Стороны треугольника равны 5 см, 8 см и 9 см. Найдите косинус наибольшего угла.

1) $\frac{5}{6}$ 2) $\frac{1}{10}$

3) $\frac{7}{15}$ 4) $\frac{1}{18}$

А5. Диагонали трапеции $TKBM$ пересекаются в точке O. Найдите подобные треугольники.



1) ΔTKO и ΔMBO 2) ΔTOM и ΔBOM

3) ΔBKO и ΔTKO 4) ΔTOM и ΔBOK

А6. Углы BKL и BEL вписаны в одну окружность. Найдите градусную меру угла BKL, если $\angle BEL = 80°$, а точки K и E лежат в одной полуплоскости относительно хорды BL.

1) 160° 2) 40° 3) 80° 4) 100°

В заданиях В1 и В2 запишите ответ.

В1. Хорды AB и CD пересекаются в точке P, $AP : BP = 3 : 2$, $CP = 3$ см, $PD = 16$ см Найдите длину хорды AB.

Ответ: ____________

В2. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см, а один из катетов равен 8 см. Найдите проекцию другого катета на гипотенузу.

Ответ: ____________

Выполняя задания части С, запишите полное решение и ответ.

С1. Точки T, F, K и L делят окружность на части, пропорциональные числам 1, 4, 5 и 8. Найдите:

а) угол между хордами TK и FL;

б) угол между хордой TK и касательной, проведенной через точку K.

С2. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD делит угол B на углы в 45° и 60°. Меньшая сторона параллелограмма равна $7\sqrt{6}$ см. Вычислите периметр параллелограмма.

ФОТО НА КОНКУРС

Как Эйлер, как Виет, как Софья Ковалевская…

История фотографии такова: ребята собрались для подготовки к олимпиаде, но в этот момент отключили электричество. Пришлось продолжать подготовку при свечах.

Автор: В.П. Мороз,
учитель математики
Солнечной средней школы № 1,
Сургутский район, ХМАО-Югра

В. ДУБРОВСКИЙ,
г. Москва

ДИНАМИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ С «МАТЕМАТИЧЕСКИМ КОНСТРУКТОРОМ»

Эпизод 5. Метод координат в задачах с параметрами


Фото В. Строковского

В прошлом эпизоде мы использовали динамическую модель для решения задачи с параметром «методом сечений», то есть с помощью исследования точек пересечения двух графиков — фиксированного и подвижного, изменяющегося вместе с параметром. Сейчас мы рассмотрим другой способ использования графиков — метод координат, при котором — в случае одной неизвестной x и одного параметра a — исследуется множество точек плоскости Oxa, удовлетворяющих условию задачи. Пример, который мы предлагаем, позволяет продемонстрировать разные аспекты этого метода, а также познакомиться с возможностями функционально-графических команд «Математического конструктора».

Задача. Решить неравенство $\frac{a-x}{a+x} \geq a$ при всех значениях a.

Поучительно сначала попробовать решить эту задачу алгебраически. Сами вычисления будут простыми, но приходится рассматривать много случаев, в которых легко запутаться при «склейке ответа».

Перепишем неравенство в виде $F(x;\, a) = \frac{a-x}{a+x} - a \geq 0$. «Метод Oxa» предписывает изобразить на координатной плоскости множество S точек $(x;\, a)$, удовлетворяющих этому неравенству. Тогда множество решений неравенства при данном $a = a_0$ — это пересечение S с прямой $a = a_0$, точнее, проекция этого пересечения на ось x (рис. 1).

Множество S мы найдем с помощью так называемого «метода областей», обобщающего известный метод интервалов на неравенства с двумя неизвестными: мы построим множество решений уравнения $F(x;\, a) = 0$ (сплошная линия на рисунке 1; как ее получить, объясняется ниже) и множество точек, в которых функция F не определена, то есть прямую $a = -x$ (пунктирная линия). Эти линии разбивают плоскость на пять областей. Из непрерывности функции F следует, что внутри каждой из этих областей функция $F(x,\, a)$ сохраняет знак, поэтому достаточно определить знак этой функции в любой точке каждой из областей и выбрать те области, где функция положительна. Еще проще заметить, что в данном случае функция F меняет знак при пересечении любой из границ областей, поэтому достаточно найти знак в одной области, а потом расставить зна-

К материалу есть приложение на CD-диске.

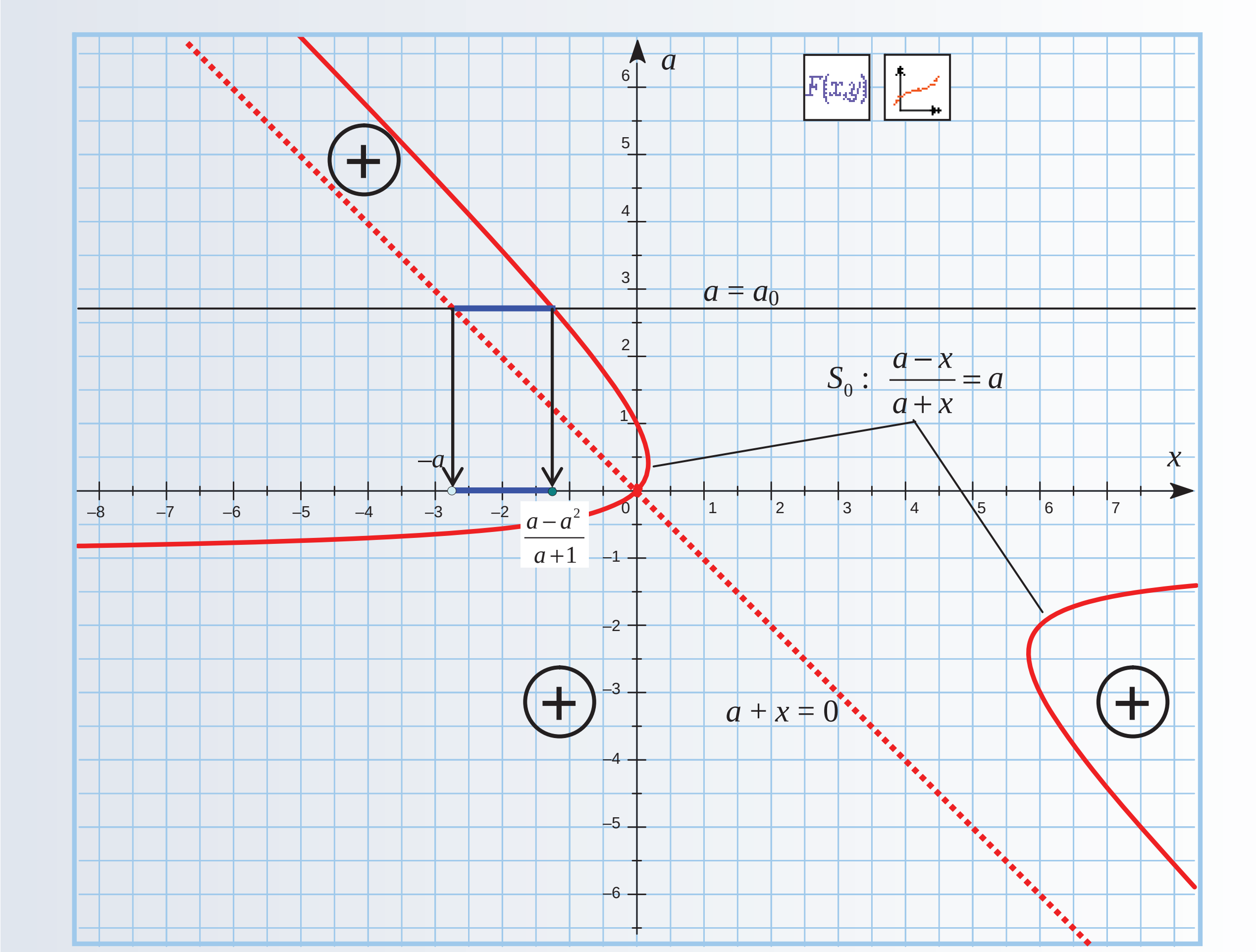


Рис. 1

ки в остальных областях в «шахматном порядке». Например, легко найти, что $F(1;\ 0) = -1$, поэтому $F(x;\ a) > 0$ в областях, отмеченных на рисунке знаком «+»; кроме них, в множество S войдут точки сплошной кривой (задаваемой уравнением $F(x;\ a) = 0$), за исключением точки $(0;\ 0)$, в которой функция не определена.

Прежде чем выписать ответ, решим уравнение $F(x; a) = 0$, то есть найдем абсциссу точки пересечения задаваемой им кривой и горизонтальной прямой с ординатой a:

$$\frac{a-x}{a+x} - a = 0 \Rightarrow a - x - a^2 - ax = 0 \Rightarrow x_0(a) = \frac{a-a^2}{a+1}.$$

Отметим, что при $a = -1$ уравнение $F(x;\ a) = 0$ не имеет решений. Пользуясь рисунком, запишем ответ:

при $a < -1$ $\ x \in (-\infty; -a) \cup [x_0(a); \infty)$ ($x_0(a)$ определено выше);

при $a = -1$ $\ x \in (-\infty; -1)$;

при $-1 < a < 0$ $\ x \in [x_0(a); -a)$;

при $a = 0$ — решений нет;

при $a > 0$ $\ x \in (-a;\ x_0(a)]$ (последний случай проиллюстрирован на рис. 1).

Теперь поясним, как строить множество S_0 решений уравнения $F(x;\ a) = 0$.

Первый способ — компьютерный и, можно сказать, «нечестный»: функцию от двух переменных можно создать с помощью специальной команды «Математического конструктора». Если взять инструмент построения графиков и применить его к этой функции, то будет построена кривая S_0. По умолчанию аргументы такой функции обозначены x и y, но можно задать и любые другие обозначения. Этот способ позволяет построить нужную картинку быстрее всего, но у него имеется ряд недостатков. Во-первых, он никак не помогает научиться самостоятельно строить аналогичные графики на бумаге. Во-вторых, применяемые команды работают не идеально: построенная кривая может содержать «мусор» — лишние линии, соединяющие некоторые точки, по которым программа строит кривую. При этом есть только один способ управлять ее видом — изменение размеров окна системы координат. Таким способом удается избавиться от «мусора». Отметим, что другие программы динамической геометрии, например «Живая математика», вообще не позволяют строить кривые, заданные уравнениями с двумя переменными.

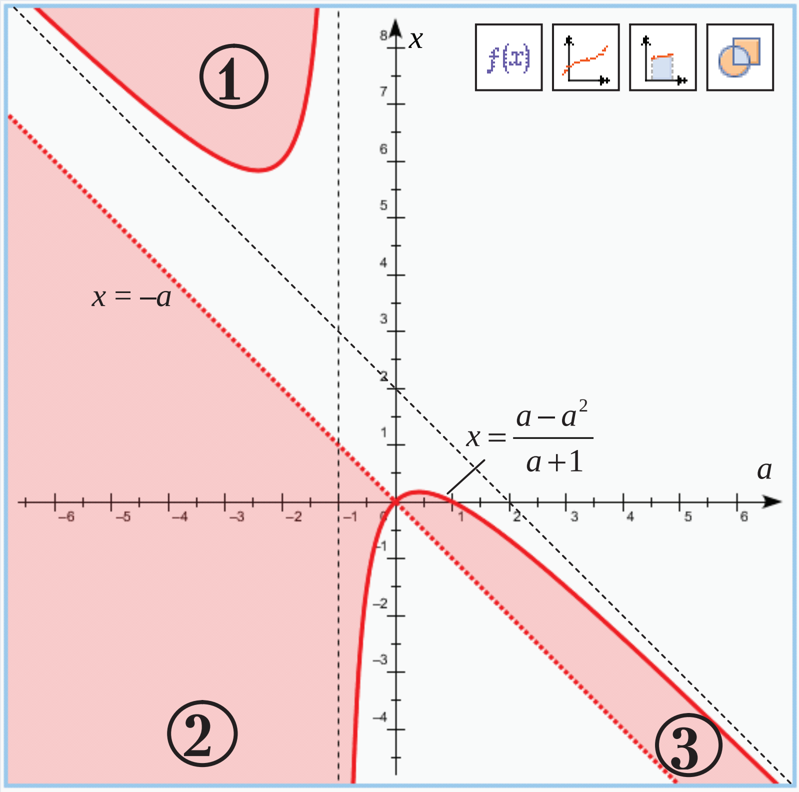


Рис. 2

Второй способ построения множества решений нашего неравенства использует обычные графики функций. Он требует предварительных преобразований неравенства, зато лишен отмеченных выше недостатков и к тому же позволяет закрасить множество решений. В данном случае представить множество S_0 в виде графика некоторой функции проще, выразив x через a, а не наоборот; то есть графики мы будем строить на плоскости Oax. Имеем:

$$\frac{a-x}{a+x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a-x-a^2-ax}{a+x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(a+1)-\left(a-a^2\right)}{a+x} \leq 0.$$

Множество S' решений последнего неравенства на плоскости Oax можно построить, как и выше, методом областей. Числитель последней дроби обращается в ноль на графике функции $x = f(a) = \frac{a-a^2}{a+1}$, знаменатель — на прямой $x = -a$. В итоге получим рисунок 2. Он отличается от рисунка 1 только перестановкой осей, то есть симметрией относительно прямой $x = a$. Заметим, что этот способ построения, в отличие от первого, можно осуществить на бумаге: график функции $f(a)$ несложно построить, записав ее в виде $f(a) = 2 - a - \frac{2}{a+1}$. Ответ получаем, пересекая множество S' с вертикальными прямыми.

Поясним, как раскрасить области в нашей модели. В «Математическом конструкторе» имеется команда, позволяющая по графику функции построить область, ограниченную этим графиком и расположенную под (или над) ним; три другие границы этой области задаются в диалоге ее свойств. В частности, область 1 на рисунке 2 ограничена снизу графиком функции f, справа — прямой $a = -1$, с двух других сторон — границами чертежа. А области 2 и 3 можно построить одновременно как симметрическую разность области $x < -a$ и области под правой ветвью графика f, то есть как множество точек, принадлежащих ровно одной из этих двух областей. Для построения симметрической разности, как и других комбинаций множеств — объединения, пересечения, разности, в МК есть специальная команда.

Для полноты картины наметим еще один способ решения. Поделив числитель и знаменатель дроби в исходном неравенстве на a (ясно, что $a \neq 0$), приведем его к виду $a \leq \frac{1-\frac{x}{a}}{1+\frac{x}{a}}$ или $a \leq \frac{1-y}{1+y}$, где $y = \frac{x}{a}$. Последнее неравенство решить уже совсем просто (здесь можно обойтись и без графиков), после чего останется сделать обратную замену в ответе. Обратите внимание, что при этой замене нужно отдельно рассмотреть случаи $a > 0$ и $a < 0$.

А. КУДРЯВЦЕВ,
В. ШАЛОВ,
г. Москва

ИНТЕРАКТИВНЫЕ УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОГО УРОКА МАТЕМАТИКИ

Цифровые технологии способны значительно повысить эффективность учебного процесса. Это относится к продуманному и системному использованию различного компьютерного и мультимедийного оборудования в работе преподавателя и обучаемых, а также к разработке и применению цифровых образовательных ресурсов* с продуманным педагогическим дизайном.

Выделим две, на наш взгляд, наиболее важные характеристики цифрового образовательного ресурса с точки зрения эффективности его использования:

1. Простота и доступность интерфейса, его интуитивная понятность. Кроме того, интерфейс серии образовательных ресурсов, входящих в интерактивное учебное пособие, должен быть однотипным — должны быть предусмотрены одни и те же действия с похожими активными элементами на экране, а также однотипная визуализация результатов работы.
2. В каждом цифровом образовательном ресурсе должна быть заложена простая функциональность, но максимально широкий спектр учебных и исследовательских задач, решаемых при работе с ним.

Представим на суд читателя несколько таких цифровых образовательных ресурсов с описанием их функциональности и возможных сценариев использования в учебном процессе. Рассматриваемые ресурсы являются компонентами интерактивных учебных пособий серии «Наглядная школа» от компании «Экзамен-Медиа».

Цифровые образовательные ресурсы пособия «Математика. 5 класс»

Простые и составные числа

Ресурс предназначен для иллюстрации понятий «простое и составное число», «делители числа», «простые делители числа».

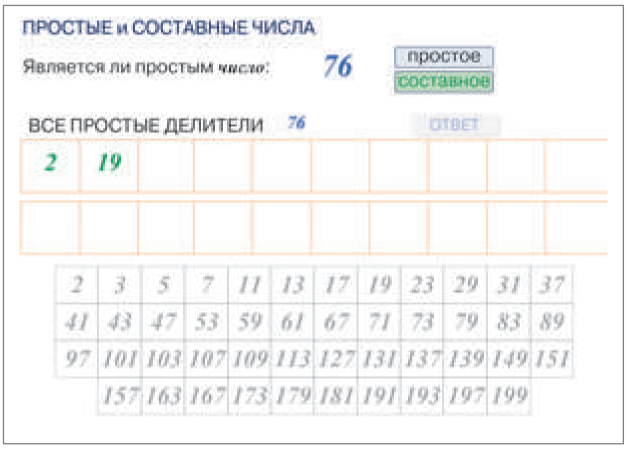
Пользователю предлагается сгенерировать число и указать:

— простое оно или составное. В случае правильного ответа слово на нажатой кнопке окрашивается в зеленый цвет;

— указать все простые делители данного числа. Выбор осуществляется нажатием на одно из простых чисел предлагаемого внизу списка. Убрать выбранное значение можно повторным нажатием на него. Правильно установленная комбинация простых делителей окрашивается в зеленый цвет, а список простых чисел блокируется до выбора другого числа.

* Цифровой образовательный ресурс (ЦОР) — некий объект, представленный в «компьютерной» форме и предназначенный для образовательных целей.

Пользователь может для каждого выбранного числа посмотреть правильный набор простых делителей, нажав кнопку *Ответ*.



Примерный сценарий действий учителя

Генерирует составное число (например, 35).

Вопросы:

— Какое это число? [Составное.]

— Почему оно составное?

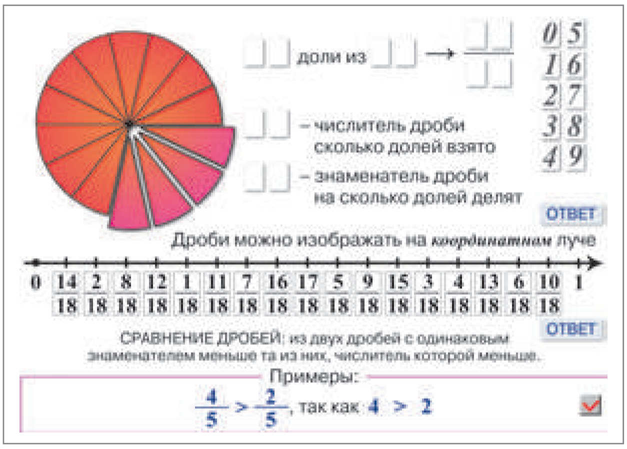
— Выпишите все делители этого числа. [1, 35, 5, 7.]

— Какие из делителей простые?

Проверяет ответ на последний вопрос, выбирая «7» и «5» из списка.

Обыкновенная дробь. Сравнение обыкновенных дробей

Круг с дольками иллюстрирует разбиение целого на несколько равных частей и выбор из этих частей определенного количества долей. Вариант разбиения генерируется случайным образом простым нажатием на круг.



Для данного варианта разбиения круга на доли пользователь может вписать соответствующие числовые значения или посмотреть правильные значения, нажав *Ответ*. Вписать числовые значения в заготовленные места можно, перетаскивая цифры из набора, убрать вставленную цифру можно простым нажатием на нее.

На нижнем рисунке нажатием на слово *Координатном* генерируется набор дробей, которые предлагается расположить в правильном порядке.

В блоке «Примеры» нажатием на знак сравнения генерируются различные варианты дробей. Пользователь может отключить отображение знака сравнения и пояснения, самостоятельно сравнить дроби и объяснять свой ответ.

Во всех интерактивах правильно установленные значения окрашиваются в зеленый цвет.

Примерный сценарий действий учителя

Учитель генерирует рисунок с небольшим количеством долек (например, 7 долек).

Вопросы:

— Сколько долей взято? [3]

— Из скольких долей взято 3 дольки? [7]

— Каковы числитель и знаменатель дроби?

Ответы вписываются учителем или учеником. Если все ответы правильные, введенные значения окрашиваются в зеленый цвет. Если где-то допущена ошибка, следует обсудить ее с учащимися и исправить.

Сложение и вычитание десятичных дробей

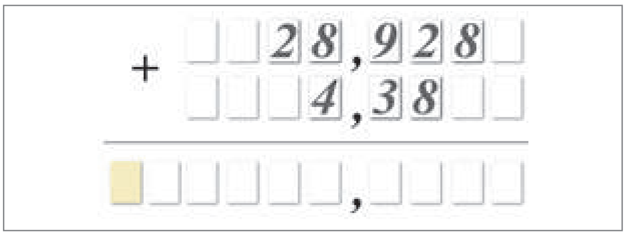
Интерактив предназначен для отработки навыков сложения и вычитания в столбик.

Пользователь выбирает выполняемое с числами действие (нажимает *Сложение* или *Вычитание*). Затем он вписывает произвольные числа и заполняет строку ответа.

Если числа и ответ введены правильно, то все значения окрашиваются в зеленый цвет.

Примерный сценарий действий учителя

Учитель дает классу задания на сложение в столбик. Один вариант задания набирает на доске. Вызывает одного ученика к доске и предлагает ему выполнить сложение. Если ответ верный, он окрашивается в зеленый цвет. Если допущена ошибка, следует обсудить ее с учащимися и исправить.



Цифровые образовательные ресурсы пособия «Треугольники»

Треугольник и его элементы

Данный компонент является яркой интерактивной иллюстрацией для изучения понятия «треугольник» и всех сопутствующих понятий.

Пользователь может перемещать вершины B и C. При этом отображаются соответствующие полученному треугольнику стороны и углы. Кроме того, можно включить виртуальный транспортир, с его помощью измерить углы треугольника. Поворот транспортира осуществляется нажатием кнопки в области шкалы, а движение — нажатием в любой другой области транспортира.

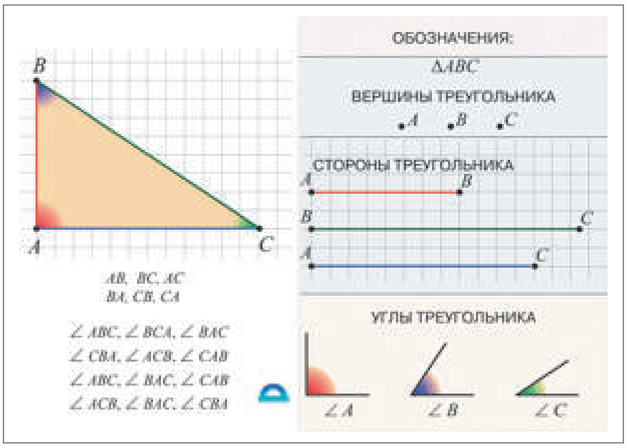
Обратим внимание на клетчатый фон. Это сделано намеренно, чтобы была возможность измерить длины сторон (чтобы проиллюстрировать понятие равнобедренного треугольника, сделать вывод о сумме длин сторон и т.п.).

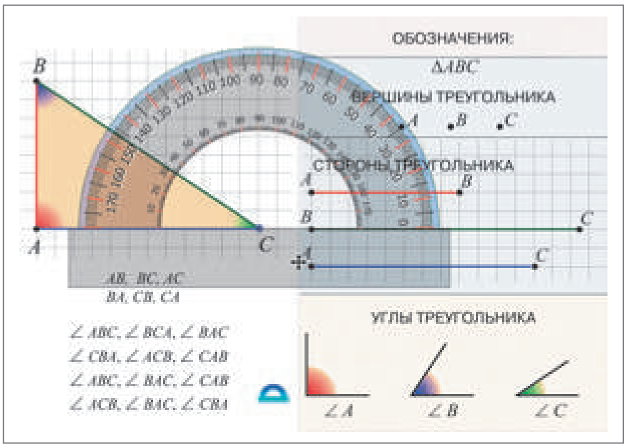
Примерный сценарий действий учителя

Предложить учащимся выполнить исследовательские задания, изменяя вид треугольника:

1. Выяснить, каково соотношение суммы длин двух сторон треугольника и длины третьей стороны.

Длины сторон считать по клеткам. Провести измерения для нескольких различных треугольников. Вывод: сумма длин двух сторон треугольника всегда больше длины третьей.



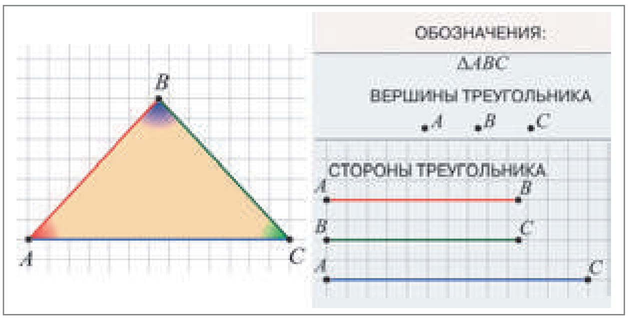


2. Что можно сказать о сумме углов треугольника?

Использовать виртуальный транспортир для измерения величин всех углов. Провести измерения для нескольких различных треугольников.

3. Что можно сказать об углах равнобедренного треугольника?

Установить вершины B и C так, чтобы длины сторон AB и CB были одинаковы (ориентироваться на красный и зеленый отрезки в правой части рисунка). Затем воспользоваться транспортиром.



Во всех приведенных примерах в полной мере реализованы две важные характеристики цифрового образовательного ресурса, на которые мы обратили внимание в начале статьи.

А. КОРЯНОВ,
г. Брянск,
А. ПРОКОФЬЕВ,
г. Москва

ГОТОВИМ К ЕГЭ ХОРОШИСТОВ И ОТЛИЧНИКОВ

КОРЯНОВ
Анатолий Георгиевич,
методист по математике Информационно-методического центра г. Брянска, эксперт конфликтной комиссии по математике при Брянском областном центре оценки качества образования, лектор Брянского института повышения квалификации работников образования.

ПРОКОФЬЕВ
Александр Александрович,
доктор педагогических наук, заведующий кафедрой высшей математики № 1 Московского государственного института электронной техники (технический университет), учитель математики лицея № 1557 г. Зеленограда, член авторского коллектива УМК «Алгебра и начала анализа» для профильного уровня обучения (издательство «Бином»)

План курса

Лекция 1	**Арифметический и алгебраический способы отбора корней в тригонометрических уравнениях.** Основные теоретические сведения. Методические указания по использованию арифметического и алгебраического способов отбора корней. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности
Лекция 2	**Геометрический и функционально-графический способы отбора корней в тригонометрических уравнениях.** Основные теоретические сведения. Методические указания по использованию геометрического и функционально-графического способов отбора корней. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности
Лекция 3	**Решение неравенств алгебраическим методом.** Классификация неравенств. Использование основных схем равносильных переходов к рациональным неравенствам или их системам. Разбор типичных ошибок. Методические указания по обучению алгебраическим методам. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности
Лекция 4	**Решение неравенств функционально-графическим методом.** Методические указания по обучению и устранению ошибок в применении функционально-графических методов. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности
Лекция 5	**Использование вычислительного метода для решения задач С2.** Основные теоретические сведения и формулы, набор опорных задач. Методические указания по обучению. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности
Лекция 6	**Использование координатного метода для решения задач С2.** Основные теоретические сведения и формулы, набор опорных задач. Методические указания по обучению. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности
Лекция 7	**Многовариантные планиметрические задачи, связанные с взаимным расположением элементов фигуры.** Основные теоретические сведения и формулы. Методические указания по обучению. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности
Лекция 8	**Многовариантные планиметрические задачи с неоднозначностью взаимного расположения фигур.** Основные теоретические сведения и формулы. Методические указания по обучению. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности

Концепция курса

К выполнению заданий группы С Единого государственного экзамена по математике приступает около 60% участников экзамена, а до ответа доходят не более 20%. Значит, именно здесь содержится резерв для улучшения итоговых результатов выпускников, ориентированных на поступление в вуз.

В большей части литературы для подготовки к ЕГЭ предлагаются наборы вариантов с ответами и частичным разбором решений, но без демонстрации различных подходов к решению. Мы постарались восполнить этот пробел: в предлагаемых лекциях мы на специфике заданий повышенного уровня сложности, на особенностях их решения дадим методические указания, которые учитель сможет использовать при изучении с учащимися различных тем курса и при непосредственной подготовке к экзамену.

Первые две лекции будут посвящены заданиям типа С1, которые представляют собой уравнение или систему двух уравнений, содержащих тригонометрические функции. Основные трудности у участников экзамена, приступивших к решению этого задания, возникают не на этапе решения уравнения или системы, а на этапе отбора корней: при верно решенном уравнении либо неверно проводится отбор корней, либо не проводится вовсе. Мы рассмотрим различные способы отбора корней, причины появления посторонних корней, дадим практические советы и методические указания по их использованию.

В третьей и четвертой лекциях будут рассмотрены задания типа С3 — неравенства повышенного уровня сложности. Многие участники экзамена либо не смогли свести данное им неравенство к рациональному или системе рациональных неравенств, либо продемонстрировали недостаточное владение базовыми умениями. Мы покажем равносильные переходы, с помощью которых большинство таких неравенств можно свести к рациональным или к системам рациональных неравенств, а также познакомим слушателей со способами решения неравенств с использованием свойств входящих в них функций и с применением производной.

Пятая и шестая лекции будут посвящены заданиям типа С2 — задачам на определение расстояний или углов в пространстве. Большинство приступивших к решению этих задач неверно воспроизводят стереометрическую конфигурацию либо при верно описанной конфигурации не доводят решение до вычисления искомой величины. Мы рассмотрим различные методы решения подобных задач и дадим методические указания по их применению.

Две заключительные лекции будут посвящены заданиям типа С4. Эти задачи содержат в условии некоторую неопределенность, которая позволяет трактовать условие неоднозначно, поэтому подобные задачи называют многовариантными. Решение таких задач состоит в рассмотрении всех возможных вариантов расположения геометрических объектов или их элементов. Мы выделим причины, ведущие к неоднозначной трактовке условия задачи, проведем классификацию подобных задач, дадим методические указания и набор опорных задач.

Надеемся, что материал лекций поможет учителям организовать эффективную подготовку учащихся к выпускному экзамену. Добавим, что нами подготовлен комплект пособий, который в электронном виде имеется в открытом доступе. Пособия содержат классификацию заданий по темам, демонстрацию и сравнение различных методов решения, большой набор заданий для организации самостоятельной и групповой работы учащихся.

Лекция 1

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ СПОСОБЫ ОТБОРА КОРНЕЙ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ

■ Задание С1 контрольно-измерительных материалов в последние два года содержало тригонометрические выражения (в 2010 году — системы уравнений, в 2011 году — уравнение). Процент успешного выполнения этого задания на экзамене в 2010 г. составил около 20%. Основные недостатки математической подготовки учащихся: ошибки в формулах решения простейших тригонометрических уравнений; при получении ответа не учитывалась область определения уравнения; неправильное применение тригонометрических формул; незнание свойств тригонометрических и обратных тригонометрических функций; плохое владение способами отбора корней, удовлетворяющих тем или иным ограничениям, неумение пользоваться тригонометрической окружностью.

Как правило, учитель знакомит учеников с наиболее распространенным способом отбора корней, применяя тригонометрическую окружность, в меньшей степени использует арифметический или алгебраический подходы. С другой стороны, ученик, знающий несколько приемов отбора корней, может при решении задачи выбрать более рациональный. Мы постараемся показать на примерах различные методы и способы отбора корней. Сразу отметим, что представленные решения не являются «образцами оформления» заданий. В примерах отражены решения, характерные на этапе обучения учащихся. На этапе контроля решения заданий могут быть сжаты и отражать только существенные моменты.

Напомним, что полное правильное решение задания С1 с развернутым ответом оценивается 2 баллами. Допускаются различные способы решения и записи развернутого ответа. Главное требование — решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Экзаменующийся должен явно продемонстрировать владение выбранным им методом решения.

При решении различных уравнений школьникам приходится сталкиваться с понятием «посторонних» корней, появляющихся в результате неравносильных преобразований данного уравнения. Как правило, это связано с расширением области допустимых значений неизвестной в решаемом уравнении. Для получения правильного ответа возникающие «посторонние» корни необходимо исключить.

Аналогичная ситуация возникает и при решении тригонометрических уравнений и их систем. Однако она отличается от ситуаций, возникающих при решении дробно-рациональных, иррациональных, логарифмических и других уравнений, тем, что при решении простейших тригонометрических уравнений возникают бесконечные серии решений, зависящих от целочисленного параметра.

В данной лекции мы не останавливаемся на методах решения тригонометрических уравнений, так как эти вопросы достаточно широко освещены в учебниках.

При отборе корней в процессе решения тригонометрических уравнений обычно используют один из следующих **способов**.

Арифметический способ:

а) непосредственная подстановка полученных корней в уравнение и имеющиеся ограничения;

б) перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней.

Алгебраический способ:

а) решение неравенства относительно целочисленного параметра и вычисление корней;

б) исследование уравнения с двумя целочисленными параметрами.

Геометрический способ:

а) изображение корней на тригонометрической окружности и их отбор с учетом имеющихся ограничений;

б) изображение корней на числовой прямой с последующим отбором и учетом имеющихся ограничений.

Функционально-графический способ:

отбор корней с использованием графиков простейших тригонометрических функций.

В настоящей лекции будет рассмотрено применение арифметического и алгебраического способов.

Предварительные замечания

Замечание 1. О сравнении чисел

Проверка экзаменационных работ показывает, что многие учащиеся делают ошибки при сравнении чисел, заданных в разной форме, например, $\frac{3}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Поэтому полезно в учебном процессе уделить этому вопросу должное внимание, решая упражнения следующего вида.

1. Расставьте в порядке убывания числа:

$$\frac{\pi}{2},\ 3\frac{1}{8},\ \pi,\ \frac{1}{2},\ \frac{\pi}{6},\ 2{,}5,\ \frac{5\pi}{6}.$$

2. Расставьте в порядке возрастания числа:

$$-\frac{3}{2},\ -\frac{2\pi}{3},\ -\frac{\pi}{2},\ -\frac{5\pi}{6},\ -2.$$

3. Сравните числа: $\operatorname{arctg}\frac{5}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, 1.

Замечание 2. Формулы записи решений простейших тригонометрических уравнений

Следует уделить внимание и решению простейших тригонометрических уравнений, к которым тем или иным способом приводятся сложные тригонометрические уравнения. Прочное знание формул решения простейших тригонометрических уравнений и умение отметить их на тригонометрической окружности позволит учащимся избежать досадных ошибок.

Для записи решений простейших уравнений используются следующие формулы:

Вид уравнения	Общая формула серии решений
$\sin x = a, \lvert a \rvert \le 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\cos x = a, \lvert a \rvert \le 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

В приведенных формулах n выполняет роль целочисленного параметра.

Следует обратить внимание учащихся, что в случае отбора корней использование общей формулы серии решений для синуса и косинуса не всегда является удобной. В этом случае удобнее не объединять серии решений, а представлять их совокупностью.

При повторении формул решения уравнений следует обратить внимание учащихся на то, что эти формулы задают множества чисел, которые образуют арифметические прогрессии с разностью 2π для синуса и косинуса и π для тангенса и котангенса.

1. Решения уравнения $\sin x = a$ $(-1 < a < 1)$ можно записать совокупностью двух серий решений:

$$x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi n \\ \pi - \arcsin a + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Уравнения $\sin x = 1$, $\sin x = -1$ и $\sin x = 0$ имеют решения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ и $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, соответственно.

2. Решения уравнения $\cos x = a$ $(-1 < a < 1)$ можно записать совокупностью двух серий решений:

$$x = \left[\begin{array}{l} \arccos a + 2\pi n \\ -\arccos a + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Уравнения $\cos x = 1$, $\cos x = -1$ и $\cos x = 0$ имеют решения $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, соответственно.

3. Решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ можно записать совокупностью двух серий:

$$x = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arctg} a + 2\pi n \\ \pi + \operatorname{arctg} a + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

4. Решения уравнения $\operatorname{ctg} x = $ а можно записать совокупностью двух серий:

$$x = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arcctg} a + 2\pi n \\ \pi + \operatorname{arcctg} a + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Арифметический способ отбора корней

Данный способ отбора корней связан с вычислением корней при переборе значений целочисленного параметра или нахождением значений тригонометрических выражений непосредственной подстановкой при проверке корней.

Рассмотрим примеры, в которых используется арифметический способ отбора корней.

Непосредственная подстановка в уравнение и имеющиеся ограничения

В случае непосредственной подстановки серий полученных решений для удаления «посторонних» решений полезным оказывается использование формул приведения. В частности,

$$\sin(x + \pi k) = \begin{cases} \sin x \text{ при } k = 2n, \\ -\sin x \text{ при } k = 2n+1, \end{cases} \quad n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\cos(x + \pi k) = \begin{cases} \cos x \text{ при } k = 2n, \\ -\cos x \text{ при } k = 2n+1, \end{cases} \quad n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x,\ x \ne \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\operatorname{ctg}(x + \pi k) = \operatorname{ctg} x,\ x \ne \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{5\cos x - \cos 2x} + 2\sin x = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{5\cos x - \cos 2x} = -2\sin x.$$

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 5\cos x - \cos 2x = 4\sin^2 x, \\ \sin x \le 0. \end{cases}$$

Решим уравнение системы:

$$5\cos x - (2\cos^2 x - 1) = 4(1 - \cos^2 x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0.$$

Отсюда $\cos x = 0{,}5$ или $\cos x = -3$ (нет корней). Из уравнения $\cos x = 0{,}5$ получим:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\ \text{или}\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Проверим для полученных значений x выполнение условия $\sin x \le 0$. Для первой серии получаем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0.$$

Следовательно, первая серия является «посторонней». Для второй серии получаем:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0.$$

Следовательно, все числа второй серии решений уравнения системы являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$|\sin x| + \sqrt{3}\cos x = 0.$$

Решение. Рассмотрим два множества значений неизвестной x, для которых $\sin x \geq 0$ и $\sin x < 0$ соответственно.

1. Пусть $\sin x \geq 0$, тогда данное уравнение принимает вид:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\sqrt{3}\cos x.$$

Разделив обе части уравнения на $\cos x$ (так как ясно, что $\cos x \neq 0$), получим: $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, откуда $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Из этой серии решений отберем значения x, для которых $\sin x \geq 0$. Подставляя $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$ в это неравенство, находим: $\sin\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ при $k = 2n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, и $\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ при $k = 2n + 1$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, корнями исходного уравнения являются числа вида $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

2. Пусть теперь $\sin x < 0$, тогда данное уравнение принимает вид

$$-\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0.$$

Аналогично рассуждая, получим: $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, откуда $x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. Отберем из полученных решений те значения x, для которых $\sin x < 0$. Подставляя $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ в это неравенство, находим: $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi m\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ при $k = 2m,\ m \in \boldsymbol{Z}$, и $\sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi m\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ при $k = 2m + 1,\ m \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, корнями исходного уравнения являются числа вида $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Иногда возникает вопрос о совпадении решений в разных сериях. Если специально не ставится задача объединения решений, то учащиеся могут записывать в ответ полученные серии, причем используя для обозначения целочисленных параметров одну букву.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{1 + \frac{1}{\sin x}} = \operatorname{ctg} x.$$

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x \geq 0, \\ 1 + \dfrac{1}{\sin x} = \operatorname{ctg}^2 x. \end{cases}$$

Решим уравнение системы:

$$1 + \frac{1}{\sin x} = \operatorname{ctg}^2 x \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\sin x} = \left(\frac{1}{\sin x} - 1\right)\left(\frac{1}{\sin x} + 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{\sin x}\right)\left(2 - \frac{1}{\sin x}\right) = 0.$$

В области допустимых значений x, которое задается условием $\sin x \neq 0$, последнее уравнение распадается на равносильную ему совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 1 + \dfrac{1}{\sin x} = 0 \\ 2 - \dfrac{1}{\sin x} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, \end{array}\right. \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Отберем значения x, удовлетворяющие условию $\operatorname{ctg} x \geq 0$.

Для решений первой серии получаем: $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 0$, следовательно, условие $\operatorname{ctg} x \geq 0$ выполнено.

Для решений второй серии:

$$\operatorname{ctg}\left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n\right) = \operatorname{ctg}\left((-1)^n \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{3}, \text{если } n \text{ четно}, \\ -\sqrt{3}, \text{если } n \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Таким образом, условие $\operatorname{ctg} x \geq 0$ выполнено только для четных значений n, то есть $n = 2m$, $m \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Замечание. Обобщением предыдущих подстановок является рассмотрение множества значений целых чисел для параметра при разбиении его на три и более подмножеств.

Пример 4. Найти корни уравнения $\sin 3x = 1$, удовлетворяющие неравенству $\cos x \geq 0$.

Решение. Уравнение $\sin 3x = 1$ имеет корни: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$. Так как функции $\sin 3x$ и $\cos x$ имеют общий наименьший положительный период 2π, то для проверки неравенства $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}\right) \geq 0$ достаточно рассмотреть значения $0, 1, 2$ для параметра n (пройти весь период). Так как $\cos\frac{\pi}{6} \geq 0$ и $\cos\frac{3\pi}{2} \geq 0$, то получаем корни $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ и $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, удовлетворяющие данному условию.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Методические рекомендации. Приведем несколько схем уравнений, с помощью которых учитель может самостоятельно составлять упражнения подобного типа. Это могут быть уравнения вида

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0,\ \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}=0,\ f(x)\cdot\sqrt{g(x)}=0,$$

где $f(x)$ и $g(x)$ содержат одну из простейших тригонометрических функций.

Например,

$(\operatorname{ctg} x+1)\sqrt{\cos x}=0,$

$\frac{2\sin x-\sqrt{3}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=0.$

Один из способов повышения сложности заключается в увеличении количества функций, входящих в виде множителей числителя или знаменателя.

Например,

$\frac{\cos x\cdot(\sin 2x-1)}{(5\sin x-4)\sqrt{-\operatorname{tg} x}}=0.$

Тренировочные упражнения

Решите уравнения:

1. $\frac{\sin 2x+2\sin^2 x}{\sqrt{-\cos x}}=0.$

2. а) $\frac{2-2\sin^2 x-\sqrt{3}\cos x}{\operatorname{ctg} x-\sqrt{3}}=0;$

б) $\log_2(-\sin x)+\log_2\cos x=-2.$

3. $|\cos x|=\cos x+2\sin x.$

4. $\sqrt{1+\frac{1}{\cos x}}=\operatorname{tg} x.$

Учет области определения или множества значений функций

Иногда при решении уравнений некоторые «посторонние» решения, возникающие в результате замены, могут быть удалены по причине несоответствия их области определения или множеству значений тригонометрических и обратных тригонометрических функций. Напомним их.

Функция	Область определения	Множество значений
$y=\sin x$	$(-\infty;+\infty)$	$[-1;1]$
$y=\cos x$	$(-\infty;+\infty)$	$[-1;1]$
$y=\operatorname{tg} x$	все $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$	$(-\infty;+\infty)$
$y=\operatorname{ctg} x$	все $x\neq\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$	$(-\infty;+\infty)$
$y=\arcsin x$	$[-1;1]$	$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
$y=\arccos x$	$[-1;1]$	$[0;\pi]$
$y=\operatorname{arctg} x$	$(-\infty;+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$
$y=\operatorname{arcctg} x$	$(-\infty;+\infty)$	$(0;\pi)$

Пример 5. Решить уравнение $\frac{\cos x}{1-\sin x}=0.$

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\cos x=0,\\1-\sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=0,\\\sin x\neq 1.\end{cases}$$

Если $\cos x=0$, то (из основного тригонометрического тождества) $\sin x=1$ или $\sin x=-1$. Так как $\sin x\neq 1$, то остается отобрать те значения x, при которых $\sin x=-1$. Отсюда $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$

Ответ: $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$

Пример 6. Решить уравнение

$$6\sin x\cos x+\sin 2x\cos\frac{2}{x}=0.$$

Решение. Воспользуемся формулой синуса двойного аргумента:

$$3\sin 2x+\sin 2x\cos\frac{2}{x}=0\Leftrightarrow\sin 2x\left(3+\cos\frac{2}{x}\right)=0.$$

Так как $-1\le\cos\frac{2}{x}\le 1$ при всех $x\neq 0$, то $3+\cos\frac{2}{x}>0.$ Следовательно, уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\sin 2x=0,\\x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\pi k}{2},\ k\in\boldsymbol{Z},\ k\neq 0.$$

Ответ: $\frac{\pi k}{2},\ k\in\boldsymbol{Z},\ k\neq 0.$

Пример 7. Решить уравнение

$$\arccos\frac{3x+4}{1-2x}=\pi x+6\pi.$$

Решение. В соответствии с определением арккосинуса запишем ограничения, которым должна удовлетворять переменная x. Область допустимых значений уравнения определяется условиями $-1\le\frac{3x+4}{1-2x}\le 1$, а поскольку значения арккосинуса ограничены отрезком $[0;\pi]$, то необходимо и выполнение условия $0\le\pi x+6\pi\le\pi$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases}-1\le\frac{3x+4}{1-2x}\le 1,\\0\le\pi x+6\pi\le\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3x+4}{1-2x}\ge -1,\\\frac{3x+4}{1-2x}\le 1,\\0\le x+6\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x+5}{1-2x}\ge 0,\\\frac{5x+3}{1-2x}\le 0,\\-6\le x\le -5\end{cases}\Leftrightarrow x=-5.$$

Подставляя полученное единственное значение $x = -5$ в исходное уравнение, получим:

$$\arccos\frac{3\cdot(-5)+4}{1-2\cdot(-5)}=\pi\cdot(-5)+6\pi,\ \arccos\frac{-11}{11}=\pi,$$

или $\arccos(-1) = \pi$ — верно.

Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение $x = -5$.

Ответ: -5.

Замечание. Также необходимо следить за тем, чтобы в ответ не попали «посторонние» решения, возникающие в результате замены, но не принадлежащие области допустимых значений введенной переменной.

Пример 8. Решить уравнение

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0.$$

Решение. Обозначим $\sin x = t$, где $-1 \le t \le 1$. Тогда получим квадратное уравнение $2t^2 - 5t + 2 = 0$, имеющее корни $t_1=\frac{1}{2}$ и $t_2 = 2$. Второй корень не удовлетворяет условию $-1 \le t \le 1$. Для уравнения $\sin x=\frac{1}{2}$ имеем:

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in \boldsymbol{Z}$.

Пример 9. Решить уравнение

$$\arccos^2 x - 8\arccos x + 15 = 0.$$

Решение. Положим $\arccos x = t$. Так как множество значений функции $\arccos x$ — отрезок $[0; \pi]$, найдем решения уравнения $t^2 - 8t + 15 = 0$, удовлетворяющие условию $0 \le t \le \pi$. Такой корень один: $t = 3$. Если $t = 3$, то $\arccos x = 3$, отсюда $x = \cos 3$.

Ответ: $\cos 3$.

Пример 10. Решить уравнение

$$\sqrt{3+2\sin^2 x}=\sqrt{6}\cos 0{,}5x.$$

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\cos 0{,}5x\ge 0,\\ 3+2\sin^2 x=6\cos^2 0{,}5x.\end{cases}\qquad(1)$$

Для решения уравнения, входящего в систему (1), воспользуемся формулами $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ и $\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos^2\frac{x}{2}$. Получим:

$$3+8\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=6\cos^2\frac{x}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3+8\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)\cos^2\frac{x}{2}=6\cos^2\frac{x}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\cos^4\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}-3=0.$$

Сделав замену $\cos^2\frac{x}{2}=t$, где $0 \le t \le 1$, получим уравнение $8t^2 - 2t - 3 = 0$, имеющее два корня: $t_1=\frac{3}{4}$ и $t_2=-\frac{1}{2}$. Заметим, что корень $t_2=-\frac{1}{2}$ не удовлетворяет условию $0 \le t \le 1$. Возвращаясь к исходной системе, получим:

$$\begin{cases}\cos\frac{x}{2}\ge 0,\\ \cos^2\frac{x}{2}=\frac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\frac{x}{2}\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt3}{2}\\ \cos\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt3}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+4\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+4\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

В данном примере при решении уравнения можно было поступить следующим образом:

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1+\cos x}{2}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Однако в этом случае пришлось бы отбирать корни, удовлетворяющие неравенству $\cos 0{,}5\frac{x}{2}\ge 0$.

Пример 11. Решить уравнение

$$2(\sin x - \cos x) + \sin 2x = 0{,}56.$$

Решение. Пусть $\sin x-\cos x=t$, где $-\sqrt2\le t\le\sqrt2$, поскольку $\sin x-\cos x=\sqrt2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. Тогда $t^2 = 1 - \sin 2x$, и получаем квадратное уравнение относительно t:

$$2t + 1 - t^2 = 0{,}56, \text{ или } t^2 - 2t - 0{,}44 = 0.$$

Отсюда получаем два значения: $t_1 = -0{,}2$ и $t_2 = 2{,}2$. Заметим, что t_2 — «посторонний» корень, так как $2{,}2>\sqrt2$.

Выполнив обратную замену, получим:

$$\sin x-\cos x=-\frac{1}{5}\Leftrightarrow\sqrt2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{5}.$$

Отсюда получаем:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{5\sqrt2},\ x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt2}{10}+\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt2}{10}+\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

Методические рекомендации. Приведем несколько схем уравнений, с помощью которых учитель может самостоятельно составлять упражнения подобного типа.

1. Использовать выражения вида $af^2(x) + bf(x) + c$, где уравнение $at^2 + bt + c = 0$ имеет один корень, модуль которого больше 1, и второй, модуль которого меньше 1, а $f(x)$ — одна из функций $\sin kx$ или $\cos kx$.

Например,
$$\frac{6\sin^2 x-5\sin x+1}{\sqrt{-\cos x}}=0.$$

2. При составлении уравнения вида $af^2(x)+bf(x)+c=0$, где $f(x)$ — одна из обратных тригонометрических функций, a, b и c — известные числа, можно использовать следующий прием. В выражение $a(f(x)-t_1)(f(x)-t_2)$ подставить конкретные значения t_1 и t_2, одно из которых входит в множество значений функции $f(x)$, а другое — нет.

3. Можно использовать уравнения вида
$$\sqrt{f(x)}=g(x),\ \log_a f(x)=\log_a g(x).$$

Например,
$$\sqrt{5\cos x-\cos 2x}=-2\sin x,$$
$$\log_{\sqrt{3}}\left(2\sin^2 x-1\right)=\log_{\sqrt{3}}\sin x.$$

Тренировочные упражнения

Решите уравнения:

5. $2\sin^2 x-5\cos x=4.$

6. $|\cos^2 0{,}5x-0{,}6|=5\cos x+1.$

7. а) $2\arcsin^2 x-7\arcsin x+3=0;$

б) $\operatorname{arcctg}^2 x-(\pi+2)\operatorname{arcctg} x+2\pi=0.$

8. а) $\arcsin\frac{3x+11}{x+5}=-\pi-\frac{\pi x}{2};$

б) $\operatorname{arctg}(4x^2-8x-9)+\operatorname{arctg} 16x^2=0.$

в) $\left(x^2-5x+6\right)\arcsin\frac{x}{2}=0.$

9. а) $\sqrt{10+2\cos^2 x}=\sqrt{14}\sin 0{,}5x;$

б) $\sqrt{\cos 2x+\sin 3x}=\sqrt{2}\cos x.$

10. $\sin x+\cos x=1-\sin x\cos x.$

Перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней

Перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней приходится выполнять в случаях, когда требуется отобрать корни, принадлежащие заданному промежутку или удовлетворяющие некоторому условию.

В случае, когда какая-то из серий решений имеет вид $x=x_0+\frac{2\pi k}{m}$, $k\in\boldsymbol{Z}$, m — заданное натуральное число, и нужно проверить выполнение какого-то дополнительного условия (например, $\cos x\ge 0$), то эту серию удобно разбить на серии с периодом 2π. Получится m серий при $k=1,2,\ldots,m$. Соответственно, остается проверить выполнение условий только для одного числа из каждой такой серии.

Пример 12. Решить уравнение
$$\sin 3x\left(\sqrt{\cos x}-2\right)=0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases}\sin 3x=0,\\ \cos x\ge 0.\end{cases}$

Так как периоды функций $T(\cos x)=2\pi$, $T(\sin 3x)=\frac{2\pi}{3}$, то их общий наименьший положительный период 2π. Поэтому достаточно рассмотреть решения уравнения на промежутке $[0;\,2\pi)$.

Из уравнения $\sin 3x=0$ получаем: $x=\frac{\pi k}{3}$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Подставляя поочередно значения 0, 1, 2, 3, 4, 5 для переменной k, найдем корни: $0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \pi,\ \frac{4\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3}$, содержащиеся на промежутке $[0;\,2\pi)$. Среди полученных решений отбираем те, для которых справедливо неравенство $\cos x\ge 0$. Остаются числа $0,\ \frac{\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3}$. Следовательно, исходное уравнение имеет корни вида $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $x=\frac{5\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$

Пример 13. Решить уравнение
$$\frac{\cos x+\sin 2x}{\cos 3x}=1.$$

Решение. Умножим обе части уравнения на $\cos 3x\ne 0$. Далее получаем:
$$\cos x+\sin 2x=\cos 3x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\cos 3x-\cos x-\sin 2x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow-2\sin 2x\sin x-\sin 2x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\sin 2x\,(2\sin x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \sin x=-0{,}5\end{array}\right.\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi k}{2}\\ x=-\frac{\pi}{6}+2\pi l\quad k,\,l,\,m\in\boldsymbol{Z}.\\ x=\frac{7\pi}{6}+2\pi m,\end{array}\right.$$

Общий наименьший положительный период функций $\sin x$, $\cos 3x$, $\sin 2x$ равен 2π. Поэтому достаточно рассмотреть решения уравнения на промежутке $[0;\,2\pi)$.

На промежутке $[0;\,2\pi)$ содержатся корни
$$0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}.$$

Из условия $\cos 3x\ne 0$ получаем:
$$x\ne\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\boldsymbol{Z},$$
а на промежутке $[0;\,2\pi)$:
$$x\ne\frac{\pi}{6},\ x\ne\frac{\pi}{2},\ x\ne\frac{5\pi}{6},\ x\ne\frac{7\pi}{6},\ x\ne\frac{3\pi}{2},\ x\ne\frac{11\pi}{6}.$$

Таким образом, остались числа 0 и π, а значит, исходное уравнение имеет корни $x=\pi t$, $t\in\boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\pi t,\ t\in\boldsymbol{Z}.$

В случае отбора корней, принадлежащих отрезку $[a; b]$, учащиеся часто просто проверяют, при каких значениях целочисленного параметра корни ему принадлежат. Однако при таком способе необходимо обосновать, что при других значениях целочисленного параметра корни данному промежутку не принадлежат.

Пример 14. Решить уравнение

$$\cos\sqrt{2-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение. Рассматривая данное уравнение как простейшее тригонометрическое уравнение, получим:

$$\sqrt{2-x^2}=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

Так как $2-x^2\le 2$, то $0\le\sqrt{2-x^2}\le\sqrt{2}$.

Из всех чисел вида $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$, отрезку $\left[0;\sqrt{2}\right]$ принадлежит только число $\frac{\pi}{6}$. Поэтому последнее уравнение равносильно уравнению $\sqrt{2-x^2}=\frac{\pi}{6}$. Отсюда

$$x^2=2-\frac{\pi^2}{36},\ x=\pm\sqrt{2-\frac{\pi^2}{36}}.$$

Ответ: $\pm\sqrt{2-\frac{\pi^2}{36}}$.

Методические рекомендации. При составлении примеров, подобных рассмотренным выше, можно использовать сложные функции $f(kx)$ или $g(mx)$, где k и m — фиксированные целые числа.

Например,

$$\frac{\cos 2x}{\sin 3x}=0,$$

$$(\sin 2x-1)\sqrt{\cos 3x}=0,$$

$$\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}\left(\operatorname{tg}\,2x-1\right)=0.$$

Следующий способ при составлении примеров состоит в использовании уравнений вида $f(x)\sqrt{ax^2+bx+c}=0.$

Например,

$$(\cos 3x-1)\cdot\sqrt{6+5x-x^2}=0.$$

Арифметический способ не требует от учащегося каких-то специальных умений. Требуется лишь уверенное владение таблицей значений тригонометрических функций и формулами приведения. Однако этот способ становится неэффективным в следующих случаях:

- заданные ограничения охватывают большой промежуток, и последовательный перебор значений параметров приводит к громоздким вычислениям;
- серии решений содержат нетабличные значения обратных тригонометрических функций;
- требуется определить количество корней уравнения, удовлетворяющих дополнительным условиям.

Тренировочные упражнения

Решите уравнения:

11. $\dfrac{\cos 2x-2+3\sin x}{1+\sqrt{\cos x}}=0.$

12. $\dfrac{2\sin^2 x-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-1}{\sqrt{\sin x}}=0.$

13. $\sin 0,8x=\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2+x^2-3.$

Алгебраический способ отбора корней

Алгебраический способ отбора корней наиболее удобен в тех случаях, когда последовательный перебор значений параметров приводит к вычислительным трудностям, промежуток для отбора корней большой, значения обратных тригонометрических функций, входящих в серии решений, не являются табличными, и при решении задач с дополнительными условиями.

Решение неравенства относительно неизвестного целочисленного параметра и вычисление корней

Пример 15. Найти все решения уравнения $\sin 2x=\cos x$, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение. Приведем уравнение к виду

$$\cos x\,(2\sin x-1)=0.$$

Отсюда получаем:

$$\cos x=0 \text{ и } \sin x=0,5.$$

1. $\cos x=0$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Так как решения должны удовлетворять неравенству $-\pi\le\frac{\pi}{2}+\pi n\le\frac{3\pi}{4}$, то, сократив на π, получим:

$$-1\le\frac{1}{2}+n\le\frac{3}{4} \text{ или } -\frac{3}{2}\le n\le\frac{1}{4}.$$

С учетом того, что $n\in\boldsymbol{Z}$, получаем два значения: $n=-1$ и $n=0$. Если $n=0$, то $x=\frac{\pi}{2}$, если $n=-1$, то $x=-\frac{\pi}{2}$.

2. $$\sin x=0,5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+2\pi n\\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\end{array}\right.\quad n\in\boldsymbol{Z}.$$

Так как должно выполняться условие $-\pi\le x\le\frac{3\pi}{4}$, то для первой серии имеем:

$$-\pi\le\frac{\pi}{6}+2\pi n\le\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow -1\le\frac{1}{6}+2n\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{12}\le n\le\frac{7}{24}\Leftrightarrow n=0.$$

Отсюда получаем: $x=\frac{\pi}{6}$.

Для второй серии имеем:

$$-\pi \le \frac{5\pi}{6}+2\pi n \le \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -1 \le \frac{5}{6}+2n \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{11}{12} \le n \le -\frac{1}{24}.$$

Последнее неравенство не имеет целочисленных решений.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$.

Пример 16. Найти все решения уравнения $\sin^2 2x + \sin^2 3x = 1$, принадлежащие отрезку $[1; 2]$.

Решение. Воспользуемся формулами понижения степени и преобразования суммы одноименных тригонометрических функций в произведение:

$$\sin^2 2x + \sin^2 3x = 1 \Leftrightarrow \frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos 4x + \cos 6x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 5x \cos x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 5x = 0\\ \cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\end{array}\right. k, n \in \boldsymbol{Z}.$$

Заметим, что первую серию полученной совокупности можно записать в виде $x=\frac{\pi(1+2k)}{10}$, а вторую — $x=\frac{\pi(1+2n)}{2}$. Отсюда можно заметить, что решения второй серии содержатся в первой, так как их можно записать в виде:

$$x=\frac{\pi(1+2n)}{2}=\frac{\pi(5+10n)}{10}=\frac{\pi\left(1+2(5n+2)\right)}{10}.$$

Поэтому первая серия решений совокупности содержит все корни исходного уравнения. Решим двойное неравенство:

$$1 \le \frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5} \le 2 \Leftrightarrow 10 \le \pi + 2\pi k \le 20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10-\pi \le 2\pi k \le 20-\pi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{10-\pi}{2\pi} \le k \le \frac{20-\pi}{2\pi} \Leftrightarrow \frac{5}{\pi}-\frac{1}{2} \le k \le \frac{10}{\pi}-\frac{1}{2}.$$

Так как $\frac{5}{\pi}-\frac{1}{2} \ge \frac{5}{3,2}-\frac{1}{2}=\frac{17}{16}$, $\frac{10}{\pi}-\frac{1}{2} \le \frac{10}{3}-\frac{1}{2}=\frac{17}{6}$ и $k \in \boldsymbol{Z}$, то $k = 2$. Тогда $x=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}=\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

Пример 17. Решить уравнение

$$\frac{2\sin^2 x + 2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1}{\sqrt{6x-x^2}}=0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}2\sin^2 x + 2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1=0,\\ 6x-x^2>0.\end{cases}$$

Решим уравнение этой системы:

$$2\sin^2 x + 2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 1 + \cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin x \cdot (\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x - \cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \operatorname{tg} x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}\\ x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Перейдем к решению неравенства:

$$6x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x\cdot(6-x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 6.$$

Среди решений уравнения отберем те, которые принадлежат интервалу $(0; 6)$.

Рассмотрим первую серию решений:

$$0 < \pi n < 6,\ n \in \boldsymbol{Z} \Leftrightarrow 0<n<\frac{6}{\pi},\ n \in \boldsymbol{Z} \Leftrightarrow n = 1.$$

Следовательно, интервалу $(0; 6)$ принадлежит только $x = \pi$.

Рассмотрим вторую серию решений:

$$0<\frac{\pi}{4}+\pi k<6 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}<k<\frac{6}{\pi}-\frac{1}{4}.$$

Поскольку $\frac{5}{4}=\frac{6}{4}-\frac{1}{4}<\frac{6}{\pi}-\frac{1}{4}<\frac{6}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$, то условиям $-\frac{1}{4}<k<\frac{6}{\pi}-\frac{1}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, удовлетворяют два значения: $k = 0$ и $k = 1$. Значит, интервалу $(0; 6)$ принадлежат два решения этой серии:

$$x_1=\frac{\pi}{4} \text{ и } x_2=\frac{5\pi}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}$.

Тренировочные упражнения

14. Решите уравнение:

$$\frac{2\sqrt{3}\cos^2 x - 2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1}{\sqrt{7x-x^2}}=0.$$

15. Найдите сумму корней уравнения

$$\sin 3x - \cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

принадлежащих отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

16. Укажите все корни уравнения

$$\sin 2x + \sqrt{2}\sin x = 0,$$

принадлежащие отрезку $[-3; 4]$.

Исследование уравнения с двумя целочисленными переменными

Этот метод приходится использовать в тех случаях, когда необходимо отобрать общие решения в нескольких сериях решений. Например, при решении уравнения $\sin 2x - \sin 6x = 2$ замечаем, что равенство возможно только в случае

$$\begin{cases} \sin 2x = 1, \\ \sin 6x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3}, \end{cases} k, n \in \boldsymbol{Z}.$$

При решении системы тригонометрических уравнений для записи решений нельзя использовать один целочисленный параметр, так как предстоит еще нахождение общего решения.

При нахождении общего решения в двух сериях решений задача сводится к решению в целых числах линейного уравнения с двумя неизвестными:

$$an + bm = c, \qquad (1)$$

где $a, b, c \in \boldsymbol{Z}$ — заданные числа, а $n, m \in \boldsymbol{Z}$ — искомые неизвестные.

Уравнение (1) имеет решение тогда и только тогда, когда c делится на НОД чисел a и b. Так, например, уравнение $2m + 8n = 17$ не имеет решений в целых числах, так как 17 не делится на 2 (наибольший общий делитель чисел 2 и 8).

Покажем, как ищется решение уравнения (1). Рассмотрим уравнение

$$5n - 8m = 4. \qquad (2)$$

Выбираем неизвестную, коэффициент при которой меньше по абсолютной величине, — в нашем случае это n. Выражаем ее через другую неизвестную:

$$n = \frac{8m+4}{5} = m + 1 + \frac{3m-1}{5}.$$

Целые решения уравнения (2) будут существовать, когда число $\dfrac{3m-1}{5}$ будет целым.

Обозначим его буквой p, тогда

$$\frac{3m-1}{5} = p, \text{ или } 3m = 5p + 1.$$

Проделав с последним уравнением те же действия, что и с исходным, получим:

$$m = \frac{5p+1}{3} = p + \frac{2p+1}{3}.$$

Для существования целых решений число $\dfrac{2p+1}{3}$ должно быть целым. Обозначим его буквой t, тогда

$$\frac{2p+1}{3} = t, \text{ или } 2p = 3t - 1.$$

Отсюда $p = \dfrac{3t-1}{2} = t + \dfrac{t-1}{2}$. Последнее равенство возможно в целых числах, если $t = 2k + 1$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Теперь, чтобы получить решение уравнения (2), нужно выразить p, m и n через k. Выполняя соответствующие подстановки, имеем:

$$p = \frac{3t-1}{2} = \frac{6k+2}{2} = 3k+1,$$

$$m = \frac{5p+1}{3} = \frac{15k+6}{3} = 5k+2,$$

$$n = \frac{8m+4}{5} = \frac{40m+20}{5} = 8k+4.$$

Итак, целыми решениями уравнения (2) являются пары чисел $(n; m)$ вида $n = 8k + 4$, $m = 5k + 2$ при любом $k \in \boldsymbol{Z}$.

Заметим, что представленный метод практически повторяет известный ***алгоритм Евклида*** для нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел.

Применим данный метод к решению рассмотренного выше уравнения, $\sin 2x - \sin 6x = 2$. Приравнивая решения из двух серий и сокращая на π, получим уравнение в целых числах ($k, n \in \boldsymbol{Z}$):

$$\frac{1}{4} + k = -\frac{1}{12} + \frac{n}{3}, \text{ или } 4n - 12k = 4.$$

В этом примере после сокращения на 4 сразу получаем: $n = 3k + 1$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Это означает, что все решения второй серии содержатся в первой. Следовательно, корни уравнения $\sin 2x - \sin 6x = 2$ задаются формулой $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 18. Решить уравнение

$$\cos 2x + \sin\frac{5x}{2} = 2.$$

Решение. Поскольку $-1 \le \cos 2x \le 1$ и $-1 \le \sin\dfrac{5x}{2} \le 1$ при всех x, то равенство возможно при одновременном выполнении равенств $\cos 2x = 1$ и $\sin\dfrac{5x}{2} = 1$. Получаем систему:

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \sin\dfrac{5x}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \\ x = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{4\pi m}{5}, \end{cases} n, m \in \boldsymbol{Z}.$$

Найдем такие целые значения n и m, при которых решения в полученных сериях совпадают, то есть, приравнивая выражения для x в обеих сериях, получим:

$$\pi n = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi m}{5}, \text{ или } 5n = 1 + 4m.$$

Поступая в соответствии с приведенным выше алгоритмом, получим:

$$4m = 5n - 1,\text{ или } m=\frac{5n-1}{4}=n+\frac{n-1}{4}.$$

Для существования целых решений число $\frac{n-1}{4}$ должно быть целым. Обозначим его буквой k, тогда $\frac{n-1}{4}=k$, или $n = 4k + 1$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Отсюда

$$m=\frac{5n-1}{4}=\frac{20k+4}{4}=5k+1,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Подставляя $n = 4k + 1$, $k \in \boldsymbol{Z}$, в первую серию решений или $m = 5k + 1$, $k \in \boldsymbol{Z}$, во вторую, получим общее решение: $x = \pi(4k + 1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\pi(4k + 1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 19. Решить уравнение

$$\sin 7x \cos 4x = -1.$$

Решение. Используя формулу преобразования произведения синуса и косинуса в сумму, приводим уравнение к виду $\sin 11x + \sin 3x = -2$, откуда получим: $\sin 11x = -2 - \sin 3x$. Так как при любом значении x $\sin 11x \geq -1$, а $-2 - \sin 3x \leq -1$, то равенство $\sin 11x = -2 - \sin 3x$ возможно в том и только в том случае, когда

$$\begin{cases}\sin 11x=-1,\\ -2-\sin 3x=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{22}+\dfrac{2\pi n}{11},\ n\in \boldsymbol{Z},\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi m}{3},\ m\in \boldsymbol{Z}.\end{cases}$$

Найдем такие целые значения n и m, при которых решения в полученных сериях совпадают: $-\frac{\pi}{22}+\frac{2\pi n}{11}=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi m}{3}$, то есть $3n = -2 + 11m$. Выражая из последнего равенства n, получаем: $n=3m+\frac{2m-2}{3}$. Так как n — целое, то последнее равенство возможно, только если число $2m - 2$ делится на 3, то есть $2m - 2 = 3k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Отсюда $m=1+k+\frac{k}{2}$. Поскольку m должно быть целым, то k должно быть четным. Если $k = 2p$, где $p \in \boldsymbol{Z}$, то $m=1+2p+\frac{2p}{2}=3p+1$. Следовательно,

$$x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi(3p+1)}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi p,\ p \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi p$, $p \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 20. Решить уравнение $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} 5x$.

Решение. Выполняя равносильные преобразования, получим:

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} 5x \Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{\cos 5x}{\sin 5x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 5x\cos 2x-\sin 5x\sin 2x}{\cos 2x\sin 5x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 7x}{\cos 2x\sin 5x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 7x=0,\\ \cos 2x\neq 0,\\ \sin 5x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{\pi n}{7},\ n\in \boldsymbol{Z},\\ x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in \boldsymbol{Z},\\ x\neq\dfrac{\pi m}{5},\ m\in \boldsymbol{Z}.\end{cases}$$

Выясним, какие из значений $x=\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, являются недопустимыми. Для этого решим в целых числах уравнения

$$\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2} \qquad (1)$$

и

$$\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}=\frac{\pi m}{5}. \qquad (2)$$

Рассмотрим уравнение (1). После преобразований получим:

$$2 + 4n = 7 + 14k \Leftrightarrow 4n - 14k = 5.$$

Последнее равенство невозможно, так как левая его часть при всех значениях n и k — четное число, а в правой — число нечетное.

Рассмотрим уравнение (2). После преобразований получим:

$$5 + 10n = 14m \Leftrightarrow 14m - 10n = 5.$$

Последнее равенство невозможно, так как в левой его части стоят четные числа, а в правой — нечетное.

Значит, все значения $x=\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, являются допустимыми.

Ответ: $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Методические рекомендации. При составлении примеров, подобных рассмотренным выше, можно использовать следующие схемы.

1. $f(kx) \pm g(mx) = \pm 2$ или $f(kx) \cdot g(mx) = \pm 1$, где f и g — функции синус или косинус, k и m — фиксированные целые числа.

Например,

$\cos 2x - \sin 3x = -2$,

$\sin 4x \cos 3x = 1$.

2. $f(kx) = g(mx)$, где f и g — функции тангенс или котангенс.

Тренировочные упражнения

Решите уравнения:

17. $\sin x + \sin 5x = 2$.

18. $\sin 3x \cos 2x = 1$.

19. а) $\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 4x$;

б) $\operatorname{ctg} 2x \operatorname{ctg} 9x = 1$.

Пример 21. Найти сумму корней уравнения

$$\cos\left(\frac{x+3\pi}{4}\right)\left(\operatorname{ctg}^2\left(\frac{x-2\pi}{4}\right)+4\right)=0,$$

принадлежащих отрезку $[\pi;\ 80\pi]$.

Решение. Поскольку уравнение $\operatorname{ctg}^2\frac{x-2\pi}{4}+4=0$ не имеет решений, то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\cos\frac{x+3\pi}{4}=0,\\ \sin\frac{x-2\pi}{3}\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x+3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\\ \frac{x-2\pi}{3}\neq \pi k,\end{cases} n,\ k\in \boldsymbol{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\pi+4\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z},\\ x\neq 2\pi+3\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.\end{cases}$$

Значения $x = -\pi + 4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, образуют арифметическую прогрессию с разностью 4π и первым членом 3π. Количество членов этой прогрессии на отрезке $[\pi;\ 80\pi]$ можно найти из неравенства:

$$\pi\le-\pi+4\pi n\le 80\pi,\ n\in\boldsymbol{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}5\le n\le 20{,}25,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Таким образом, n может принимать все натуральные значения от 1 до 20 включительно. Значит, количество членов прогрессии $N = 20$.

Найдем сумму S_1 этих двадцати членов:

$$S_1=\frac{2\cdot 3\pi+19\cdot 4\pi}{2}\cdot 20=820\pi.$$

Однако среди значений $x = -\pi + 4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, имеются недопустимые. Чтобы выяснить, какие это значения, решим в целых числах уравнение:

$$-\pi+4\pi n=2\pi+3\pi k\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{4n-3}{3}\Leftrightarrow k=n-1+\frac{n}{3}.$$

Поскольку k и n — целые числа, то $n = 3t$, где $t \in \boldsymbol{Z}$. Таким образом, недопустимые значения переменной x получаются при $n = 3t$. Итак,

$$x\neq-\pi+12\pi t,\ t\in\boldsymbol{Z}.$$

Значения $x = -\pi + 12\pi t$, $t \in \boldsymbol{Z}$, образуют арифметическую прогрессию с разностью 12π и первым членом 11π. Очевидно, что на отрезке $[\pi;\ 80\pi]$ количество членов этой прогрессии равно 6. Тогда их сумма

$$S_2=\frac{2\cdot 11\pi+5\cdot 12\pi}{2}\cdot 6=246\pi.$$

Тогда искомая сумма

$$S=S_1-S_2=574\pi.$$

Ответ: 574π.

Тренировочные упражнения

20. Найдите сумму корней уравнения

$$\cos\left(\frac{x+\pi}{4}\right)\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{x-2\pi}{6}\right)+3\right)=0,$$

принадлежащих отрезку $[\pi;\ 160\pi]$.

Алгебраический способ более эффективен, когда промежуток для отбора корней достаточно большой и применение арифметического способа приводит к сложным и объемным вычислениям, а геометрического — к громоздким построениям.

С другой стороны, в сравнении с ним, геометрический способ эффективнее в случае, когда формулы сравниваемых серий решений содержат нетабличные значения обратных тригонометрических функций (например, $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ и т.д.).

Ответы к тренировочным упражнениям

1. $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **2.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ -\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{\pi}{12}+2\pi n,\ -\frac{5\pi}{12}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **3.** $2\pi n,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **4.** $\pi+2\pi k,\ \frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$. **5.** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$. **6.** $\pm\left(\pi-\arccos\frac{9}{55}\right)+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **7.** а) $\sin\frac{1}{2}$; б) $\operatorname{ctg} 2$. **8.** а) -3; б) $-0{,}5$; $0{,}9$; в) 0; 2. **9.** а) $\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ \frac{4\pi}{3}+4\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **10.** $2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **11.** $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **12.** $\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **13.** $\frac{5\pi}{8}$. **14.** $\frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3},\ \frac{3\pi}{2}$. **15.** $-\frac{47\pi}{36}$. **16.** $-0{,}75\pi,\ 0,\ 0{,}75\pi,\ \pi$. **17.** $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$. **18.** $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$. **19.** а) $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7},\ n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{22}+\frac{\pi n}{11},\ n\neq 11t+5,\ n\in\boldsymbol{Z},\ t\in\boldsymbol{Z}$. **20.** 2159π.

Литература

1. *Гельфанд И.М., Львовский С.М., Тоом А.Л.* Тригонометрия. — М.: МЦНМО, 2003.

2. *Корянов А.Г., Прокофьев А.А.* Математика, ЕГЭ-2011. Задания типа С1. Отбор корней в тригонометрических уравнениях.

3. http://www.alexlarin.narod.ru/ege/2011/C12011.pdf

$a+0=a$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\to\infty$

$a\cdot0=0$

На 0 делить нельзя

НОЛЬ

Вавилонские математики использовали особый клинописный знак для шестидесятеричного ноля примерно начиная с 300 г. до н. э., а их учителя-шумеры, вероятно, сделали это еще раньше. Своеобразные коды ноля использовали до нашей эры майя и их соседи в Центральной Америке. В Древней Греции число 0 известно не было.

Индийцы называли знак, обозначающий отсутствие какого-либо разряда в числе, словом *сунья*, что значит *пустой*. Арабы перевели это слово по смыслу и получили слово *сыфр* («ноль»), от этого слова ведет происхождение слово *цифра*.

Первое достоверное свидетельство о записи ноля относится к 876 г.; в настенной надписи из Гвалиора (Индия) имеется число 270. Обнаружены и более ранние надписи от 683 г. и 686 г. в Камбодже и Индонезии, где ноль изображен в виде точки и кружка. Индийцы вначале обозначали ноль точкой.

В Европе долгое время ноль считался условным символом и не признавался числом.

В оказавшем очень большое влияние на преподавание арифметики в западных странах руководстве Сакробоско, написанном в 1250 г. и перепечатывавшемся в очень многих странах, ноль называется *тэта*, или *кружок*, или *цифра*, или знак *ничего*. Термин *nulla figura* — никакой знак — появляется в рукописных латинских переводах и обработках арабских трудов в XII в. Термин *nulla* имеется в рукописи Шюке 1484 г. и в первой печатной так называемой *Тревизской арифметике* (1478 г.). Полному уравнению его в правах с другими числами особенно способствовали труды Леонарда Эйлера.

С начала XVI в. в немецких руководствах слово *цифра* получает современное значение, слово *ноль* входит в употребление, постепенно принимая форму, свойственную данному национальному языку.

Л. Магницкий в своей «Арифметике» называет знак 0 «цифрой или ничем» и даже «низачто». В конце XVIII в. во втором русском издании «Сокращения первых оснований математики» Х. Вольфа (1791 г.) ноль ещё называется *цифрой*.

По материалам Википедии

0^0 не определено

$1001=1\cdot10^4+0\cdot10^3+0\cdot10^2+1\cdot10$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ $a^0=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

mat.1september.ru | Индексы подписки «Роспечать»: 32030 (бумажная версия), 26113 (электронная); «Почта России»: 79073 (бумажная версия), 12717 (электронная)

Станьте «Учителем цифрового века»!

Получите именной сертификат
и индивидуальный код доступа к качественным цифровым
предметно-методическим материалам!


Общероссийский проект
Школа цифрового века

Интернет-сопровождение проекта – Издательский дом «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»

Сертификат
«УЧИТЕЛЬ ЦИФРОВОГО ВЕКА»

удостоверяет, что

применяет в работе современные информационные технологии и цифровые образовательные ресурсы. Эффективно использует возможности методической интернет-поддержки образовательного процесса, предоставленной в рамках Общероссийского проекта «Школа цифрового века».

Сопредседатель оргкомитета
Общероссийского проекта
«Школа цифрового века»

А.С. Соловейчик

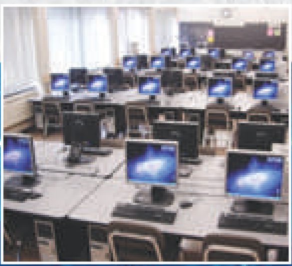
МОСКВА · 2012

Индивидуальный код доступа, полученный в рамках проекта «Школа цифрового века», позволит вам адресно и бесплатно получать электронные журналы Издательского дома «Первое сентября» в любом объеме. Материалы изданий можно читать on-line, скачивать на компьютер, распечатывать, использовать на уроке.

Заявки на участие в проекте
принимаются с 15 сентября с.г.
на сайте http://digital.1september.ru
Заявку подает руководитель вашего образовательного учреждения или его заместитель.

Для школ, участвующих в проекте с 1 января по 30 июня 2012 года, оргвзнос – 2 тысячи рублей.
Коды доступа предоставляются бесплатно по количеству учителей, указанному в заявке.

Общероссийский проект «Школа цифрового века» по комплексному обеспечению школ адресной методической интернет-поддержкой разработан в соответствии с программой модернизации системы общего образования России.
Интернет-сопровождение проекта – Издательский дом «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ».



Подробности на сайте http://digital.1september.ru