основана в 1992 г.

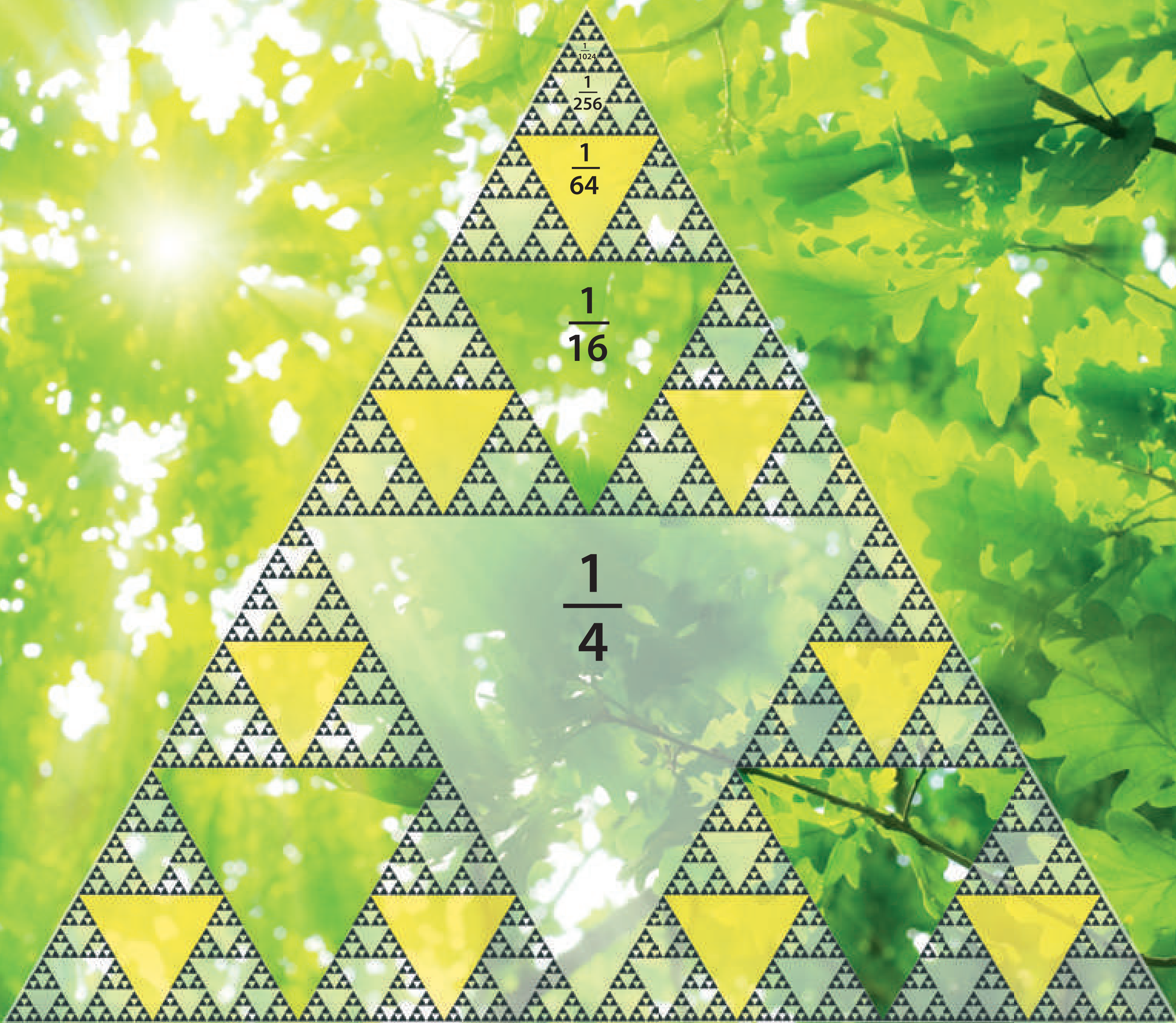
# МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКАЯ ГАЗЕТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

16–30 июнь 2011

mat.1september.ru

12




ОБЫКНОВЕННАЯ ДРОБЬ | *см. с. 47*

издательский дом
Первое сентября
1september.ru
МАТЕМАТИКА
индексы подписки Почта россии - 79083 (инд.); - 79584 (орг.) Роспечать - 32031 (инд.); - 32598 (орг.)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
**Главный редактор:** Артем Соловейчик (генеральный директор)
**Коммерческая деятельность:** Константин Шмарковский (финансовый директор)
**Развитие, IT и координация проектов:** Сергей Островский (исполнительный директор)
**Реклама и продвижение:** Марк Сартан
**Мультимедиа, конференции и техническое обеспечение:** Павел Кузнецов
**Производство:** Станислав Савельев
**Административно-хозяйственное обеспечение:** Андрей Ушаков
**Дизайн:** Иван Лукьянов, Андрей Балдин
**Педагогический университет:** Валерия Арсланьян (ректор)

ГАЗЕТЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
**Первое сентября** – Е. Бирюкова,
**Английский язык** – А. Громушкина,
**Библиотека в школе** – О. Громова,
**Биология** – Н. Иванова,
**География** – О. Коротова,
**Дошкольное образование** – М. Аромштам,
**Здоровье детей** – Н. Сёмина,
**Информатика** – С. Островский,
**Искусство** – М. Сартан,
**История** – А. Савельев,
**Классное руководство и воспитание школьников** –О. Леонтьева,
**Литература** – С. Волков,
**Математика** – Л. Рослова,
**Начальная школа** – М. Соловейчик,
**Немецкий язык** – М. Бузоева,
**Русский язык** – Л. Гончар,
**Спорт в школе** – О. Леонтьева,
**Управление школой** – Я. Сартан,
**Физика** – Н. Козлова,
**Французский язык** – Г. Чесновицкая,
**Химия** – О. Блохина,
**Школьный психолог** – И. Вачков

УЧРЕДИТЕЛЬ: ООО «ЧИСТЫЕ ПРУДЫ»
**Зарегистрировано ПИ № 77-7241 от 12.04.01** в Министерстве РФ по делам печати
Подписано в печать: по графику 11.05.11, фактически 11.05.11 Заказ №
Отпечатано в ОАО «Чеховский полиграфический комбинат» ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
**Телефон/ факс:** (499) 249-3138
**Отдел рекламы:** (499) 249-9870
**Сайт:** 1september.ru

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
**Телефон:** (499) 249-4758
**E-mail:** podpiska@1september.ru



# В НОМЕРЕ:

ТЕМА НОМЕРА: МНЕМОНИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА



## Содержание диска

К № 9
*А. Халиуллин.* Планиметрические задачи на ЕГЭ; *А. Шевкин.* Вокруг теорем Чевы и Менелая; *Л. Горина.* Летний математический календарь. 7 класс. Июль; *Г. Филипповский.* Равновеликость в построениях одной линейкой

К № 10
*Л. Горина.* Летний математический календарь. 7 класс. Август; *В. Дубровский.* Динамическая геометрия с «Математическим конструктором»; *А. Шевкин.* Вокруг теорем Чевы и Менелая; *Д. Златопольский.* Как записывали числа и как считали в старину; *М. Дихтярь, А. Парфенова, Е. Эргле.* Статистика и стихосложение; *Л. Нуреева.* Карточки с пропусками по теме «Вычисление производных»

К № 11
*Е. Дроботова.* Графы; *А. Футлярова.* Решение показательных уравнений; *В. Дубровский.* Динамическая геометрия с «Математическим конструктором». Эпизод 2; *И. Голендухина.* Построение сечений куба

К материалам, обозначенным этим символом, есть приложение на CD-диске, вложенном в № 12.

МАТЕМАТИКА
Методическая газета для учителей математики
Основана в 1992 г.
Выходит два раза в месяц

Газета распространяется по подписке
Цена свободная Тираж 10 000 экз.
**Тел. редакции**: (499) 249-3460
**E-mail:** mat@1september.ru
**Сайт:** mat.1september.ru

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, И. Бокова, О. Макарова
Дизайн макета и обложки: И. Лукьянов
Корректор: Л. Громова
Верстка: Д. Кардановская

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
**Роспечать**: инд.–**32030**; орг.–**32594**
**Почта России**: инд.–**79073**; орг.–**79583**

# АХ, ЭТИ ЛЕТНИЕ ДОЖДИ...

Л. РОСЛОВА

После хорошего дождя природа, как правило, оживает, пробуждается, а уж если дождь грибной…

Что за грибной дождь, пробудивший к жизни множество различных учительских объединений в виде ассоциаций, профсоюзов и пр., пролился над нашим образованием? Одну из ассоциаций, о которой было объявлено на съезде учителей математики в октябре, мы ждали. Но оказалось, что не так давно возникли и уже существуют множество региональных ассоциаций. Они проводят региональные съезды, решают свои, региональные проблемы. Наверное, это неплохо, значит, объединение назрело. Казалось бы. Но разве те проблемы, которые там обсуждаются, носят исключительно региональный характер? Не уверена. Тогда как же их решать? Как донести до центра? Ну, предположим, что выступит региональная ассоциация перед министерством с инициативой обсудить одну из проблем, а ей и скажут: «Это проблема вашего региона». Разве на съезде речь шла не об общих проблемах?

Нет, некоторые государства устроены так, что отдельные субъекты федерации обладают значительной степенью свободы. Взять, например, Соединенные Штаты Америки. И ничего, живут. Не жалуются.

Но, может, действительно, все проблемы решаются на региональном уровне? Тогда какая цель ставится перед ассоциацией, созданной МГУ? Лоббирование интересов проекта «МГУ-школе»? Так мелко? Разве это цель уровня ассоциации? Не хочется верить. Тогда уж клуб Издательского дома «Первое сентября» больше тянет на то, чтобы называться ассоциацией, поскольку и объединяет, и информирует, и методическую помощь оказывает, и повышает квалификацию и пр. и пр.

Да, версия для всех этих объединений-пересечений есть, причем вполне очевидная. Версия эта называется «выборы». Похоже, все это подчинено не решению насущных проблем образования и учительства, а использованию этого самого учительства в качестве электората. А вот это скверно. Нет, не то, что каждый отдельно взятый учитель в свободное от работы время представляет собой часть электората. Политизируется его профессиональная деятельность, ставится в зависимость от политических убеждений – это скверно. Учитель должен служить ученику, быть проводником его образовательных и личностных интересов. Не надо об этом забывать.

И пусть прольется дождь, который смоет всю пыль. Чтобы легче дышалось!

1

2

3

Е. ИВАНИЦКАЯ,
Л. РОСЛОВА,
Москва

Фото В. СТРОКОВСКОГО

# ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ МАРАФОН-2011



3 апреля на педагогическом марафоне — День учителя математики, и, не смотря на погожий воскресный денек, с самого утра потянулись к лицею № 1535 учителя математики.

День царицы наук прошел в напряженной практической работе и острых плодотворных дискуссиях. Задачи, задачи и задачи...

Значительная часть лекций и творческих мастерских была посвящена решению сложных математических задач, с которыми непременно встретятся выпускники при сдаче ЕГЭ. Профессор Московского государственного университета **Игорь Сергеев** 7 прочел лекцию «ЕГЭ-2011. Решение задач типа С». Старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ **Софья Колесникова** 15 провела практикум «Решение сложных задач ЕГЭ по математике». **Дмитрий Шноль** 2, заведующий кафедрой математики школы-интерната «Интеллектуал», озаглавил свою лекцию так — «Основы для решения сложных задач ЕГЭ закладываются в 8–9 классах». Творческая мастерская «Калейдоскоп педаго-

6

7

4

5

гических идей», которую вел кандидат педагогических наук **Андрей Семенов** [1] [3] [12], заведующий лабораторией МИОО, презентовала опыт работы учителей московских школ по решению сложных математических задач.

Но не только. В рамках творческой мастерской было представлено множество педагогических идей, не связанных с экзаменами. Например, учителя стали участниками открытого урока по теме «Диаграммы рассеивания». Представляли его заведующий лабораторией МИОО **Иван Высоцкий** и учитель математики средней школы № 1000 г. Москвы **Светлана Полункина** вместе со своими семиклассниками [6] [16]. Всегда полезно посмотреть на работу коллег, сравнить с тем, как делаешь это же ты сам, обсудить увиденное.

Но что в перспективе ожидает учащихся на итоговой проверке знаний по математике? Этому вопросу был посвящен круглый стол «ГИА по математике за курс основной школы и ЕГЭ за курс средней (полной) школы в 2012 году». Участниками круглого стола стали член-корреспондент РАН, академик РАО, ректор МИОО **Алексей Семенов**, кандидат педагогических наук, ведущий научный сотрудник ИСМО РАО **Людмила Кузнецова** и **Иван Ященко**, проректор МИОО, руководитель ФКР КИМ по математике [5]. Итак, планируется — хотя, важно подчеркнуть, не в этом году и даже не в следующем – сделать проекты базового и профильного вариантов ЕГЭ. Уже экзамен 2012 года будет с небольшими «закладочками» в этом духе. Зачем это планируется? Затем, что итоговый экзамен не следует рассматривать так, будто его задача — найти у ребенка пробелы в знаниях. Нет, его задача — дать ученику возможность проявить себя, показать свои знания. Чем больше задач и чем они разнообразнее, тем больше у ребенка возможности показать, что он знает и понимает. Если будет больше практико-ориентированных задач — а именно это планируется для базового варианта, то и родителям будет понятнее, чему и зачем учится ребенок.

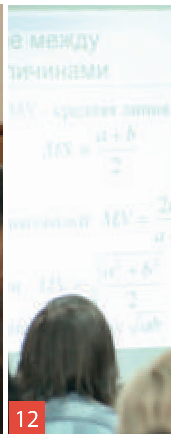
Вопросы мотивации — чему и зачем учится ребенок, учась математике? — были поставлены во главу угла в лекции «Преподавание математики в профильной школе. Из опыта работы НОУ «Ломоносовская школа». Лекцию, сменяя друг друга, прочли преподаватели школы **Наталья Хлевнюк, Мария Шишкина** и **Мария Иванова** [8]. Принцип «Ломоносовской школы» — преемственность: «учи в начальной школе так, чтобы ребенок умел учиться в основной школе; учи в основной школе так, чтобы он хорошо учился

8

9


10


11


12

в старшей». Всю подготовку к ЕГЭ в «Ломоносовской школе» пропускают через обобщающие лекции, за ними следуют семинары и практикумы, после которых для старшеклассников наступает зачетная сессия. В основной школе дважды в год ребята сдают открытые зачеты, на которых присутствуют учителя, не работающие в данном классе. То есть ученики обязаны «выложить» свои знания в достаточно трудной ситуации, перед незнакомыми преподавателями, но дети быстро адаптируются и привыкают. Последняя придумка учителей «Ломоносовской школы» — цифровые диктофоны, с помощью которых у ребят эффективно развивается математическая речь. Ребята ведь разные: кто-то лучше воспринимает математический материал на слух, кто-то зрительно. Нужно учитывать особенности ученика и давать ему возможность потренироваться в том, что для него представляет сложность. Итогом станет уверенность ребенка на уроке. А что дает ему уверенность? Уверенность дают знания.

Современный процесс обучения уже трудно себе представить без компьютера. Как его использовать эффективно, где участие компьютера просто необходимо, об этом говорили на круглом столе «Компьютер как инструмент учителя математики», который вели редактор нашей газеты **Ольга Макарова** и доцент кафедры математики СУНЦ МГУ, методист отдела образовательных программ фирмы «1С» **Владимир Дубровский** [4]. Учителя оценили CD-приложения к газете, которые начали выходить уже с прошлого года, узнали о наших новых проектах, в частности, о колонке, посвященной «Математическому конструктору» и динамической геометрии, которую будет вести в газете Владимир Натанович.

Об использовании компьютера на уроке математики шла речь и на другом круглом столе, который провел **Андрей Пантуев**, доцент кафедры математической физики МПГУ [11]. Очевидно, что тема разработки и применения компьютерной поддержки стала в настоящее время весьма актуальной.

Очень горячо, заинтересованно прошел еще один круглый стол — «Развитие математической одаренности учащихся и математические олимпиады». Ведущим выступил **Виталий Арнольд**, заместитель директора МЦНМО. Участниками были представители вузовских олимпиад — **Сергей Муравьев** из Научно-исследовательского ядерного университета МИФИ, **Дмитрий Ягодников** из МГТУ им. Баумана, **Андрей Зязин**, представлявший УМО вузов России по образованию в области информационной безопасности, **Валерий Панферов** и **Игорь Сергеев** из Мо-


15


16

13

14

сковского государственного университета им. М.В. Ломоносова [9]. Конечно, здесь тоже были задачи, задачи и задачи. Сложные, творческие, оригинальные... Но потом задачи сменил «открытый микрофон», и слушатели вместе с участниками круглого стола говорили о наболевшем. В результате напряженного разговора возникла мысль высказать коллективное мнение собравшихся математиков и донести его до Минобрнауки РФ и Российского совета олимпиад школьников. Коллективное мнение выразилось в шести пунктах.

1. Необходима государственная поддержка олимпиад школьников.

2. Правила проведения олимпиад и подведения их итогов должны быть объявлены до начала учебного года, а то в этом учебном году многие школьники узнали о необходимости участия в отборочных турах в самый последний момент или даже после окончания отборочных туров – потому что о них было слишком поздно объявлено.

3. Крайне неудачно в этом году то, что уровень олимпиад определяется в мае, что создает нервозность родителям, перегрузку школьникам и большие неудобства в работе школ и вузов.

4. Распространение квоты в 35% на обязательный отборочный этап регионов фактически отдаляет значительное количество талантливых ребят из регионов от олимпийского движения

5. Крайне опасно ограничивать число участников олимпиад любыми внешними рамками: например, абсолютно неоправданно смотрится допуск к участию в олимпиаде только призеров и победителей прошлого года.

6. По мнению учителей, в этом году резко ухудшилась ситуация с календарем олимпиад: проведение заключительных этапов всех олимпиад в необоснованно сжатые сроки (февраль – март) лишило возможности нормальной учебной работы учителей 11-х классов и крайне затруднило участие в олимпиадах школьникам, живущим вне больших городов. Видимо, имеет смысл вернуться к традиционным срокам проведения олимпиад: ноябрь – апрель.

И, как всегда на марафоне, можно было подписаться на газету, получить подарки [18], купить книги [17], ну, а в завершении этого насыщенного дня — посмотреть замечательный и непростой фильм Питера Гринуэйя «Контракт рисовальщика». Но, как сказал главный редактор Издательского дома «Первое сентября» Артем Соловейчик, математикам под силу и не такие сложности.

До встречи в будущем году!

17


18

19

# ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА-2011: НАЗВАНЫ ПОБЕДИТЕЛИ

В конце апреля в Великом Новгороде прошел заключительный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике. Несмотря на то, что организаторы на момент начала олимпиады не получили от Министерства ни копейки (и неизвестно когда получат, если получат вообще), прошла она очень хорошо. Оргкомитет, а реально всей организацией занимался Новгородский институт развития образования (еще более конкретно — Елена Евгеньевна Смирнова и ее коллеги-помощницы), отработал отлично. Руководители команд и члены жюри (а это самые искушенные участники олимпиады) особо отметили прекрасно проведенную церемонию открытия и стильное закрытие. Позитивное впечатление от работы организаторов наложилось на красивые виды старинного города, которыми можно было любоваться не только во время пеших прогулок и экскурсий, но прямо из окон гостиничных номеров (большинство участников жили в гостинице «Россия» с видом из окон на Волхов и Новгородский кремль).

Имена победителей и призеров олимпиады мы публикуем на с. 8–9, 23, 36 .

По итогам олимпиады был определен состав участников российской команды, которая будет в июле этого года представлять нашу страну на международной олимпиаде в Амстердаме. В состав национальной команды вошли: Бурова Ольга (г. Москва), Григорьев Михаил (г. Казань), Егоров Дмитрий, Крачун Дмитрий (оба – г. Санкт-Петербург), Пахарев Алексей (г. Москва), Циглер Александр (г. Магнитогорск). Пожелаем им удачи и будем ждать хороших результатов!

## 9 класс

### Победители

***Баев Будимир Александрович***, физико-математический лицей № 239, г. Санкт-Петербург;

***Белов Дмитрий Алексеевич***, гимназия № 26, г. Набережные Челны;

***Воронецкий Егор Юрьевич***, школа № 42, г. Петрозаводск;

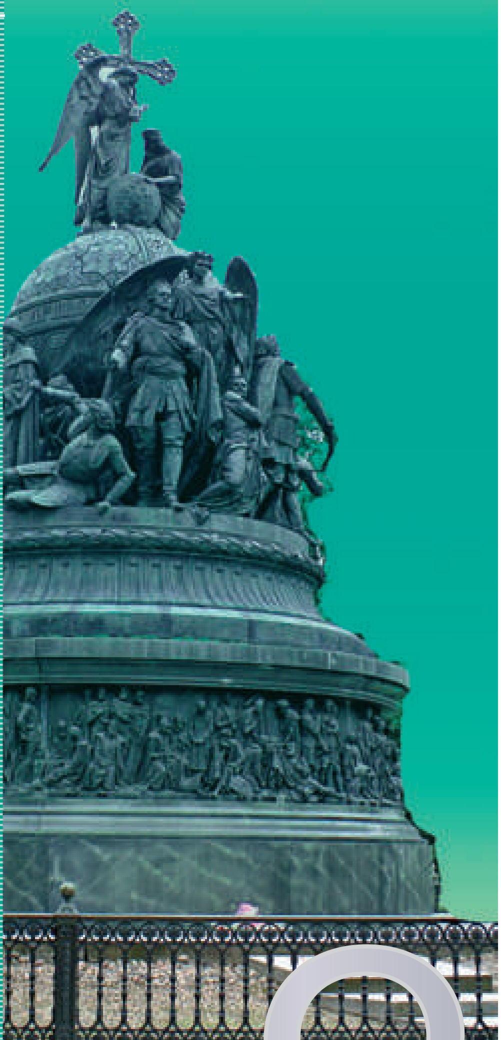
***Шабанов Лев Эдуардович***, школа № 10, г. Ангарск, Иркутская обл.;

***Волгин Андрей Денисович***, «Московская гимназия на Юго-Западе № 1543», г. Москва.

### Призеры

***Котельникова Юлия Сергеевна***, «Московская гимназия на Юго-Западе № 1543», г. Москва;

***Нарышкин Петр Евгеньевич***, физико-математический лицей № 239, г. Санкт-Петербург;



Памятник «Тысячелетие России», арх. М. Микешин, И. Шредер. г. Новгород, 1862

***Жевнерчук Антон Юрьевич***, физико-математический лицей № 239, г. Санкт-Петербург;
***Клюев Даниил Сергеевич***, физико-математический лицей № 239, г. Санкт-Петербург;
***Матушкин Александр Дмитриевич***, лицей № 41, г. Ижевск;
***Турбин Максим Дмитриевич***, лицей № 31, г. Челябинск;
***Афризонов Денис Владимирович***, гимназия № 47, г. Курган;
***Акбаров Артур Александрович***, политехническая гимназия, г. Екатеринбург;
***Галимов Тимур Рафаэлевич***, лицей № 131, г. Казань;
***Зимин Александр Павлович***, школа № 52, г. Ульяновск;
***Бубнова Анна Викторовна***, гимназия № 19, г. Курган;
***Малыгин Виталий Александрович***, Кировский физико-математический лицей, г. Киров;
***Мокин Александр Борисович***, лицей прикладных наук, г. Саратов;
***Садыков Ринат Салаватович***, лицей им. Н.И. Лобачевского при Казанском государственном университете, г. Казань;
***Зайков Александр Вячеславович***, гимназия № 36, г. Краснодар;
***Корякин Данил Александрович***, Кировский физико-математический лицей, г. Киров;
***Латышев Алексей Сергеевич***, Кировский физико-математический лицей, г. Киров;
***Рыков Никита Александрович***, школа № 10, г. Ангарск, Иркутская обл.;
***Дюжев Евгений Михайлович***, лицей № 12, г. Курган;
***Крылов Василий Викторович***, центр образования № 57, г. Москва;
***Олухов Андрей Викторович***, лицей № 12, г. Курган;
***Зуев Антон Юрьевич***, школа № 179, г. Москва;
***Крачун Владимир Николаевич***, физико-математический лицей № 239, г. Санкт-Петербург;
***Ясновидов Григорий Александрович***, лицей «Физико-техническая школа», г. Санкт-Петербург;
***Карпушкин Данил Дмитриевич***, лицей № 31, г. Челябинск;
***Еськова Елизавета Васильевна***, лицей № 38, г. Белгород;
***Крюков Николай Алексеевич***, физико-математический лицей № 239, г. Санкт-Петербург;
***Сокол Евгений Александрович***, лицей № 31, г. Челябинск;
***Щербаков Артём Артурович***, центр образования № 57, г. Москва;
***Александров Никита Алексеевич***, гимназия № 26, г. Набережные Челны;
***Голованов Александр Игоревич***, лицей им. Н.И. Лобачевского при Казанском государственном университете, г. Казань;
***Горбачев Александр Дмитриевич***, физико-математический лицей № 239, г. Санкт-Петербург;
***Зверев Иван Сергеевич***, школа № 853, г. Москва;
***Симарова Екатерина Николаевна***, физико-математический лицей № 239, г. Санкт-Петербург;
***Смирнова Наталия Станиславовна***, лицей «Вторая школа», г. Москва;
***Струков Георгий Александрович***, физико-математический лицей № 239, г. Санкт-Петербург;
***Сурин Михаил Святославович***, гимназия № 2, г. Железнодорожный, Московская обл.;
***Хроменков Ярослав Викторович***, школа «Личность», г. Новороссийск;
***Целищев Антон Сергеевич***, физико-математический лицей № 239, г. Санкт-Петербург;
***Горохов Павел Александрович***, лицей № 17, г. Кострома;
***Софронова Алина Андреевна***, Кировский физико-математический лицей, г. Киров.

## ФОТО НА КОНКУРС

### Объявляем победителей фотоконкурса «Зима-весна-2011»

**I место**
Л.Г. ЕГОРОВА (дер. Емёткино, Козловский р-н, Чувашия)
за фото «Математическое рукоделие» (№ 7)

**II место**
Н.И. АВИЛОВА (ст. Егорлыкская, Ростовская обл.)
за фото «Мы за ЕГЭ», «Мы боимся ЕГЭ» (№ 9)

Победители награждаются бесплатной подпиской. Оба победителя – давние участники конкурса. Ждем от них новых фотографий!

С. ПОЛУНКИНА,
И. ВЫСОЦКИЙ,
Москва

# УРОК ПО ТЕМЕ «ДИАГРАММЫ РАССЕИВАНИЯ»



Фото В. Строковского

В учебнике «Теория вероятностей и статистика» (Ю.Н. Тюрин и др.) в главе «Представление данных», помимо столбиковых и круговых диаграмм, рассматриваются диаграммы рассеивания (точечные), которые позволяют наглядно представлять парные числовые данные. Диаграммы рассеивания — удобный случай поговорить со школьниками о многообразии связей в окружающем нас мире. К сожалению, ни в одном другом предмете диаграммы рассеивания не встречаются, хотя они удобны и достаточно широко применяются при анализе данных. Помимо этого, диаграммы рассеивания можно и нужно связать с изучением темы «Линейная функция».

Понимая, что любой новый школьный материал должен «обрастать» методическими приемами, редакция газеты «Математика» и Лаборатория методики преподавания вероятности и статистики МИОО (заведующий И.Р. Высоцкий) задумали серию открытых уроков по вероятности и статистике. Проводятся они на Дне учителя математики в рамках Педагогического марафона учебных предметов. Этому способствует и то, что в последние годы проходит марафон в московском лицее № 1535.

И вот 3 апреля этого года семиклассники школы № 1000 Западного округа Москвы, конечно вместе со своим учителем, Светланой Николаевной Полункиной, показали участникам марафона урок по теме «Диаграммы рассеивания». Уроки на марафонах не совсем обычные. Они длятся меньше 45 минут и имеют специфическую цель — показать, как работать с непривычным пока вероятностно-статистическим содержанием. Мы не стремимся продемонстрировать умения учителя, достижения школьников, новые педагогические технологии или чудеса.

Разумеется, урок можно было бы сделать гораздо более красивым и эффективным, применяя компьютер. Мы сознательно отказались от этого, понимая, что компьютер есть не в каждом кабинете математики. Напротив, нужно было сделать материал предельно доступным для любого учителя, даже если у него нет своего кабинета и оборудования.

*Цели урока*:

— сформировать понятие «диаграммы рассеивания»;

— научить строить диаграмму рассеивания;

— научить выдвигать и проверять гипотезы о наличии или отсутствии связи между числовыми величинами, опираясь на личный опыт и полученные знания;

— формировать и углублять представления о многообразии математических подходов к описанию явлений окружающего мира;

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 12.

— формировать стохастическую культуру учащихся, понятие о случайном и закономерном.

Для проведения урока учащиеся заранее были поделены на 5 групп по 5–6 человек. Каждой группе было дано задание собрать парные данные о каком-нибудь объекте, процессе или человеке, занести их в таблицу. Предлагалось составить таблицу данных по следующим темам:

«Длина пальца (мизинца) и ширина ладони человека»;

«Рост и вес человека»;

«Рост семиклассника при рождении и сейчас»;

«Производительность и доля бракованных изделий»;

«Возраст автомобиля и его цена при продаже».

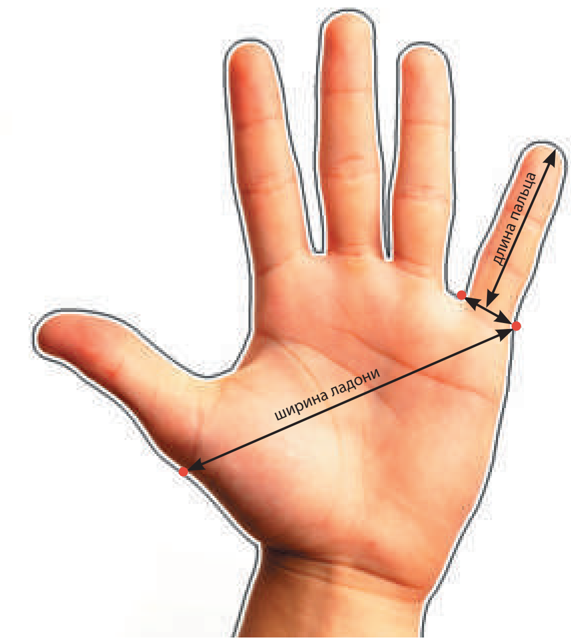
Для сбора данных по первым трем темам учащиеся класса провели опрос среди своих одноклассников, две другие группы воспользовались интернет-ресурсами, в частности сайтом www.avto.ru.

## Ход урока

***Учитель.*** Тема урока «Диаграммы рассеивания». Скажите, пожалуйста, можно ли понять из темы урока, чему мы сегодня научимся, что узнаем?

***Ученик.*** Мы знакомы с круговыми и столбиковыми диаграммами, мы умеем их строить и анализировать, поэтому я думаю, что мы сегодня познакомимся с новым типом диаграмм — диаграммами рассеивания, научимся их строить и анализировать.

***Учитель.*** На предыдущем уроке каждой группе было дано задание: составить таблицу некоторых парных данных. Расскажите, пожалуйста, что у вас получилось.




***1-я группа.*** Мы составили таблицу, в которую внесли данные о ширине ладони и длине пальца нескольких человек. Для того чтобы составить таблицу, мы провели опрос. Учащихся нашего класса мы попросили обвести на листе бумаги свою левую ладонь, а затем измерить ширину ладони и длину пальца. Полученные данные мы внесли в таблицу.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ширина ладони (см) | 11,5 | 12 | 11 | 10 | 11,2 | 10,6 | 9,7 | 9,9 |
| Длина пальца (см) | 6,5 | 5,3 | 6 | 5,6 | 6,5 | 6,6 | 7,2 | 5,1 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ширина ладони (см) | 11,5 | 10,5 | 11,5 | 11 | 12 | 10,5 | 11,5 | 10 |
| Длина пальца (см) | 7,5 | 6 | 6,3 | 5,5 | 5,5 | 5 | 6 | 5,5 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ширина ладони (см) | 10 | 10,5 | 11,5 | 10 | 10,3 | 10 | 11 | 11,3 |
| Длина пальца (см) | 6 | 6,5 | 5,5 | 5 | 6 | 5 | 5,5 | 6,5 |

***Учитель.*** Как вы думаете, должна ли существовать связь между этими величинами? Верно ли, что если ладонь шире, то и палец длиннее? Или, может быть, наоборот — чем шире ладонь, тем короче пальцы? Что вам подсказывает ваша интуиция?

***1-я группа.*** Нам кажется, что связь между шириной ладони и длиной пальца должна быть — чем шире ладонь, тем длиннее палец.

***2-я группа.*** Мы получили задание составить таблицу, содержащую данные о росте и весе учащихся нашего класса. Мы провели опрос и полученные данные внесли в таблицу.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Рост (см) | 176 | 186 | 164 | 156 | 174 | 163 | 144 | 159 |
| Вес (кг) | 85 | 82 | 92 | 38 | 51 | 69 | 34 | 51 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Рост (см) | 150 | 162 | 165 | 168 | 156 | 175 | 174 | 175 |
| Вес (кг) | 45 | 55 | 59 | 60 | 43 | 80 | 57 | 67 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Рост (см) | 165 | 167 | 163 | 164 | 158 | 162 | 165 | 164 |
| Вес (кг) | 70 | 57 | 60 | 54 | 38 | 60 | 65 | 55 |

Мы думаем, что связь между ростом человека и его весом есть, ведь чем выше человек, тем больше он должен весить.

***3-я группа.*** Нашей группе было дано задание составить таблицу, содержащую сведения о росте учащихся нашего класса при рождении и на данный момент. Мы попросили одноклассников узнать у родителей свой рост при рождении. Полученные данные мы занесли в таблицу.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Рост при рождении (см) | 54 | 54 | 55 | 52 | 51 | 49 | 51 | 52 |
| Рост в 7-м классе (см) | 176 | 186 | 164 | 156 | 174 | 163 | 144 | 159 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Рост при рождении (см) | 50 | 47 | 51 | 51 | 53 | 51 | 50 | 49 |
| Рост в 7-м классе (см) | 150 | 162 | 165 | 168 | 156 | 175 | 174 | 175 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Рост при рождении (см) | 48 | 53 | 51 | 54 | 48 | 50 | 51 | 53 |
| Рост в 7-м классе (см) | 164 | 165 | 167 | 163 | 164 | 158 | 170 | 165 |

Можно предположить, что из крупных младенцев должны вырасти высокие люди, и наоборот, но, скорее всего, это не совсем так. Нам кажется, что связи между ростом при рождении и ростом в 7-м классе может и не быть.

***4-я группа.*** Наша группа должна была найти в Интернете таблицу, связывающую между собой две величины. Мы нашли таблицу зависимости процента бракованных гвоздей от скорости их изготовления. В таблице изготовления показано количество изготовленных гвоздей в час (тыс. шт.) и доля дефектных гвоздей в процентах.

Нам кажется, что связь между производительностью и процентом брака должна быть, так как чем быстрее штампуют детали, чем выше скорость производства, тем больший процент брака следует ожидать.

***5-я группа.*** Наша группа составила таблицу, которая показывает возраст и стоимость (в рублях) автомобилей «Жигули» (ВАЗ-2105) при продаже. Для составления таблицы мы использовали интернет-ресурсы.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Возраст (лет) | 3 | 3 | 6 | 6 | 4 | 4 | 3 | 4 | 7 |
| Цена (тыс. р.) | 110 | 100 | 89 | 85 | 72 | 100 | 85 | 79 | 70 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Возраст (лет) | 8 | 1 | 2 | 4 | 10 | 6 | 4 | 4 | 1 |
| Цена (тыс. р.) | 44 | 155 | 120 | 90 | 70 | 94 | 85 | 105 | 170 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Возраст (лет) | 3 | 3 | 6 | 6 | 4 | 4 | 3 | 4 | 7 |
| Цена (тыс. р.) | 110 | 100 | 89 | 85 | 72 | 100 | 85 | 79 | 70 |

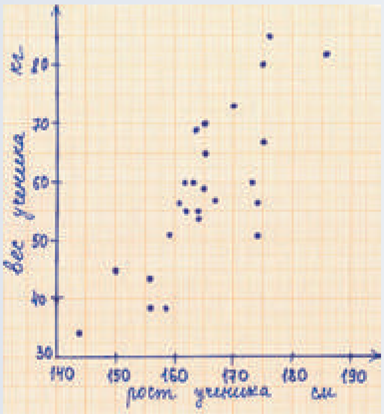
Мы считаем, что чем старше машина, чем дольше она находилась в эксплуатации, тем хуже её состояние, тем ниже должна быть её цена, т.е. связь между возрастом машины и ценой должна быть.

***Учитель.*** Группы представили свои задания и первые результаты. Давайте обратим внимание на то, что во всех ваших заданиях фигурируют пары данных. Очень часто бывает интересно или нужно знать, есть ли связь между изучаемыми величинами. Сейчас вы высказали свои предположения о наличии или отсутствии связи между величинами исходя из жизненного опыта и здравого смысла. Проверить ваши догадки по-

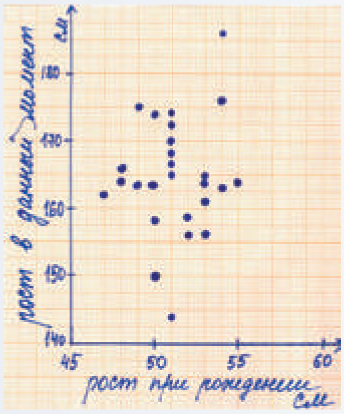
| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Количество в час (тыс. шт.) | 4,55 | 4,61 | 5,48 | 4,83 | 5,08 | 5,78 | 4,68 | 5,11 | 5,82 | 4,71 |
| Процент брака | 4,9 | 4,2 | 6 | 4,60 | 6 | 5,9 | 5 | 5,30 | 5,7 | 4,6 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Количество в час (тыс. шт.) | 4,92 | 5,74 | 4,2 | 4,91 | 5,27 | 4,34 | 5,06 | 5,3 | 4,58 | 4,76 |
| Процент брака | 4,4 | 6,2 | 4,3 | 4,3 | 5,7 | 5 | 5,3 | 6,2 | 4,40 | 5,3 |

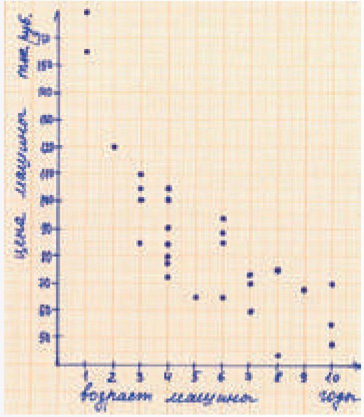
| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Количество в час (тыс. шт.) | 5,62 | 4,52 | 5,16 | 5,46 | 4,04 | 4,74 | 5,04 | 4,55 | 5,28 | 5,47 |
| Процент брака | 4,9 | 3,6 | 5,20 | 4,40 | 5,3 | 4,8 | 4,8 | 3,3 | 4,7 | 5,4 |



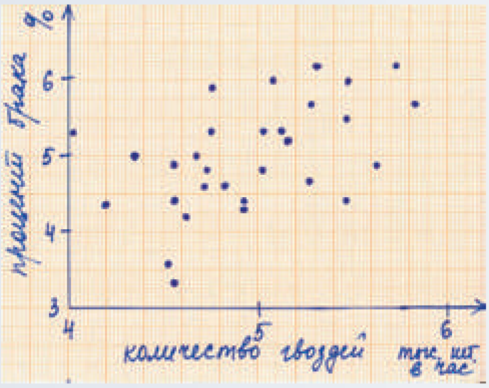
Рост — вес семиклассника



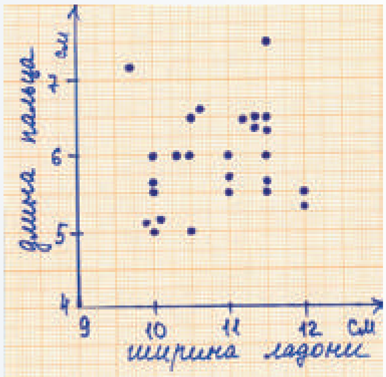
Рост семиклассника — рост при рождении



Возраст автомобиля — цена при продаже



Производительность — процент брака



Ширина ладони — длина пальца

может диаграмма рассеивания, на которой как раз и отражаются парные данные.

Каждая таблица содержит пары данных. Будем считать, что каждая пара — это координаты точки на координатной плоскости. Нанесем множество точек на плоскость, но прежде выберем, какую величину будем откладывать по оси абсцисс, а какую — по оси ординат. Кроме того, нужно выбрать подходящий масштаб и точку пересечения координатных осей. Обычно координатные оси изображают с общим началом. Но иногда удобно рисовать оси иначе, так, чтобы на рисунке не оказалось слишком много пустого места, а диаграмма получилась понятная и крупная.

Подпишем оси. Нанесем точки, взяв за координаты точки данные из таблицы, на координатную плоскость. Полученное множество точек назовем диаграммой рассеивания.

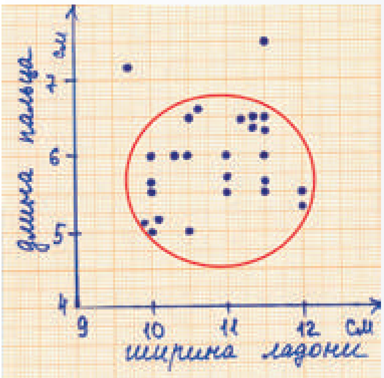
У каждой группы получилась своя диаграмма рассеивания. Продемонстрируйте, пожалуйста, что у вас вышло. Точки образуют «созвездия» или «облака». На каждой диаграмме облака расположены по-разному. Обратите внимание — на каждой диаграмме есть одна-две точки, которые стоят особняком. Они оторвались от облака и выделяются из общей массы. Такие отдельные точки показывают нам выбросы — нетипичные, нехарактерные данные.

Например, на диаграмме «Ширина ладони — длина пальца» вверху мы видим две точки, которые значительно удалены от основного облака. У людей, которым соответствуют эти точки, необычно длинные пальцы, наверно музыкальные. Но таких людей немного, вряд ли их нужно учитывать, если мы хотим представить себе или описать «наиболее типичную» руку.

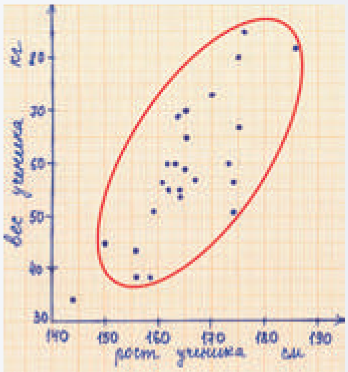
Приступим к изучению полученных диаграмм, но прежде выполним ещё одно подготовительное задание. Подумайте, пожалуйста, можно ли изобразить фигуру, в которую бы попадало большее количество точек? Попытайтесь нарисовать овал, который содержит все точки, кроме, быть может, нескольких точек и еще нетипичных, которые мы договорились выбросить из рассмотрения. Что у вас получилось?

Во всех случаях практически все точки попали в некоторое «облако», за исключением некоторых точек. Такие точки мы назвали нетипичными и не включили в рассмотрение, поскольку они редкие «исключения из правил».

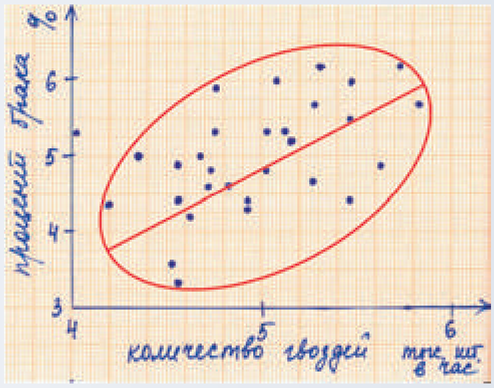
Если между двумя величинами есть положительная связь, то есть рост одной величины сопровождается ростом другой, то облако точек на



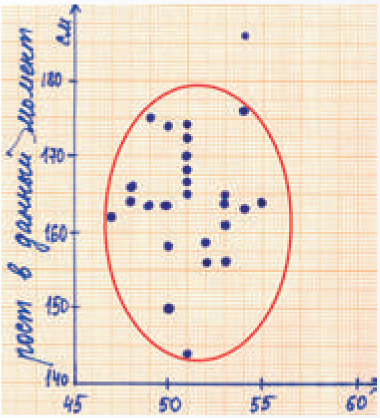
Почти все точки попадают в круг



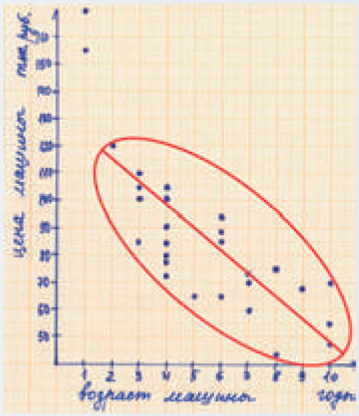
Почти все точки попадают в наклонный овал



Почти все точки попадают в овал, вытянутый снизу вверх



Большая часть точек образует облако, вытянутое вертикально



Почти все точки попадают в наклонный овал

диаграмме рассеивания будет вытянуто вправо вверх (с юго-запада на северо-восток). Иногда случайно мы можем эту связь и не увидеть, а может быть наоборот: облако наклонное, а на самом деле связи нет. Такие случайности бывают, но они маловероятны. Поэтому, если мы видим, что облако вытянуто вправо вверх, мы должны сделать вывод, что, скорее всего, изучаемые величины связаны между собой и эта связь положительная: с ростом одного признака другой в среднем растет.

Если же связь между величинами отрицательна (одна растет, а другая убывает), то облако будет вытянуто вправо вниз (с северо-запада на юго-восток). И опять, у нас нет полной уверенности в том, что диаграмма, построенная на случайных данных, даст нам абсолютно точную картину. Она может и обмануть, но это тоже маловероятно (и чем данных больше, тем маловероятнее). Поэтому наклонное облако точек, вытянутое вправо вниз (см. диаграмму «Возраст — цена автомобиля»), позволяет сказать, что величины, скорее всего, связаны и эта связь отрицательная: чем больше одна, тем меньше другая.

Если величины не связаны между собой, то облако на диаграмме рассеивания не будет иметь явного наклона. Поэтому, увидев такую картинку (например, как на диаграмме «Ширина ладони — длина пальца»), мы можем предположить, что величины, отраженные на диаграмме, не связаны между собой, независимы, то есть изменчивость каждой из этих величин случайна и не зависит от изменчивости другой величины.

Если мы видим на диаграмме какую-либо связь, иногда можно сказать о том, насколько эта связь сильная. Чем плотнее точки группируются около некоторой линии, тем сильнее связь между величинами. Если же наклонное облако точек «размыто», то связь, возможно, есть, но она не очень жесткая, величины находятся в не очень хорошем согласии друг с другом.

Какие наблюдения вы можете сделать, рассматривая свои диаграммы?

***1-я группа.*** В начале урока мы предположили, что связь между шириной ладони и длиной пальца должна быть. Но мы видим, что практически все точки заполняют круг, поэтому на диаграмме связь увидеть не удается. Если связь и есть, то она слишком слабая, чтобы это было заметно на нашем не очень большом числе наблюдений. Необходимо опросить не 25 человек, а гораздо больше, а методы измерения сделать возможно более точными — ведь мы делаем все на глазок.

***2-я группа.*** На диаграмме видно, что люди с примерно одинаковым весом имеют разный


рост, а с почти одинаковым ростом — разный вес, то есть жесткой связи между ростом и весом нет — облако размыто. Однако облако имеет явный наклон. Поэтому весьма вероятно, что между ростом и весом имеется положительная связь. В этом случае диаграмма рассеивания подтверждает наше интуитивное предположение.

***3-я группа.*** На диаграмме видно, что ребята, имевшие одинаковый рост при рождении, сейчас имеют разный рост, а ребята, имеющие сейчас одинаковый рост, имели разный рост, когда родились. Мы предположили, что связи между величинами может не быть, и диаграмма рассеивания подтверждает наше предположение. Если связь и существует, то она слишком слабая, чтобы мы могли ее видеть на нашей диаграмме.

***4-я группа.*** Почти все точки образуют наклонное облако, но видно, что одна точка в стороне. Применительно к гвоздям нетипичная точка вверху слева — удивительное место, где делают гвозди медленно и плохо. Но такое место одно, и мы не будем учитывать его, выражая надежду на то, что мы купим хорошие гвозди. По диаграмме можно сделать вывод, что чем выше производительность труда, тем больший процент бракованных изделий следует ожидать. Но точки прилегают к наклонной прямой неплотно. Связь, вероятно, есть, но не жесткая. В данном случае диаграмма подтверждает наше предположение.

***5-я группа.*** Все точки образуют наклонное облако, но видно, что несколько точек оказались нетипичными, поэтому не будем их рассматривать. Это может быть связано, например, с тем, что автомобили, возраст которых составляет 1 год, считаются практически новыми, и их цена рассчитывается иначе. По диаграмме можно сделать вывод, что чем больше возраст машины, тем ниже её рыночная цена. Но точки прилегают к наклонной прямой не очень плотно, связь, вероятно, есть, но не очень жесткая. И диаграмма подтвердила наше предположение, сделанное в начале урока.

***Учитель.*** Подведем итоги. Сегодня мы рассматривали величины, предполагая, что между ними может быть какая-то связь, но мы прекрасно понимаем, что природа связей и зависимостей может быть очень сложной, поэтому усмотреть эти закономерности только с помощью диаграммы рассеивания удается не всегда, даже если эти закономерности есть. Для того чтобы делать более надежные выводы, нужны ещё знания, которых у нас пока нет.

В начале урока мы ставили перед собой цели. Достигли ли мы их к концу урока? Ответьте, пожалуйста, на вопросы:

— Что показывает диаграмма рассеивания?

[Диаграмма рассеивания показывает положительную или отрицательную связь между двумя числовыми величинами или отсутствие связи.]

— Какие данные нужны, чтобы построить диаграмму рассеивания?

[Нужны парные данные, то есть пары чисел.]

— Как построить диаграмму рассеивания?

[Нужно пары чисел изобразить точками на координатной плоскости.]

— Как мы рисовали овалы, чтобы очертить «облака»? У нас был особенный точный метод или мы действовали на глазок?

[На глазок.]

— Меня ваши выводы убедили. Но все же, могло так случиться, что где-то мы сделали ошибочный вывод и кто-то другой с нами не согласится?

[Наверно, да.]

— Как, по-вашему, сделать исследование убедительнее и надежнее?

[Наверно, нужно больше данных. Может быть, нужны более точные способы обработки.]

Спасибо за урок, молодцы.

И. ИВАНОВА,
Н. ХЛЕВНЮК,
Москва

5–9 классы

# УСТНЫЙ СЧЕТ — ОСНОВА УСПЕШНОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Ну-ка, в сторону карандаши.
Ни костяшек. Ни ручек. Ни мела.
Устный счет! Мы творим это дело
Только силой ума и души.
Числа сходятся где-то во тьме,
И глаза начинают светиться,
И кругом только умные лица,
Потому что считаем в уме.

*В. Берестов*

Н. П. Богданов-Бельский,
«Устный счёт»


Феномен особых способностей в устном счете встречается с давних пор. Им обладали многие ученые, однако умение быстро считать присуще и людям, чья профессия далека от математики и науки в целом. До второй половины XX века на эстраде были популярны выступления специалистов в устном счете, и хотя некоторые исследователи уверяли, что дело во врожденных способностях, другие доказывали обратное: дело не только и не столько в каких-то исключительных, феноменальных способностях, а в знании ряда математических законов, позволяющих быстро производить вычисления.

Устный счет занимает особое место и в обучении математике. Устные вычисления активизируют мыслительную деятельность учеников, развивают память и речь, повышают внимание и быстроту реакции. Это придает им уверенность в учебе, мотивирует на улучшение достигнутых результатов; ребята активнее трудятся на уроке, им начинает нравится наш предмет. Таким образом, формирование вычислительных навыков — один из краеугольных камней в обучении математике.

Несмотря на это, работа по формированию, поддержанию и совершенствованию устных вычислений начиная с 7-го класса становится на уроках математики как бы второстепенной. Сложность и объем программного материала «уводят» педагога в сторону от простейших вычислений, и проблемы, связанные с несовершенством вычислительных навыков, кажутся ему незначительными. Отсюда многие трудности в усвоении математики. Отсюда недостаток времени на уроке, ошибки и отсутствие интереса у учащихся.

Чтобы повысить мотивацию к изучению математики и эффективность обучения, мы используем методику формирования вычислительных навыков, главной задачей которой является достижение школьниками техничности в работе с числовыми выражениями через строгую технологичность в обработке числовой информации. Методика позволяет минимизировать временные затраты на вычисления, повысить качество выполнения ма-

*Таблица 1*

| $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,125 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 |
| 10% | 12,5% | 20% | 40% | 60% | 80% | 25% | 50% | 75% | 100% |

тематических заданий на основе сформированного навыка решения базовых задач, высвобождая тем самым время для рассмотрения творческих, нестандартных заданий.

Сложности в изучении математики, как правило, появляются в 6-м классе (в силу существенного усложнения изучаемого материала) и для некоторой категории школьников с каждым годом растут как снежный ком. В результате происходит расслоение учащихся на тех, кому достаточно легко, и тех, кому непреодолимо сложно. В чем здесь причина?

На наш взгляд, самым важным препятствием для успешного усвоения математических знаний является несовершенство техники работы с числами, числовыми выражениями: дробями, степенями, корнями, логарифмами. Поэтому учитель обязательно должен целенаправленно передавать ученикам технику вычислений, как элемент культуры работы с математическими объектами, главным из которых является число:

- при умножении дробей не следует поспешно искать произведения в числителе и знаменателе;
- в действиях со степенями не следует спешить находить значение степени;
- в действиях с корнями ни в коем случае не следует торопиться искать произведение в подкоренном выражении.

Во всех этих случаях надо обязательно раскладывать каждое числовое выражение на множители, опираясь на основную теорему арифметики: «каждое составное число может быть представлено в виде произведения простых чисел и притом единственным образом», это ведет к рациональным вычислениям и существенно уменьшает число ошибок.

Необходимо формировать наряду с прямыми действиями и обратные действия, систематически занимаясь их отработкой. К примеру, ученик должен понимать, что степень, показатель которой представляет собой сумму, можно представить в виде произведения степеней: $a^{n+5} = a^n \cdot a^5$; дробь можно представить как сумму дробей: $\frac{2x+5}{x} = \frac{2x}{x} + \frac{5}{x}$ и т.д.

Очень полезно использовать **таблицы чисел**. Например, в 5–6-х классах таблицу (табл. 1), связывающую обыкновенные и десятичные дроби и проценты.

Следует как можно чаще обращаться к этой таблице в процессе занятий, добиваясь ее запоминания, опираясь на логику взаимосвязей между дробями и процентами.

Кроме этого, очень упрощают вычисления, делают их рациональными, развивают мышление **замечательные произведения**:

$$5 \cdot 20 = 100,\ 4 \cdot 25 = 100,\ 8 \cdot 125 = 1000.$$

Например:

$$36 \cdot 25 = 9 \cdot 4 \cdot 25 = 9 \cdot 100 = 900,$$
$$24 \cdot 125 = 3 \cdot 8 \cdot 125 = 3 \cdot 1000 = 3000.$$

В основе рационального счета лежат также обратные действия — вариативное разложение числа на множители (удобным для счета способом).

В 7-м классе составляем с учащимися таблицу степеней (табл. 2), при этом столбцы степеней с основаниями 4, 8, 9 умышленно оставляем пустыми, так как каждое из этих оснований можно представить в виде степени с простыми основаниями: 2, 3. Это говорит учащимся о принципе

*Таблица 2*

| $n$ | $2^n$ | $3^n$ | $4^n$ | $5^n$ | $6^n$ | $7^n$ | $8^n$ | $9^n$ | $10^n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | | 5 | 6 | 7 | | | 10 |
| 2 | 4 | 9 | | 25 | 36 | 49 | | | 100 |
| 3 | 8 | 27 | | 125 | 216 | 343 | | | 1000 |
| 4 | 16 | 81 | | 625 | 1296 | | | | |
| 5 | 32 | 243 | | 3125 | | | | | |
| 6 | 64 | 729 | | | | | | | |
| 7 | 128 | | | | | | | | |
| 8 | 256 | | | | | | | | |
| 9 | 512 | | | | | | | | |
| 10 | 1024 | | | | | | | | |

представления чисел в виде степени с простым основанием.

Что еще помогает предотвратить ошибки учащихся? Обязательное представление в ответе чисел в стандартном виде:

- дробь должна быть несократимой;
- подкоренное выражение в ответе не должно содержать множитель в виде квадрата;
- знаменатель дроби не должен содержать иррациональность.

При нахождении значений сложных числовых выражений, как правило, выражение сначала упрощают: при этом следует требовать от учащихся определенной формы записи — каждый раз с начала строки. В этом случае вырабатывается стереотипность оформления, а главное, удобнее контролировать верность записей при переписывании, воспитывая тем самым самоконтроль.

Часто ребята допускают ошибки, связанные с нарушением порядка действий, особенно если в выражении присутствуют наряду со знаками арифметических действий еще и корни, степени, знаки функций (логарифмических, тригонометрических). К сожалению, часто ученики невнимательно смотрят на расстановку скобок, игнорируя их, что сказывается на результатах и в старших классах. Профилактикой таких ошибок является умение определять последнее выполняемое действие в выражении и называть выражение в соответствии с этим действием. Например:

- $(2 + 5a)^7$ — степень суммы,
  $2^7 + 5a^7$ — сумма степеней;
- $\sqrt{45 \cdot 24}$ — корень произведения,
  $\sqrt{45} \cdot \sqrt{24}$ — произведение корней;
- $\log_7 (24 + 25)$ — логарифм,
  $\log_7 24 + 25$ — сумма.

И т.д.

При решении уравнений и неравенств следует добиваться приведения их к ***стандартному*** виду, что облегчает поиск верного решения. Необходимо постоянно повторять алгоритмы всех преобразований, добиваясь технологичности, стереотипности при выполнении базовых действий.

При решении квадратных уравнений и неравенств, сводящихся к квадратным, как воздух необходима **теорема Виета.** Причем если ученик не может устно подобрать корни по обратной теореме, то обязательно надо научить его проверять найденные корни по прямой теореме. Необходимо добиваться, чтобы ученик делал проверку при решении квадратных уравнений и неравенств.

Приблизительно половина учащихся к концу 8-го класса легко применяют дополнительные теоремы, позволяющие находить корни квадратного трехчлена устно:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ и } a + b + c = 0,$$

то

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{c}{a};$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ и } a - b + c = 0,$$

то

$$x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{c}{a}.$$

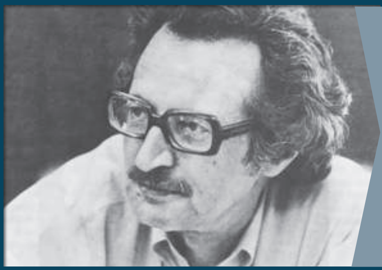
Навык нахождения корней квадратного уравнения позволяет удержать в памяти алгоритм решения соответствующего квадратного неравенства, что ведет к уменьшению ошибок при записи решения неравенства.

В итоге, использование техники работы с числовыми выражениями (дробями, степенями, корнями), представление чисел в ответе в стандартном виде, использование свойств равенств и неравенств, техника решения квадратных уравнений и неравенств, сводящихся к квадратным, — все это дает нам экономию времени и повышение качества обучения математике в целом.

При подборе заданий к каждому уроку или серии уроков по формированию того или иного навыка учитель должен руководствоваться, на наш взгляд, следующим правилом: количество времени, затраченное на изучение и решение основных понятий темы и базовых задач, обратно пропорционально уровню сложности задач. Если мы тратим недостаточно времени на отработку базовых заданий, то сразу получаем проблемы в решении задач повышенного уровня сложности.

На пути формирования прочного навыка в выполнении простейших операций и решении базовых задач учителя подстерегают психологические трудности, связанные с удерживанием строгой «диктаторской» позиции. Учитель должен добиваться от учащихся — **«делай как я и только так!»** — и в момент первичного закрепления снижать отметку за малейший нерациональный шаг, даже если получен верный ответ. Главный принцип работы — **«решай не только верно, но и рационально!»** — должен соблюдаться на каждом этапе формирования знаний, умений и навыков. Без строгого выполнения алгоритмов невозможно добиться качества и оперативности.

В результате применения методики формирования вычислительных навыков рутинная работа сводится к нулю, снимается психологическое напряжение; уменьшается количество технических и вычислительных ошибок; скорость выполнения заданий растет, а главное — освобождается время для рассмотрения более сложных задач, у ребят появляется осознанный подход к занятиям и большая симпатия к математике.



# XV Пятнадцатые Соловейчиковские чтения

Московский городской Дом учителя

**30** сентября и **1** октября **2011** года

Тема чтений:

## 25 лет педагогике сотрудничества:

*настоящее время настоящей идеи*

На снимке – участники переделкинской встречи: Шалва Амонашвили, Лена Никитина, Софья Лысенкова, Симон Соловейчик, Владимир Матвеев, Борис Никитин, Виктор Шаталов, Владимир Караковский, Игорь Волков, Александр Адамский, Галина Алешина, Евгений Ильин

Осень 1986 года. На встрече в подмосковном поселке Переделкино опыт нескольких поколений учителей-новаторов был обобщен и сведен воедино Симоном Соловейчиком в манифест «Педагогика сотрудничества». Появление в печати манифеста – отчета о встрече учителей-экспериментаторов – по праву считается началом перестройки в образовании и педагогике страны.

Сегодня педагогика сотрудничества во многом воспринимается как набор «именных» новаторских методик обучения. Но вдумчивый анализ показывает, что, кроме методик, в манифесте было предложено идейное ядро, чье содержание заведомо шире любой конкретной методики.

Движение мысли ученика в познании; сердечное движение учителя навстречу детям; движение детей навстречу учителю – три главных принципа педагогики сотрудничества.

Оказалось, что в точке, где скрещиваются три эти линии, возникает плодотворное напряжение. И сейчас можно найти множество педагогических практик, созданных следующими поколениями учителей, чей базис, чья основа – уже не методики, а идеи «Педагогики сотрудничества».

И на чтениях мы бы хотели представить именно этот опыт – опыт педагогики сотрудничества настоящего времени.

*Дорогие учителя!*

*Приходите на чтения!*

Вход, как всегда, свободный.

Открытие чтений – 30 сентября в 10 часов утра.
Программа чтений будет опубликована в газете «Первое сентября», а также на сайте www.1september.ru
Справки по телефону: (499) 249-31-38.

Адрес Московского городского Дома учителя:
Москва, ул. Пушечная, дом 4, строение 2.
Проезд: центр, станция метро «Кузнецкий мост».

# ЗАПОМИНАЕМ ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

Н. РАСТРЕПИНА,
г. Цимлянск, Ростовская обл.

## Мнемоническое правило для запоминания формул приведения

Когда мы находим значения тригонометрических функций с помощью единичной окружности, мы используем уже известные табличные значения. А таблицы значений тригонометрических функций составлены для углов от 0° до 90°. Это объясняется тем, что значения тригонометрических функций для остальных углов сводятся к значениям тригонометрических функций для острых углов. Формулы, которые позволяют сделать это, называются формулами приведения, их много, а точнее, 32. И все формулы надо знать. К счастью, существует простое мнемоническое правило, позволяющее быстро воспроизвести любую формулу приведения. Но для этого надо хорошо знать основу тригонометрии — единичную окружность и способы работы с ней.

Сначала мы с учениками внимательно просматриваем формулы приведения и замечаем сходство и различия в них.

- Каждая формула связывает между собой либо синус с косинусом, либо тангенс с котангенсом. Причем первая функция либо меняется на вторую, либо нет.
- В левой части формулы аргумент представляет собой сумму или разность одного из «основных координатных углов» — $\frac{\pi}{2}$, $\pi$, $\frac{3\pi}{2}$, $2\pi$ — и острого угла $\alpha$, а в правой части аргумент $\alpha$.
- В правой части знак перед функцией либо «плюс», либо «минус».

### Мнемоническое правило

Достаточно задать себе два вопроса:

1. Меняется ли функция на кофункцию?

*Ответ*. Если в формуле присутствуют углы $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$ — это точки вертикальной оси, киваем головой по вертикали и сами себе отвечаем «да», если же присутствуют точки горизонтальной оси — $\pi$ или $2\pi$, то киваем головой по горизонтали, и получаем ответ «нет».

2. Какой знак надо поставить в правой части формулы?

*Ответ*. Знак определяем ***по левой части***. Смотрим, в какую четверть попадает угол, и вспоминаем, какой знак в этой четверти имеет функция, стоящая в левой части.

Приведу пример рассуждений для функции $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

1. Меняется функция на кофункцию или нет? $\frac{3\pi}{2}$ *— угол вертикальной оси; киваем головой по вертикали: «Да, меняется». Значит, в правой части будет cos α.*

2. Знак?

*Угол* $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ *попадает в IV четверть, где синус имеет знак «минус». Значит, в правой части ставим знак «минус».*

Итак, получили формулу $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$.

Т. ФРОЛОВА,
г. Иркутск

## Ключ к запоминанию тригонометрических формул

Когда в 10-м классе учащиеся приступают к изучению формул тригонометрии, их пугает, прежде всего, количество формул, которые нужно запомнить. Заучивать их довольно сложно и трудоемко. Поэтому предлагаю им мнемонический подход к запоминанию тригонометрических формул.

Рассмотрим внимательно все четыре формулы сложения, помещенные на странице учебника:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Если слева стоит косинус разности/суммы, то справа от знака равенства стоят произведения одноименных функций $\cos\alpha\cos\beta$ и $\sin\alpha\sin\beta$. Кроме этого замечаем, что знак, стоящий в левой части, противоположен знаку в правой части, то есть произошла смена знака.

Если слева стоит синус разности/суммы, то справа от знака равенства стоят произведения разноименных функций: $\sin\alpha\cos\beta$, а знак в левой и в правой части равенства одинаковый, то есть не меняется. Подведем итог наших наблюдений.

1. Косинус разности/суммы берет функции одноименные и знак меняет.

2. Синус разности/суммы берет функции разноименные, а знак не меняет.

После этих выводов предлагаю записать все четыре формулы с другими обозначениями аргументов на доске (к доске приглашаю 3–4 учеников) и в тетрадях. При такой работе коэффициент усвоения заметно повышается. И самое главное, что у учащихся возникает чувство успешности, уверенности и желание освоить и остальные формулы.

Изучение формул замены суммы и разности на произведение, а произведения на сумму и разность веду параллельно.

Запишем все формулы и проанализируем их, опираясь на приведенные выше приемы:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2};$$
$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Опять замечаем, что сумма/разность косинусов «берет» функции одноименные и знак меняет. Причем, когда косинусы связаны знаком плюс, то есть «положительно», «хорошо», то берутся «собратья», а когда косинусы связаны знаком минус, то есть «отрицательно», «плохо», то хотя и берутся функции одноименные, но не «собратья», и «подкрепляется» это отрицательным коэффициентом –2.

Для суммы/разности синусов наше правило тоже сохраняется: в произведении функции «берутся» разноименные и знак не меняется. После этого учащиеся вновь записывают и на доске, и в тетрадях все формулы, изменяя обозначения аргументов.

Для формул:

$$\cos\alpha\cos\beta=0{,}5(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$
$$\sin\alpha\sin\beta=0{,}5(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$
$$\sin\alpha\cos\beta=0{,}5(\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$

предлагаю учащимся самим применить рассмотренные мнемонические правила к этим формулам.

Т. МУККОНЕН,
дер. Толвуя, Карелия

## Поможет сущая нелепица

Разработчик уникальной программы Гарри Лорейн в книге «Как развить сверхмощную память» утверждает: «Способность запоминать может развить в себе каждый, кто попробует усвоить определенные мнемонические правила. Все сводится к формированию ассоциативных пар, связывающих понятия… Нелепые, причудливые, изощренные и вообще далекие друг от друга образы создают самые надежные ассоциации». Вот одна такая нелепица, позволяющая запомнить формулу косинуса разности двух углов:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

«Коси коса плюс два синуса» — и формула легко запоминается. А напомнить идею доказательства помогает следующее двустишие:

Скалярное произведение передает привет
И косинусу разности дает ответ.

О. ПЕШКОВА,
Москва

7 класс

# ТЕОРЕМЫ В СТИЛЕ РЭП


Математика требует усидчивости и терпения. А этих качеств часто не хватает нашим детям, особенно тем из них, что не блещут талантами. Случается и по-другому. Ребенок вообще-то не глуп, даже талантлив, но — чистый гуманитарий. Что делать тогда?

Существует множество приемов облегчающих запоминание. Среди них такой. Все знают, что рифмованный, ритмичный текст запоминается гораздо легче. Поэтому психологи советуют запоминать трудные тексты, переделывая их в стихотворную форму — стихи, похожие на считалки. Таким образом очень удобно, например, запоминать списки покупок, но это нам, взрослым, в быту. На мой взгляд, этот прием с успехом можно использовать и в школе, в том числе и при обучении математике.

Кстати, вспомните-ка свое детство. Что такое биссектриса? Конечно же, это «крыса, которая бегает по углам и делит угол пополам». Думаю, по аналогии легко вспомнятся и «Пифагоровы штаны», которые «во все стороны равны», и что-нибудь подобное.

Стихотворные формулировки не только облегчают запоминание аксиом и теорем, но и вносят в обучение элемент игры, привлекая внимание ребят- «лириков». Таким детям можно даже предлагать придумывать свои стихи «на тему».

Предлагаю несколько моих стихотворных переделок.

### Тема: «Признаки равенства треугольников»

Отметим какие-нибудь три точки, не лежащие на одной прямой, и соединим их отрезками. Мы получим геометрическую фигуру, которая называется треугольником.

Отмеченные три точки называются вершинами, а отрезки — сторонами треугольника.

Это, ребята, вы запомнить должны!
В треугольнике — три вершины
И три стороны.
А теперь постарайся запомнить строчки:
Стороны — отрезки,
А вершины — точки.

### Тема: «Три признака равенства треугольников»

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Первый признак
Объяснить вам берусь.
Называем его
Для краткости СУС.
Расшифруем скромное имя —
Две стороны и угол между ними.

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Второй признак равенства
Назовем мы УСУ.
Запомни его —
Заруби на носу!
Признак этот
Понятен вполне.
По двум углам
Прилежащим к одной стороне.

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (третий из известных признаков).

Третий признак
Запомнить надо нам.
Он очень простой —
По трем сторонам.
А если хочешь
Запомнить кратко —
Три буквы С.
И все в порядке.

Из третьего признака треугольников следует, что треугольник — жесткая фигура.

Знать это должен каждый школьник!
Жесткая фигура — наш треугольник.

# ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА-2011: НАЗВАНЫ ПОБЕДИТЕЛИ

## 10 класс

### Победители

***Ахмедов Максим Басирович***, СУНЦ МГУ, г. Москва;

***Ишкуватов Руслан Альбертович***, лицей № 131, г. Казань;

***Горелов Иван Владимирович***, школа № 25, г. Москва;

***Игошина Виктория Сергеевна***, экономико-математический лицей № 29, г. Ижевск;

***Крохмаль Николай Евгеньевич***, лицей № 38, г. Белгород.

### Призеры

***Деев Родион Николаевич***, физико-технический лицей № 1, г. Саратов;

***Иванов Андрей Олегович***, гимназия № 9, г. Екатеринбург;

***Новиков Владислав Викторович***, лицей № 60, г. Уфа;

***Останин Александр Михайлович***, экономико-математический лицей № 29, г. Ижевск;

***Пышкин Игорь Валерьевич***, физико-математический лицей № 239, г. Санкт-Петербург;

***Рухович Алексей Дмитриевич***, СУНЦ МГУ, г. Москва;

***Южаков Александр Олегович***, гимназия № 31, г. Курган;

***Иванов Константин Сергеевич***, школа № 25, г. Москва;

***Кузин Михаил Сергеевич***, школа № 25, г. Москва;

***Нурумов Андрей Русланович***, СУНЦ МГУ, г. Москва;

***Осипов Павел Сергеевич***, школа № 54, г. Томск;

***Бесман Михаил Владиславович***, школа № 48, г. Курган;

***Исхаков Линар Наилевич***, экономико-математический лицей № 29, г. Ижевск;

***Ненашев Денис Андреевич***, школа № 8, Елизовский муниципальный район, Камчатский край;

***Косинов Никита Андреевич***, многопрофильный лицей № 20, г. Ульяновск;

***Семенов Тимофей Алексеевич***, лицей № 36, г. Иркутск;

***Рябцева Мария Андреевна***, СУНЦ МГУ, г. Москва;

***Бусыгин Игорь Викторович***, экономико-математический лицей № 29, г. Ижевск;

***Кравцов Дмитрий Александрович***, СУНЦ МГУ, г. Москва;

***Салихов Аяз Маратович***, лицей № 131, г. Казань;

***Александрова Екатерина Романовна***, лицей № 33, г. Иваново;

***Коротин Александр Андреевич***, Самарский медико-технический лицей, г. Самара;

***Абугалиев Ренат Шамилевич***, Самарский медико-технический лицей, г. Самара;

***Лазарев Денис Олегович***, физико-математический лицей № 5, г. Долгопрудный, Московская обл.;

***Лежнин Михаил Викторович***, лицей «Физико-техническая школа», г. Санкт-Петербург;

***Лопатников Алексей Александрович***, СУНЦ МГУ, г. Москва;

***Миронов Максим Сергеевич***, экономико-математический лицей № 29, г. Ижевск;

***Сандрикова Мария Михайловна***, центр образования № 218, г. Москва;

***Хайруллин Рустэм Мухамедович***, гимназия № 7, г. Казань.

# ПРАВИЛО РУКИ

Т. МЯСНИКОВА,
с. Полтавское,
Ставропольский край

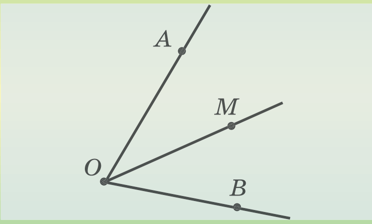


Рис. 1

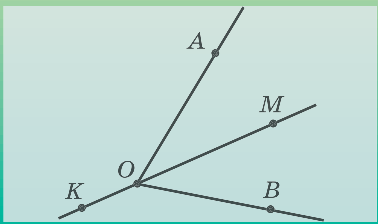


Рис. 2

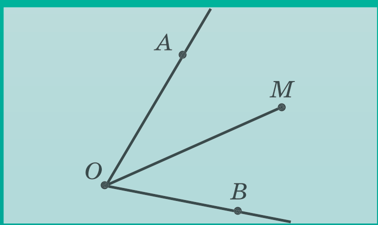


Рис. 3

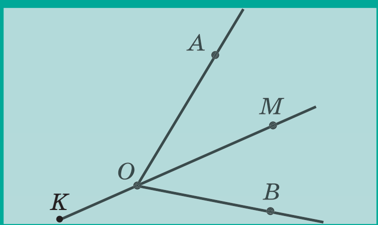


Рис. 4

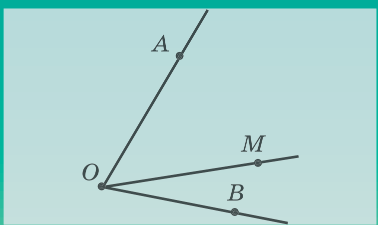


Рис. 5

Это правило помогает ученику запомнить и правильно воспроизвести определение.

Рассмотрим определение биссектрисы угла («Математика. 5 класс»): «Биссектрисой угла называется луч, выходящий из вершины угла и делящий угол пополам». Я проговариваю это определение, делаю на доске рисунок 1 и записываю:

«Луч $OM$ — биссектриса угла $AOB$».

Далее отрабатываем родовое понятие «луч». Для этого делаю рисунки 2 и 3.

Уточняем: биссектриса угла — не прямая и не отрезок. Биссектриса угла — луч.

После этого приступаем к отработке видовых отличий биссектрисы — «выходящий из вершины угла» и «делящий угол пополам». Делаю рисунки 4 и 5.

Снова уточняем: биссектриса является лучом и обладает двумя признаками — выходит из вершины угла и делит угол пополам.

На доске оставляю рисунок 1. Ученики переносят его в тетрадь и делают запись: «Луч $OM$ — биссектриса угла $AOB$». Затем предлагаю найти в учебнике изучаемое определение и прочесть его; учащиеся проговаривают определение несколько раз.

После такого подробного разбора я объясняю, как легко можно запомнить определение с помощью руки.

Сжимаем кулачок, в нем — изучаемое определение биссектрисы. Большой палец руки — родовое понятие «луч», а указательный и средний пальцы — видовые признаки «выходящий из вершины угла» и «делящий угол пополам». Мы проговариваем определение и по очереди выравниваем пальцы.


Определение выучено.

Правило руки помогает хорошо запомнить многие определения, например:

- ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны;
- степенью числа $a$ с натуральным показателем $n$ называется произведение $n$ множителей, каждый из которых равен $a$.

В. АРЖАЕВА (г. Саратов),
Л. БАБИНА (Москва),
Г. БЕЗГУБОВА
(с. Пушанино, Пензенская обл.),
Н. ГОРБАТЮК
(с. Мильково, Камчатская обл.),
Н. УДАЛЬЦОВА
(с. Никольское, Ярославская обл.)

5–6 классы

# ЗАПОМНИТЬ?— ЭТО ТАК ПРОСТО!

## Раскрытие скобок

***

Если перед скобкой «+»,
Знаки сохраняются.
Если ж «–» перед скобкой,
Знаки все меняются.

***

Если скобки раскрывая
Перед ними вижу плюс,
Значит, знаки не меняю,
Все как было оставляю,
Ошибиться не боюсь.

***

Плюс перед скобками хочет сказать:
«Знаки в скобках, не надо менять».
Минус хочет попросить
Знаки в скобках изменить.

## Свойства нуля

***

Это правило, друзья,
Легко запоминается:
От прибавления нуля
Ничто не изменяется.

***

Если число на ноль умножается,
То и в ответе ноль получается.
Легко запомнить нам, друзья,
На ноль делить никак нельзя!

## Скорость, время и расстояние

***

Если мы скорость на время умножим,
То расстояние узнать мы сможем.
Если же скорость узнать вы хотите,
То расстояние на время делите.
Время найти не составит труда:
Путь мы на скорость разделим тогда.

## Площадь прямоугольника

***

Квадрат. Прямоугольник.
Находит площадь школьник:
Длину и ширину измерь толково,
Их перемножь — и все готово!

***

Вот прямоугольник,
Находит площадь школьник:
Смежные стороны верно измерь,
Их перемножь и ответ свой проверь.

## Периметр многоугольника

***

Легко найти периметр для школьника,
Сложив длины всех сторон многоугольника.

## Прямая

***

Без конца и края
Линия прямая.
Хоть сто лет по ней иди —
Не найдешь конца пути.

## Шкалы

***

Там, где труд не знает лени,
Хорошо идут дела!
Там, где числа и деления,
Получается *шкала*.
Длина каждого деления —
Единица измеренья.

## Угол

***

От вершины по лучу
Словно с горки прокачу,
Только луч теперь она,
И зовется «сторона».

***

У человека два плеча,
А в сутках день и ночка.
«Углом» назвали два луча
С началом в общей точке.

## Квадрат

***

Он давно знакомый мой,
Каждый угол в нем — прямой,
Все четыре стороны —
Одинаковой длины.
Вам его представить рад,
А зовут его «квадрат».

## Прямоугольник

***

Брат родной квадрата он,
Без него не строят дом.
Все его углы равны,
Только стороны разны.
И зовется он не зря
«Прямоугольником», друзья!

## Объем прямоугольного параллелепипеда и куба

***

Параллелепипеда объем
Мы по формуле найдем:
Пиши произведение ты
Длины, ширины и его высоты.

## Окружность и круг

***

У круга есть подруга,
Известна всем ее наружность:
Идет она по краю круга
И называется «окружность».

***

Легко запомнить, например,
Длину окружности — $2\pi R$.
И знает каждый из ребят,
Что площадь круга $\pi R^2$.

## Делители и кратные

***

Если $a$ на $b$ легко
Разделить желаем,
Значит, $b$ — делителем,
$a$ — кратным называем.

## Признаки делимости

***

Поскорей запомни,
Может, пригодится:
Делителем числа любого
Служит единица.

***

Если ноль в конце числа
(это не безделица),
Ведь тогда оно на десять
Без остатка делится.
Если цифрою другой
Вдруг число кончается,
То на десять без остатка
Делить не получается.

***

Если на конце числа
Пять стоит или ноль,
На пять без остатка
делить его изволь.
Если цифрою иной
То число кончается,
Без остатка разделить
На пять не получается.

***

Если сумма цифр числа
Да на девять делится,
Разделить число на девять —
Сущая безделица.

Ну а в случае другом,
ни гадай, ни мучайся,
Без остатка разделить
На девять не получится.

## Простые числа

***

Если у числа найдешь
Только два делителя,
Говори: «оно простое» —
Порадуешь учителя.
И запомни на всю жизнь,
Очень пригодится,
Делители числа простого
Оно и единица.

## Составные числа

***

Составные числа можно
На простые разложить
И при способе любом
Одно и то же получить:
Множители сохраняются,
Порядок лишь меняется.

## Основное свойство частного

***

Коль делимое и делитель
На одно число умножатся,
Не волнуйтесь, ваше частное
В этом случае не потревожится.
И делимое, и делитель
На одно число разделите,
Тогда можете вы надеяться:
Ваше частное не изменится.

## Нахождение части от числа

***

Дробь от числа хотим найти,
Не надо мам тревожить,
Нам надо данное число
На эту дробь умножить.

## Нахождение числа по его части

***

Коль число по части вдруг
Отыскать решите,
То на данную вам дробь
Часть ту разделите.

## Отрицательные и положительные числа

***

Если числа друг от друга
Лишь знаком отличаются,
То «противоположными»
Они и называются.
Каждому числу, запомни,
Это ведь несложно,
Всегда число найдется
Ему противоположное.
Это правило запомнить изволь,
Суммой противоположных чисел
Будет ноль!

***

Это удивительно,
Будьте внимательны!
Ноль меньше положительного,
Но больше отрицательного.
Запомни обязательно!
Чего тут удивительного:
Любое число отрицательное
Меньше числа положительного!

## Сложение чисел одного знака

***

Модули чисел верно сложи,
А «общий знак» впереди напиши.

## Сложение отрицательных чисел

***

Отрицательные числа
Захотелось нам сложить.
Сложим модули сначала.
Только б минус не забыть!

## Сложение чисел с разными знаками

***

Из большего модуля меньший
Вычтем, ребята, послушно.
А в результате поставим
Знак большего модуля дружно.

***

Разные знаки воюют сейчас.
Кто ж победит из них в этот раз?
Знак большего модуля финиш берет,
В ответе на первое место встает.
К знаку число припиши и не мешкай:
Вычти из большего модуля меньший.

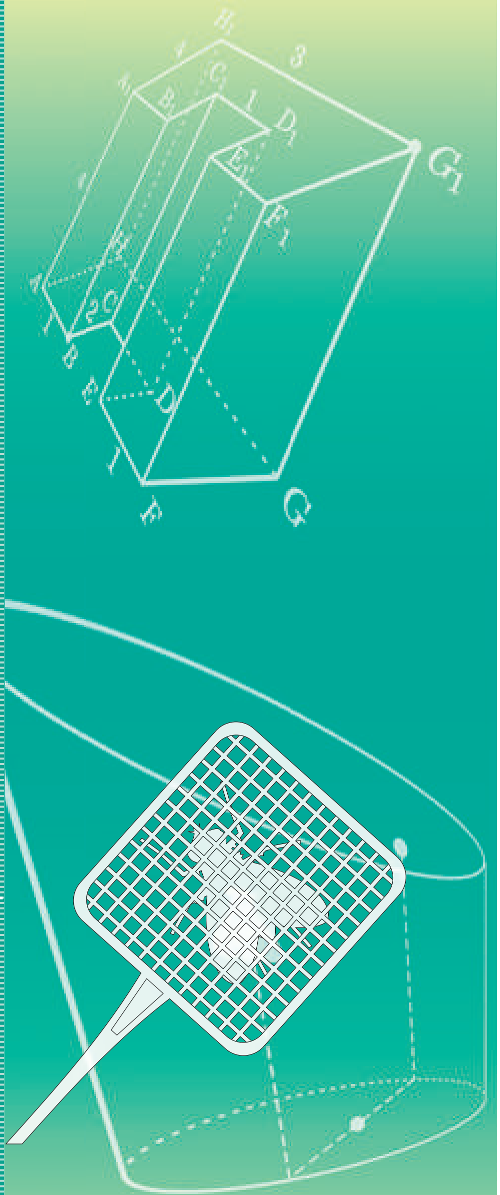
## Умножение и деление положительных и отрицательных чисел

***

Пусть не мучают сомненья
В умноженьи и в деленьи:
Одинаковые знаки —
Плюс дадут нам в результате.
Знаки разные когда,
Минус ставим мы тогда.

И. СМИРНОВА,
В. СМИРНОВ,
Москва

# ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ НА ПОВЕРХНОСТЯХ



Задачи на нахождение кратчайших путей относятся к экстремальным задачам и играют большую роль в математике и ее приложениях. Такие задачи часто встречаются и на различных олимпиадах по математике. Например, на Объединенной межвузовской математической олимпиаде 2011 года учащимся 11-го класса была предложена следующая задача.

**Задача.** На рисунке 1 изображен многогранник, все двугранные углы которого прямые. Саша утверждает, что кратчайший путь по поверхности этого многогранника от вершины $X$ до вершины $Y$ имеет длину 4. Прав ли он?

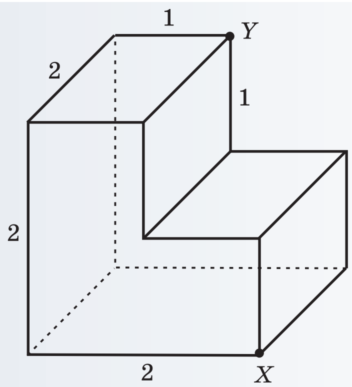



Рис. 1

Здесь мы рассмотрим примеры таких задач и метод их решения, основанный на использовании разверток.

Самая древняя экстремальная задача известна как задача Дидоны. Финикийская царевна Дидона, жившая в IX веке до н.э., решила основать город на берегу понравившегося ей африканского залива. Вожди местного племени согласились отдать ей клочок земли, который можно охватить воловьей шкурой. Дидона приказала своим воинам разрезать шкуру на тонкие полоски и, связав их в единую ленту, охватила ею участок земли на берегу залива. Так возник город Карфаген. Какой должна быть форма границы участка при заданной длине, чтобы площадь участка была максимальна? В этом и состоит задача Дидоны. Если знать экстремальное свойство круга, то решение получается немедленно: граница участка представляет собой часть окружности, имеющей заданную длину.

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 12.

**Задача 1.** Найдите длину кратчайшего пути по поверхности единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2), соединяющего вершины $A$ и $C_1$.

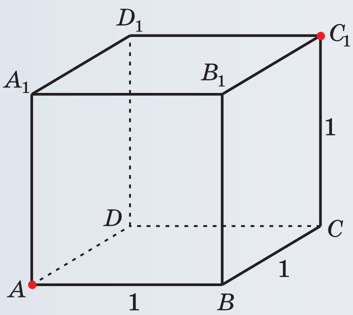


Рис. 2

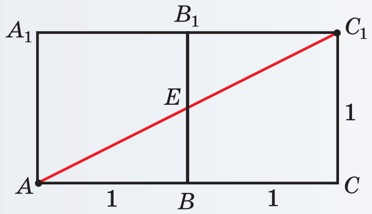


Рис. 3

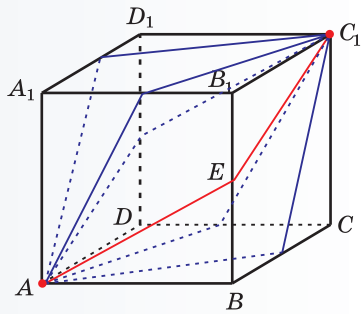


Рис. 4

*Решение.* Рассмотрим развертку, состоящую из двух соседних граней куба, изображенную на рисунке 3.

Кратчайшим путем из $A$ в $C_1$ является отрезок $AC_1$, длина которого равна $\sqrt{5}$. Соответствующий путь на поверхности куба изображен на рисунке 4.

Заметим, что путь из $A$ в $C_1$ является не единственным. Имеется шесть таких путей, длины которых равны $\sqrt{5}$, проходящих через середины ребер $BB_1$, $A_1B_1$, $A_1D_1$, $DD_1$, $CD$ и $BC$.

*Ответ*: $\sqrt{5}$.

**Задача 2.** Три ребра прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5) равны 5, 4, 3. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого параллелепипеда, соединяющего вершины $A$ и $C_1$.

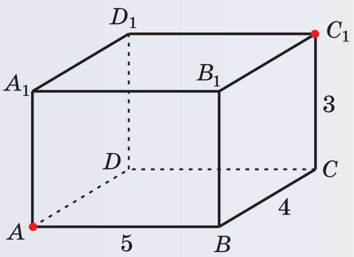


Рис. 5

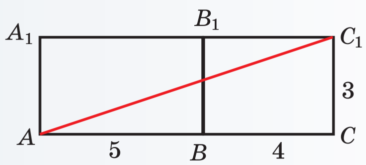


Рис. 6

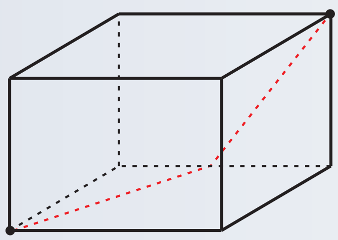


Рис. 8

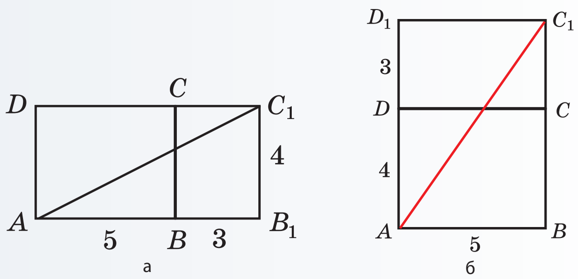


Рис. 7

*Решение.* Рассмотрим развертку, состоящую из двух соседних граней данного параллелепипеда, изображенную на рисунке 6.

Кратчайшим путем из $A$ в $C_1$, проходящим по граням $AA_1B_1B$ и $BB_1C_1C$, является отрезок $AC_1$, длина которого равна $3\sqrt{10}$.

Однако этот путь не является кратчайшим. Рассмотрим другие возможные развертки граней данного параллелепипеда (рис. 7).

Длины соответствующих путей равны $4\sqrt{5}$ и $\sqrt{74}$. Наименьшая длина равна $\sqrt{74}$. Соответствующий путь на поверхности данного параллелепипеда изображен на рисунке 8.

*Ответ*: $\sqrt{74}$.

**Задача 3.** Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильного единичного тетраэдра *ABCD* (рис. 9), соединяющего середины ребер *AB* и *CD*.

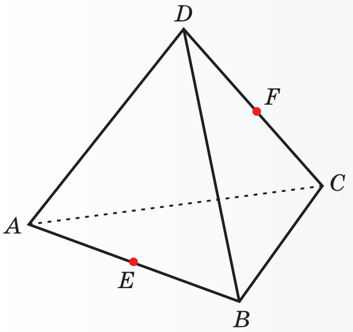


Рис. 9

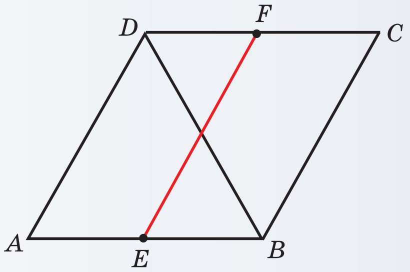


Рис. 10

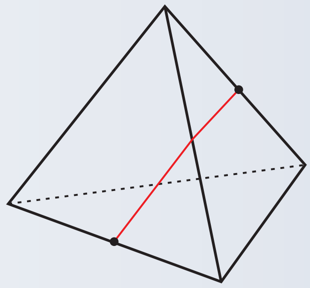


Рис. 11

*Решение*. Рассмотрим развертку, состоящую из двух соседних граней данного тетраэдра, изображенную на рисунке 10.

Кратчайшим путем из $E$ в $F$ является отрезок $EF$, длина которого равна 1. Соответствующий путь на поверхности правильного тетраэдра изображен на рисунке 11.

*Ответ*: 1.

**Задача 4.** Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильного тетраэдра *ABCD* (рис. 12), соединяющего точки *E* и *F*, расположенные на высотах боковых граней в 7 см от соответствующих вершин тетраэдра. Ребро тетраэдра равно 20 см.

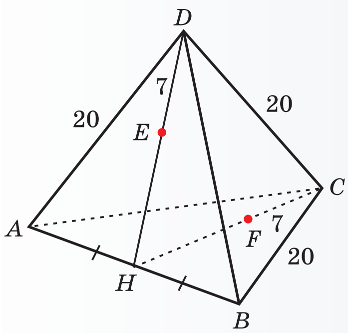


Рис. 12

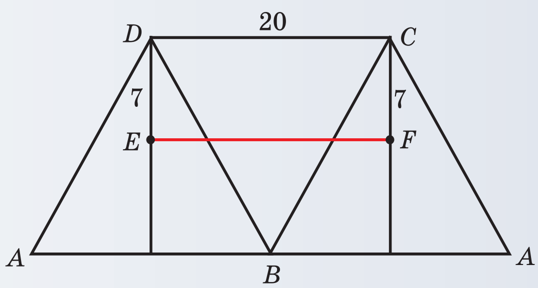


Рис. 14

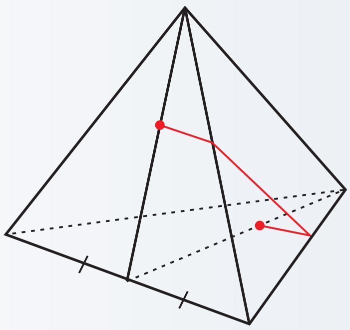


Рис. 13

*Решение*. Одним из возможных путей является путь $EHF$. Его длина равна $\left(20\sqrt{3}-14\right)$ см. Для нахождения другого пути рассмотрим развертку, состоящую из трех граней тетраэдра, изображенную на рисунке 13.

Длина пути $EF$ равна 20 см. Легко видеть, что $20 < 20\sqrt{3}-14$, следовательно, этот путь является кратчайшим. Соответствующий путь на поверхности правильного тетраэдра изображен на рисунке 14.

*Ответ*: 20 см.

**Задача 5.** Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 15), соединяющего вершину $A$ и середину $D$ ребра $B_1C_1$. Все ребра призмы равны 1.

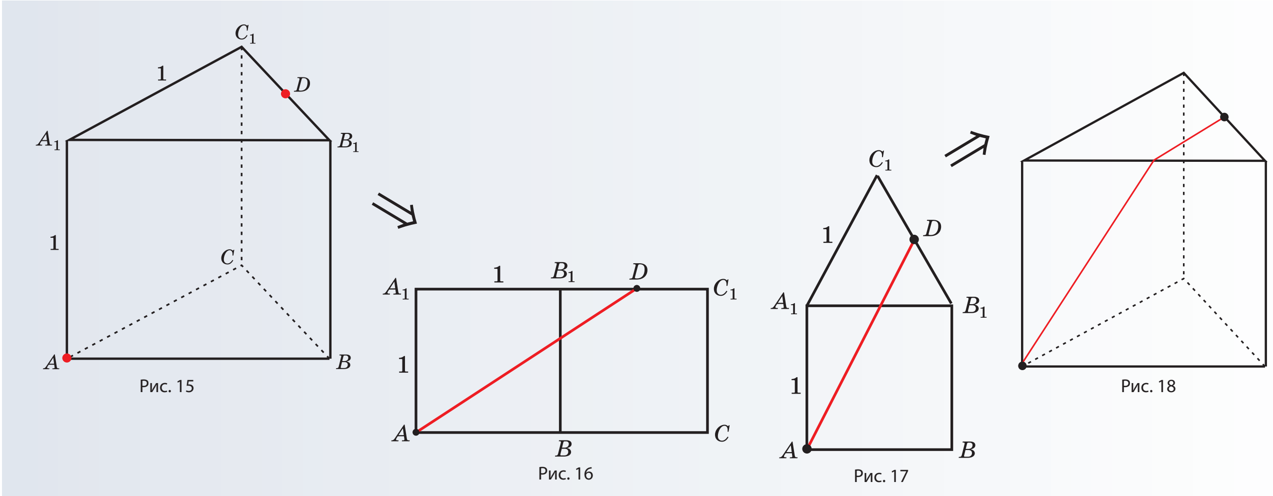


Рис. 15 Рис. 16 Рис. 17 Рис. 18

*Решение*. Рассмотрим развертку, состоящую из двух боковых граней призмы (рис. 16).

Длина кратчайшего пути по этим граням призмы равна длине отрезка $AD$ и равна $\frac{\sqrt{13}}{2}$. Однако путь из $A$ в $D$ может проходить не только по боковым граням, но и по боковой грани и основанию (рис. 17).

В этом случае кратчайшим путем является отрезок $AD$, длина которого равна $\frac{\sqrt{7+2\sqrt{3}}}{2}$. Непосредственные вычисления показывают, что $\frac{\sqrt{7+2\sqrt{3}}}{2}<\frac{\sqrt{13}}{2}$, следовательно, этот путь является кратчайшим (рис. 18).

*Ответ*: $\frac{\sqrt{7+2\sqrt{3}}}{2}$.

**Задача 6.** Найдите длину кратчайшего пути по поверхности правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 19), соединяющего вершины $A$ и $D_1$. Все ребра призмы равны 1.

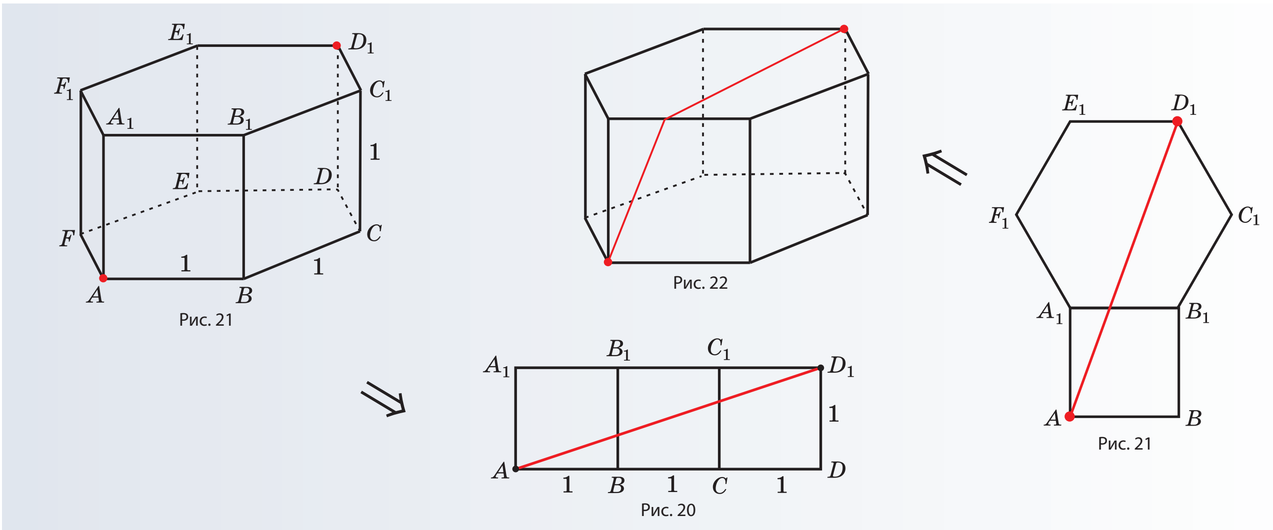


Рис. 21 Рис. 22 Рис. 20 Рис. 21

*Решение*. Рассмотрим развертку, состоящую из трех боковых граней призмы (рис. 20).

Длина кратчайшего пути по этим граням призмы равна длине отрезка $AD_1$ и равна $\sqrt{10}$. Однако путь из $A$ в $D_1$ может проходить не только по боковым граням, но и по боковой грани и основанию (рис. 21).

В этом случае кратчайшим путем является отрезок $AD_1$, длина которого равна $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$. Непосредственные вычисления показывают, что $\sqrt{5+2\sqrt{3}}<\sqrt{10}$, следовательно, этот путь является кратчайшим (рис. 22).

*Ответ*: $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$.

**Задача 7.** На рисунке 23 изображен многогранник, все двугранные углы которого прямые. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого многогранника, соединяющего вершины $B$ и $C_2$.

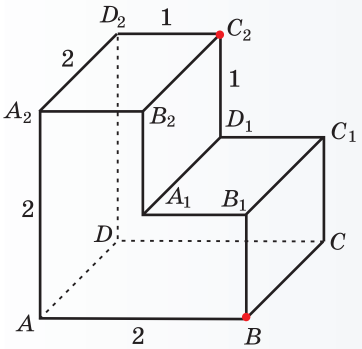


Рис. 23

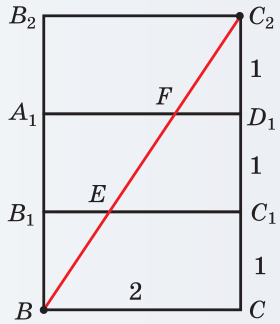


Рис. 24

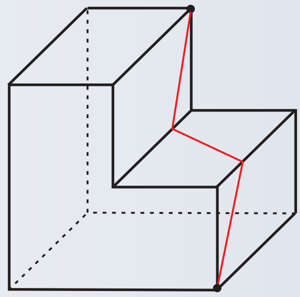


Рис. 25

*Решение*. Рассмотрим развертку трех граней этого многогранника, изображенную на рисунке 24.

Кратчайшим путем из точки $B$ в точку $C_2$ является отрезок $BC_2$, длина которого равна $\sqrt{13}$. Соответствующий путь на поверхности многогранника изображен на рисунке 25.

*Ответ*: $\sqrt{13}$.

Рассмотрим теперь задачу, предложенную на Объединенной межвузовской математической олимпиаде 2011 года учащимся 11-го класса, формулировку которой мы привели в начале данной статьи.

**Задача 8.** На рисунке 26 изображен многогранник, все двугранные углы которого прямые. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого многогранника, соединяющего вершины $B$ и $G_1$.

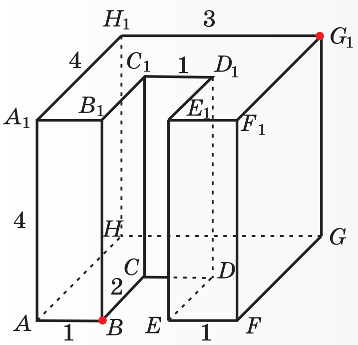


Рис. 26

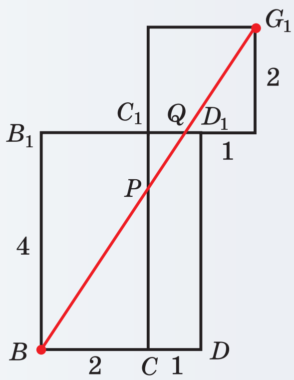


Рис. 27

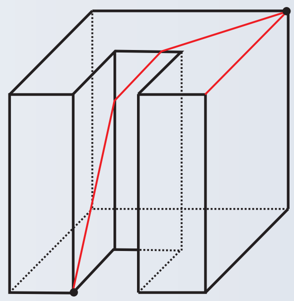


Рис. 28

*Решение*. Рассмотрим развертку, изображенную на рисунке 27, состоящую из двух боковых граней и части верхней грани этого многогранника.

Кратчайшим путем из точки $B$ в точку $G_1$ является отрезок $BG_1$, длина которого равна $2\sqrt{13}$. Соответствующий путь на поверхности многогранника изображен на рисунке 28.

*Ответ*: $2\sqrt{13}$.

Метод нахождения кратчайших путей на сфере отличается от рассмотренного, поскольку сферу или ее часть нельзя развернуть на плоскость. Ознакомиться с ним можно в учебнике: *Смирнова И.М.*, *Смирнов В.А.* Геометрия, 10–11 классы: учебн. для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни). — 6-е изд. — М.: Мнемозина, 2009.

**Задача 9.** Образующая и радиус основания цилиндра равны 1. Найдите длину кратчайшего пути по боковой поверхности этого цилиндра, соединяющего центрально-симметричные точки $A$ и $B$ (рис. 29).

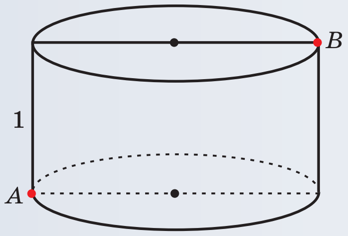


Рис. 29

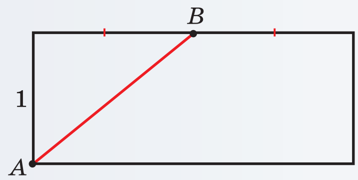


Рис. 30

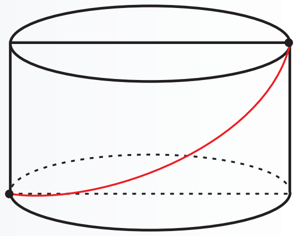


Рис. 31

*Решение*. Разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник со сторонами $2\pi$ и 1. Кратчайшим путем из точки $A$ в точку $B$ является отрезок $AB$, длина которого равна $\sqrt{1+\pi^2}$. Соответствующий путь на поверхности цилиндра изображен на рисунке 31.

*Ответ*: $\sqrt{1+\pi^2}$.

**Задача 10.** На внутренней стенке цилиндрической банки в трех сантиметрах от верхнего края висит капля меда, а на наружной стенке, в диаметрально противоположной точке сидит муха (рис. 32). Найдите кратчайший путь, по которому муха может доползти до меда. Радиус основания банки равен 10 см.

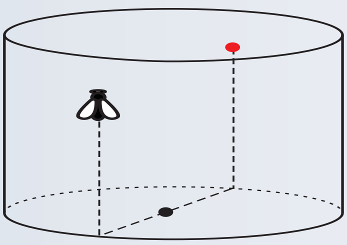


Рис. 32

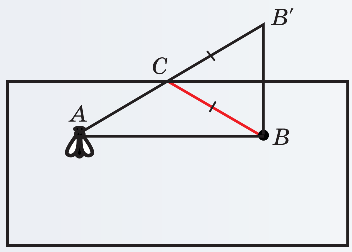


Рис. 33

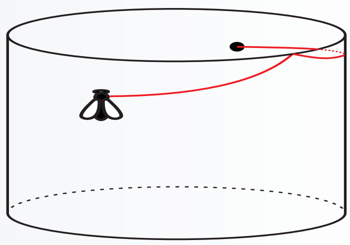


Рис. 34

*Решение*. Разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник (рис. 33).

Конечно, кратчайшим путем между точками $A$ и $B$ является отрезок $AB$. Однако чтобы муха могла попасть на внутреннюю сторону банки, ей нужно переползти через край в некоторой точке $C$. Рассмотрим точку $B'$, симметричную точке $B$ относительно стороны прямоугольника. Тогда отрезки $BC$ и $B'C$ равны, следовательно, длина кратчайшего пути равна длине отрезка $AB'$. Она равна $2\sqrt{25\pi^2+9}$. Соответствующий путь на поверхности банки изображен на рисунке 34.

*Ответ*: $2\sqrt{25\pi^2+9}$.

**Задача 11.** Осевое сечение конуса — правильный треугольник $ABC$ со стороной 1. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого конуса из точки $A$ в точку $D$ — середину стороны $BC$ (рис. 35).

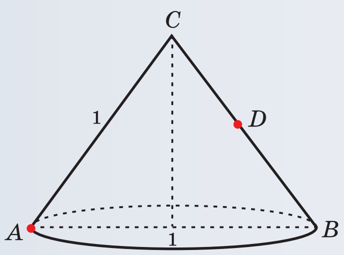


Рис. 35

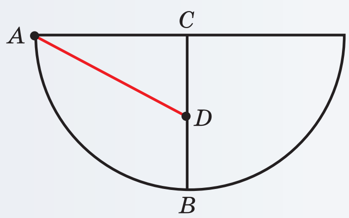


Рис. 36

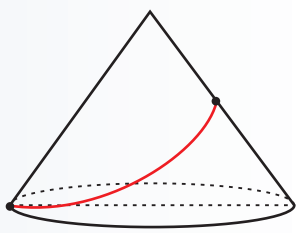


Рис. 37

*Решение*. Разверткой боковой поверхности этого конуса является полукруг радиуса 1 (рис. 36).

Кратчайшим путем из точки $A$ в точку $D$ является отрезок $AD$, длина которого равна $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Соответствующий путь на поверхности конуса изображен на рисунке 37.

*Ответ*: $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

П. СЕВРЮКОВ,
г. Ставрополь

# МАЛЕНЬКИЕ ХИТРОСТИ
## В ЗАДАЧАХ НА ДОЛИ И ПРОЦЕНТЫ

Задачи с долями и процентами при своей внешней простоте не всегда хорошо решаются учащимися, в том числе и при выполнении заданий ЕГЭ. При решении подобных заданий следует придерживаться нескольких несложных правил, которые защитят от ошибок.

***Правило 1.*** Внимательно читаем условие задачи. Все соотношения составляем точно в соответствии с условием.

**Пример 1.** Известно, что товар $x$ на 15% дороже товара $y$. Можно ли при решении задачи считать, что товар $y$ на 15% дешевле товара $x$?

*Решение.* Предположим, ученик посчитал, что товар $y$ на 15% дешевле товара $x$, тогда справедливо соотношение $y = 0{,}85x$, откуда $x = \dfrac{y}{0{,}85} \approx 1{,}176$, то есть товар $x$ почти на 18% дороже товара $y$. Это не соответствует исходному условию задачи.

Так, незаметно для себя видоизменив условие задачи, ученик исказил ее условие.

***Правило 2.*** Обращаем внимание на вопрос, поставленный в задаче, и отвечаем именно на поставленный вопрос.

**Пример 2.** Известно, что стоимость бриллианта пропорциональна квадрату его массы. В процессе огранки у ювелира бриллиант раскололся на две части, причем суммарная стоимость осколков составила 68% от стоимости нерасколовшегося бриллианта. Какая часть откололась от бриллианта при огранке?

*Решение.* Пусть массы бриллианта и его частей $m$, $m_1$ и $m_2$ соответственно; $k$ — коэффициент пропорциональность между массой бриллианта и его стоимостью. По условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} m = m_1 + m_2, \\ km_1^2 + km_2^2 = 0{,}68km^2. \end{cases}$$

Поскольку $k \neq 0$, получаем последовательно

$$m_1^2 + m_2^2 = 0{,}68m^2, \quad m_1^2 + (m - m_1)^2 = 0{,}68m^2, \quad m_1^2 - m_1 m + 0{,}16m^2 = 0.$$

Откололась часть $\dfrac{m_1}{m}$, тогда имеем квадратное уравнение

$$\left(\frac{m_1}{m}\right)^2 - \frac{m_1}{m} + \frac{4}{25} = 0,$$

решая которое, получаем:

$$\left(\frac{m_1}{m}\right)_1 = \frac{1}{5}, \quad \left(\frac{m_1}{m}\right)_2 = \frac{4}{5}.$$

Внимательно читая вопрос задачи, понимаем, что меньшее откалывается от большего, поэтому в ответ записываем меньший корень квадратного уравнения.

## Литература

**1.** Математика ЕГЭ 2010 (открытый банк данных). URL: www.mathege.ru.

**2.** Математика. Подготовка к ЕГЭ-2010. Тематические тсты: геометрия, текстовые задачи. Уч.-метод. пособ. / под. ред. Ф.Ф. Лысенко. — Ростов-на-Дону: Легион-М., 2009.

*Ответ:* от бриллианта откололась одна пятая часть, или 0,2.

***Замечание 1.*** В текстовых задачах целесообразнее выбирать буквенные обозначения, известные, например, из физики. Обозначая время буквой $t$, а скорость буквой $v$, мы избежим возможных ошибок при обозначении скорости буквой $x$, а времени буквой $y$!

Иногда задача хорошо решается, только учащимся не совсем понятен получаемый результат [2, с. 40].

**Пример 3.** Первая смесь содержит вещества $A$ и $B$ в соотношении 4 : 5, соответственно вторая смесь содержит те же вещества, но в соотношении 6 : 7. Сколько частей первой смеси надо взять, чтобы получить третью смесь, составленную из части первой смеси и части второй смеси и содержащую те же вещества в отношении 5 : 6?

*Решение.* Пусть первой смеси было $x$ частей, а второй смеси — $y$ частей. Составим уравнение баланса (терминология урока химии) для первого вещества в соответствии с условием задачи:

$$\frac{4}{9}x+\frac{6}{13}y=\frac{5}{11}(x+y),\ \left(\frac{6}{13}-\frac{5}{11}\right)y=\left(\frac{5}{11}-\frac{4}{9}\right)x,$$

$$\frac{x}{y}=\frac{9}{13}.$$

*Ответ:* нужно взять 9 частей первой смеси.

***Замечание 2.*** Не совсем понятно для любого грамотного ученика, по отношению к каким частям выбираются эти 9 частей. То ли по отношению к 13, то ли по отношению к 22? То ли...

***Замечание 3.*** В задачах на смеси и сплавы, особенно если по условию задаются процентные соотношения и ответ предлагается дать в процентах, не всегда при решении целесообразно переходить от процентов к сотым, а потом возвращаться снова к процентам.

**Пример 4.** К 100 г 20%-го раствора спирта добавили 300 г 10%-го спиртового раствора. Определить процентную концентрацию полученного раствора.

*Решение.* Пусть концентрация полученного раствора $x$%, тогда по условию задачи

$$100\cdot 20\% + 300\cdot 10\% = 400\cdot x\%;$$

$$20 + 30 = 4x;\ x = 12{,}5.$$

*Ответ:* 12,5.

**Пример 5.** Смешали 10%-й и 25%-й растворы соли и получили 3 кг 20%-го. Сколько килограммов 10%-го раствора было использовано?

*Решение.* Пусть было использовано $x$ кг 10%-го раствора, тогда по условию задачи

$$x\cdot 10\% + (3-x)\cdot 25\% = 3\cdot 20\%;$$

$$10x + 75 - 25x = 60;\ x = 1.$$

*Ответ:* 1.

***Замечание 4.*** В чистой воде концентрация раствора равна 0%.

**Пример 6.** В сосуде находится 10%-й раствор спирта. Из сосуда отлили $\frac{1}{3}$ содержимого, а оставшуюся часть долили водой так, что сосуд оказался заполненным на $\frac{5}{6}$ первоначального объема. Какое процентное содержание спирта оказалось окончательно в объеме?

*Решение.* Пусть объем сосуда равен $V$, тогда после отливания $\frac{1}{3}$ содержимого останется $\frac{2}{3}V$.

Если процентное содержание спирта, полученное после переливаний, равно $x$, получаем уравнение

$$\frac{2}{3}V\cdot 10\% + \left(\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\right)V\cdot 0\% = \frac{5}{6}V\cdot x\%,$$

откуда $x = 8$.

*Замечание 4* дает возможность упростить решение:

$$\frac{2}{3}V\cdot 10\% = \frac{5}{6}V\cdot x\%,$$

или просто $\frac{2}{3}\cdot 10=\frac{5}{6}\cdot x.$ И опять $x = 8$. Именно такими соотношениями пользуются физики и химики при выборе нужной концентрации.

Несколько особняком стоят задачи, которые учащиеся называют задачами «на переливание из пустого в порожнее». Эти задачи хорошо решаются при грамотном подходе к описанию каждого шага действий, соответствующих условию задачи.

**Пример 7.** В три сосуда налита вода. Сначала из первого сосуда перелили половину содержимого во второй, затем треть получившегося объема из второго сосуда перелили в третий; и наконец, четверть получившегося объема из третьего сосуда перелили в первый. При этом в каждом из сосудов оказалось по 9 литров жидкости. Сколько воды было в первом сосуде первоначально?

*Решение.* Ясно, что всего в трех сосуда было 27 литров воды. Если первоначально в сосудах находилось соответственно $x$, $y$ и $z$ литров воды, то

| $x$ | $\to\frac{1}{2}\to$ | $y$ | | $z$ |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}x$ | | $\frac{1}{2}x+y$ | $\to\frac{1}{3}\to$ | $z$ |
| $\frac{1}{2}x$ | | $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y$ | | $\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}y+z$ |
| $\uparrow$ | $\leftarrow\frac{1}{4}\leftarrow$ | | | $\downarrow$ |
| $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{24}\right)x+\frac{1}{12}y+\frac{1}{4}z$ | | $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y$ | | $\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}y+\frac{3}{4}z$ |

$x + y + z = 27$. Получено первое уравнение для решения задачи.

Теперь покажем содержание воды в каждом из сосудов после каждого этапа переливания (см. таблицу).

По условию задачи в каждом из сосудов после переливания оказалось по 9 литров воды. Добавим к полученному уравнению два самых простых. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=27, \\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y=9, \\ \frac{1}{8}x+\frac{1}{4}y+\frac{3}{4}z=9; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=27, \\ x+2y=27, \\ x+2y+6z=72. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений $y = z$; с учетом второго уравнения системы получаем из третьего:

$$6z = 45, \text{ и } z = y = 7{,}5.$$

Тогда $x = 12$.

*Ответ:* в первом сосуде было12 л воды.

# ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА-2011: НАЗВАНЫ ПОБЕДИТЕЛИ

## 11 класс

### Победители

***Цыбышев Алексей Евгеньевич***, гимназия № 1, г. Самара;

***Егоров Дмитрий Сергеевич***, физико-математический лицей № 239, г. Санкт-Петербург;

***Пахарев Алексей Анатольевич***, СУНЦ МГУ, г. Москва;

***Макаров Даниил Вячеславович***, центр образования № 57, г. Москва;

***Решетников Иван Андреевич***, физико-математический лицей № 5, г. Долгопрудный, Московская обл.;

***Григорьев Михаил Александрович***, лицей № 131, г. Казань;

***Крачун Дмитрий Николаевич***, физико-математический лицей № 239, г. Санкт-Петербург.

### Призеры

***Сергиенко Ярослав Михайлович***, Институт современных технологий и экономики, г. Краснодар;

***Бурова Ольга Павловна***, лицей «Вторая школа», г. Москва;

***Малясова Виктория Александровна***, СУНЦ МГУ, г. Москва;

***Циглер Александр Сергеевич***, школа № 5, г. Магнитогорск, Челябинская обл.;

***Балобанов Арсений Евгеньевич***, СУНЦ МГУ, г. Москва;

***Хомутов Никита Юрьевич***, СУНЦ МГУ, г. Москва;

***Миронов Михаил Константинович***, центр образования № 57, г. Москва;

***Осипов Матвей Васильевич***, многопрофильный лицей № 20, г. Ульяновск;

***Морозков Алексей Андреевич***, лицей № 31, г. Челябинск;

***Бесман Дмитрий Владиславович***, СУНЦ МГУ, г. Москва;

***Гонин Роман Романович***, гимназия, г. Раменское, Московская обл.;

***Великанов Дмитрий Михайлович***, СУНЦ МГУ, г. Москва;

***Королев Николай Юрьевич***, лицей им. Н.И. Лобачевского при Казанском государственном университете, г. Казань;

***Мукосеева Екатерина Вадимовна***, физико-математический лицей № 239, г. Санкт-Петербург;

***Чикин Владимир Максимович***, лицей № 36, г. Нижний Новгород;

***Юркин Виктор Юрьевич***, Курганский областной лицей-интернат среднего (полного) общего образования для одаренных детей, г. Курган;

***Ермишкина Екатерина Михайловна***, «Московская гимназия на Юго-Западе № 1543», г. Москва;

***Забиякин Иван Владимирович***, физико-математический лицей № 239, г. Санкт-Петербурга;

***Зайцев Константин Вячеславович***, лицей № 31, г. Челябинск;

***Корчемкин Дмитрий Александрович***, лицей № 21, г. Киров;

***Кунявский Павел Евгеньевич***, физико-технический лицей № 1, г. Саратов;

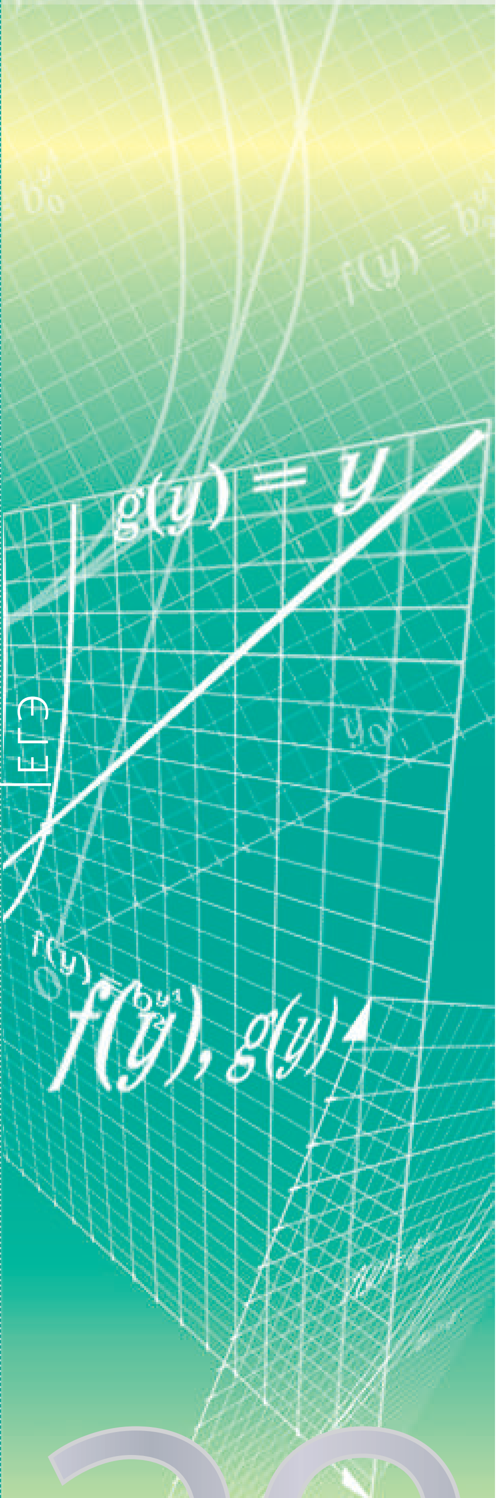
***Минеев Дмитрий Александрович***, центр образования № 57, г. Москва.

М. МАХОВЕР,
И. ЖУВИКИНА,
г. Санкт-Петербург

# ЗАДАЧА С5: ЕСТЬ ЕЩЕ РЕШЕНИЯ!

*От редакции.* Ошибки и опечатки в учебных изданиях, к сожалению, встречаются нередко, даже в сборниках для подготовки к экзаменам. Иногда они очевидны, но в сложных задачах это очевидно не всегда. Авторы материала, присланного из Санкт-Петербурга, разбирают задачу из сборника[1].

И они приходят к выводу, что ответ в сборнике не содержит всех решений этой задачи. Чтобы внести ясность, редакция обратилась за консультацией к заместителю декана механико-математического факультета МГУ, доктору физико-математических наук, профессору И.Н. Сергееву. Мы предлагаем вниманию читателей статью с его комментарием.




Разберем решение одной из задач группы С5, приведенной в упомянутом сборнике. Обращаем ваше внимание, что ответ к этой задаче, приведенный в сборнике, возможно, не содержит всех решений.

**Задача.** Найдите все значения параметра $a$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_{a^2} y = \left(x^2+3x+2\right)^4, \\ -x^2+y=3x+2 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Рассмотрим стандартный путь решения задач подобного типа. Сначала определим ОДЗ. По параметру $a$: $a \neq 0$, $a \neq 1$, по переменной $y$: $y > 0$.

Обозначив $a^2 = b$, исходную систему уравнений запишем в виде:

$$\begin{cases} \log_b y = y^4, \\ y = x^2+3x+2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b^{y^4} = y, & (1) \\ y = x^2+3x+2. & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим сначала уравнение $x^2 + 3x + (2 - y) = 0$. Его дискриминант $D = 9 - 4(2 - y) = 4y + 1 > 0$ для всех значений $y$ из ОДЗ. Это означает, что каждому корню уравнения (2) соответствуют два решения исходной системы. Найдем, при каких значениях $b$ уравнение (1) имеет единственное решение.

Уравнение (1) содержит только одну неизвестную — $y$. Количество решений этого уравнения определяется количеством точек пересечения графиков функций $f(y)=b^{y^4}$ и $g(y) = y$. Количество этих точек различно и зависит от значений величины $b$. Поведение функции $f(y)=b^{y^4}$ существенно различается при значениях $b > 1$ и при значениях $0 < b < 1$.

[1] *Высоцкий И.Р., Гущин И.Д., Захаров П.И.* и др. ЕГЭ-2011. Математика. Типовые тестовые задания / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. — М.: Экзамен, 2011. — (Серия «ЕГЭ-2011. Типовые тестовые задания»)

Первому случаю соответствует рисунок 1. Рассмотрим его.

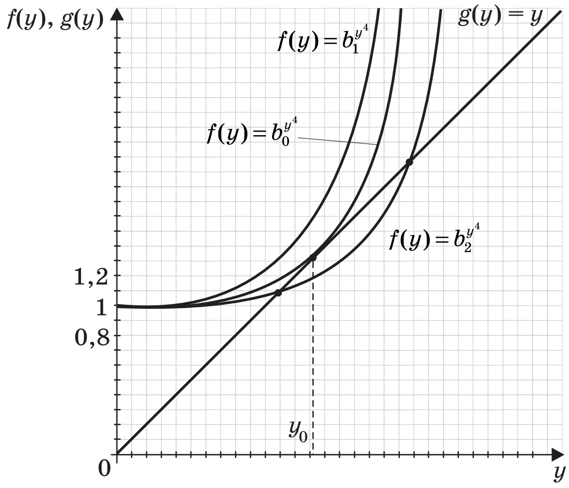



Рис. 1

При некотором $b = b_0$ графики имеют одно пересечение; при $b = b_1 > b_0$ пересечений нет; при $b = b_2$ таком, что $1 < b_2 < b_0$ — два пересечения. Случай $b = b_0$, соответствующий касанию графиков в некоторой точке, удовлетворяет требованию задачи. Величину $b_0$ найдем из условий:

$$\begin{cases} b_0^{y^4}\Big|_{y=y_0} = y\big|_{y=y_0}, \\ \left(b_0^{y^4}\right)'\Big|_{y=y_0} = (y)'\big|_{y=y_0}. \end{cases} \qquad (3)$$

Эти условия из всех графиков функций $f(y)=b^{y^4}$, соответствующих различным значениям параметра $b$, выделяют тот, на котором существует точка, в которой равны и значения функций $f(y)$ и $g(y)$, и значения их производных. Решим систему уравнений (3):

$$\begin{cases} b_0^{y_0^4} = y_0, \\ b_0^{y_0^4}\cdot 4y_0^3\cdot \ln b_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0^{y_0^4} = y_0, \\ \ln b_0 = \dfrac{1}{4y_0^4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_0^{y_0^4} = y_0, \\ b_0 = e^{\frac{1}{4y_0^4}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = e^{\frac{1}{4}}, \\ b_0 = e^{\frac{1}{4b}}. \end{cases}$$

Возвращаясь к параметру $a$, находим, что при $a = \mp e^{\frac{1}{8b}}$ исходная система уравнений имеет два решения.

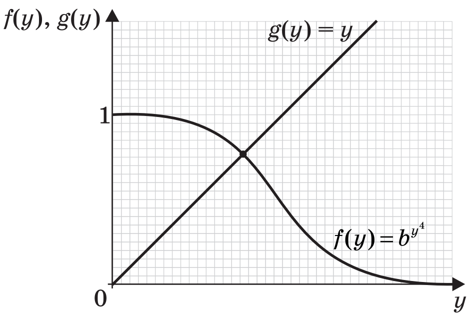



Рис. 2

График на рисунке 2 показывает, что при любых $0 < b < 1$ уравнение (1) имеет одно решение, а значит, исходная система имеет два решения.

С учетом случая, приведенного на рисунке 1, получаем окончательный ответ:

$$a \in \left\{-e^{\frac{1}{8b}}\right\} \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup \left\{e^{\frac{1}{8b}}\right\}.$$

Отметим, что в ответе к данной задаче, приведенном в данном сборнике (1), упущены значения параметра $a = -e^{\frac{1}{8b}}$ и $a = e^{\frac{1}{8b}}$, соответствующие решениям системы уравнений в случаях, изображенных на рисунке 1.

## Комментарий профессора, доктора физико-математических наук И.Н. Сергеева

Надо признать, что по существу приведенная заметка справедлива — ответ, приведенный в сборнике, неверен, поскольку содержит не все искомые значения параметра. Спасибо авторам заметки.

Однако у меня возникло несколько замечаний по поводу приведенного в ней решения, которые также целесообразно обсудить.

*Первое.* Решение системы (3) формально не получено, так как в предложенном тексте из этой системы выведено некое следствие, означающее лишь, что если решение есть, то оно — только такое, какое найдено (и кстати уж, необходимо убедиться еще и в выполнении неравенства $b_0 > 1$, которое в данном случае действительно имеет место).

*Второе.* Одного только касания графиков в некоторой точке, на самом-то деле, не достаточно, чтобы они имели ровно одну точку пересечения — для того чтобы это можно было утверждать, нужно что-то дополнительно доказывать, например:

1) проверить выпуклость функции $f(y)=b^{y^4}$ (ссылки на рисунок не достаточно: его можно было нарисовать и по-другому);

2) тонко воспользоваться тем, что найденная точка касания единственна.

*Третье.* Фраза «график на рисунке 2 показывает...» не корректна (это не график, а схема, которая не содержит точной информации о графике), тогда как для обоснования приведенного рассуждения достаточно лишь вспомнить о разной монотонности рассматриваемых функций и сравнить их значения на концах некоторого промежутка.

В. ДУБРОВСКИЙ,
Москва

Фото Н. Куксиной

# ДИНАМИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ С «МАТЕМАТИЧЕСКИМ КОНСТРУКТОРОМ»

## Эпизод 3. Обманчивый чертеж

Продолжая тему многовариантных геометрических задач, обратимся к задаче, сформулированной в конце предыдущей заметки:

**Задача 1.** Через каждую из вершин $B$ и $D$ параллелограмма $ABCD$ проведены прямые, перпендикулярные к $AB$ и $BC$. Они ограничивают параллелограмм, подобный $ABCD$. Найдите площадь $ABCD$, если $AB = 1$, $BC = 2$.

*Прежде чем читать решение и обсуждение этой задачи, очень рекомендуем решить ее самостоятельно.*

Углы данного параллелограмма $ABCD$ не заданы. При их изменении изменяется взаимное расположение двух рассматриваемых параллелограммов, и отсюда возникает разнообразие вариантов в этой задаче. Легче всего проследить за ними с помощью динамической модели. Построить ее легко, но мы поясним, как сделать это быстро, используя широкий выбор инструментов МК.

Чтобы чертеж получился более аккуратным, построим сначала горизонтальную прямую, затем возьмем инструмент «*Середина*» и отметим на прямой две точки, $B$ и $C$; в результате возникнет и середина $M$ отрезка $BC$, через которую мы проведем окружность с центром $B$. Теперь возьмем инструмент «*Параллелограмм*» и отметим последовательно точки $C$, $B$ и произвольную точку окружности (впоследствии обозначим ее $A$); появится параллелограмм $CBAD$, моделирующий данный параллелограмм (рис. 1); его форму можно изменять, перемещая точку $A$ по окружности. Теперь горизонтальную прямую, точку $M$ и окружность можно спрятать, а внутренность параллелограмма удалить (впрочем, это дело вкуса). Параллелограмм $BFDE$ строится с помощью инструментов «*Перпендикуляр*» и «*Ломаная*», которым нужно последовательно «кликнуть» на все точки пересечения четырех прямых, проведенных из $B$ и $D$ перпендикулярно к $BC$ и $BA$, причем точки пересечения $E$ и $F$ строить заранее не нужно (рис. 2).

Приступим к исследованию чертежа. Достроив стороны $BA$ и $DA$ до высот $BB_1$ и $DD_1$ треугольника $BDF$, видим, что $A$ — точка пересечения его высот. Допустим сначала, что нам удалось найти такое положение точки $A$, при котором $\angle ABC$ – острый (рис.

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 12.

3), и параллелограммы подобны. В принципе, возможны два случая: $FD = 2FB$ и $2FD = FB$. Но поскольку очевидно, что $\angle FBA = \angle FDA$, а $\angle ABD > \angle ADB$ (так как $AD > AB$), то $\angle FBD > \angle FDB$, и следовательно, имеет место случай $FD = 2FB$, а значит, $DD_1 = 2BB_1$ (т.к. $DD_1 \cdot FB = BB_1 \cdot FD = 2S_{FBD}$). С другой стороны, полагая $AD_1 = x$, получим: $AB_1 = 2x$, так как треугольники $D_1BA$ и $B_1DA$ подобны. Учитывая, что $AD = 2$, $AB = 1$, получаем уравнение:

$$2 + x = AD + x = DD_1 = 2BB_1 =$$
$$= 2(AB + 2x) = 2 + 4x \Leftrightarrow x = 0,$$

что невозможно при остром угле $ABC$. Говоря точнее, значение $x = 0$ отвечает тривиальному случаю $\angle ABC = 90°$, то есть случаю, когда данный параллелограмм — прямоугольник; ясно, что в это случае второй параллелограмм — это тот же прямоугольник, условие задачи выполнено и искомая площадь равна 2.

Но наше исследование на этом не заканчивается. Увеличив угол $B$, получим расположение, показанное на рисунке 4. Здесь можно провести аналогичное исследование, но проще заметить, что если параллелограммы на этом рисунке подобны, то фактически мы получаем уже рассмотренный случай, только роль исходного параллелограмма теперь играет параллелограмм $BEDF$. Так что и этот случай невозможен. Но и это еще не конец!

Передвинув точку $A$ еще дальше, мы приходим к новому расположению, в котором $\angle ABD$ становится тупым (рис. 5), а приведенные выше рассуждения неприменимы (в частности, равенство $\angle FBA = \angle FDA$ заменяется на $\angle FBA + \angle FDA = 180°$). Заметим, что сейчас диагональ $BD$ в обоих параллелограммах соединяет вершины тупых углов, поэтому она соответствует сама себе при преобразовании подобия, переводящего один параллелограмм в другой, и углы $B$, $D$, $A$ треугольника $BDA$ равны углам $D$, $B$, $E$ треугольника $DBE$. (Попутно получаем, что коэффициент подобия параллелограммов равен 1, то есть они равны, но этот факт нам не понадобится.) Если $\angle BDA = \alpha$, то

$$\angle DBA = \angle DBE + 90° = \alpha + 90°.$$

По теореме синусов для треугольника $ABD$,

$$\sin \angle DBA : \sin \angle BDA =$$
$$= \sin(\alpha + 90°) : \sin \alpha = AD : AB = 2,$$

откуда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$. Наконец,

$$\angle BAD = 180° - (90° + 2\alpha) = 90° - 2\alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sin \angle BAD = \cos 2\alpha = \frac{3}{5}.$$

*Ответ*: $S_{ABCD} = \frac{6}{5}$.

Интересно, что в обоих возможных случаях в этой задаче параллелограммы оказываются равными. Предлагаем для самостоятельного решения аналогичную задачу, в которой потребуется более подробное исследование.

**Задача 2.** Через каждую из вершин $B$ и $D$ параллелограмма $ABCD$ проведены прямые, перпендикулярные к $AB$ и $BC$. Они ограничивают параллелограмм, отношение сторон которого

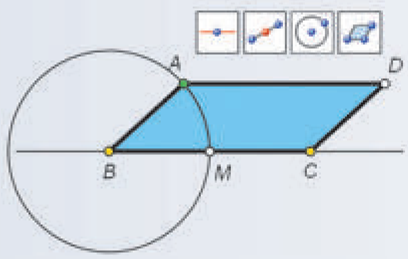


Рис. 1

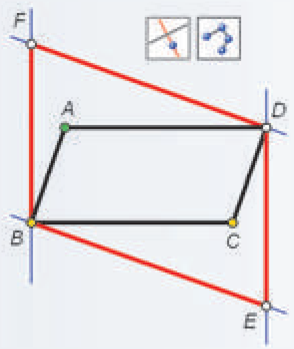


Рис. 2

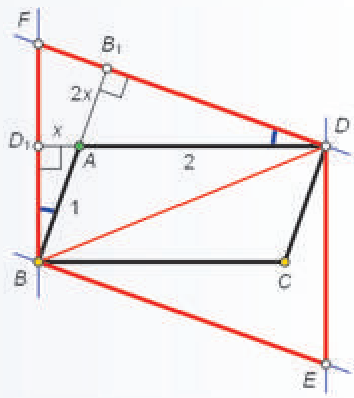


Рис. 3

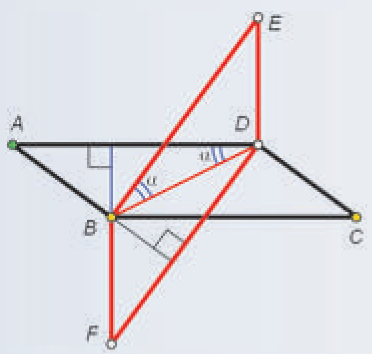


Рис. 5

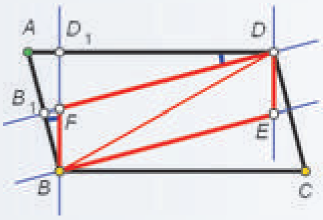


Рис. 4

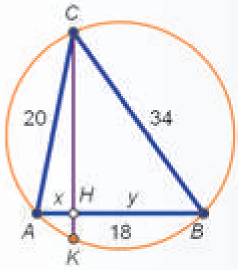


Рис. 6

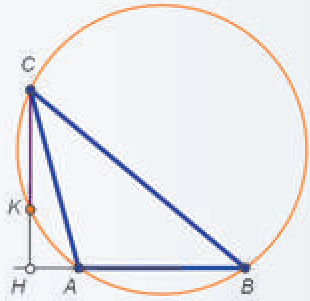


Рис. 7

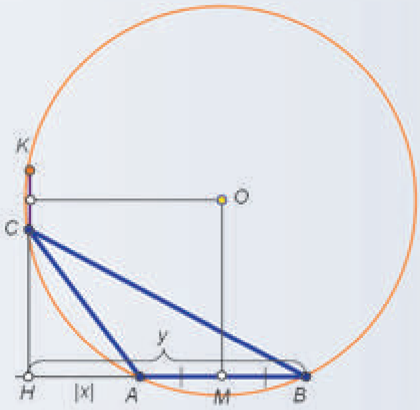


Рис. 8

равно 3 : 2. Найдите площадь второго параллелограмма, если $AB = 1$, $BC = 2$.

*Ответ*: $\frac{9\sqrt{15}}{20}$; $\frac{9\sqrt{15}}{10}$.

В следующей задаче, сообщенной автору белорусским учителем, энтузиастом динамической геометрии И.С. Храповицким, условие определяет фигуру совершенно однозначно, и тем не менее нам приходится учитывать гипотетические варианты.

**Задача 3.** В круг вписан треугольник со сторонами 18, 34 и 20 см. Вычислите длину хорды, которая лежит на одной прямой с большей высотой треугольника.

Если, по привычке, нарисовать на чертеже остроугольный треугольник (рис. 6) то можно наметить такое решение: положим $AH = x$, $BH = y$, решим систему уравнений $x + y = AB = 18$ (наибольшая высота $CH$ проводится к наименьшей стороне), $34^2 - y^2 = 20^2 - x^2$ $(= CH^2)$, и найдем высоту $CH$; тогда $HK$ можно будет найти по теореме о пересекающихся хордах: $HK \cdot CH = xy$, а искомая хорда равна $CH + HK$. Но начав эти вычисления, мы сразу получим, что $y > AB$! Это значит, что угол $A$ — тупой и рисунок надо исправить (рис. 7). Однако и в этом случае вычисления, которые мы оставляем читателю, ведут к противоречию! В чем же дело? Оказывается, имеет место третий, поначалу совсем неочевидный случай «очень тупого» угла $A$ (рис. 8). Вычисление для этого случая проведите самостоятельно.

При решении задач такого рода нужно, во-первых, понять, как выглядит чертеж, для чего необходимо учесть все мыслимые возможности — здесь-то и помогает точное построение, которое легко выполнить на компьютере, либо динамическая модель, демонстрирующая все случаи. Во-вторых, нужно обосновать правильное расположение вычислением. Впрочем, часто удается найти решение, не зависящее от чертежа (вспомним известный афоризм «Геометрия — это искусство проводить правильные рассуждения на неправильном чертеже»). В данном случае длину хорды можно найти, зная радиус окружности и расстояние от хорды до центра. Радиус $R$ вычисляется по формуле для площади треугольника $S = \frac{abc}{4R}$, где $a$, $b$, $c$ — его стороны, а площадь $S$ выражается через них по формуле Герона. А расстояние от центра до хорды, то есть до прямой $CH$ на наших рисунках, равно расстоянию от середины $M$ стороны $AB$ до основания высоты $H$; в наших обозначениях — $\frac{|x - y|}{2}$, где $x$ и $y$ — решения приведенных выше уравнений (при этом $x$ и $y$ – это длины отрезков $AH$ и $BH$, взятые с соответствующими знаками; например, на рис. 8 $x < 0$, $y > 0$). Первое решение также можно сделать универсальным с помощью направленных отрезков и понятия степени точки относительно окружности.

*Ответ*: 6,5.

Не лишено оснований опасение, что компьютер «убивает» изюминку в подобных задачах, страхуя решающего от попадания в заготовленные ловушки. Но ведь и простые линейка с циркулем точно так же «убьют» нашу задачу 3, если аккуратно построить чертеж с их помощью. Поэтому интереснее предлагать решать эти задачи «вручную», а компьютерные модели можно использовать при разборе. С другой стороны, благодаря легкости, с которой строятся интерактивные геометрические модели, познакомить учеников с большим числом стандартных ситуаций, порождающих «многовариантность».

Д. ЗЛАТОПОЛЬСКИЙ,
Москва

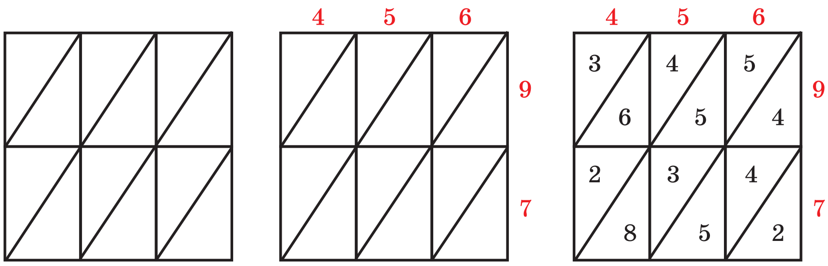
# СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ В ЭПОХУ ДО КАЛЬКУЛЯТОРОВ

## Умножение решеткой

В средневековой Европе был широко распространен способ умножения многозначных чисел, известный как «умножение решеткой» или «способ жалюзи». По-видимому, он был разработан в Индии, но имел применение и в других странах Востока [1]. Этот способ легко уяснить на примере.

Пусть необходимо умножить 456 на 97.

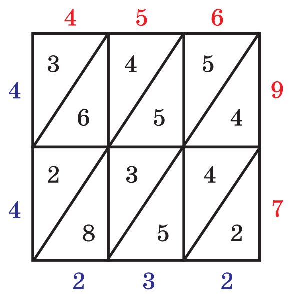
Рисуется табличка из трех столбцов (число 456 — трехзначное) и двух строк (97 — двузначное число). Каждая клетка разделяется диагональю так, как показано на рисунке:




Цифры чисел 456 и 97 записываются соответственно над табличкой и справа от нее.

После этого в каждую клетку записывается произведение цифры, стоящей в соответствующем столбце сверху, на цифру в соответствующей строке справа, причем десятки и единицы произведения разделяются упомянутой выше диагональю.

Теперь можно определить результат умножения. Для этого необходимо просуммировать цифры по наклонным полоскам справа налево, при необходимости перенося «в уме» в соседнюю слева полоску единицу или двойку и записывая эти суммы так, как показано на рисунке.




Результат следует читать слева от таблички сверху вниз, а затем под табличкой слева направо — он равен 44 232. Красиво, не правда ли?

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 12.

Чтобы оценить преимущества умножения решеткой, сравните время, требующееся для получения произведения, скажем, чисел 53 896 и 274 при использовании этого способа и обычного умножения «в столбик». Интересно, получатся ли результаты одинаковыми?

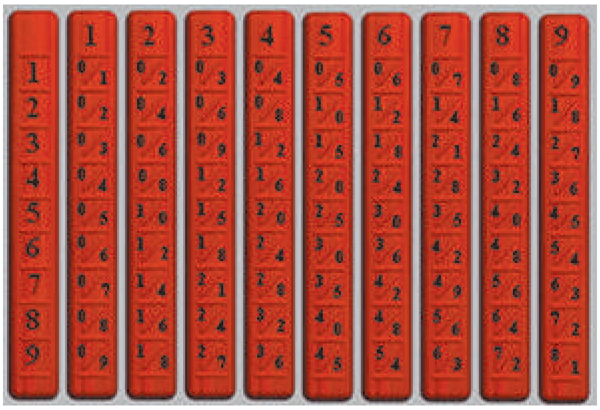
## Палочки Непера

Способ умножения решеткой был положен в основу счетного прибора, описанного шотландским математиком Джоном Непером (кстати — изобретателем логарифмов) в 1617 г. Этот простой счетный прибор в дальнейшем получил название «палочки Непера», «бруски Непера», «пластины Непера» и т.п.

Прибор представлял собой набор прямоугольных пластин (палочек), в который входили:

— палочки с результатами умножения всех чисел от 0 до 9 на числа от 0 до 9; сверху каждой палочки наносилось число от 0 до 9 (на рисунке справа показаны девять таких палочек). Результат умножения на палочках представлен двумя цифрами (в том числе начальным нулем), разделенными наклонной чертой;

— одна палочка с нанесенными на нее цифрами от 1 до 9 (указатель строк); на рисунке она изображена слева.



Палочки Непера

Для умножения с помощью этого прибора выбирались палочки, соответствующие значениям разряда множимого, и выкладывались в ряд так, чтобы цифры сверху каждой палочки составляли множимое. На рисунке показан пример умножения для числа 4938. Так как в множимом могли быть одинаковые цифры, то необходимо было иметь несколько палочек с каждой цифрой.

Слева прикладывали палочку — указатель строк, по которой выбирали строки, соответствующие разрядам множителя. Для умножения, например, на 3 рассматривались соответствующие строки на палочках с цифрами 4, 9, 3 и 8. Результат умножения определялся следующим образом:

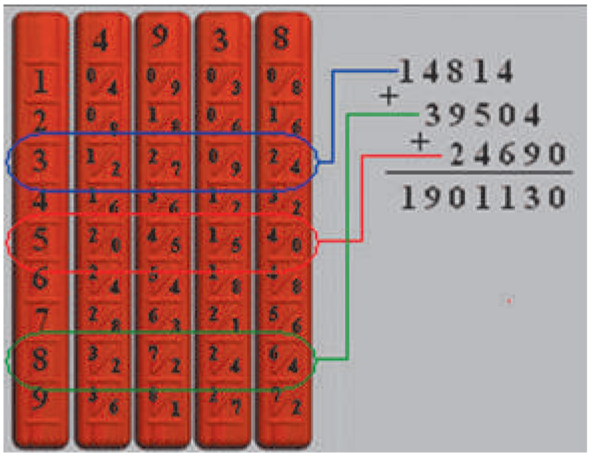
— последняя цифра произведения равна 4 (цифра под чертой в крайней справа палочке);

— остальные цифры определялись суммированием цифр «по наклонной линии»: предпоследняя цифра равна 1 (2 + 9 = 11, единица переходит в старший разряд), следующая справа цифра — 8 (0 + 7, и еще единица перешла справа), следующая — 4 (2 + 2), первая слева — 1.

Итак, результат равен 14 814.

Если множитель являлся многозначным, то результаты, полученные для каждой строки (для каждой цифры множителя), складывались между собой с учетом порядка разрядов.

На рисунке показан пример умножения числа 4938 на число 385.




Умножение на палочках Непера
(4938 · 385 = 1901130)

## Счислитель Куммера

Те, кто умеет считать на счетах, знают, что при вычислениях на них имеются две «проблемы»:

— *первая* связана с переносом единицы в старший (вышерасположенный) разряд при сложении. Так, если в каком-то разряде было отложено, например, 7 косточек, то для того, чтобы добавить к ним 8, необходимо добавить одну косточку в старший разряд, а в данном — вычесть две;

— *вторая* связана с заимствованием единицы из старшего разряда при вычитании. Например, если в каком-то разряде было отложено, например, 3 косточки, то для того, чтобы вычесть из них 6, необходимо вычесть 1 из старшего разряда, а в данном — добавить 4.

Но уже в середине XIX в. был создан счетный прибор, в котором эти операции (перенос и заимствование единицы) осуществлялись автоматически. Он был изобретен в 1846 г. петербургским учителем музыки (!) Генрихом Куммером. Внешний вид прибора показан на фото.


http://www.leningrad.su/jj/2010/kummer-2.jpg

Внешний вид счислителя Куммера

Счислитель Куммера (так называют прибор историки вычислительной техники) представляет собой прямоугольный корпус толщиной до 1 см с прорезями в корпусе вдоль длинной стороны. Верхние прорези используются для сложения, нижние — для вычитания. Каждая прорезь служит для представления одного разряда. Справа от прорези нанесены цифры от 0 до 9, внутри нее размещена рейка с зубцами справа и слева. В каждой прорези видны левые зубцы соответствующей рейки, а также один правый зубец соседней рейки, представляющей старший разряд.

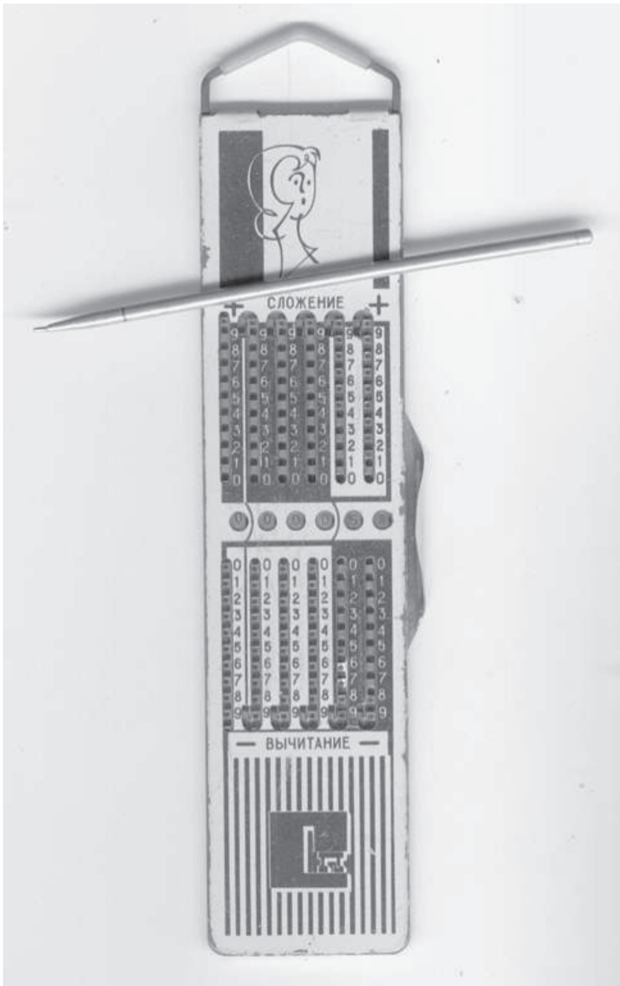
В средней части прибора, между верхними и нижними прорезями, предусмотрены окошки считывания, в которых отображаются цифры.

Если в прорезь вставить тонкий стерженек (пользователи современных КПК назвали бы его *стилус*), то рейку можно двигать вверх или вниз до упора. При этих движениях в окошках считывания появляются цифры, нанесенные на поверхность рейки. Например, для сложения чисел 426 и 512 можно отложить первое путем перемещения третьей справа рейки вверх за зубец возле цифры 4, второй справа — за зубец возле цифры 2 и крайней справа — за зубец возле цифры 6. При этом в окошках считывания будет показано первое слагаемое. Аналогично откладывается второе слагаемое, в результате чего в окошках будет отражена сумма — 938.

Но если при откладывании второго слагаемого в каком-то разряде сумма складываемых цифр превысит 9, то на это будет обращено внимание «пользователя» — соответствующие цифры на зубце будут отмечены, например, красным кружком. Это означает, что рейку следует перемещать стержнем не вверх прибора, а к центру (к окошкам) и после упора плавно перевести стержень в соседний (старший) разряд, где он заденет правый зубец соседней рейки и сдвинет ее вниз на одно деление, то есть в старшем разряде прибавится единица.

При вычитании рейки перемещаются вниз, а при необходимости заимствования в каком-то разряде единицы — вверх, где стержень после упора перейдет в старший разряд и уменьшит его на единицу.

Счислитель Куммера серийно выпускался (с различными модификациями) вплоть до 70-х годов XX в. как в нашей стране, так и за рубежом. «Современный» вариант счислителя Куммера отличается от предшественников расположением цифр рядом с прорезями и положением приспособления для перемещения стержня в старший разряд. Это означает также, что направление перемещения реек при сложении и вычитании будет другим по сравнению с описанным.




«Современный» вариант счислителя Куммера
(«Арифметическая линейка»)

## Литература

1. *Апокин И.А.*, *Майстров Л.Е.* Развитие вычислительных машин. — М.: Наука, 1974.

2. http://all-hitech.msk.ru/inf/history/p_0_12.html

**Джон НЕПЕР** — шотландский математик и теолог-протестант — был потомственным дворянином, родился в 1550 г. в замке Мерчистон близ Эдинбурга, там же и умер 4 апреля 1617 г. Учился он в Эдинбургском университете, затем долго путешествовал в поисках знаний по Европе. В итоге своих странствий, как и большинство ученых своего времени, Непер стал универсалом, специалистом широкого профиля. Большую часть последующей жизни Непер отдал богословию, но наряду с этим, он был инженером, придумал целый ряд машин для обработки земли, водяные насосы для орошения, зеркало для поджигания вражеских кораблей, устройство для плавания под водой (акваланг), повозку, не пробиваемую пулями (танк), и нечто, напоминающее неуправляемый ракетный снаряд.

Однако свои главные работы он выполнил незадолго до смерти. Первой из них был математический труд «Описание удивительной таблицы логарифмов», где была предложена первая таблица логарифмов, а также сам термин «логарифм». Способ построения был раскрыт в сочинении «Построение удивительной таблицы логарифмов», вышедшем уже после смерти автора.

Последний год жизни Непер отдал подготовке к печати трактата «Рабдология, или Две книги о счете с помощью палочек». Термин «рабдология»он и объяснял как «счет с помощью палочек».

Очень простое технически изобретение, которое в последующем стали называть палочками (или костями) Непера, стало вторым после абака в истории человечества практическим приспособлением, облегчающим расчеты. Именно с палочек Непера началась цепочка устройств, которая, в конечном счете, привела к современному ПК. Идея палочек получила развитие в Германии. Через десять лет после опубликования «Рабдологии...» Вильгельм Шиккард в переписке с Иоганном Кеплером описал механизм, упрощающий работу с палочками. Была эта машина построена или нет, неизвестно, но это была первая математически обоснованная модель калькулятора. Сейчас в Германии воссоздано несколько работоспособных образцов механизма Шиккарда.

Палочкам Непера суждена была долгая жизнь. Они широко использовались для вычислений в астрономии, артиллерии и других областях, повлияли на создание логарифмической линейки, ставшей классическим инженерным инструментом XIX и XX веков, а в Великобритании вплоть до середины 60-х годов палочки Непера применялись для обучения школьников арифметике.

*По материалам сайта http://www.osp.ru*

**Генрих КУММЕР.** О его жизни и деятельности известно лишь то, что он был петербургским учителем музыки и дальним родственником известного математика Э.Э. Куммера. Но созданный им карманный счетный прибор — «счислитель» — свидетельствует о том, что это был талантливым изобретателем.

Далеким предком «счислителя» многие специалисты считают рабдологический абак француза К. Перро (он жил в XVII в.), однако Куммер его не знал. Вероятнее всего, основной принцип действия был заимствован им у известного математика З.Я. Слонимского. В ноябре 1845 г. Слонимский получил патент на этот прибор. И неизвестно, как в дальнейшем сложилась бы судьба этой идеи, если бы 4 сентября 1846 г. Куммер не представил в Петербургскую академию наук свое изобретение. Прибор был прост, удобен в работе, практически безотказен и не давал ошибок, за что был признан совершенным для действий сложения и вычитания. 29 марта 1847 г. изобретение Куммера под названием «счетный снаряд» было зарегистрировано, несколько позже прибор стали называть «счислителем».

В 1891 г. во Франции появилась первая модификация счислителя — арифмограф Тронсе. В начале XX в. в Германии начинается производство целой серии аддиаторов, и эта страна становится лидером не только в производстве, но и разработке аналогов счислителя Куммера. С XIX в. счислители выпускались и в России. В 1920–1930-е гг. они были известны под названиями «Пионер» и «Карманный арифмометр», в послевоенное время — «Прогресс», в 1970-е гг. — «Арифметическая линейка». Так, созданный в середине XIX в. первый карманный счетный прибор положил начало развитию массовых вычислительных средств индивидуального пользования.

*По материалам Википедии*

## ОБЫКНОВЕННАЯ ДРОБЬ

$$\pm\frac{m}{n},\quad n\in\mathbf{N},\ m\in\mathbf{N}$$

Русский термин *дробь*, как и его аналоги в других языках, происходит от латинского *fractura*, который, в свою очередь, является переводом арабского термина с тем же значением: ломать, раздроблять. Фундамент теории обыкновенных дробей заложили греческие и индийские математики. Интересно, что древние египтяне имели дело только с аликвотными дробями (их еще так и называют – египетские). Аликвотная дробь — это сумма нескольких дробей вида $\frac{1}{n}$. Например, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{16}$.

Поначалу европейские математики оперировали только с обыкновенными дробями, а в астрономии — с шестидесятеричными. Полноценная теория обыкновенных дробей и действий с ними сложилась в XVI веке (Тарталья, Клавиус). В 1585 году, с выходом книги Симона Стевина «Десятая», начинается широкое применение десятичных дробей.

Обобщением понятия дроби может служить *рациональная функция* — это дробь, числителем и знаменателем которой являются многочлены, в частности, одного переменного:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Другим частным случаем рациональной функции является отношение двух линейных функций — это дробно-линейная функция.

***По материалам Википедии***

Издательский дом
ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ
новый этап развития

## «Математика. Первое сентября»:

# ОТ ГАЗЕТЫ – К ЖУРНАЛУ!

### Представляем свидетельство о перерегистрации

Федеральная служба
по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
(Роскомнадзор)

**СВИДЕТЕЛЬСТВО**

**О РЕГИСТРАЦИИ СРЕДСТВА МАССОВОЙ ИНФОРМАЦИИ**

***ПИ № ФС77-44335*** *от 21 марта 2011 г.*

**Название** *Математика. Первое сентября*

**Адрес редакции** *121165, г. Москва, ул. Киевская, д. 24*

**Примерная тематика и (или) специализация** *Проблемы школьного образования, воспитания и обучения детей в России и ближайшем зарубежье; реклама не более 40 %*

**Форма периодического распространения** *журнал*

**Язык(и)** *русский*

**Территория распространения** *Российская Федерация, зарубежные страны*

**Учредитель (соучредители)** *Общество с ограниченной ответственностью "Чистые пруды" (121165, г. Москва, ул. Киевская, д. 24)*

**Заместитель руководителя** **К.В. Протопопов**

**Начальник Управления разрешительной работы в сфере массовых коммуникаций** **М.Ю. Ксензов**

Настоящее свидетельство выдано в соответствии с Законом Российской Федерации от 27 декабря 1991 года № 2124-1 "О средствах массовой информации".
Нарушение законодательства Российской Федерации о средствах массовой информации влечет ответственность в соответствии с законодательством Российской Федерации.

022061

Журнал «Математика. Первое сентября» – ежемесячный, 64-страничный,
в каждом номере – CD-диск с дополнительными материалами.

Учителя, оформившие подписку на электронную версию журнала, получат первый номер 1 августа (по Интернету в свой «личный кабинет» на сайте www.1september.ru)

По почте первый номер журнала (бумажная версия) придет к 15 августа.

В июле журнал не выходит.

**До встречи в августе!**