МАТЕМАТИКА

основана в 1992 г.

МЕТОДИЧЕСКАЯ ГАЗЕТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

1–15 июнь 2011

mat.1september.ru

11

$\frac{1}{2}=0{,}5=0{,}50=0{,}500=0{,}5000=\ldots$

$\frac{1}{3}=0{,}(3)=0{,}333333333333\ldots$

$\frac{1}{4}=0{,}25=0{,}250=0{,}2500=0{,}25000\ldots$

$\frac{1}{5}=0{,}2=0{,}20=0{,}200=0{,}2000\ldots$

$\frac{1}{6}=0{,}1(6)=0{,}16666666666\ldots$

$\frac{1}{7}=0{,}(142857)=0{,}142857142857\ldots$

$\frac{1}{8}=0{,}125=0{,}1250=0{,}12500=\ldots$

$\frac{1}{9}=0{,}(1)=0{,}111111111111111\ldots$

$\frac{1}{10}=0{,}1=0{,}10=0{,}100=0{,}1000=\ldots$

ДЕСЯТИЧНАЯ ДРОБЬ | *см. с. 48*

издательский дом

Первое сентября

1september.ru

МАТЕМАТИКА индексы подписки Почта россии - 79083 (инд.); - 79584 (орг.) Роспечать - 32031 (инд.); - 32598 (орг.)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Главный редактор: Артем Соловейчик (генеральный директор)
Коммерческая деятельность: Константин Шмарковский (финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов: Сергей Островский (исполнительный директор)
Реклама и продвижение: Марк Сартан
Мультимедиа, конференции и техническое обеспечение: Павел Кузнецов
Производство: Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение: Андрей Ушаков
Дизайн: Иван Лукьянов, Андрей Балдин
Педагогический университет: Валерия Арсланьян (ректор)

ГАЗЕТЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Первое сентября – Е. Бирюкова,
Английский язык – А. Громушкина,
Библиотека в школе – О. Громова,
Биология – Н. Иванова,
География – О. Коротова,
Дошкольное образование – М. Аромштам,
Здоровье детей – Н. Сёмина,
Информатика – С. Островский,
Искусство – М. Сартан,
История – А. Савельев,
Классное руководство и воспитание школьников –О. Леонтьева,
Литература – С. Волков,
Математика – Л. Рослова,
Начальная школа – М. Соловейчик,
Немецкий язык – М. Бузоева,
Русский язык – Л. Гончар,
Спорт в школе – О. Леонтьева,
Управление школой – Я. Сартан,
Физика – Н. Козлова,
Французский язык – Г. Чесновицкая,
Химия – О. Блохина,
Школьный психолог – И. Вачков

УЧРЕДИТЕЛЬ: ООО «ЧИСТЫЕ ПРУДЫ»
Зарегистрировано ПИ № 77-7241 от 12.04.01 в Министерстве РФ по делам печати
Подписано в печать: по графику 27.04.11, фактически 27.04.11 Заказ №
Отпечатано в ОАО «Чеховский полиграфический комбинат»
ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: (499) 249-3138
Отдел рекламы: (499) 249-9870
Сайт:1september.ru

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: (499) 249-4758
E-mail: podpiska@1september.ru

В НОМЕРЕ:

ТЕМА НОМЕРА: МЫСЛЕДЕЯТЕЛЬНОСТНОЕ ОБУЧЕНИЕ

К материалам, обозначенным этим символом, есть приложение на CD-диске, вложенном в № 12.

МАТЕМАТИКА
Методическая газета для учителей математики
Основана в 1992 г.
Выходит два раза в месяц
Газета распространяется по подписке
Цена свободная Тираж 10 000 экз.
Тел. редакции: (499) 249-3460
E-mail: mat@1september.ru
Сайт: mat.1september.ru

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, И. Бокова, О. Макарова
Дизайн макета и обложки: И. Лукьянов
Корректор: Л. Громова
Верстка: Д. Кардановская

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Роспечать: инд.–**32030**; орг.–**32594**
Почта России: инд.–**79073**; орг.–**79583**

РОДИТЕЛЬ ДОЛЖЕН СТАТЬ СОЮЗНИКОМ!

Л. РОСЛОВА

Родители, как известно, бывают разные. Среди них даже такие есть, кто учит с детьми уроки, решает задачи, пишет сочинения, делает практические работы, помогает выполнять проекты. Иногда просто выполняя все это вместо ребенка, уложив его спать. Иногда выполняя всей семьей, если учитель не соизмерил объем задаваемого на дом, не сопоставил с тем, что задали коллеги.

А еще родители любят решать задачи по математике. Приходит, например, пятиклассник Ваня домой и радостно сообщает маме, что сегодня на уроке математики решали комбинаторные задачи. Мама, вспомнив, что когда-то, в пору ее молодости, комбинаторика входила в программу, что в ней есть три формулы: сочетаний, перестановок, размещений, решает показать сыну класс и решает задачу. А с ответом результат не сходится. Мама негодует – опять опечатка в учебнике! Идет в методическую службу, пишет письмо в издательство. А оказывается, что в задаче речь идет о размещениях с повторениями, о существовании которых мама даже и не догадывается. Что решать задачу надо было с помощью перебора всех возможных вариантов или применяя правило умножения. Не входило все это в программу. А у бывшей ученицы сложилось впечатление, что все типы комбинаторных задач «попадают под юрисдикцию» трех замечательных формул.

И пишут ответ маме авторы, методисты, редакторы. Мама снова не понимает: зачем менять программу, вводить новые разделы, понятия, методики? Точно так же мой отец, помню, возмущался, зачем равенство вдруг стали называть конгруэнтностью.

Все бы ничего, да детей жалко: не умеем мы их отгораживать от наших взрослых проблем, столкновений непримиримых позиций, все на их головы, как правило, и выливаем.

Да, корабль под названием «Математика» обладает большой инертной массой. «Началам» Евклида 2300 лет, и все это время геометрию учили на основе той аксиоматики, которая заложена в этой математической Библии. Но в нашем динамичном мире невозможно не менять содержание образования и педагогические технологии. А чтобы не было таких конфликтов с родителями, как описала я выше, учителю надо уметь с ними работать: объяснять, почему происходят изменения в содержании, в чем они заключаются, почему он выбирает тот или иной учебник, основы своей методики, особенности контроля и пр. Давайте делать так, чтобы родитель был союзником учителя, школы, чтобы не боролся, а помогал. Все будут в выигрыше! И пусть решает задачи, если ему нравится это делать.

Е. ЖДАНКИНА,
г. Чехов,
Московская обл.

Из дневника учителя

ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ? ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ. ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ!

Учить не мыслям, а мыслить.
Кант

Первое сентября

День знаний. Праздник, который мы ждем с нетерпением! Утром по телевидению слышу поздравления президента страны с началом нового учебного года. По его словам, миссия учителя — формировать общество будущего, способствовать передаче молодому поколению нравственных ориентиров. А что же значит для меня звание Учитель? Настоящий учитель — это педагог, находящийся в постоянном поиске, живущий в унисон с детьми, видящий себя в них, помогающий им стать успешными в жизни.

С каким же радостным чувством встречаю я ребят! Как они повзрослели за лето! Некоторые так изменились, что их не узнать. «Что нас ждет в этом учебном году? Сбудутся ли наши мечты? Так хочется начать действовать!» — думают мои ученики, глядя на меня. Мне же не дает покоя вопрос: чему учить? После долгих размышлений ответ становится очевидным — вырастить самостоятельного, ответственного, критически мыслящего, свободного и счастливого гражданина своей страны через творчество и деятельность самих учащихся. И у меня есть еще время...

Пятое ноября

Готовлюсь к выступлению на школьном методическом объединении учителей математики. Тема доклада: «Сравнительный анализ результатов ЕГЭ 2008 года». Становится тяжело на душе из-за неутешительных итогов этого экзамена. Опускаются руки, когда читаешь очередную статью. Всплывают в памяти и публикации о результатах международного тестирования PISA. Россия на 29-м месте по математике! Неужели в этом виноват только учитель? На мой взгляд, проблема многогранна, и есть несколько факторов, приводящих к такому плачевному результату.

Одна из основных причин — отсутствие задач практического содержания (характерных для повседневной жизни) в действующих учебниках основной и старшей школы. Еще в 60-е годы содержание школьного образования было переведено с практической направленности на научную. Фундаментом той реформы была установка, рассматривающая содержание школьного образования как изучение «основ наук», что лишило нас возможности развивать на уроках математики умение решать практические задачи. Не пора ли подумать о включении в материал учебников практико-ориентированных задач?

Вторая проблема — отсутствие авторских электронных учебных изданий. В связи с этим очень хочется обратиться к автору учебно-методического комплекта по алгебре А.Г. Мордковичу: «Уважаемый Александр Григорьевич! Ваш учебник востребован в школе. Но с какой завистью смотрела я на авторское электронно-учебное издание по географии. Вот бы и нам такое! Помогите учителю! Желаю творческих успехов».

Третья проблема: как учить? Современные дети рациональны: они хотят четко понимать, зачем им нужно то или иное знание, где оно может пригодиться. Искушенные в телекоммуникационных представлениях и развлечениях, они хотят, чтобы и на уроках было также интересно, ярко, броско. Имея в наличии доступ к информации через Интернет, им скучно впитывать знания, читая учебник или слушая лекцию учителя. Новое поколение и новые реалии жизни требуют новых методов обучения.

Мне тоже пришлось сделать такой выбор, и я остановилась на технологии деятельностного метода в обучении. Помню, как три года назад я взяла пятый класс. Ко мне пришли дети, которые в начальной школе учились по программе «Школа 2000...» Л.Г. Петерсон. Они очень выгодно отличались от своих сверстников. И тогда я поняла: необходимо изучить технологию, которая дает такой результат. Обучаясь на курсах повышения квалификации, поняла, почему это происходит: технология ориентирована на становление личности, ее «самостроительство» в процессе деятельности ученика, причем не только в индивидуальной, но и в совместной, коллективной деятельности. Взяв за основу деятельностный метод и применив информационные технологии, я стараюсь привнести что-то новое в каждый урок, адаптировать технологию для детей, с которыми работаю. На личном опыте убедилась, что данная технология работает в любом классе, с детьми любого возраста, с применением любых учебников. Но как же убедить в этом моих коллег? Необходим открытый урок!

Двадцать девятое января

Коллеги-математики у меня в гостях на уроке в 5-м классе. Ребята, совершенно не обращая на них внимания, высказывают гипотезы, выдвигают аргументы, ошибаются, доказывая свою точку зрения. Я только исподволь направляю ход их мыслей, чтобы создание «проекта выхода из затруднения» проходило в задуманном мной ключе. А вот и триумф личности! Саша Фомичев «дошел» до верного решения задачи. У всех облегчение.

Конец урока. Рефлексия. Даю задание, соответствующее возрасту: нарисовать свое настроение на уроке, изобразив мордашку. Каждый ученик рисует. У Алены Крауз — грустная, но у большинства — веселая. Действительно, по такому рисунку можно сразу определить: доволен ли ученик своей работой на уроке, все ли у него получилось.

Ребята уходят, а я анализирую проведенный урок. Подробно объясняю целесообразность каждого этапа урока, поставленную цель и степень ее реализации. Вижу, коллеги удивлены, заинтересованы. Задают много вопросов: «А как же создать индивидуальное затруднение, если новая тема — введение какой-то классификации или изучение новых свойств? Как построить систему вопросов и упражнений, подводящих детей к самостоятельному «открытию» знаний?» Я готова рассказывать и рассказывать. Даю методическую литературу по технологии деятельностного метода. Ведь, загоревшись этим методом, хочется зажечь и своих коллег. Как радостно! Моя работа никого не оставила равнодушным, вызвала интерес. Значит, я добилась цели!

Двадцать шестое февраля

Сегодня у меня праздник — мои ученики успешно защитили проекты на научно-практической конференции. Мы долго шли к этой победе — выбирали тему, исследовали проблему, оформляли работу, готовили презентацию, учились публично выступать. Выступление Анны Коркиной с темой «Мир многогранников» вызвало много вопросов у присутствующих на конференции. Значит, тема актуальна не только для автора, но и для социума.

Метод проектов для меня — один из самых любимых. Ведь в его основе лежит идея развития познавательных навыков учащихся, умения самостоятельно конструировать свои знания, ориентироваться в информационном пространстве, идея развития критического и творческого мышления. Участвуя в проекте, ученик учится ставить цель и достигать ее, знакомится с научным способом познания мира, размышляет над практическим применением знаний. Работа над проектом — это радость общения и процесс самоутверждения.

Для меня, как руководителя школьного научного общества «Созвездие», важно то, что растет число ребят, которые с интересом относятся к исследовательской работе.

Пятнадцатое марта

Разговаривая с учениками, очень часто слышу в ответ: «Я уже взрослый, имею право...» Настало время посвятить этой проблеме классный час. Название приходит само собой: «Что значит быть взрослым?». Эпиграф нахожу у Н.Г. Чернышевского: «Характер средств должен быть таков же, как характер цели, только тогда средства могут вести к цели... Дурные средства годятся только для дурной цели». Чего я жду от классного часа? Разработав структуру, продумав вопросы, хочется увидеть полемику и как итог — построение логической цепочки: цель → средство → действие → результат.

Приятно поражена: вопрос заставил ребят задуматься! В результате долгих споров пришли к выводу: быть взрослым, значит, уметь ставить цель и добиваться результата. Примеры ребят разнообразны: Алина Соломатникова (можно считать ее взрослой) поставила цель: победить на олимпиаде, и, выбирая средства и действуя, добилась результата. Максим Мелекесов поступил в физико-математическую школу, будет обучаться дистанционно. Андрей Беккер добился успехов в греко-римской борьбе. Какая сила воли у человека! А Настя Быковская — призер зонального конкурса по музыке.

В этом списке не было некоторых фамилий... Оказалось, что не все пока могут себя считать взрослыми, им есть над чем поработать. Что меня особенно порадовало: эпиграф сработал! «Дурные привычки не дают права считать тебя взрослым», — делают вывод ребята.

Двадцать первое мая

Родительское собрание. Просто здорово, что родители моих учеников — мои единомышленники. И это главное! Подводим итог прошедшего года. Родители отмечают, что их дети идут в школу с удовольствием и хотят деятельности. Это необходимый фактор успеха. В ходе проблемного обсуждения рождается истина: количественная оценка — не самое главное, самое главное в обучении и воспитании — вырастить счастливого человека, самодостаточную личность, тогда и родителям, и окружающим будет с таким человеком легко и радостно. А как же этого добиться, какие методы использовать в воспитании подростков? Трудное время — переходный возраст. Спорим, дискутируем и, наконец, приходим к выводу. Нам всем близки слова Демокрита: «Воспитание — рисковое дело, ибо в случае удачи последняя приобретена ценою большого труда и заботы, в случае же неудачи — горе несравнимо ни с каким другим». «Tertium non datur» (третьего не дано). После собрания разговор продолжается на форуме моего сайта. Родители неравнодушны, и это ценно для меня.

Двадцать первое июня

Выпускной вечер. Испытываю огромную радость и гордость за своих учеников, ведь я отдала им частичку своей души. Желаю им деятельности, благородной деятельности и поэтому необходимой. И пусть сбудутся их мечты!

А у меня впереди отпуск. Время размышлений, подведения итогов. Важный шаг для осознания своей деятельности. И надо набраться сил и каких-то новых идей, чтобы с нового учебного года в очередной раз с вдохновением заняться любимым делом: «учить не мыслям, а мыслить».

ФОТО НА КОНКУРС

Семиклассница Ольга Муругова выступила перед учащимися 4-го класса со своей работой «Числа правят миром». На окружной конференции она заняла 1-е место.

Автор: Н.И. Скребкова, учитель математики средней школы № 3, г. Чапаевск, Самарская обл.

З. ЮСУПОВА,
пос. Златоустовка,
Башкирия

КАК СОЗДАТЬ ПРОБЛЕМНУЮ СИТУАЦИЮ

Как известно, психолог С.Л. Рубинштейн говорил, что «начальным моментом мыслительного процесса обычно является проблемная ситуация». Суть же учебной проблемы состоит в противоречии между прежними знаниями ученика и новыми фактами, для объяснения которых недостаточны имеющиеся знания, нужны новые. Процесс приобретения новых знаний путем проблемного обучения связан с постановкой проблемы и ее решением.

От чего же зависит успех урока? Я считаю, что одним из важных условий достижения целей урока математики является развитие мыслительной деятельности учащихся. Конечно, большое значение в деле вовлечения учащихся в активную мыслительную деятельность имеет методика работы учителя.

При обучении возникают как простые, так и сложные проблемы. Решение сложной проблемы нужно разделить на более простые проблемы, и решать их последовательно. Хочу показать это на примере изучения темы **«Площадь треугольника»** в курсе геометрии 8-го класса.

Задача. Вывести формулу для вычисления площади произвольного треугольника.

Сначала *предлагаю* ученикам *такую задачу*: найти площадь прямоугольного треугольника, если один из его катетов равен 3 см, а другой — 4 см. Проанализировав задачу, некоторые ученики догадываются, что они смогут решить эту задачу, используя формулу площади прямоугольника. Повторяем теорему о нахождении площади прямоугольника.

Перед некоторыми учащимися *возникает учебная проблема*: как вычислить площадь прямоугольного треугольника, зная формулу для нахождения площади прямоугольника? Чтобы решить ее, учащиеся предлагают достроить треугольник до прямоугольника. Объясняют, почему: достроив прямоугольный треугольник до прямоугольника, получим два равных треугольника; равны они по двум катетам. Так как площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон, то площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Обращаю внимание учащихся на то, что решена пока только часть основной проблемы. И *предлагаю решить следующую задачу*: найти площадь остроугольного треугольника.

Отталкиваясь от наводящих вопросов, ученики находят *способ решения проблемы*: они предлагают достроить остроугольный треугольник до параллелограмма. Дополняем треугольник до параллелограмма, затем, используя 3-й признак равенства треугольников, доказываем, что два полученных треугольника равны.

Ставлю вопрос: чему равна площадь любого остроугольного треугольника? Ученики отвечают, что площадь остроугольного треугольника равна половине произведения его основания на высоту. Молодцы! *Решаем следующую задачу*: найти площадь тупоугольного треугольника. С этой проблемой учащиеся справляются быстро. И, наконец, *решаем поставленную проблему*: найти площадь произвольного треугольника. Учащиеся справляются с этой проблемой самостоятельно. Итак, мы вывели формулу для вычисления площади произвольного треугольника.

Л. ЛАРИНА,
г. Альметьевск

АКТИВНОСТЬ ЧЕРЕЗ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМ

Суть проблемного обучения — воспитание и развитие творческих способностей учащихся, обучение их активным умственным действиям. Эта активность проявляется в том, что ученик, анализируя, сравнивая, синтезируя, обобщая, конкретизируя фактический материал, сам получает из него новую информацию. Активность возникает в процессе работы ученика, поставленного в соответствующую ситуацию, книга этому обучить не может.

Используя различные способы создания проблемных ситуаций, я выбираю их в соответствии с конкретными задачами обучения. Так, при ознакомлении учащихся с новыми математическими понятиями знания не сообщаю в готовом виде, а побуждаю учащихся к сравнению, сопоставлению и противопоставлению фактов. Приведу примеры.

В 6-м классе **при введении понятий простого и составного числа** поступаю следующим образом. На доске записываю два ряда чисел:

$$2, 5, 7, 11, 13, 19, 23, \ldots.$$
$$4, 8, 12, 14, 18, 24, 28, \ldots.$$

и даю задание: найти все делители каждого из чисел первого и второго ряда. После выполнения задания выясняем, в чем отличие чисел первого ряда от чисел второго ряда.

Сообщаю название чисел первого ряда, прошу учеников дать определение простого числа. Даю название числам второго ряда, а ребята формулируют определение составного числа. После этого уточняю определения.

Итак, во всех случаях при определении нового понятия предлагаю учащимся только объект мысли и его название, они же самостоятельно дают определение, а затем с помощью учителя уточняют его.

Другой способ создания поисковой ситуации — использование практического опыта учащихся, опыта выполнения ими практических заданий. Поисковые ситуации в этом случае возникают при попытке учащихся самостоятельно достигнуть поставленной перед ними практической цели. Обычно ученики в итоге анализа ситуации сами формулируют задачу поиска.

На уроке геометрии **при подготовке к изучению темы «Сумма углов треугольника»** предлагаю решить задачи:

1. Один из углов треугольника равен 36°, а второй — на 18° больше третьего. Найти величину второго угла.

2. В равнобедренном треугольнике угол при основании на 18° больше угла при вершине. Найти величину каждого угла треугольника.

Пытаясь самостоятельно достигнуть поставленной цели, учащиеся приходят к выводу, что для решения этих задач не хватает

Фото В. Давыдовой

данных. Если бы было известно, чему равна сумма углов каждого из заданных треугольников и вообще любого треугольника, то задачи были бы разрешимы. Теперь каждому ясна цель поиска.

Ценная ситуация возникает в том случае, когда имеется противоречие между теоретически возможным путем решения задачи и практической неосуществимостью избранного способа решения.

При изучении темы «Сравнение чисел» ученикам предлагаю задание.

Отметьте на прямой числа:

$$-5;\ -7;\ -2;\ -10;\ -3;\ -12;\ -18;\ -6,$$

а затем сравните числа:

-5 и -3; -12 и -2; -7 и -6; -999 и -1000;

-5 и -10; -18 и -9; -11 и -8; -3543 и -2759.

Как только учащиеся доходят до последних двух заданий, они обнаруживают, что с помощью числовой прямой сравнить эти числа невозможно. Перед ними возникает проблема: теоретически — можно, а известный способ не дает решения. Начинается творческий поиск учащихся.

Противоречие между практически достигнутым результатом при выполнении задания и отсутствием у учеников теоретического обоснования также создает проблемную ситуацию.

Перед изучением теоремы Пифагора предлагаю на дом задачу:

Из двух квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равных 3 и 4, составить новый квадрат и сравнить его сторону с гипотенузой.

В результате выполнения этой работы ребята устанавливают, что длина стороны нового квадрата равна длине гипотенузы. Следовательно, искомый квадрат можно построить на гипотенузе.

На следующем уроке уточняем: «Вы получили, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах. Выполните аналогичное построение для другого прямоугольного треугольника, катеты которого равны 2 и 4».

Ребята были удивлены, когда убедились, что из «единичных» квадратов новый квадрат не получается. Это затруднение вызвало желание выяснить, всегда ли площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

Таким образом, необходимость теоретического обоснования достигнутых результатов при выполнении задания привела учащихся к теореме Пифагора.

Умение применять ранее усвоенные способы решения проблем в новой учебной или жизненной ситуации и находить новые способы решения учебных проблем характеризует уровень интеллектуального развития ученика. Учащиеся должны уметь анализировать учебный материал, выделять в нем главное, сравнивать и сопоставлять, синтезировать и обобщать, делать выводы. И самое главное — должны уметь держать в уме основную нить рассуждений.

Одной из трудностей при подготовке и проведении подобных уроков является то, что управлять нужно не только усвоением учебного материала, но и самостоятельной познавательной деятельностью учеников, кроме того, каждый ученик воспринимает возникшую ситуацию соответственно своему уровню подготовки. Некоторые быстро осознают затруднения и сразу приступают к поискам путей решения проблемы. Другим — требуется помощь.

ФОТО НА КОНКУРС

Урок геометрии в 8-м классе «Измерительные работы на местности: определяем высоту столба по длине его тени»

Автор: О.А. Рунова, средняя школа, пос. Левженский, Республика Мордовия

И. ПИЧУГИНА,
Москва

5–6 классы

ОБУЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ ЗАДАЧУ

Мы привыкли к тому, что взаимодействие педагога и ученика строится, как правило, в форме заданий. Эта форма предполагает, что ученик получает от учителя не только задание, но и способ его выполнения. При этом учащийся редко сталкивается с нестандартными учебными заданиями. Поэтому ученики используют полученные ими знания в стандартных ситуациях и не умеют переносить эти знания в другие учебные или житейские ситуации. Возникает необходимость отказа от традиционной формы обучения через задания.

Задачная форма обучения представляется той технологией, с помощью которой педагог имеет возможность ввести ученика в процессы мышления, в частности, в процесс рождения нового способа действия. При работе в задачной форме обучения учитель ставит учащихся перед необходимостью самостоятельно искать пути решения задачи, для которой они не имеют готового, заранее рассказанного учителем способа. Но в то же время имеют достаточно знаний, применяя которые в нестандартных ситуациях или по новому их комбинируя, способны прийти к правильным выводам.

Предлагаю коллегам два урока, организованных в задачной форме.

Урок в 5-м классе
«Основное свойство дроби»

Цели урока:

— повторить и закрепить понятия делителя и кратного, признаки делимости, свойства делимости, разложение числа на простые множители, нахождение НОД;

— выявить основное свойство дроби, сформировать понятия сократимой и несократимой дроби.

Устно

1. Разложите числа на простые множители: 24; 35.

2. Найдите: НОД(8; 48); НОД(380; 381); НОД(33; 39; 99).

3. В каких случаях образуются дроби?

Учитель. Правильно:

1. В результате деления предмета на равные части.

2. При измерении величин, когда единица измерения не укладывается целое число раз в измеряемом объекте.

3. При делении натуральных чисел.

4. Сравните дроби: $\frac{1}{5}$ и $\frac{2}{5}$; 1 и $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{2}$ и $\frac{7}{4}$.

Вывод основного свойства дроби

Задача. На доске записаны выражения:

$48 : 24;$

$(48 : 6) : (24 : 6);$

$(48 \cdot 10) : (24 \cdot 10).$

Сравните выражения: что в них общего и чем они отличаются.

Действительно, это частные, в делимом везде имеется число 48, а в делителе число 24, но во втором выражении числа 48 и 24 уменьшаются в 6 раз, а в третьем — увеличиваются в 10 раз.

Учитель. Найдите значения данных выражений. Что вы заметили?

Рассмотрим еще примеры:

а) $27 : 3$, $(27 : 3) : (3 : 3)$, $(27 : 2) : (3 : 2)$;

б) $200 : 100$, $(200 : 10) : (100 : 10)$, $(200 \cdot 3) : (100 \cdot 3)$.

Мы видим, что запись может изменяться, но результат остается одним и тем же. Приведите свои примеры и сформулируйте ***гипотезу***.

Учащиеся на примерах наблюдают, что при умножении/делении делимого и делителя на одно и то же число результат не меняется, формулируют гипотезу (***свойство частного***) в общем виде и записывают ее на математическом языке.

Для любых натуральных чисел a, b, c выполняются равенства:

$$a : b = (a : c) : (b : c);$$

$$a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c), \text{ где } a, b, c \in \boldsymbol{N}.$$

Частное не изменится, если делимое и делитель разделить или умножить на одно и то же натуральное число.

Задача-ловушка. Сравните выражения:

а) $1 : 2$; б) $3 : 6$; в) $6 : 12$.

Учащиеся предлагают применить свойство частного и продемонстрировать, что делимые и делители, получаемые при делении делимого и делителя на одно и то же число, совпадают, а значит, и результаты при делении будут равны:

а) $1 : 2$; б) $(3 : 3) : (6 : 3) = 1 : 2$;

в) $(6 : 6) : (12 : 6) = 1 : 2$.

Учитель. Что интересного в выражениях, полученных при делении?

[Делимые и делители равны, значит, и частные равны.]

Можем ли мы сейчас найти значения данных выражений?

[Нет, так как не обладаем необходимыми знаниями.]

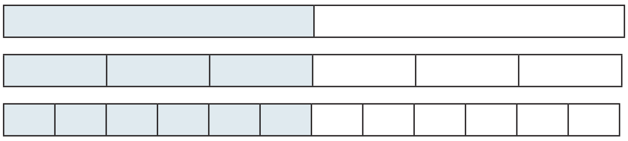
Часть учеников замечают, что частное можно записать в виде дроби и провести сравнение с помощью координатной прямой или какой-либо фигуры, и приводят гипотезу, что свойство частного должно быть верно и при записи частного в виде дроби. Ученики предлагают отметить полученные числа на координатной прямой, приняв за единичный отрезок 12 клеток.

Замечают, что все частные изображаются одной и той же точкой.

Делают вывод, что все результаты от деления данных чисел равны, то есть равные дроби — различные обозначения одного и того же числа.

Учитель. Проверьте свой вывод с помощью полосок, которые лежат у вас на столе, и с помощью магнитных долей на доске.

Учащиеся перегибают полоски и выделяют на них цветом заданные части:



Записывают равенство дробей:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6};\ \frac{1}{2} = \frac{6}{12};\ \frac{3}{6} = \frac{6}{12}.$$

Учитель. Что интересного в полученных дробях?

Рассмотрим примеры равных дробей на моделях различных фигур (окружность, торт, аквариум и т.д.). Цель демонстрации — визуализация количества, выраженного дробью.

Придумайте свои примеры равных дробей.

Действительно, шоколадку можно разделить на 5 равных частей и взять $\frac{2}{5}$ части, можно эту же шоколадку разделить на 10 частей и взять $\frac{4}{10}$ части. И в том и другом случае оба числа определяют одно и то же количество (одну и ту же долю), записанное разными дробями.

Нарисуем торт. Разделим его на 2 равные доли и 1 долю закрасим, то есть выделим $\frac{1}{2}$ торта. Теперь каждую из половинок разделим пополам, получается, что торт разделили на 4 равные части. Значит, теперь закрашено $\frac{2}{4}$ торта. Далее: разделим каждую из двух частей торта на 4 части — и увидим, что закрашенная часть составила $\frac{4}{8}$ торта.

Так как в каждом случае закрашенной оказывается одна и та же часть торта, то дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ и $\frac{4}{8}$ равны. Следует заметить, что дробь $\frac{2}{4}$ получили из дроби $\frac{1}{2}$ после того, как ее числитель и знаменатель умножили на одно и то же число «2», а дробь $\frac{4}{8}$ — на 4. Дробь $\frac{1}{2}$ можно получить, разделив числитель и знаменатель дроби $\frac{2}{4}$ на 2, $\frac{4}{8}$ — на 4.

Аквариум можно наполнить водой на $\frac{2}{3}$ части, а можно на $\frac{4}{6}$ части (наполненной будет одна и та же часть аквариума).

Параллелепипед делим на 5 частей, берем $\frac{1}{5}$ часть, потом каждую часть делим пополам, берем $\frac{2}{10}$ части. И опять замечаем, что две по-разному записанные дроби равны между собой.

Рассмотрев многочисленные примеры, учащиеся обнаружили свойство, которое будет относиться к любым дробям. Например, к таким, как

$$\frac{1}{100}=\frac{10}{1000} \text{ или } \frac{23}{45}=\frac{23\,000\,000}{45\,000\,000}.$$

Рисунок с миллионами клеточек сделать не удается! Здесь без рассуждений не обойтись.

После многочисленных рассуждений учащиеся формулируют ***правило для дробей*** и записывают его на математическом языке:

$$\frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c};$$
$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c},$$

где a, b, c — натуральные числа.

На доске получилась запись:

$$a:b=(a:c):(b:c),\quad \frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c},$$
$$a:b=(a\cdot c):(b\cdot c),\quad \frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c},$$

где a, b, c — натуральные числа.

Учитель. Что общего в этих записях? В чем отличие?

[Обыкновенная дробь —
это по-иному записанное частное.]

Мы получили утверждение, которое называется *основным свойством дроби*: если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится равная ей дробь. С его помощью можно преобразовывать дроби. Это равенство позволяет упрощать дроби.

Такое преобразование, при котором числитель и знаменатель дроби делят на их общий делитель, отличный от единицы, называется *сокращением дроби*.

Покажите самостоятельно способы сокращения дробей на примере: $\frac{750}{1200}$.

Учащиеся работают группами, используя при этом три способа:

- в *первом случае* сокращают дробь на наибольший общий делитель числителя и знаменателя дроби;
- во *втором случае* производят сокращение последовательно, используя при этом признаки делимости на 10, 5, 2, 3, 9;
- в *третьем случае* сокращают, раскладывая числитель и знаменатель дроби на множители, причем не обязательно простые.

Подведение итогов урока

— Какой способ преобразования дробей мы вывели?

— Чем он отличается от способа, которым мы пользовались раньше?

— Какой путь мы проделали по построению нового способа?

[От частного перешли
к записи обыкновенной дроби.
А раз дробь — это по-иному
записанное частное, то свойство
частного верно и для обыкновенной дроби.]

Фрагмент урока в 6-м классе
«Сложение рациональных чисел»

Цели урока:

— вывести правило сложения рациональных чисел с помощью понятия «модуль числа»;

— добиться усвоения учащимися правил сложения рациональных чисел.

Устно

1. Найдите модуль числа:

а) $|-100|$; б) $|-17{,}2|$;

в) $|0|$; г) $|2{,}73|$; д) $\left|-\frac{3}{7}\right|$.

2. Найдите значение выражения:

а) $|-3{,}6|+|-1{,}8|$; б) $\left|\frac{74}{5}-\left|-\frac{21}{5}\right|\right|$;

в) $|-14|\cdot\left|\frac{11}{7}\right|$; г) $|-9{,}9|:|10|$.

3. Сравните числа:

а) $-9{,}8$ и $0{,}7$; б) $-5{,}028$ и 0;

в) 0 и $\frac{4}{9}$; г) $-\frac{5}{12}$ и $-\frac{7}{12}$;

д) $-10{,}01$ и $-10{,}1$.

Сообщение темы урока

Еще во II в. до н.э. китайский император Ши Хуан Ди, разгневавшийся на своих ученых, повелел все научные книги сжечь, а их авторов и читателей казнить. Содержание этих книг до нас дошло лишь в отрывках, откуда известно, что китайцы не знали правила сложения чисел с разными знаками. Впервые их сформулировал индийский ученый Брахмагупта.

Вот видите, китайцы не смогли вывести правило сложения рациональных чисел в свое время, а мы постараемся дойти до истины.

Вывод правила сложения рациональных чисел

Задание 1. Найдите сумму двух чисел:

а) $+2 + (+3)$; б) $-2 + (-3)$.

Учащиеся находят значения выражений с помощью координатной прямой и с помощью метода «доходов» и «расходов».

Задача-ловушка. Найдите сумму двух чисел:

$$-1023 + (-534).$$

Наводящие *вопросы*:

- Сравните выражения а) и б).
- Что общего?
- Чем они отличаются?
- Как получить результат, не учитывая знаков?

Учащиеся выводят правило сложения чисел с одинаковыми знаками: чтобы сложить два числа с одинаковыми знаками, надо сложить их модули и поставить общий знак.

Задание 2. Найдите сумму чисел:

а) $-6 + (-2)$; б) $-3 + (-4)$;
в) $+2 + (+5)$.

Проверьте ответ с помощью координатной прямой. Затем, проговаривая правило, найдем сумму чисел из задачи-ловушки.

Задание 3. Найдите значение выражений:

а) $-3 + 2$; б) $3 + (-2)$.

Учащиеся складывают с помощью координатной прямой и и методом «доходов» и «расходов».

Задача-ловушка. Найдите сумму двух чисел:

$$-374 + 10\,789.$$

Наводящие *вопросы*:

- Что общего в выражениях а) и б)?
- Чем они отличаются?
- Почему?

Действительно, в первом выражении модуль отрицательного числа больше, поэтому в результате получится отрицательное число; во втором выражении больше модуль положительного числа, поэтому в результате будет положительное число.

Учащиеся выводят правило сложения чисел с разными знаками: чтобы сложить два числа с разными знаками, можно найти разность их модулей и поставить знак слагаемого с большим модулем.

Задание 4. Вычислите:

а) $-4 + 7$; б) $5 + (-8)$; в) $-3 + 10$.

Полученные результаты проверьте с помощью координатной прямой.

Вернемся к выражению из задачи-ловушки и, проговаривая правило, решим его.

Итак, при сложении рациональных чисел мы работаем в действительности только с их модулями: когда слагаемые одного знака — модули складываются, а когда слагаемые разных знаков — модули вычитаются. Знак суммы определятся по тому, какое слагаемое «перевешивает».

Фрагмент урока в 6-м классе «Умножение рациональных чисел»

Цели урока:

— вывести правила умножения отрицательных чисел и чисел с разными знаками;

— формировать умение умножать рациональные числа;

— повторить правила умножения десятичных дробей, сложения и вычитания рациональных чисел, распределительное свойство умножения.

Устно

Используя равенства

$$a - b = a + (-b),$$
$$a - (-b) = a + b,$$
$$ab + ac = a(b + c),$$

а также правила сложения рациональных чисел и умножения десятичных дробей, вычислите:

а) $3{,}7 - 4{,}8$; б) $-5{,}2 - 4{,}7$;
в) $-5{,}6 - (-3{,}8)$; г) $0{,}3 \cdot 0{,}6$;
д) $0{,}08 \cdot 10$; е) $15 \cdot 0{,}01$;
ж) $2 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}7$; з) $-1{,}1 + 1{,}1$.

Вывод правила умножения рациональных чисел

- Где вы в жизни встречаетесь с отрицательными и положительными числами?
- Каким действием выражается увеличение величины, а каким уменьшение?

Задача 1. Выполните умножение: $(-2) \cdot 3$.

Учащиеся предполагают, что в результате может быть число либо 6, либо -6.

«Изобретают» нужное правило с помощью практических задач (о доходах и расходах, изменении температуры), замечая, что второй множитель — натуральное число, поэтому можно воспользоваться «старым» определением, известным еще из начальной школы: $(-2) \cdot 3$ есть сумма трех слагаемых, каждое из которых равно -2. Поэтому

$$(-2) \cdot 3 = (-2) + (-2) + (-2) = -6,$$

то есть

$$(-2) \cdot 3 = -6. \qquad (1)$$

При перестановке множителей произведение не меняется, поэтому для случая (2) сохранится и правило.

$$3 \cdot (-2) = -6. \qquad (2)$$

Правило. Чтобы перемножить два числа с разными знаками, надо перемножить модули этих чисел и поставить перед полученным числом знак минус.

Или: произведение двух чисел разных знаков отрицательно.

Или: «плюс» на «минус» дает «минус».

Задача 2. Вычислите:

а) $2 \cdot 3$; б) $(-2) \cdot (-3)$.

Ученики предполагают, что в примере а) может быть ответ либо 6, либо –6.

Далее начинают сравнивать знаки множителей в произведениях а), б) с произведениями (1), (2) и делают вывод, что при изменении знака любого множителя знак произведения меняется, а его модуль остается тем же.

Ученики говорят о том, что если произведение $(-2) \cdot 3$ равно -6, то произведение $(-2) \cdot (-3)$ не может равняться -6, но оно должно быть как-то связано с числом 6. Поэтому остается одна возможность:

$$(-2) \cdot (-3) = 6.$$

В качестве доказательства используют распределительный закон умножения: при сложении двух чисел $(-2) \cdot 3$ и $(-2) \cdot (-3)$ в результате получают ноль, то есть данные числа противоположные, значит, произведение двух чисел оказывается положительным.

$$(-2) \cdot (-3) + (-2) \cdot 3 = (-2) \cdot (-3 + 3) = (-2) \cdot 0 = 0.$$

Выводят следующее правило.

Правило. Чтобы перемножить два отрицательных числа, надо перемножить их модули и поставить перед полученным числом знак плюс.

Или: произведение двух чисел одного знака положительно.

Или: «минус» на «минус» дает «плюс».

КАК СТАТЬ АВТОРОМ ГАЗЕТЫ «МАТЕМАТИКА»?

Сделать это несложно: надо лишь написать статью и прислать ее в редакцию газеты. И еще одно условие — она должна быть интересна и полезна вашим коллегам.

Требования к оформлению статьи таковы:

Материал должен быть либо напечатан, на компьютере или на пишущей машинке.

Рисунки должны быть четкими, аккуратными, выполненными на белой нелинованной или клетчатой бумаге с помощью чертежных инструментов. Если вы хорошо владеете компьютером, можете воспользоваться для этого программой Corel Draw.

Рисунки надо пронумеровать, нумерация должна соответствовать их нумерации в тексте.

Фотографии могут быть цветными или черно-белыми. Формат фотографий, отпечатанных на бумаге, не менее 10 × 15 см. Размер цифровых фотографий не менее 800 × 600 пикселей, формат JPG, качество, используемое при сохранении JPG-файлов, высокое (high).

Прислать статью можно по почте или по электронной почте. Всю необходимую для этого информацию вы найдете на последней странице 2 газеты.

Для выплаты гонорара необходимо заполнить авторскую карточку.

Приглашаем вас к сотрудничеству
и желаем удачи!

Данные автора

Фамилия		
Имя		
Отчество		
Дата рождения		
Место рождения		
Паспорт		
Серия	№	Когда выдан
Кем выдан		
Адрес прописки		
Индекс	город	
Улица		
Дом	корпус	квартира
Адрес проживания		
Индекс	город	
Улица		
Дом	корпус	квартира
Телефон		
Номер пенсионного страхового свидетельства		
ИНН (можно не указывать)		


Фото В. Давыдовой

УРОК ОТКРЫТИЯ НОВОГО ЗНАНИЯ: ЧЕТЫРЕ ФРАГМЕНТА

В. АНДРУЩЕНКО,
Москва

«Умножение смешанных чисел»

Учебник: *Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г.* Математика, 5. — М.: Ювента.

Постановка проблемы

Выполните действия:

а) $3\frac{5}{14}+1\frac{2}{7}$; б) $8\frac{2}{5}-4\frac{1}{6}$;

в) $\frac{2}{15}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{22}{25}\cdot\frac{3}{4}$; г) $2\frac{1}{2}\cdot1\frac{3}{4}$.

(*На последний пример может быть несколько ответов* ($4\frac{3}{8}$ *или* $2\frac{3}{8}$) *или не быть вообще. Все гипотезы записываются на доске.*)

— Как по-другому можно сформулировать задание под буквой «г»?

[Умножить смешанные числа.]

— Какими способами вы пользовались при решении?

[1. Переводили смешанные числа в неправильную дробь.

2. Пользовались распределительным законом, представляя смешанные числа как сумму целой и дробной частей.

3. Умножали целую часть на целую, а дробную часть на дробную.]

— Вы предложили целых три алгоритма умножения смешанных чисел. Запишем их.

(*Учителю можно самому записать алгоритмы на доске, а лучше использовать индивидуальные доски, где ученики сами запишут предлагаемый ими алгоритм.*)

1. $2\frac{1}{2}\cdot1\frac{3}{4}=\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{4}=\frac{35}{8}=4\frac{3}{8}$.

2. $2\frac{1}{2}\cdot1\frac{3}{4}=\left(2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{3}{4}\right)=2\cdot\left(1+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{4}\right)=$
$=2+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=2+2+\frac{3}{8}=4\frac{3}{8}$.

3. $2\frac{1}{2}\cdot1\frac{3}{4}=(2\cdot1)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)=2+\frac{3}{8}+2\frac{3}{8}$.

— Что интересного вы заметили в результатах?

[Первый и второй способы дали одинаковый результат.]

— Как проверить правильность предложенных алгоритмов? Вспомните, как мы выводили алгоритм произведения обыкновенных дробей.

[Мы вычисляли площадь прямоугольника.]

— Что нам нужно предпринять в данном случае?

[Построить прямоугольник со сторонами $2\frac{1}{2}$ и $1\frac{3}{4}$. Найти его площадь по формуле $S = ab$.]

(*Здесь используется заготовка квадрата со стороной 4 клетки. Квадрат строится и в тетради.*)

— Так что мы с вами видим?

[Оказывается, первый и второй способы дали верный результат, а третий — неправильный.]

— На уроках вы можете пользоваться как первым, так и вторым способами. Как вам кажется, какой способ наиболее короткий и простой?

[Первый способ.]

— Сформулируйте алгоритм умножения смешанных чисел на основе первого способа.

Алгоритм

1. Перевести смешанные числа в неправильные дроби.
2. Умножить дроби по правилу умножения обыкновенных дробей.
3. Сократить дробь, выделить (если необходимо) целую часть.

(*Учитель заготавливает этапы алгоритма на карточках. По мере их называния, этапы вывешиваются на доску.*)

Н. САДОВНИКОВА,
г. Владимир

«Умножение обыкновенных дробей»

Учебник: *Зубарева И.И., Мордкович А.Г.* Математика, 6. — М.: Мнемозина.

Постановка проблемы

Вычислите площадь прямоугольника со сторонами:

а) 3 см и 5 см; б) $\frac{3}{4}$ см и 5 см;

в) $\frac{3}{4}$ см и $\frac{5}{7}$ см.

(*Учащиеся высказывают разные мнения, испытывают затруднения.*)

— Вспомните, какое арифметическое действие означает черта дроби. Сравните числа 5 и $\frac{5}{7}$.

[Во втором случае множитель уменьшили в 7 раз, значит, результат от умножения на это число должен быть в 7 раз меньше произведения чисел $\frac{3}{4}$ и 5.]

— Как решить задачу?

$$\left[\left(\frac{3}{4}\cdot 5\right) : 7 = \frac{15}{4\cdot 7} = \frac{15}{28}.\right]$$

— Вычислите, рассуждая аналогично:

а) $\frac{3}{5}\cdot 7$ и $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{8}$; б) $\frac{5}{7}\cdot 3$ и $\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{11}$.

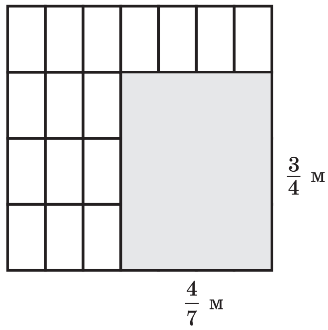
— Проанализируйте полученные результаты. Постарайтесь сформулировать правило умножения обыкновенных дробей.

— Над какой темой мы сегодня работали? Тему урока запишите в тетрадь. Сформулируйте еще раз правило умножения обыкновенных дробей и тоже запишите его в тетрадь.

Закрепление изученного правила

Задача. Найдите площадь прямоугольника двумя способами.

Способ I. Рассмотрите рисунок и ответьте на вопросы.



а) На сколько частей разделены стороны квадрата?

б) На сколько равных прямоугольников разделен квадрат?

в) Какую часть площади квадрата составляет площадь одного такого прямоугольника?

г) Какую часть площади квадрата составляет площадь заштрихованного прямоугольника?

Способ II. Вычислите площадь прямоугольника, используя правило умножения обыкновенных дробей.

Сравните числа, полученные в первом и втором случаях, сделайте выводы.

Н. САДОВНИКОВА,
г. Владимир

«Умножение положительных и отрицательных чисел»

Учебник: *Зубарева И.И., Мордкович А.Г.* Математика, 6. — М.: Мнемозина.

Постановка проблемы

1. Замените сумму произведением:

а) $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$;

б) $(-6) + (-6) + (-6) + (-6)$;

в) $(-1) + (-1) + (-1) + (-1) + \ldots$ (n слагаемых).

2. Представьте произведение в виде суммы:

а) $(-1)\cdot 3$; б) $(-1)\cdot 7$;

в) $(-1)\cdot n$ (n — натуральное число).

3. Вычислите, используя результаты предыдущего задания:

а) $(-1)\cdot 3$; б) $(-1)\cdot 7$.

4. Сравните результат умножения со вторым множителем. Что вы заметили?

[Результат противоположен второму множителю.]

5. Каким, по вашему мнению, должно быть значение выражений и почему:

$3\cdot(-1)$; $7\cdot(-1)$; $1\cdot a$; $(-1)\cdot a$; $a\cdot(-1)$?

6. Что получается при умножении натурального числа на -1?

[Получается противоположное ему число.]

Сформулируйте правило умножения -1 на натуральное число.

$$-1\cdot n=-n$$

7. Что получится при умножении 1 на отрицательное число?

[Это же самое число.]

Вычислите:

а) $1\cdot(-3)$; б) $1\cdot(-5{,}8)$.

8. Что получится при умножении -1 на отрицательное число?

[Противоположное ему число.]

Вычислите:

а) $-1\cdot(-3)$; б) $(-5)\cdot(-1)$.

Сформулируйте правило умножения -1 на отрицательное число:

$$-1\cdot a=-a$$

9. Вычислите значение произведения:

а) $(-2)\cdot 2{,}5$; б) $19\cdot(-0{,}2)$.

Проанализируйте полученные результаты и постарайтесь сформулировать правило умножения чисел с разными знаками.

Ученики анализируют и формулируют правило. Записывают его в виде схем:

$$(+)\cdot(-)=(-) \qquad (-)\cdot(+)=(-)$$

Е. ЖДАНКИНА,
г. Чехов, Московская обл.

«Деление дробей и смешанных чисел»

Учебник: *Виленкин Н.Я.* и др. Математика, 6. — М.: Мнемозина.

Устная работа

1. Представьте в виде неправильной дроби:

$$1\frac{1}{4};\ 2\frac{1}{2};\ 5;\ 1\frac{2}{3}.$$

— Как перевести смешанное число в неправильную дробь?

2. Расположите полученные числа в порядке возрастания:

$$\left[\frac{5}{4};\ \frac{5}{3};\ \frac{5}{2};\ \frac{5}{1}.\right]$$

3. а) Найдите произведение первой и последней дроби.

б) Найдите произведение второй и третьей дроби.

— Сформулируйте правило умножения обыкновенных дробей.

4. Назовите числа, обратные числам:

$$\frac{5}{6};\ \frac{9}{4};\ \frac{1}{3};\ 2;\ \frac{a}{b};\ n.$$

— Какие числа называются взаимно обратными?

5. Пользуясь первым равенством, найдите значение второго выражения:

а) $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}:\frac{2}{9}$;

б) $\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{7}$, $\frac{1}{7}:\frac{1}{5}$.

— Чем вы воспользовались при выполнении задания? Что значит разделить число a на число b?

(*На доске вывешивается плакат с определением действия деления.*)

Если $a:b=x$, то $x\cdot b=a$.

6. Пользуясь определением действия деления, найдите частное:

а) $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}$; б) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$; в) $2\frac{1}{4}:\frac{3}{4}$.

(*Задание* 6 *выполняется индивидуально.*)

Постановка проблемы

— Какое задание вам необходимо было выполнить?

[Найти частное дробей, используя определение действия деления чисел.]

— Что у вас получилось?

$$x\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2};\ x\cdot\frac{c}{d}=\frac{a}{b};\ x\cdot\frac{3}{4}=2\frac{1}{2}.$$

— В чем возникло затруднение?

[В первом случае, используя определение, можно подобрать значения x, а во втором и третьем случаях — очень трудно.]

Поиск выхода из проблемной ситуации

— Какую цель мы ставим перед собой?

[Найти способ делить дроби, не используя определение действия деления.]

— А зачем нам нужен будет этот способ?

[Чтобы научиться быстро делить дроби.]

— Сформулируйте тему урока.

[«Деление дробей и смешанных чисел».]

— Запишите тему в тетрадь. Нам необходимо найти корень уравнения x. Каким методом мы можем это сделать?

[Методом подбора, методом весов.]

— Решив уравнение, что будем делать?

[Анализировать, что было и что получилось, выводить формулу.]

— Рассмотрим первый пример: $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}=x$. По определению вы верно записали: $x\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$. Итак, нам надо решить уравнение, то есть необходимо найти x. На какое число надо умножить обе части уравнения, чтобы слева остался только x?

[Можно использовать определение взаимно обратных чисел, то есть умножить на $\frac{3}{2}$.]

— Запишите, что получится.

$$\left[\left(x\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}.\right]$$

— Каким свойством можно воспользоваться в левой части уравнения?

[Сочетательным свойством умножения.]

— Что получится?

$$\left[x=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}.\right]$$

— Какой пример мы решали?

$$\left[x=\frac{1}{2}:\frac{2}{3}.\right]$$

— Таким образом, $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}$. Что интересного вы заметили?

[В правой части — частное дробей, а слева — произведение делимого и дроби, обратной делителю.]

— Сформулируйте гипотезу, что значит разделить дробь?

[Разделить дробь — это значит умножить делимое на число, обратное делителю.]

— А теперь вернемся к домашнему заданию, которое вы выполняли к этому уроку. Надо было решить уравнения методом подбора:

а) $x\cdot\frac{5}{9}=\frac{10}{27}$; б) $x\cdot\frac{4}{7}=\frac{12}{49}$.

Какие ответы вы получили?

$$\left[x=\frac{2}{3};\ x=\frac{3}{7}.\right]$$

— Проверим нашу гипотезу, решив эти уравнения с помощью нашего правила деления дробей. Совпадают ли ответы?

[Да.]

— Верна ли гипотеза?

[Да.]

— Запишите равенство $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$, где a, b, c, d — натуральные числа. Составим алгоритм деления дробей:

Алгоритм

1. Деление заменить умножением.
2. Делитель заменить числом, обратным данному.
3. Выполнить умножение по известному алгоритму.

ФОТО НА КОНКУРС

– Паш, а ты можешь быстро сказать – па-рал-ле-ле-пи-пед?
– Не, Никит, я длину-ширину-высоту ловлю! Что-то они у меня разбегаются в разные стороны!

Шестиклассники П. Солонин и Н. Томин на практическом занятии по математике.

Автор: И.В. Абрамова, центр образования № 1048, г. Москва

Е.ДРОБОТОВА,
Москва

Известный польский математик Гуго Штейнгаус шутливо утверждает, что существует закон, который формулируется так: *«Если поручить двум людям, один из которых математик, выполнение любой незнакомой им работы, то результат всегда будет следующим: математик сделает ее лучше».*

ГРАФЫ

Развитие, которое ребенок получает, занимаясь математикой, позволяет ему решать задачи не только узкой математической направленности, но и в любой области, далекой от математики. Поскольку именно математика способствует развитию логики, формированию индуктивного, дедуктивного мышления, развивает пространственное воображение, интуицию, учит моделированию…

Предлагаю вашему вниманию урок — факультативное занятие для учащихся 7-х классов.

Выбор темы оправдан тем, что графы являются простым, доступным, наглядным и в то же время мощным средством для решения широкого круга важных практических задач.

Цели: познакомить с понятием граф;
рассмотреть примеры графов;
показать применение графов к решению задач.

Ход урока

Учитель. Перед вами, ребята, портрет великого русского писателя, графа Льва Николаевича Толстого (слайд 1).

А почему на этом же слайде схема московского метро? Дело в том, что слово «граф» имеет несколько значений, и схема метро… — это математический граф!

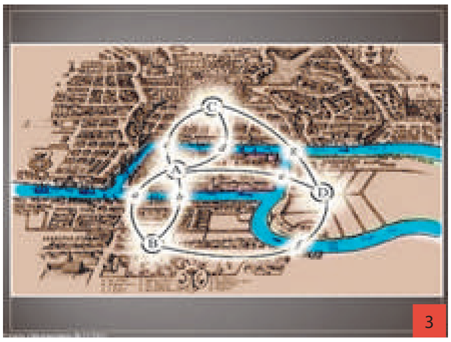
Сначала познакомимся с графом математическим, а к графу Толстому вернемся чуть позже.

Математики называют графом конечное множество точек, которые соединены линиями.

Точки — вершины графа; соединяющие их линии — ребра графа (рис. 1).

Посмотрите на схему метро. В этом графе что является вершинами? Ребрами?

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 12.



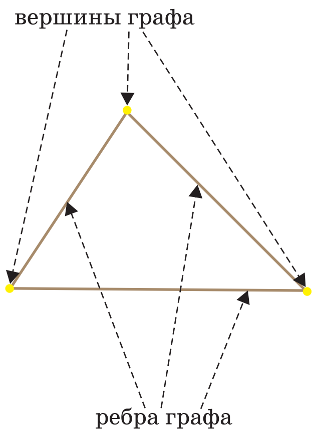


Рис. 1

[Вершины – станции, ребра – пути, соединяющие эти станции.]

Хочу предложить вам решить задачу-загадку. Перед вами граф — «распечатанное письмо» (рис. 2). Попробуйте начертить этот граф, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя по одной линии дважды. Тот, у кого получилось, может выйти к доске и записать маршрут обхода.

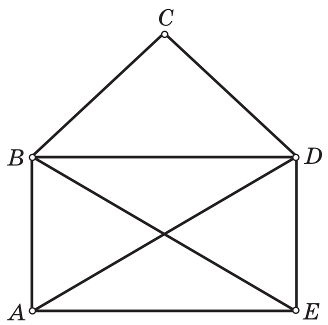


Рис. 2

В какой вершине вы начали движение? В какой закончили?

[Начала в A, закончила в E.]

Есть другие варианты?

[Да, я начал в E, а в A закончил.]

У кого-то не получилось? В каких вершинах вы начинали движение?

[Я начала в B. Я начал в D. А я в C.]

Не расстраивайтесь! Мы сейчас с вами выведем алгоритм для решения этой задачи. Для этого нам нужно будет перенестись на более чем 200 лет назад и оказаться вместе с великим российским математиком, швейцарцем по происхождению, Леонардом Эйлером в городе Кенигсберге (сейчас этот город называется Калининград). В пределах города протекает река, которая омывает два острова. С берегов на острова перекинуты мосты (слайд 2).

Кенигсбергцы предлагали приезжим следующую задачу: пройти по всем мостам и вернуться в начальный пункт, причем на каждом мосту следовало побывать только один раз. До Эйлера никто не мог этого сделать, но и доказать, что это невозможно, тоже ни у кого не получалось. Как поступил Эйлер?

Он взял карту, на которой изображены были река, острова и мосты, и создал математическую модель этой карты. Для этого он «сжал» берега и острова в точки, а мосты «растянул» в линии. Что же у него получилось?

[Граф.]

Этот граф вы видите и у себя в рабочих листках (рис. 3), и на слайде (слайд 3).

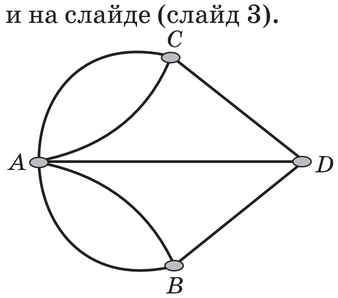


Рис. 3

Попробуйте провести линии по всем ребрам-«мостам» графа, не отрывая карандаша от бумаги. У кого получилось? Таких нет?

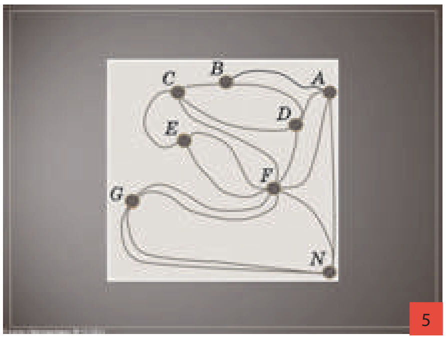
У Эйлера тоже не получилось... А знаете почему? Оказывается дело в числе ребер, сходящихся в вершине!

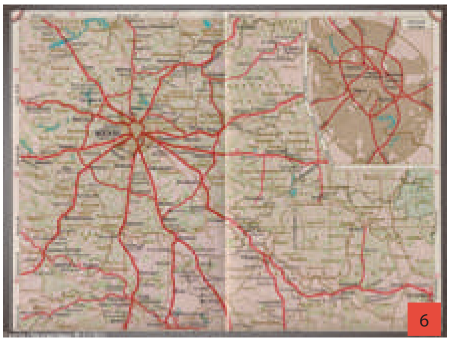
Давайте посчитаем, сколько ребер сходится в каждой вершине графа. Напишите рядом с каждой вершиной число, отражающее количество ребер, в ней сходящихся, и назовем вершину четной или нечетной в зависимости от того, какое число, четное или нечетное, стоит рядом.

Итак, в вершине A сходится 5 ребер, в вершине B — 3, в вершине C — 3, в вершине D — 3.

Какими являются все эти вершины?

[Нечетными.]





Мы подошли к разгадке совсем близко!

Докажем, что наш граф невозможно обойти, не проходя дважды по одному и тому же ребру.

Следите за моими рассуждениями и дополняйте их.

Рассмотрим, например, вершину *B*. В ней сходится 3 ребра. Если мы начинаем обход с этой вершины, то по одному из ребер мы из нее... [выходим], по второму... [возвращаемся]; прибыв в любую другую вершину, мы должны... [выйти] из нее, иначе одно из ребер останется не пройденным. Значит, если вершина *B* — начало обхода, то она не может быть его... [концом].

Предположим, что мы попали в вершину *B* не в начальный момент. Тогда мы сможем... [выйти] из нее по одному из двух ребер. Но нам придется снова... [вернуться] в *B*, так как иначе второй отрезок останется не пройденным. А вот сможем ли выйти?

[Нет, отрезков больше нет.]

Значит, если вершина *B* — не начало, значит — она... [конец]. Итак, вершина *B* либо начало обхода, либо конец, она не может быть промежуточной точкой движения.

А что же другие вершины? Что вы скажете о них?

[В вершинах *C* и *D* сходится по три ребра, в вершине *A* — пять ребер, то есть нечетное число. Значит, вершины *A*, *C* и *D*, как и вершина *B*, не могут быть промежуточными точками.]

Получилось два начала и два конца, что невозможно.

Примерно так рассуждал Леонард Эйлер. И им было сформулировано правило:

> «Если все вершины графа четные, то тогда обход возможен, и начать этот обход можно с любого участка.
>
> Если же из этих вершин две нечетные, то и тогда можно совершить обход, но только начало обхода непременно должно быть взято в одной из этих двух вершин, а конец обхода непременно должен быть во второй нечетной вершине.
>
> Если, наконец, в графе больше двух нечетных вершин, то тогда такое движение вообще невозможно...»

Давайте вернемся к задаче «распечатанное письмо» и применим правило Эйлера. Сколько ребер сходится в каждой вершине?

[В вершине А — три ребра, в В — 4, в С — 2, в D — 4.]

Что вы скажете о четности вершин в этом графе?

[Три вершины – четные и две – нечетные.]

Кто может сказать, как нужно было совершить обход этого графа, согласно правилу Эйлера?

Давайте, проверим, что записали на доске те ученики, у которых получилось в начале урока решить эту задачу. Да, они так и поступили — начали обход в одной из нечетных вершин (*A* или *E*), а завершили в другой!

А возможно ли изменить ситуацию в задаче с «кенигсбергскими мостами»?

Предлагаю вам поработать группами.

Группа № 1 должна «убрать» один мост.

Группа № 2 должна «достроить» один мост.

Группа № 3 должна передвинуть один мост (см. слайд 3).

(*Ученики находят решение поставленной задачи, и представитель от каждой группы выходит к доске, к графу, и демонстрирует решение. От ученика требуется доказать, что сделанное им приведет к нужному результату.*)

Перенесемся из древнего Кенигсберга в современный Санкт-Петербург, город белых ночей, построенный Петром I в устье реки Невы. Сейчас в Санкт-Петербурге 342 моста. Перед вами фрагмент карты города, на которой указаны 8 островов и 17 мостов (слайд 4). Представьте, что вам требуется разработать экскурсионный маршрут по этим мостам. Назовем его «Город мостов и белых ночей». Начинаться и заканчиваться он должен в одном и том же месте, и туристы не должны проезжать по одному мосту дважды.

Можно ли решить эту задачу, не находясь в Санкт-Петербурге? У кого есть предложения, идеи?

(*Ученики предлагают составить граф. Если ученики испытывают затруднения, учитель помогает им наводящими вопросами.*)

Работать над этим проектом вы будете в группах. У вас на партах лежат заготовки (рис. 4).

Берега и острова обозначены буквами, это вершины графа, а ребра-мосты начнем «наводить» вместе.

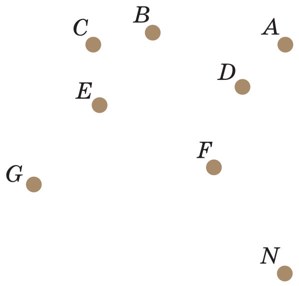


Рис. 4

Берег, обозначенный буквой A, соединяется мостами с островами B, D, F и берегом N. Проведите линии — ребра графа — из вершины A в вершины B, D, F, N.

С острова B мосты ведут на острова C, D и берег A (это ребро графа уже построено).

Проведите ребра, соединяющие остров B с островами C, D и т.д.

(*Учитель помогает в построении ребер для вершин C, D,E, остальные ребра ученики достраивают сами. Когда построение закончено, ученики решают задачу и записывают свои выводы.*)

Вы поработали, а теперь прошу представителей от каждой группы выйти к доске и прочитать составленный группой вывод.

Вот какие результаты получились у меня при решении этой задачи (слайд 5).

(*Учитель подводит итог самостоятельной работы учащихся.*)

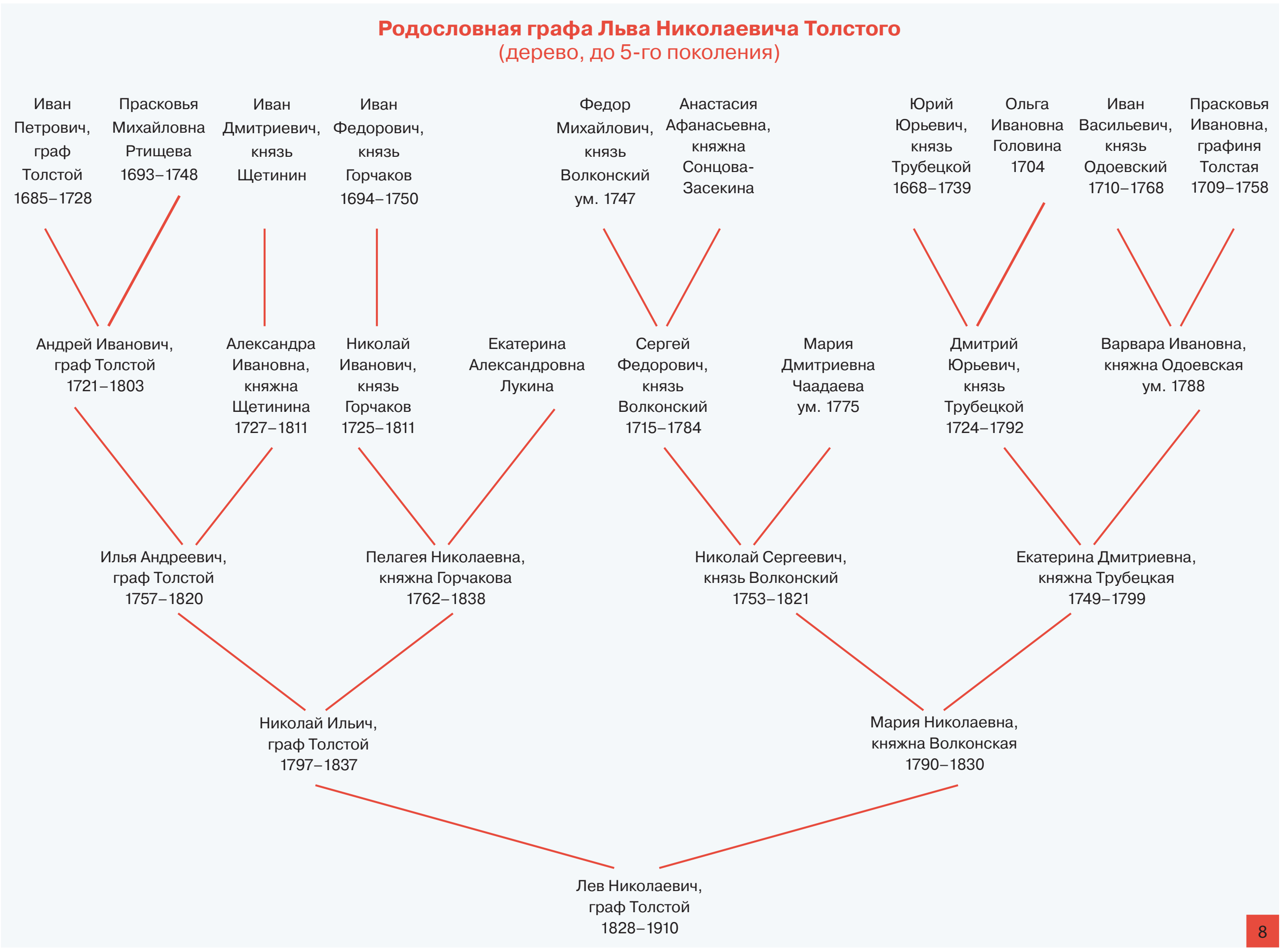
Я уверена, что теперь вам не составит труда организовать экскурсию не только по мостам, но и по дорогам. Почему? Потому что и сеть железных дорог, и схема авиационных маршрутов – это тоже графы! Посмотрите на слайды 6 и 7.

И в заключение нашего занятия снова обратимся к Льву Николаевичу Толстому и рассмотрим часть его генеалогического древа (слайд 8). Вы, конечно, уже поняли, что это тоже математический граф.

Ответьте, пожалуйста, что является вершинами этого графа, а что ребрами?

[Вершины — предки писателя, а ребра — родственные связи.]

Подведем итог: сегодня вы познакомились с методом решения задач с помощью графов. И я надеюсь, что вы убедились в том, что теория графов позволяет быстро и изящно решать задачи, которые весьма трудно решить другими методами.



А. ФУТЛЯРОВА,
г. Мариинский Посад,
Чувашская Республика

РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предлагаю вниманию коллег 20 вариантов показательных уравнений одинаковой сложности, собранных мною из разных источников. Я их использую много лет для закрепления новой темы, при повторении и при подготовке к ЕГЭ.

№ 1

1. $7^{x-2} = \sqrt[3]{49}$.
2. $2^{x-2} = 1$.
3. $\frac{1}{8}\sqrt{2^{x-1}} = 4^{-1,25}$.
4. $6^{x+1} + 35 \cdot 6^{x-1} = 71$.
5. $5^{2x} - 2 \cdot 5^{x} - 15 = 0$.
6. $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-x} - \left(\frac{1}{5}\right)^{x} = 4,96$.
7. $8^{\frac{2}{x}} - 8 \cdot 8^{\frac{1}{x}} + 12 = 0$.

№ 2

1. $5^{x^2-2x-1} = 25$.
2. $5^{4x-7} = 1$.
3. $10^{2x} = 0,1\sqrt{1000}$.
4. $3^{x+2} - 3^{x} = 72$.
5. $27 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} - 6 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{x} - 8 = 0$.
6. $3^{x} + 3^{3-x} = 12$.
7. $27 \cdot 16^{x} - 6 \cdot 36^{x} = 8 \cdot 81^{x}$.

№ 3

1. $4^{x} = 8^{2x-3}$.
2. $0,8^{2x-3} = 1$.
3. $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \frac{\sqrt{7}}{7}$.
4. $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$.
5. $4^{x} - 5 \cdot 2^{x} + 4 = 0$.
6. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} + 3^{x+3} = 12$.
7. $3^{2x^2-9} + 25 \cdot 15^{x^2-5} = 2 \cdot 5^{x^2-8}$.

№ 4

1. $\left(\frac{5}{2}\right)^{x} = \left(\frac{4}{25}\right)^{2}$.
2. $2^{2x-9} = 1$.
3. $2^{x^2+2x-0,5} = 4\sqrt{2}$.
4. $2 \cdot 3^{x+1} - 3^{x} = 15$.
5. $9^{x} - 8 \cdot 3^{x} - 9 = 0$.
6. $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x} + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x} = 5$.
7. $27^{x} + 12^{x} = 2 \cdot 8^{x}$.

№ 5

1. $2^{x} = 32$.
2. $6^{x-1} = 1$.
3. $(0,5)^{3x-1} = 16^{-2}$.
4. $4^{x+1} + 4^{x} = 320$.
5. $100^{x} - 11 \cdot 10^{x} + 10 = 0$.
6. $2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x} + 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x} = 5$.
7. $5 \cdot 2^{3x-3} - 3 \cdot 2^{5-3x} + 7 = 0$.

№ 6

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = 9$.
2. $10^{x^2+x-2} = 1$.
3. $(0,04)^{2-x} = 25^{-1}$.
4. $3 \cdot 5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+1} = 77$.
5. $36^{x} - 4 \cdot 6^{x} - 12 = 0$.
6. $2^{x} - 8 \cdot 2^{-x} = 7$.
7. $4^{x} \cdot 5 + 2 \cdot 25^{x} = 7 \cdot 10^{x}$.

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 12.

№ 7

1. $4^{3-2x}=4^{2-x}$.
2. $7^{2\sqrt{x}}=1$.
3. $(0{,}8)^{3-2x}=(1{,}25)^3$.
4. $5^{2x+1}-3\cdot5^{2x-1}=550$.
5. $49^x-8\cdot7^x+7=0$.
6. $3^x-9\cdot3^{-x}=8$.
7. $2^{2x+1}+25^{x+0{,}5}=7\cdot10^x$.

№ 8

1. $2^{5x+1}=4^{2x}$.
2. $3^{2x^2+5x-18}=1$.
3. $(3{,}5)^{x-5}=\left(\frac{4}{49}\right)^2$.
4. $2^{x+2}+2^x=5$.
5. $9^x-3^x-6=0$.
6. $9-2^x=2^{3-x}$.
7. $4^x-3^{x-0{,}5}=3^{x+0{,}5}-2^{2x-1}$.

№ 9

1. $8^{-x}=16$.
2. $6^{3x^2+11x-4}=1$.
3. $\sqrt[4]{16^{x-3}}=\frac{4}{\sqrt{2}}$.
4. $3^x+4\cdot3^{x+1}=13$.
5. $4^x-3\cdot2^x=40$.
6. $3^x+3^{1-x}=\frac{28}{3}$.
7. $8^x+18^x=2\cdot27^x$.

№ 10

1. $2^{7-3x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$.
2. $0{,}1^{y^2+y-12}=1$.
3. $\sqrt{5^{x+2}}=\frac{1}{\sqrt[5]{5}}$.
4. $5^{x+1}-3\cdot5^{x-2}=122$.
5. $9^x-6\cdot3^x-27=0$.
6. $3^{1+x}-2\cdot3^{1-x}=7$.
7. $9^{x^2-1}-36\cdot3^{x^2-3}+3=0$.

№ 11

1. $\left(\frac{2}{9}\right)^{4x+3}=4{,}5^{x-6}$.
2. $5^{4x^2-4x+1}=1$.
3. $\sqrt[3]{2^{x-1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}$.
4. $3^{x+1}-4\cdot3^{x-2}=69$.
5. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}-6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-27=0$.
6. $5^x+5^{3-x}=30$.
7. $5^{3x+1}+34\cdot5^{2x}=7\cdot5^x$.

№ 12

1. $0{,}9^x=1\frac{19}{81}$.
2. $10^{x^2-17x+42}=1$.
3. $\sqrt[3]{9^{2x+1}}=\frac{3}{\sqrt[5]{3}}$.
4. $2^x+2^{x-3}=18$.
5. $4^x-14\cdot2^x-32=0$.
6. $10^{1+x^2}-10^{1-x^2}=99$.
7. $7^{4\sqrt{x}}-8\cdot7^{\sqrt{4x}}+7=0$.

№ 13

1. $9^{-x}=27$.
2. $7^{x^2+5x-14}=1$.
3. $\sqrt{7^{2x+6}}=\frac{7}{\sqrt[4]{7}}$.
4. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}=5$.
5. $9^x-2\cdot3^x=63$.
6. $3^x+3^{-x}=2\cdot(3^x-3^{-x})$.
7. $3\cdot4^x+2\cdot9^x=5\cdot6^x$.

№ 14

1. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$.
2. $0{,}4^{25x^2-16}=1$.
3. $(0{,}125)^{x-1}=2^3$.
4. $3^{x+2}+3^x=30$.
5. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+2=0$.
6. $4^{x+1}+4^{1-x}-10=0$.
7. $5^{2x-1}+2^{2x}=5^{2x}-2^{2x+2}$.

№ 15

1. $\sqrt{3^x}=9$.
2. $0{,}1^{x^2-3x-4}=1$.
3. $\sqrt[3]{25^{x-1}}=\frac{5}{\sqrt[5]{5}}$.
4. $5^x-2\cdot5^{x-1}-3\cdot5^{x-2}=60$.
5. $81^x-2\cdot9^x-3=0$.
6. $2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{x}-7+5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{x}=0$.
7. $2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=3$.

№ 16

1. $3^{6-x}=3^{3x-2}$.
2. $0{,}3^{x^2-16}=1$.
3. $\sqrt[5]{7^{x+1}}=\frac{49}{\sqrt{7}}$.
4. $3\cdot2^{x+1}-6\cdot2^{x-1}=12$.
5. $\left(\frac{1}{9}\right)^{x}-3^{1-x}+6=0$.
6. $3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=5$.
7. $3\cdot16^x+2\cdot81^x=5\cdot36^x$.

№ 17

1. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1}=\left(\frac{7}{3}\right)^{5x-3}$.
2. $8^{x^2-5x+4}=1$.
3. $\sqrt{36^{2-3x}}=\frac{6}{\sqrt{6}}$.
4. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}+\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}=26$.
5. $16^x-50\cdot2^{2x}=896$.
6. $15\cdot(2^x+2^{-x})=17\cdot(2^x-2^{-x})$.
7. $2\cdot25^x-5\cdot10^x+2\cdot4^x=0$.

№ 18

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=27$.
2. $0{,}5^{4x^2-4}=1$.
3. $\sqrt[4]{27^{2-x}}=\frac{9}{\sqrt[5]{3}}$.
4. $2^{5x-1}+2^{5x-2}+2^{5x-3}=896$.
5. $4^x-2^{x+2}-32=0$.
6. $5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{x}-7+2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{x}=0$.
7. $3\cdot9^{\frac{1}{x}}+6^{\frac{1}{x}}=2\cdot4^{\frac{1}{x}}$.

№ 19

1. $0,2^x=\frac{1}{25}$.

2. $0,2^{x^2-2x}=1$.

3. $\sqrt[3]{4^{x+2}}=\frac{4}{\sqrt[5]{2}}$.

4. $3^{2\sqrt{x}}+3^{2\sqrt{x}-1}-3^{2\sqrt{x}-2}=11$.

5. $4^{x+1,5}-2^x=1,5$.

6. $2^x-3+2^{1-x}=0$.

7. $5^{x-1}+2^x-5^x+2^{x+2}=0$.

№ 20

1. $0,3^{7+4x}=0,027$.

2. $7^{5x^2-4x}=1$.

3. $\left(\frac{16}{25}\right)^{x+3}=\left(\frac{125}{64}\right)^2$.

4. $2\cdot3^{x+3}-5\cdot3^{x-2}=1443$.

5. $3^{2x+5}-3^{x+2}=2$.

6. $3^x-12+27\cdot3^{-x}=0$.

7. $25^x-7^x-35\cdot5^{2x}+35\cdot7^x=0$.

№ 21

1. $0,5^{x-2}=2^{8-3x}$.

2. $3^{x^2-6x+8}=1$.

3. $\sqrt[4]{5^{6x-7}}=\frac{25}{125}$.

4. $7^{\sqrt{x}+1}-2\cdot7^{\sqrt{x}}-7^{\sqrt{x}-1}=238$.

5. $16^{x+1}-17\cdot4^x+1=0$.

6. $5^x+4\cdot5^{1-x}=9$.

7. $6\cdot3^{\frac{2}{x}}-13\cdot6^{\frac{1}{x}}+6\cdot2^{\frac{2}{x}}=0$.

Ответы

Задание / Вариант	1	2	3	4	5	6	7
1	$2\frac{2}{3}$	2	2	1	1	1; 2	3; $\log_6 2$
2	3; –1	1,75	0,25	2	0,5	2	0,5
3	2,25	1,5	1; –3	1	2; 0	–1; –2	±2
4	–4	4,5	0,5; –1	1	2	0; 1	0
5	5	1	3	3	1; 0	0; –1	1
6	–1	1; –2	1	–1	1	3	0; 1
7	1	0	3	1,5	1; 0	2	0; –1
8	–1	2; –4,5	1	0	1	0; 3	1,5
9	$-1\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$; –4	4,5	0	3	0,5	0
10	1,5	3; –4	–2,4	2	–1; 0	1	$\pm\sqrt{2}$; ±1
11	0,6	0,5	2,5	3	4	1; 2	–1
12	–2	14; 3	0,1	4	–2	±1	0; 0,25
13	–1,5	2; –7	–2,25	0	2	–1; 2	0; 1
14	1	–0,8; 0,8	0	1	2	±0,5	1
17	4	4; –1	2,2	1	0,5	0; 1	$\frac{\pi n}{2}$
16	2	±4	6,5	2	3	0; 1	0; 0,5
15	0,25	4; 1	0,5	–1	∅	2	$\pm\log_{2,5} 2$
18	–3	±1	–0,4	2	3	0; 1	–1
19	2	0; 2	0,7	1	–1	0; 1	2
20	–1	0; 0,8	–6	3	–2	1; 2	0

В. ДУБРОВСКИЙ,
Москва

ДИНАМИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ С «МАТЕМАТИЧЕСКИМ КОНСТРУКТОРОМ»

Эпизод 2. Многовариантные задачи и построения

В последние годы на вступительных экзаменах в вузы стали регулярно предлагаться геометрические задачи, требующие рассмотрения нескольких возможных конфигураций. Иногда такие задачи действительно допускают разные чертежи и несколько ответов, а в других случаях в конце концов оказывается, что всем условиям задачи удовлетворяет только один из них. Попав в стандартный набор заданий ЕГЭ как задача С4, они стали особенно актуальны. Теоретически, многовариантные задачи — идеальная область для демонстрации преимуществ программ динамической геометрии. На самом деле это не совсем так: «многовариантность» часто достигается самым примитивным способом — в условии что-то не договаривается. Вот типичный пример — задача из диагностической работы к ЕГЭ-2011.

Задача 1. Окружность S радиуса 24 вписана в равнобедренную трапецию с основаниями 36 и 64. Найдите радиус окружности, которая касается основания, боковой стороны и окружности S.

Здесь просто не сказано, какого именно основания касается вторая окружность, и надо рассмотреть оба случая, то есть фактически решить две очень похожие, но отдельные задачи. (Зато, видимо по недосмотру составителей работы, эти задачи переопределены: четырехугольник задается пятью независимыми соотношениями, а у нас их шесть — параллельность двух сторон, равенство двух других, наличие вписанной окружности и три данных «размера».) Поэтому с точки зрения учета всех вариантов компьютер нам не поможет; просто надо быть внимательным; впрочем, помощь от него может придти с другой стороны, о чем мы еще скажем ниже.

Более интересна для нас следующая задача из подготовительных материалов к ЕГЭ.

Задача 2. Диагонали трапеции равны 13 и $\sqrt{41}$, а высота равна 5. Найдите площадь трапеции.

Эта задача, в противоположность первой, недоопределена — на четырехугольник наложено только четыре из необходимых пяти условий. Такие ситуации будто специально созданы для

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 12.

динамической геометрии, ведь на динамическом чертеже можно увидеть сразу все семейство фигур, удовлетворяющих условию. Построим чертеж; при построении воспользуемся имеющимися в «Математическом конструкторе» специальными инструментами, ускоряющими работу.

1. Проведем две горизонтальные прямые a и b и перпендикуляр AH к ним (рис. 1).

2. Построим отрезок длины $\sqrt{41}AH$ (он станет одной из диагоналей). Для этого, например, можно заметить, что $41 = 5^2 + 4^2$. Поделим отрезок AH на 5 равных частей (для этого имеется специальный инструмент) и построим отрезок $HC = \frac{4AH}{5}$, перпендикулярный AH (рис. 2), тогда $AC = \sqrt{41}AH$. Отрезок AC мы и примем за одну из диагоналей нашей трапеции.

3. Легко построить, пользуясь тем, что отрезок AH уже разделен на пять равных частей, отрезок длины $d = \frac{13AH}{5}$ (это построение на рисунках не показано). Теперь проведем окружность радиуса d с центром в произвольной точке B на прямой b. Она пересечет прямую a в *двух* точках, D и D_1, — отсюда и получаются два случая. Точку B можно расположить так, чтобы один из отрезков – BD или BD_1, в зависимости от того, по какую сторону от C она лежит, пересек AC. Соответственно, получим два варианта чертежа (рис. 3 и 4), точнее два «семейства» трапеций — $ABCD$ и $ABCD_1$, удовлетворяющих условию.

Двигая точку B по прямой b, легко понять, что, хотя построенная трапеция и будет изменяться, ее площадь в каждом из двух случаев будет оставаться постоянной: на сколько уменьшается при сдвиге B одно основание, на столько же увеличивается другое, при этом их сумма остается постоянной. Более того, в предельном случае, когда точка B совпадает с C, трапеция превращается в треугольник той же площади (рис. 5). А площадь треугольника легко находится, поскольку в нем известны две стороны и высота, проведенная из их общей вершины:

$$AE = HC = 4,\ DE = D_1E = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12,$$
$$DA = 8,\ D_1A = 16,$$

откуда

$$S_{ABCD} = S_{ACD} = 20,\ S_{ABCD_1} = 40.$$

Еще раз подчеркнем те преимущества, которые дает применение интерактивной геометрической среды при решении этой задачи. Во-первых, мы смогли поставить небольшой эксперимент, и он помог выявить сущность рассматриваемой ситуации и подсказал хорошее решение (с заменой трапеции треугольником). Во-вторых, аккуратно проведенное построение чертежа (а компьютерное построение по необходимости должно быть аккуратным) само привело нас к двум случаям, которые здесь намного менее очевидны, чем в первом примере.

Построение чертежа часто подсказывает путь к решению задачи. Посмотрим с этой точки зрения на задачу 1. Пусть уже построена трапеция $ABCD$ с вписанной в нее окружностью (рис. 6). Как построить окружность, касающуюся сторон BA и BC и данной окружности? Самый короткий

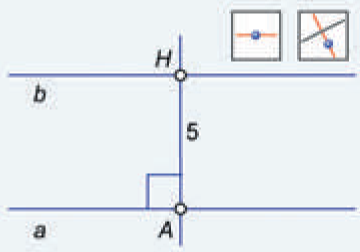


Рис. 1

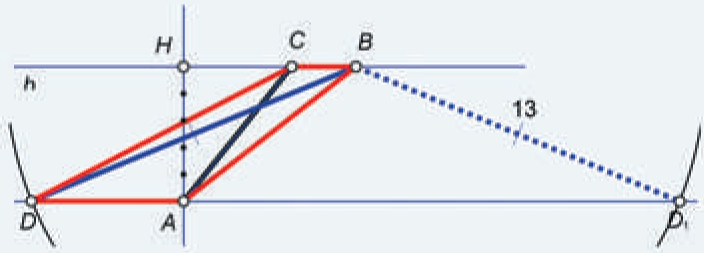


Рис. 3

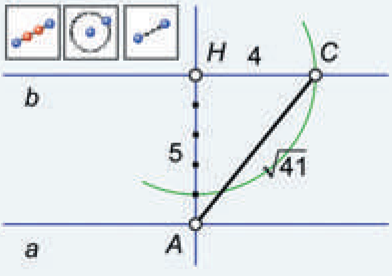


Рис. 2

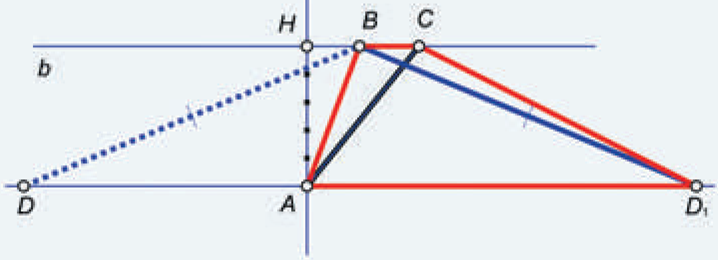


Рис. 4

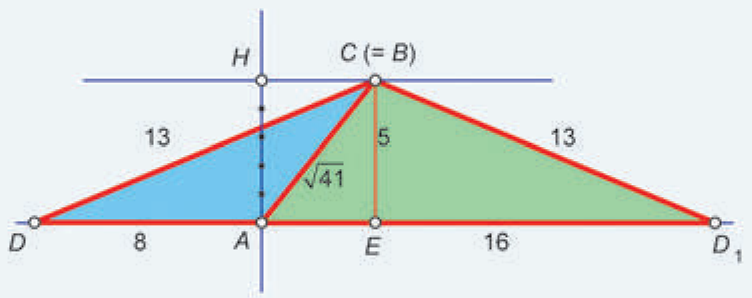


Рис. 5

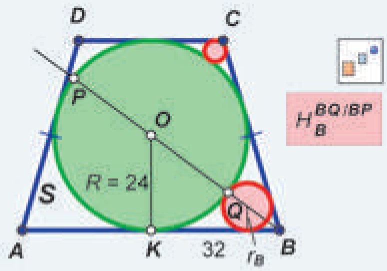


Рис. 6

способ — получить ее из данной с помощью гомотетии относительно центра B (в «Математическом конструкторе» для этого есть специальный инструмент). Коэффициент k гомотетии найдем исходя из того, что точки пересечения биссектрисы угла B с данной окружностью переходят в точки ее пересечения с искомой окружностью, то есть $k = \frac{BQ}{BP}$. Отсюда сразу получаем формулу для вычисления искомого радиуса:

$$r_B = kR = \frac{BQ}{BP}R = \frac{BO-R}{BO+R}R,$$

где $R = 24$ — радиус данной окружности, а

$$BO = \sqrt{BK^2 + R^2} = 40,$$

то есть $r_B = 6$. Аналогично, $r_C = \frac{8}{3}$.

Целая подборка многовариантных задач, проиллюстрированных динамическими чертежами, имеется на диске «1С: Школа. Математика, 5–11 классы. Практикум». А сейчас мы предлагаем для самостоятельного решения задачу, которую можно отнести к классике жанра (она предлагалась на мехматском вступительном экзамене почти полвека назад).

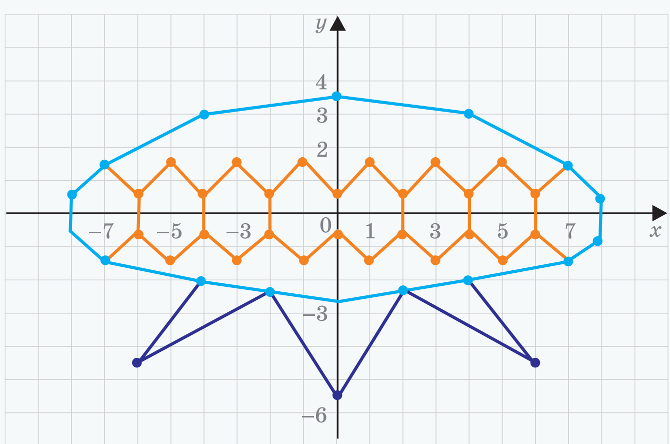
Задача 3. Через каждую из вершин B и D параллелограмма $ABCD$ проведены прямые, перпендикулярные к AB и BC. Они ограничивают параллелограмм, подобный $ABCD$. Найдите площадь $ABCD$, если $AB = 1$, $BC = 2$.

При решении очень поможет динамическая модель параллелограмма со сторонами 1 и 2 и переменным углом между ними. Мы рассмотрим эту задачу и соответствующую модель в следующий раз.

ТВОРЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «КООРДИНАТНАЯ ПЛОСКОСТЬ»

Автор: Кастаргин Женя.
Учитель: Т.В. Тараканова,
Большетолкайская средняя школа
Самарской области

«Инопланетный корабль»

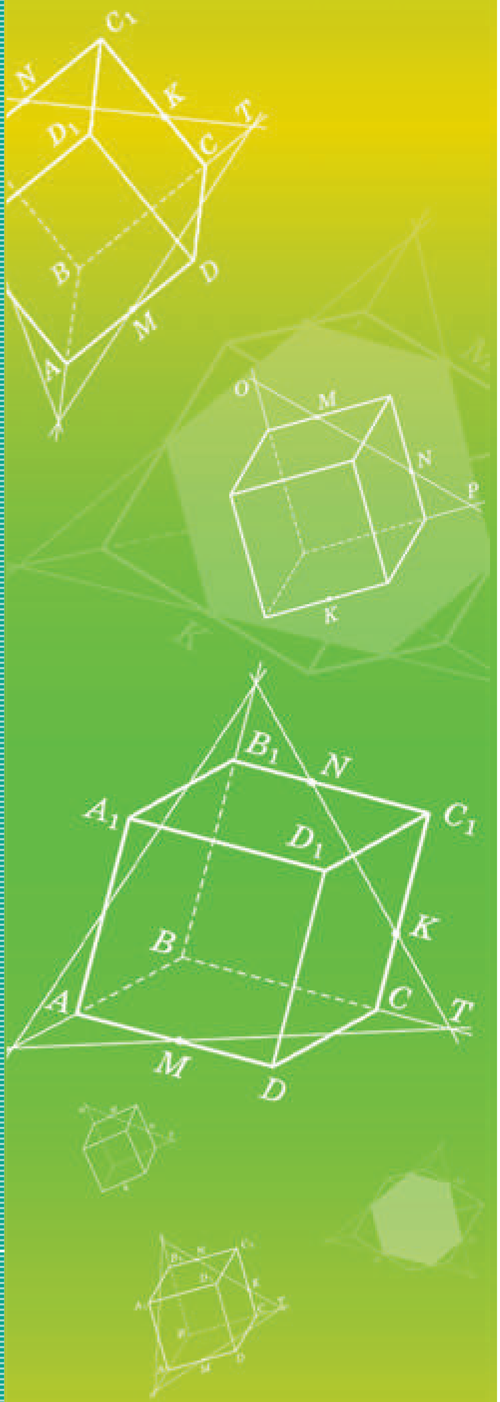


(–7; 1,5), (–6; 0,5), (–5; 1,5), (–4; 0,5), (–3; 1,5), (–2; 0,5), (–1; 1,5), (0; 0,5), (1; 1,5), (2; 0,5), (3; 1,5), (4; 0,5), (5; 1,5), (6; 0,5), (7; 1,5), (4; 3), (0; 3,5), (–4; 3), (–7; 1,5), (–8; 0,5), (–8; –0,5), (–7; –1,5), (–6; –0,5), (–6; 0,5), (–6; –0,5), (–5; –1,5), (–4; –0,5), (–4; 0,5), (–4; –0,5), (–3; –1,5), (–2; –0,5), (–2; 0,5), (–2; –0,5), (–1; –1,5), (0; –0,5), (0; 0,5), (0; –0,5), (1; –1,5), (2; –0,5), (2; 0,5), (2; –0,5), (3: –1,5), (4; –0,5), (4; 0,5), (4; –0,5), (5; –1,5), (6; –0,5), (6; 0,5), (6; –0,5), (7; –1,5), (8; –0,5), (8; 0,5), (7; 1,5), (8; 0,5), (8; –0,5), (7; –1,5), (4; –2), (0; –2,5), (–4; –2), (–7; –1,5).

Стояки: (–4; –2), (–6; –4,5), (–2; –2,25), (0; –5, 5), (2; –2,25), (6; –4,5), (4; –2).

И. ГОЛЕНДУХИНА,
Москва

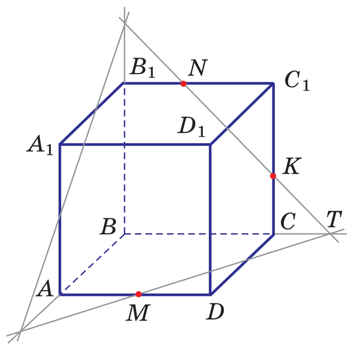
ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ КУБА



Построение сечений куба методом следов считается традиционно трудной задачей. В курсе стереометрии этим задачам уделяется совсем немного времени. Между тем для того, чтобы построить сечение, не требуется никаких базовых знаний и навыков. В связи с этим возникает несколько вопросов. Первый: «Нужно ли вообще тратить время на то, чтобы обучить ребят построению сечений?». Второй: «Если нужно, то как это сделать?». И третий: «На каком этапе изучения школьного курса стереометрии обучать ребят построению сечений куба?».

Для ответа на эти вопросы необходимо выяснить, какие геометрические факты используются при построении сечений и какие умения и навыки формируются в процессе решения этого класса задач.

Рассмотрим стандартную **задачу**: построить сечение куба плоскостью MNK, где $M \in AD$, $N \in B_1C_1$, $K \in CC_1$.



Решение. 1. Точки N и K принадлежат плоскости BB_1C_1C. Значит, прямая NK принадлежит этой плоскости (теорема 1.2 из учебника Погорелова).

2. Точка M принадлежит плоскости $ABCD$ (аксиома C_1).

3. $BB_1C_1C \cap ABCD = BC$ (аксиома C_2).

4. $NK \cap BC = T$, значит, $NK \cap ABCD = T$. Это следует из теоремы 1.2 и аксиомы C_2.

Дальнейшее построение сечения заключается в повторении этих операций. Сама постановка задачи — построение сечения по трем точкам — является иллюстрацией теоремы 1.3.

Вывод. При решении рассматриваемого класса задач используются и иллюстрируются геометрические факты, относящиеся к разделу «Аксиомы стереометрии и их простейшие следствия» и характеризующие расположение прямых и плоскостей в пространстве, то есть к начальным сведениям стереометрии.

Очевидно, что в процессе решения этих задач у ребят формируется навык практического применения изучаемых геометри-

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 12.

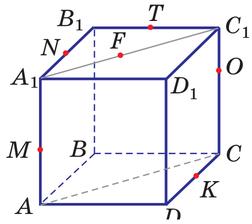
ческих фактов, развивается пространственное воображение, формируется умение изображать пространственные объекты на чертежах и работать с этими чертежами.

Таким образом, представляется наиболее целесообразным рассмотрение задач на построение сечений куба именно на начальном этапе изучения стереометрии. При этом возникает одна методическая проблема: определение куба появляется в программе значительно позже, чем изучаются аксиомы стереометрии. Однако проблема эта — кажущаяся. С кубом учащиеся знакомы еще с начальной школы. Задачи, связанные с объемом и площадью поверхности куба, рассматриваются в курсе математики 5–6-х классов, и отсутствие строгого определения этому не мешает. Значит, можно дать рабочее определение куба на одном из первых уроков стереометрии, а более строгое рассмотреть в свое время.

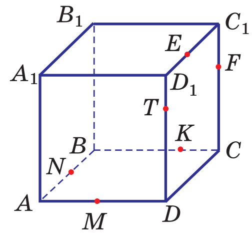
Вернемся к вопросам, поставленным вначале: как обучить ребят построению сечений и нужно ли тратить на это время. Кроме развития пространственного воображения, построение сечений куба, как это ни удивительно, значительно облегчает для ребят изучение стереометрии на первом, самом трудном, этапе. Происходит это потому, что при правильном построении системы упражнений научить ребят строить сечения довольно легко. Большая часть задач, относящихся к начальным сведениям стереометрии, — это задачи на доказательство, которые сложны для учеников, так как требуют хорошо развитого логического мышления, и не имеют четкого алгоритма решения. Если же параллельно учить ребят строить сечения, то появляется большое количество задач, с которыми учащиеся успешно справляются. Решение таких задач позволяет создать атмосферу успеха в классе, а количество и сложность задач можно варьировать в зависимости от подготовленности класса и других обстоятельств. При этом не требуется разработки специального дидактического материала. Достаточно заготовить 2–3 рисунка куба на бумаге формата А4, вложить их в файлы — и вы сможете дать ученикам бесконечное количество задач, используя фломастеры для маркерной доски.

Итак, рассмотрим систему упражнений, которая должна дополнять основной курс стереометрии, а не заменять его.

Задача 1. Какие из отмеченных точек принадлежат плоскости:
а) AA_1B_1B; б) BB_1C_1C; в) AA_1C_1C?

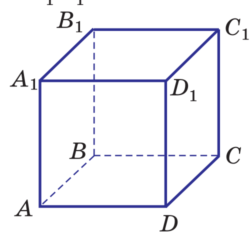


Задача 2. Какой плоскости принадлежат точки:
а) M, N, K; б) T, E, F?

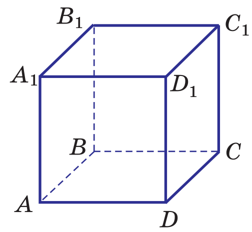


Таких задач можно составить много и предлагать их как иллюстрацию к аксиоме $С_1$ в качестве устных упражнений. Цель этих заданий — приучить учащихся к пространственным чертежам.

Задача 3. Укажите прямую пересечения плоскостей:
а) $ABCD$ и DD_1C_1C; б) $A_1B_1C_1D_1$ и AA_1B_1B;
в) $ABCD$ и BB_1D_1D.



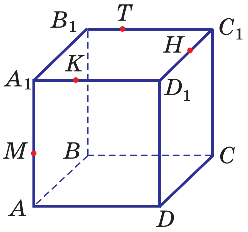
Задача 4. Назовите плоскости, которые пересекаются по прямой:
а) AB; б) CC_1.



Упражнения являются иллюстрацией к аксиоме $С_2$. Несколько упражнений нужно дать письменно, затем — устно. При выполнении этих заданий ученики должны попутно научиться изображать куб.

Задача 5. Определите, плоскости какой из граней куба принадлежит прямая:
а) MK лежит в плоскости грани ...;

б) TH принадлежит плоскости грани ...
Ответ обоснуйте.



Задача на применение теоремы 1.2. Содержательная часть практически полностью повторяет задачу 1.

Решая последние три задания, мы отрабатываем первый шаг алгоритма построения сечения.

Следующий шаг — построение точки пересечения данной прямой с данной плоскостью. Это — ключевая задача. Обязателен фронтальный контроль. Необходимо рекомендовать ребятам запомнить алгоритм построения точки пересечения прямой и плоскости, состоящий из трех шагов.

Алгоритм построения точки пересечения прямой a и плоскости α

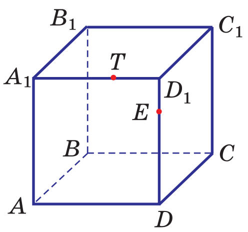
1. Найти плоскость, которой принадлежит прямая a (теорема 1.2).
2. Найти прямую пересечения этой плоскости и плоскости α (аксиома $С_2$).
3. Найти точку пересечения этой прямой и прямой a (следует из теоремы 1.2 и аксиомы $С_3$).

Алгоритм построения отрабатываем в несколько этапов.

На ***первом этапе*** даем задачу с планом решения, в котором учащиеся заполняют пропуски. В сильном классе план решения достаточно привести 1–2 раза. В слабом — сколько потребуется.

Задача 6. *Дано*: $A...D_1$ — куб; $T \in A_1D_1$, $E \in DD_1$.

Построить точку K — точку пересечения прямой TE и плоскости $ABCD$.

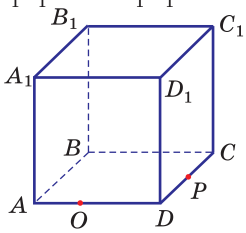


Решение. 1. $TE \subset ...$
2. $... \cap ABCD = ...$
3. $TE \cap ... = K$.

Второй этап — решение задач 7 и 8, задач обязательного уровня. Необходимо добиться усвоения их решения всеми учениками класса с последующим контролем.

Задача 7. *Дано*: $A...D_1$ — куб; $O \in AD$, $P \in DC$.

Построить точки пересечения прямой OP с плоскостями BB_1C_1C и AA_1B_1B.



Задача 8. Определите, с плоскостями каких граней куба пересекается прямая TE, если $T \in AB$, $E \in BC$, и постройте эти точки.

Для сильных учащихся можно дать задачу 9.

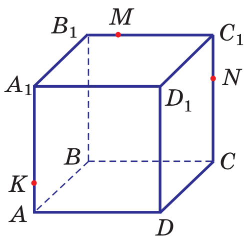
Задача 9*. *Дано*: $K \in AA_1$, $E \in CC_1$.

Построить точку пересечения прямой KE с плоскостью $ABCD$. С какой еще гранью куба пересекается прямая KE?

Обязательно проверить умение решать задачу 7, так как она является базовой для последующего построения сечения куба. Следует иметь в виду, что часть учащихся не продвинется дальше этого этапа.

Третий этап: построение сечения куба по трем точкам, лежащим на ребрах. Причем две из них лежат в плоскости одной грани (иллюстрация теоремы 1.3).

Задача 10. Постройте сечение куба плоскостью MNK.



Возможный способ введения алгоритма: учитель строит одно сечение, проговаривая и записывая план. Затем предлагает ученикам построить аналогичное сечение самостоятельно. Часть учащихся, как правило, схватывает с первого раза. Этим ученикам сразу же нужно дать несколько заданий, а с остальными продолжать обучение с использованием плана:

1. Найди две точки, которые лежат в одной грани, и проведи через них прямую (задача 6).

2. Определи, с какими гранями пересекается эта прямая, и построй точки пересечения (задача 8).

3. Выясни, какая из приведенных точек лежит в плоскости одной грани с третьей из данных в условии точек (усложненная задача 6).

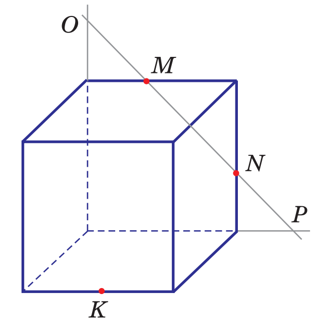
4. Определи, с какими гранями куба пересекается прямая, построенная на третьем этапе, и построй точку пересечения (одна точка уже построена). У тебя получился «большой треугольник».

5. Самый трудный этап: выделить сечение. Выбери одну из сторон «большого треугольника» и определи, в плоскости какой грани она лежит. Теперь двигайся по выбранной стороне и определяй, какие точки лежат в этой грани. Выдели эти точки. Соедини выделенные точки и заштрихуй сечение.

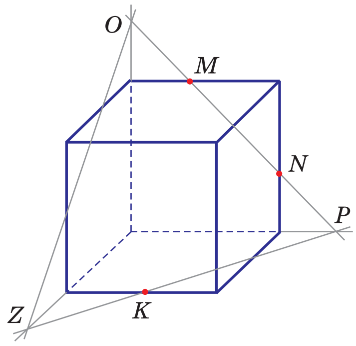
Другим вариантом рассмотренной задачи является задача на построение сечения по заданной прямой, лежащей в плоскости нижней грани, и точке, лежащей на ребре. Задача является иллюстрацией к теореме 1.1, но предложить ее ученикам можно будет только одновременно с задачей 10.

Критерии оценивания каждый учитель определит сам. Возможны такие *критерии*:

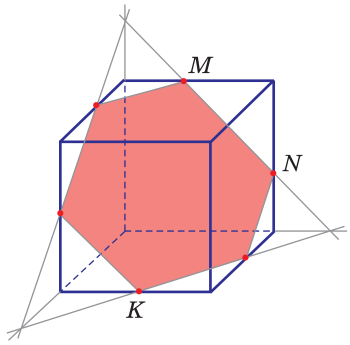
если ученик выполнил 1-й и 2-й этап, то есть построил две точки, ему следует поставить отметку «3»;



если ученик построил «большой треугольник» — заработал отметку «4»;



если правильно выделил сечение — отметка «5».



Способным ребятам класса можно дать на этом этапе задачи на построение сечений пирамиды по трем точкам.

Более сложные сечения, требующие построения вспомогательной плоскости, можно начать рассматривать после изучения свойств параллельных плоскостей. Сначала предложить задачи на построение сечений, проходящих через ребро куба и точку, лежащую на другом ребре. Затем, когда будет освоен этот этап, предложить построить сечение куба по трем точкам, из которых никакие две не лежат в плоскости одной грани. Можно предложить аналогичные задачи, связанные с пирамидой. Если обучение ведется по учебнику Атанасяна, то никаких методических проблем при этом не возникает.

Конечно, многие ученики утратят навык построения сечений довольно скоро, но к этому времени уже будут достигнуты многие запланированные результаты: ребята научатся строить чертежи, у них разовьется пространственное мышление и, главное, сформируется положительное отношение к предмету.

А. СГИБНЕВ,
Москва

ОТОБРАЖЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПЛОСКОСТЕЙ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В данной заметке предлагается непривычный для школьника взгляд на традиционный объект геометрии — треугольник. В результате возникает ряд интересных учебно-исследовательских задач, решаемых вполне школьными средствами.

Рассмотрим треугольник со сторонами x, y, z. Пусть z — большая из сторон. Поделим все три стороны на z и получим величины, пропорциональные сторонам: a, b, 1, причем $a \le 1$, $b \le 1$. Для простоты договоримся называть эти новые величины сторонами.

Введем координатную плоскость $(a; b)$ (рис. 1). Теперь каждому треугольнику соответствует точка на этой плоскости. Какую область покроют на плоскости $(a; b)$ все треугольники, если $a \le 1$, $b \le 1$ и, в силу неравенства треугольника, $a + b > 1$? Вырожденные треугольники рассматривать не будем.

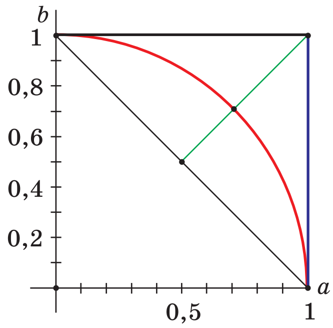


Рис. 1

Любой треугольник отображается в точку этой области. И наоборот, любая точка области соответствует треугольнику.

Выделим среди всех треугольников равнобедренные. Нам годятся случаи $a = 1$ (синяя линия), $b = 1$ (черная линия), $a = b$ (зеленая линия). Общая точка этих трех отрезков соответствует равностороннему треугольнику.

Как изобразить на плоскости $(a; b)$ все прямоугольные треугольники? По теореме Пифагора для них $a^2 + b^2 = 1$. Отберем из них те точки, которые лежат внутри нашей области — это будет дуга окружности (красная линия). Эта дуга разделяет две области, соответствующие тупоугольным и остроугольным треугольникам. В самом деле, если мы хотим из остроугольного треугольника непрерывным изменением получить тупоугольный, мы обязательно «пройдем» через прямоугольный. В терминах плоскости $(a; b)$: любая кривая, соединяющая точки из двух разных областей, должна пересечь дугу.

Нетрудно сообразить, что остроугольным треугольникам соответствует верхняя область, потому что в ней находится равносторонний треугольник.

Упражнение 1. Как выглядит на плоскости (a; b) множество треугольников с заданным углом между сторонами a и b? Как связаны между собой точки, соответствующие осесимметричным друг другу треугольникам?

Теперь попробуем задать треугольник другими параметрами. Для начала выберем сторону a и угол β между сторонами 1 и a.

Изучим, какие линии на плоскости (a; β) (рис. 2) соответствуют равнобедренным треугольникам. Как обычно, есть три случая: $a = 1$, $b = 1$, $a = b$. С первым все ясно, это правая граница нашей области.

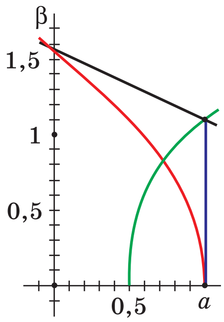


Рис. 2

Если $b = 1$, то напротив стороны a лежит угол $180° - 2\beta$. Поэтому, применяя теорему синусов для сторон a и 1, получим:

$$\frac{a}{\sin(180° - 2\beta)} = \frac{1}{\sin\beta}.$$

После упрощения получим: $a = 2\cos\beta$ (черная линия).

Упражнение 2. Докажите, что все треугольники отобразятся на область $\{a \leq 2\cos\beta;\ 0 < \beta < 90°\}$.

Наконец, в случае $a = b$ (зеленая линия) напротив стороны 1 лежит угол $180° - 2\beta$, поэтому по теореме синусов

$$\frac{a}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin(180° - 2\beta)} \Rightarrow a = \frac{1}{2\cos\beta}.$$

Упражнение 3. Докажите, что линия прямоугольных треугольников имеет уравнение $a = \cos\beta$ (красная линия).

Упражнение 4. Объясните, почему линии $a = b$ соответствуют **не** все углы β от 0 до 90°. Тот же вопрос для линии $b = 1$.

Посмотрим на получившуюся картинку (см. рис. 2) как на отображение плоскости (a; b) на плоскость (a; β). Интересно понаблюдать, как деформировались линии, но сохранились отношения между ними. Равносторонний треугольник по-прежнему лежит на пересечении трех линий, соответствующих равнобедренным (проверьте, что точке пересечения соответствует угол $\beta = 60°$). Линия $b = 1$ по-прежнему лежит по одну сторону от линии прямоугольных треугольников, а линия $a = b$ по-прежнему пересекает ее.

Теперь рассмотрим плоскость (a; α), где α — угол против стороны a. Новизна ситуации в том, что эти параметры, вообще говоря, задают не один, а два треугольника (рис. 3). Интересно посмотреть, как это скажется на отображении.

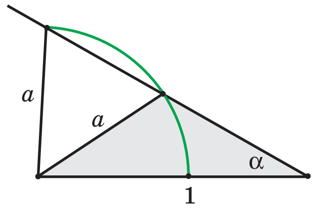


Рис. 3

Сначала исследуем количество треугольников в зависимости от параметров.

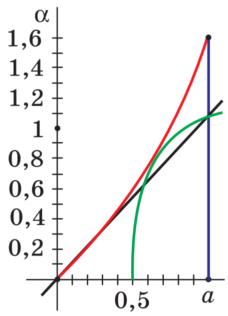


Рис. 4

Из рисунка 4 видно, что:
1) если $a < \sin\alpha$, то решений нет;
2) если $a = \sin\alpha$, то решение одно;
3) если $a > \sin\alpha$, то решений два.

Таким образом, каждой точке в прямоугольнике ниже красной линии соответствуют два треугольника — остроугольный и тупоугольный. А каждой точке на границе — один, прямоугольный. Можно себе представить, что область «сложили» по линии прямоугольных треугольников.

Довольно любопытно выглядит множество равнобедренных треугольников.

Рассмотрим множество $a = b$. Для таких треугольников, аналогично предыдущей плоскости, имеем: $a = \frac{1}{2\cos\alpha}$ (зеленая линия).

Упражнение 5. Докажите, что нижняя часть линии $a = b$ относится к тупоугольным треугольникам, а верхняя (после точки касания с границей) — к остроугольным. (Удобно представить себе, что эти части линии нарисованы на разных листах нашей перегнутой области.)

Теперь рассмотрим множество $b = 1$. По теореме синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow a = 2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Упражнение 6. К какому виду треугольников (к какому листу) относится линия $b = 1$? Объясните возникновение новой точки пересечения линий $b = 1$ и $a = b$, которой не было на предыдущих плоскостях.

Упражнение 7. Изобразите область, которую займут треугольники на плоскости параметров $(a;\ h_1)$ (сторона и высота к единичной стороне). Постройте кривые, соответствующие равнобедренным и прямоугольным треугольникам.

Упражнение 8. То же задание для плоскости параметров $(m_1;\ m_2)$ (две меньшие медианы треугольника).

Читатель легко может продолжить серию задач, выбирая различные параметры для задания треугольника и изучая получившиеся картинки. В частности, интересно выяснять, как выглядят линии координат одних плоскостей в других плоскостях (множества $a = \mathrm{const}$, $\alpha = \mathrm{const}$ и т.д.). Интересно также продолжить изучать многочисленные поверхности, соответствующие неоднозначному заданию треугольника выбранными параметрами.

Можно снять ограничения $a \le 1$, $b \le 1$ и посмотреть, как изменится картинка на плоскости $(a; b)$. В каком-то смысле это было искусственное ограничение для того, чтобы облегчить первоначальную задачу. В этой связи интересно изучить плоскость, в которой параметры симметричны, то есть не зависят от переименования сторон.

Упражнение 9. Рассмотрим множество треугольников, для которых радиус описанной окружности $R = 1$. Пусть r — радиус вписанной окружности, а p — полупериметр треугольника. Изобразите различные семейства треугольников на плоскости $(r; p)$.

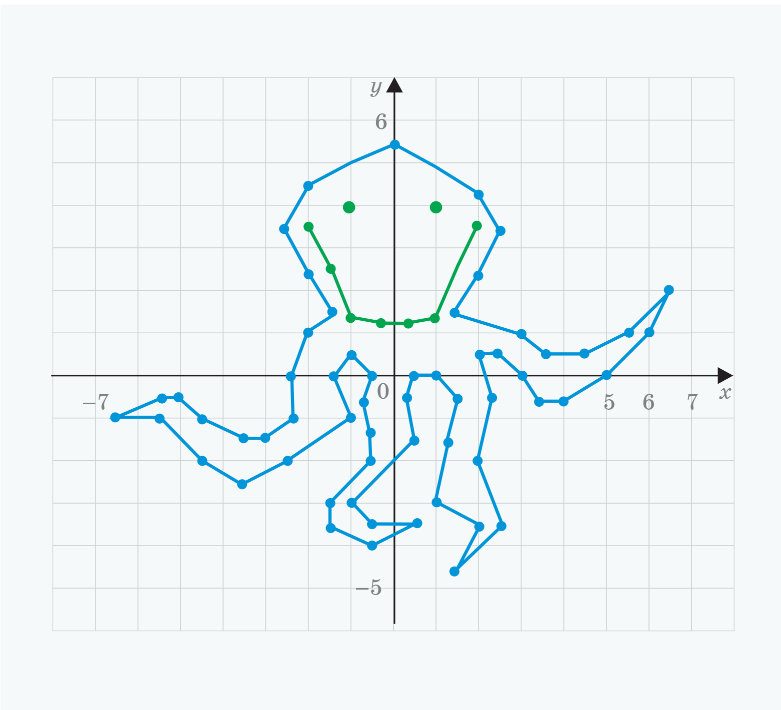
Для решения этой задачи пригодится формула Эйлера, связывающая r и R с расстоянием между центрами окружностей, а также теорема Понселе.

Отображения плоскостей параметров можно красиво реализовать на компьютере.

ТВОРЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «КООРДИНАТНАЯ ПЛОСКОСТЬ»

Автор: Кизельбашева Валя.
Учитель: Т.В. Тараканова,
Большетолкайская средняя школа
Самарской области

«Веселый осьминог»



(–1,5; 1,5), (–2; 2,5), (–2,5; 3,5), (–2; 4,5), (–1; 5), (0; 5,25), (1; 5), (2; 4,5), (2,5; 3,5), (2; 2,5), (1,5; 1,5), (3; 1), (3,5; 0,5), (4,5; 0,5), (5,5; 1), (6,5; 2), (6; 1), (5; 0), (4; –0,5), (3,5; –0,5), (3; 0), (2,5; 0,5), (2; 0,5), (2,25; –0,5), (2; –2), (2,5; –3,5), (1,5; –4,5), (2; –3,5), (1,5; –3), (1,25; –1,5), (1,5; –0,5), (1; 0), (0,5; 0), (0,25; –0,5), (0,5; –1,5), (–0,5; –3), (–0,5; –3,5), (1; –3,5), (–0,5; –4), (–1,5; –3,5), (–1,5; –3), (–0,5; –2), (–0,5; –1,5), (–0,75; –0,5), (–0,5; 0), (–1; 0,5), (–1,5; 0), (–1,5; –1), (–2,5; –2), (–3,5; –2,5), (–4,5; –2), (–5,5; –1), (–6,5; –1), (–5,5; –0,5), (–5; –0,5), (–4,5; –1), (–3,5; –1,5), (–3; –1,5), (–2,5; –1), (–2,5; 0), (–2; 1), (–1,5; 1,5).

Глаза: (–1; 4) и (1; 4).

Рот: (–2; 3,5), (–1,5; 2,5), (–1; 1,5), (–0,5; 1,25), (0,5; 1,25), (1; 1,5), (1,5; 2,5), (2; 3,5).

Материал подготовил
Ю. САДОВНИЧИЙ,
Москва

ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ 2010 ГОДА

ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В МГУ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

В 2010 году в дополнительных вступительных испытаниях по математике в МГУ им. М.В. Ломоносова использовались 4 комплекта вариантов. Варианты 1 и 2 предлагались на механико-математическом факультете, варианты 3 и 4 — на факультете вычислительной математики и кибернетики, варианты 5 и 6 — на факультетах: наук о материалах, биоинженерии и биоинформатики, экономическом (отделение экономики). Варианты 7 и 8 были предложены на следующих факультетах: геологическом, социологическом, государственного управления, экономическом (отделение менеджмента и вечернее отделение), а также в высших школах: государственного аудита, бизнеса, современных социальных наук, московской школе экономики.

Все нечетные варианты снабжены подробным решением, четные приводятся с ответами и могут быть использованы для самостоятельного решения. Рекомендуется поступающим в вузы, учащимся старших классов и преподавателям математики.

Вариант 1

1. Решить систему $\begin{cases} 3x^y = 4^x + 8, \\ y = \dfrac{x+1}{\log_2 x}. \end{cases}$

Решение. При $x > 0$ и $x \neq 1$ второе уравнение системы преобразуется следующим образом:

$$y \log_2 x = x + 1 \Leftrightarrow \log_2 x^y = x + 1 \Leftrightarrow x^y = 2^{x+1}.$$

Подставляя в первое уравнение системы вместо x^y полученное выражение, находим, что

$$3 \cdot 2^{x+1} = 4^x + 8 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 2 \text{ или } 2^x = 4.$$

В первом случае $x = 1$, что не удовлетворяет области определения системы, во втором случае

$$x = 2 \text{ и } y = \frac{x+1}{\log_2 x} = 3.$$

Ответ: $\{(2; 3)\}$.

2. Решить неравенство $\dfrac{1-x}{x} > \sqrt{\dfrac{3x-2}{3x+4}}$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \dfrac{3x-2}{3x+4} \geq 0, \\ \dfrac{1-x}{x} > 0, \\ \dfrac{3x-2}{3x+4} < \left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\dfrac{4}{3}\right) \cup \left[\dfrac{2}{3}; +\infty\right), \\ x \in (0; 1), \\ \dfrac{x^2(3x-2)-(1-x)^2(3x+4)}{x^2(3x+4)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\dfrac{2}{3}; 1\right), \\ \dfrac{5x-4}{x^2(3x+4)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\dfrac{2}{3}; 1\right), \\ x \in \left(-\dfrac{3}{4}; 0\right) \cup \left(0; \dfrac{4}{5}\right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{2}{3}; \dfrac{4}{5}\right).$$

Ответ: $x \in \left[\dfrac{2}{3}; \dfrac{4}{5}\right)$.

3. Найти наименьшее из положительных значений функции

$$f(x) = \frac{4}{3\cos^2 x + 2\sin x - 1}.$$

Решение. Найдем сначала область значений функции $g(x) = 3\cos^2 x + 2\sin x - 1$. Пусть $\sin x = t$, где $-1 \leq t \leq 1$. Тогда область значений функции $g(x)$ совпадает с областью значений функции

$$y(t) = 3(1 - t^2) + 2t - 1 = -3t^2 + 2t + 2,$$

определенной на отрезке $t \in [-1;\ 1]$. Вершина параболы $y(t) = -3t^2 + 2t + 2$ имеет абсциссу $t_0 = \frac{1}{3} \in [-1; 1]$ и ординату $y(t_0) = \frac{7}{3}$, ветви этой параболы направлены вниз. Кроме того, $y(1) = 1$ и $y(-1) = -3$. Поэтому функция $y(t)$, а значит, и функция $g(x)$ принимают все значения из отрезка $\left[-3; \frac{7}{3}\right]$. Тогда функция $f(x) = \frac{4}{g(x)}$ принимает все значения, принадлежащие промежуткам $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{12}{7}; +\infty\right)$. Следовательно, наименьшее положительное значение функции $f(x)$ есть $\frac{12}{7}$.

Ответ: $\frac{12}{7}$.

4. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что $\angle ABC = \frac{\pi}{12}$, $BC = 5$, $2AC > AB$ и медиана CD образует со стороной AC треугольника угол величиной $\frac{5\pi}{12}$.

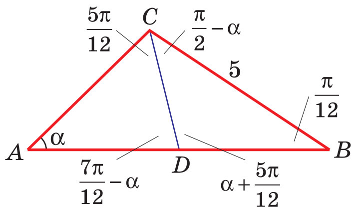


Рис. 1

Решение. Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle ADC = \frac{7\pi}{12} - \alpha$, $\angle BDC = \alpha + \frac{5\pi}{12}$, $\angle BCD = \frac{\pi}{2} - \alpha$ и $\angle ACB = \frac{11\pi}{12} - \alpha$ (рис. 1). Применим к треугольникам ABC и DBC теорему синусов:

$$\frac{AB}{\sin\left(\frac{11\pi}{12} - \alpha\right)} = \frac{5}{\sin\alpha} \text{ и } \frac{BD}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{5}{\sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{12}\right)}.$$

Разделив первое из полученных уравнений на второе, с учетом $AB = 2BD$ получим, что

$$\frac{2\cos\alpha}{\sin\left(\frac{11\pi}{12} - \alpha\right)} = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{12}\right)}{\sin\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{12}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2a = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)\right) \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2}.$$

По условию выполняется неравенство $AC > AD$, значит, $\frac{7\pi}{12} - \alpha > \frac{5\pi}{12}$, то есть $\alpha < \frac{\pi}{6}$. Следовательно, $\alpha = \frac{\pi}{12}$, $AB = \frac{5}{2\sin\alpha}$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\frac{\pi}{12} = \frac{25}{4}$.

Ответ: $\frac{25}{4}$.

5. Из лесу выскочил заяц и помчался по прямой в направлении тернового куста. На полпути до куста заяц напоролся на колючку и стал бежать в полтора раза медленнее. Когда зайцу оставалось до куста 50 метров, из лесу (из того же места) выбежал волк и погнался за зайцем. Когда заяц добежал до куста, волку оставалось до него 10 метров. На каком расстоянии от леса находится терновый куст, если известно, что волк все время бежал со скоростью, с которой первоначально бежал заяц?

Решение. Обозначим через s (метров) расстояние от леса до тернового куста, а через v (метров в минуту) первоначальную скорость зайца. Рассмотрим два случая. Пусть расстояние от леса до тернового куста превосходит либо равно 100 метрам. Тогда волк выбежал из леса уже после того, как заяц напоролся на колючку. Приравнивая время, за которое заяц пробежал последние 50 метров, ко времени движения волка, получаем уравнение:

$$\frac{50}{\frac{2v}{3}} = \frac{s - 10}{v} \Leftrightarrow s = 85,$$

что противоречит нашему предположению. Значит, $s < 100$ и волк выбежал из леса до того, как заяц напоролся на колючку. Последние 50 метров заяц двигался следующим образом: сначала он бежал со скоростью v участок длиной $50 - \frac{s}{2}$ метров, а потом оставшиеся $\frac{s}{2}$ метров бежал со скоростью $\frac{2v}{3}$. Волк же за это время пробежал $s - 10$ метров с постоянной скоростью v. Имеем:

$$\frac{50 - \frac{s}{2}}{v} + \frac{\frac{s}{2}}{\frac{2v}{3}} = \frac{s - 10}{v} \Leftrightarrow s = 80.$$

Итак, расстояние от леса до тернового куста равно 80 метрам.

Ответ: 80 метров.

6. В основании параллелепипеда лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 1$ и $BC = 4$, боковые ребра параллелепипеда — AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — перпендикулярны основанию и равны 1. Сфера касается прямой DC_1 в точке C_1, прямой DB_1 в точке, лежащей внутри отрезка DB_1, и проходит через точку D_1. Найти радиус сферы.

Решение. Выберем связанную с данным параллелепипедом систему координат следующим образом. Положим точку D началом координат, луч DA — осью x, луч DC — осью y, луч DD_1 — осью z (рис. 2).

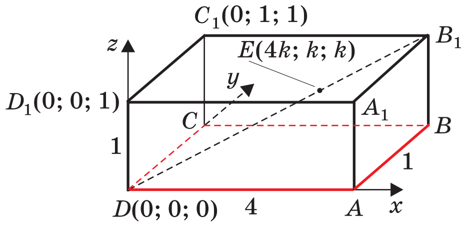


Рис. 2

Тогда точка C_1 будет иметь координаты $(0; 1; 1)$, точка D_1 — координаты $(0;\ 0;\ 1)$. Пусть центр данной сферы — точка O — имеет координаты $(x_0;\ y_0;\ z_0)$, радиус сферы равен R и эта сфера касается прямой DB_1 в точке E, имеющей координаты $(4k;\ k;\ k)$, причем $k \in (0;\ 1)$, поскольку точка E лежит внутри отрезка DB_1. Сфера касается прямой DC_1 в точке C_1 тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{DC_1}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{OC_1}$, а длина вектора $\overrightarrow{OC_1}$ равна R. Перпендикулярность векторов означает равенство нулю их скалярного произведения. В координатах эти два условия записываются следующим образом:

$\overrightarrow{DC_1} = \{0;\ 1;\ 1\};$

$\overrightarrow{OC_1} = \{-x_0;\ 1-y_0;\ 1-z_0\};$

$$\overrightarrow{DC_1}\cdot\overrightarrow{OC_1} = 0 \Leftrightarrow (1-y_0)+(1-z_0)=0;$$

$$\left|\overrightarrow{OC_1}\right| = R \Leftrightarrow x_0^2+(1-y_0)^2+(1-z_0)^2=R^2.$$

Аналогично записываются условия касания сферы прямой DB_1 в точке E:

$\overrightarrow{DE} = \{4k;\ k;\ k\};$

$\overrightarrow{OE} = \{4k-x_0;\ k-y_0;\ k-z_0\};$

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{OE} = 0 \Leftrightarrow 4(4k-x_0)+(k-y_0)+(k-z_0)=0;$$

$$\left|\overrightarrow{OE}\right| = R \Leftrightarrow (4k-x_0)^2+(k-y_0)^2+(k-z_0)^2=R^2.$$

И, наконец, точка D_1 лежит на сфере тогда и только тогда, когда длина вектора $\overrightarrow{OD_1}$ равна R. Имеем:

$\overrightarrow{OD_1} = \{-x_0;\ -y_0;\ 1-z_0\};$

$$\left|\overrightarrow{OD_1}\right| = R \Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+(1-z_0)^2=R^2.$$

Из равенства

$$x_0^2+(1-y_0)^2+(1-z_0)^2 = x_0^2+y_0^2+(1-z_0)^2$$

сразу получаем, что $y_0=\frac{1}{2}$, а из равенства $z_0+y_0=2$ находим $z_0=\frac{3}{2}$. Оставшиеся два равенства запишем в систему уравнений:

$$\begin{cases} 4(4k-x_0)+2k-2=0,\\ -8x_0k+16k^2-k+k^2-3k+k^2+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_0+9k-1=0,\\ -4x_0k+9k^2-2k+1=0. \end{cases}$$

С учетом $k \in (0;\ 1)$ эта система имеет единственное решение: $k=\frac{1}{3}$ и $x_0=1$. Тогда

$$R=\sqrt{x_0^2+y_0^2+(1-z_0)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Вариант 2

1. Решить систему

$$\begin{cases} (x+1)^y = 8+3^{2-x},\\ y=\dfrac{x}{\log_3(x+1)}. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$\frac{x+3}{x+6}+\sqrt{\frac{x-2}{x+4}}>0.$$

3. Найти наибольшее из отрицательных значений функции

$$f(x)=\frac{3}{2\sin x-\cos 2x}.$$

4. Длина основания PS трапеции $PQRS$ равна 2. Ее диагонали PR и QS пересекаются в точке T, причем $TS = 2QT$. Кроме того, $\angle PSQ = \angle QPR = 30°$. Найти длины боковых сторон PQ и RS трапеции, если известно, что они различны.

5. Два солдата-срочника красили забор: Андрей с внутренней стороны, а Борис с внешней. Когда Андрей выполнил три четверти работы, к нему подошел приятель Дмитрий и стал отвлекать разговорами, отчего Андрей стал красить в три раза медленнее. Когда Андрей покрасил первые 14 метров, к своей работе приступил Борис, и работал он все время с той же скоростью, с какой начал красить Андрей. Когда Андрей закончил работу, Борису оставалось покрасить всего 2 метра. Какова длина забора?

6. Основанием треугольной пирамиды служит правильный треугольник ABC со стороной $\sqrt{3}$, боковые ребра AS, BS, CS равны 5. Точка D — середина ребра AC. Сфера касается прямой BD в точке D, прямой BS в точке, лежащей внутри отрезка BS, и проходит через точку A. Найти радиус сферы.

Ответы: **1.** $\{(2;\ 2)\}$. **2.** $x \in (-\infty;\ -6) \cup \left(-\frac{36}{7};\ -4\right) \cup [2;\ +\infty)$. **3.** -2. **4.** $PQ = 2$, $RS=\sqrt{7}$. **5.** 24 метра. **6.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Вариант 3

1. В арифметической прогрессии первый отрицательный член равен -405, разность равна 18. Сумма абсолютных величин (модулей) первых n членов этой прогрессии равна 5661. Найти n.

Решение. Пусть $a_1 = -405$ — первый член данной арифметической прогрессии, $d = 18$ — ее разность. Из условия $a_p > 0$ найдем номер первого положительного члена прогрессии. Имеем:

$$a_p = a_1 + d(p-1) > 0 \Leftrightarrow -405 + 18(p-1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p > \frac{423}{18} = 23,5.$$

Это значит, что $p = 24$ есть номер первого положительного члена прогрессии. Этот член равен $a_{24} = a_1 + 23d = 9$. Итак, прогрессия имеет $k = 23$ отрицательных члена, сумма модулей которых равна

$$\left|S_k^-\right| = \left|\frac{2a_1 + d(k-1)}{2}\cdot k\right| = \left|\frac{-810 + 18\cdot 22}{2}\cdot 23\right| = 4761,$$

что меньше 5661 на 900. Следовательно, сумма первых m положительных членов этой прогрессии должна быть равна 900. Найдем m. Имеем:

$$S_m^+ = \frac{2a_{24} + d(m-1)}{2}\cdot m = \frac{18 + 18(m-1)}{2}\cdot m = 900 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = 10.$$

Значит, $n = k + m = 33$.

Ответ: 33.

2. Решить неравенство

$$\frac{1 + \log_{x-2}\left(-x^2 + 7x - 10\right)}{2 - \log_{5-x}\left(x^2 - 4x + 4\right)} \le 2.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$\frac{1 + \log_{x-2}\left(-x^2 + 7x - 10\right)}{2 - \log_{5-x}\left(x^2 - 4x + 4\right)} \le 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \log_{x-2}(x-2)(5-x)}{2 - \log_{5-x}(x-2)^2} \le 2 \Leftrightarrow \frac{2 + \log_{x-2}(5-x)}{2 - 2\log_{5-x}(x-2)} \le 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2\log_{x-2}(5-x) + \log^2_{x-2}(5-x)}{2\log_{x-2}(5-x) - 2} \le 2, \\ x \ne 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\log^2_{x-2}(5-x) - 2\log_{x-2}(5-x) + 4}{2\log_{x-2}(5-x) - 2} \le 0, \\ x \ne 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{x-2}(5-x) < 1, \\ x \ne 4. \end{cases}$$

Если $x \in (3;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$, то $0 < 5 - x < x - 2$, поэтому $x \in \left(\frac{7}{2};\ 4\right) \cup (4;\ 5)$. Если же $x \in (2;\ 3)$, то $5 - x > x - 2$, следовательно, $x \in (2;\ 3)$. Объединяя найденные промежутки, получаем ответ.

Ответ: $x \in (2;\ 3) \cup \left(\frac{7}{2};\ 4\right) \cup (4;\ 5)$.

3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^2\left(5x + \sin^2 y\right) + \left|\frac{5x + \cos 2y}{3} + \frac{3}{5x + \cos 2y}\right| = 4\cos^2\frac{7\pi}{4}.$$

Решение. Правая часть равна 2. Так как $\left|a + \dfrac{1}{a}\right| \ge 2$ и $\operatorname{tg}^2\alpha \ge 0$, данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(5x + \sin^2 y\right) = 0, \\ \left|\dfrac{5x + \cos 2y}{3} + \dfrac{3}{5x + \cos 2y}\right| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + \sin^2 y = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ 5x + \cos 2y = \pm 3, \end{cases}$$

так как равенство $\left|a + \dfrac{1}{a}\right| = 2$ возможно только при $a \pm 1$. Исключая из системы переменную x, получаем относительно y уравнение

$$\sin^2 y - \cos 2y = \pi n \mp 3 \Leftrightarrow 3\sin^2 y = \pi n + 1 \mp 3.$$

Правая часть уравнения принимает значения, принадлежащие отрезку $[0;\ 3]$, только в случае $n = 1$ и «минусе» перед тройкой и при $n = -1$ и «плюсе» перед тройкой. В первом случае имеем:

$$\sin y = \pm\sqrt{\frac{\pi - 2}{3}},\quad x = \frac{1}{5}\left(\pi - \sin^2 y\right) = \frac{2\pi + 2}{15}.$$

Во втором случае получаем:

$$\sin y = \pm\sqrt{\frac{4 - \pi}{3}},\quad x = \frac{1}{5}\left(-\pi - \sin^2 y\right) = \frac{-2\pi - 4}{15}.$$

Решая относительно y тригонометрические уравнения, находим ответ.

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{2\pi + 2}{15};\ \pm\arcsin\sqrt{\dfrac{\pi - 2}{3}} + \pi k\right);\ \left(\dfrac{-2\pi - 4}{15};\ \pm\arcsin\sqrt{\dfrac{4 - \pi}{3}} + \pi k\right)\right\}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC длины 9 является биссектрисой острого угла BAD и делит четырехугольник на два треугольника с площадями $6\sqrt{2}$ и $12\sqrt{2}$. Этот четырехугольник вписан в окружность. Найти ее радиус.

Решение. Пусть $AB = x$, $AD = y$, $\angle BAC = \angle DAC = \alpha$, R — радиус описанной около четырехугольника $ABCD$ окружности (рис. 3). Пусть также $S_{ABC} = 6\sqrt{2}$ и $S_{ADC} = 12\sqrt{2}$. Имеем:

$$\begin{cases} S_{ABC} = 6\sqrt{2} = \dfrac{1}{2}\cdot 9x\cdot\sin\alpha, \\ S_{ADC} = 12\sqrt{2} = \dfrac{1}{2}\cdot 9y\cdot\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow y = 2x.$$

Так как равные углы в окружности опираются на равные дуги, а равные дуги стягиваются равными хордами, то $BC = CD$. Выразив с помощью теоремы косинусов эти длины из треугольников ABC и ADC соответственно и приравняв между собой, получим, что

$$x^2+81-18x\cos\alpha=4x^2+81-36x\cos\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=6\cos\alpha.$$

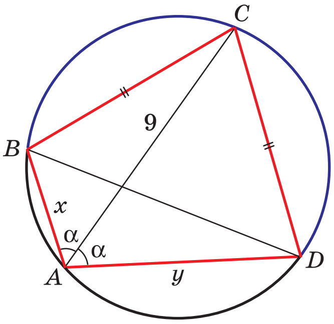


Рис. 3

Далее,

$$S_{ABC}=6\sqrt{2}=\frac{1}{2}\cdot 9x\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 6\cos\alpha\cdot\sin\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin 2\alpha=\frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

Так как угол BAD — острый, то

$$\cos 2\alpha=\sqrt{1-\frac{32}{81}}=\frac{7}{9} \Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=4\sqrt{2}.$$

Наконец, применив теорему косинусов к треугольнику ABD, находим, что

$$BD=\sqrt{x^2+4x^2-4x^2\cos 2\alpha}=\frac{4\sqrt{34}}{3}$$

и

$$R=\frac{BD}{2\sin 2\alpha}=\frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{17}}{2}$.

5. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 64\cdot 25^{-\sqrt{y}}+(8-40a)\cdot 5^{-\sqrt{y}}-5a\le 0,\\ 40\cdot 5^{-\sqrt{y}}=80\cdot 2^x+5a+a\cdot 2^{-x}\end{cases}$$

имеет решение.

Решение. Положим $t=5^{-\sqrt{y}}\in(0;\,1]$. Тогда неравенство системы принимает вид:

$$64t^2+(8-40a)t-5a\le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 64\left(t+\frac{1}{8}\right)\left(t-\frac{5a}{8}\right)\le 0 \Rightarrow t\le\frac{5a}{8}.$$

Следовательно, для существования y необходимо и достаточно выполнения условия $a>0$, при этом $t\in\left(0;\,\min\left\{1;\,\frac{5a}{8}\right\}\right]$. Рассмотрим теперь уравнение системы. Переменная $z=2^x$ принимает все положительные значения и $a>0$. Поэтому к правой части этого уравнения можно применить неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух положительных чисел. Имеем:

$$80z+5a+\frac{a}{z}\ge 5a+2\sqrt{80z\cdot\frac{a}{z}}=5a+8\sqrt{5a}.$$

Следовательно, x существует при $t\ge\frac{a}{8}+\sqrt{\frac{a}{5}}$, а исходная система имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\frac{a}{8}+\sqrt{\frac{a}{5}}\le\min\left\{1;\,\frac{5a}{8}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{a}{8}+\sqrt{\frac{a}{5}}\le 1,\\ \frac{a}{8}+\sqrt{\frac{a}{5}}\le\frac{5a}{8}\end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a\in\left[\frac{4}{5};\,\frac{72-16\sqrt{14}}{5}\right].$$

Ответ: $a\in\left[\frac{4}{5};\,\frac{72-16\sqrt{14}}{5}\right]$.

6. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=2$ и $AD=3$. Высота пирамиды длиной $\frac{12}{\sqrt{23}}$ падает в точку пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Плоскость проходит через точку A, параллельна прямой BD, касается шара радиуса 1 с центром в точке S и пересекает ребро SC. В каком отношении она делит это ребро?

Решение. Построим данную плоскость следующим образом. Возьмем на высоте SH пирамиды точку P такую, что $SP : SH = x$. Через точку P в плоскости BSD проведем прямую, параллельную прямой BD. Пусть эта прямая пересекает ребро SB в точке K, а ребро SD в точке M. Пусть также прямая AP пересекает (в плоскости ASC) ребро SC в точке L. Тогда четырехугольник $AKLM$ будет служить сечением пирамиды данной в условии задачи плоскостью (рис. 4). Проведем также в плоскости $ABCD$ высоту AX треугольника ABD, а из точки X в плоскости BSD восстановим перпендикуляр к прямой BD. Пусть этот перпендикуляр пересечет отрезок KM в точке Y, тогда AY — высота треугольника AKM (что следует из теоремы о трех перпендикулярах).

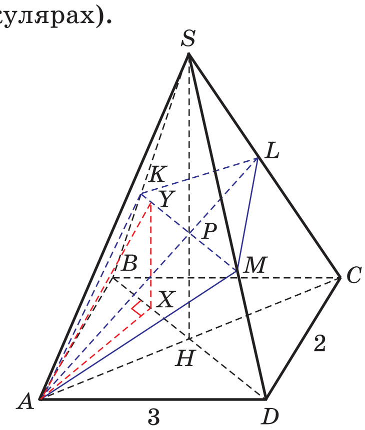


Рис. 4

Рассмотрим пирамиду $SAKM$. Радиус шара с центром в точке S, касающегося плоскости AKM, будет служить для этой пирамиды высотой. Обозначим этот радиус SU. Тогда объем пирамиды $SAKM$ будет равен $V=\frac{1}{3}S_{AKM}\cdot SU$. С другой стороны, этот же объем равен $V=\frac{1}{3}S_{KSM}\cdot AX$, так как AX также является высотой этой пирамиды. Имеем:

$$SU=1,\ KM=x\cdot BD=x\sqrt{13},$$

$$AX=\frac{AB\cdot AD}{BD}=\frac{6}{\sqrt{13}},\ XY=PH=(1-x)\cdot\frac{12}{\sqrt{23}},$$

$$AY=\sqrt{AX^2+XY^2}=\sqrt{\frac{36}{13}+\frac{144}{23}\cdot(1-x)^2},$$

$$S_{AKM}=\frac{1}{2}KM\cdot AY=\frac{1}{2}\cdot x\sqrt{13}\cdot\sqrt{\frac{36}{13}+\frac{144}{23}\cdot(1-x)^2}.$$

С другой стороны,

$$SP=x\cdot SH=x\cdot\frac{12}{\sqrt{23}},$$

$$S_{\Delta\,KSM}=\frac{1}{2}KM\cdot SP=\frac{1}{2}\cdot x\sqrt{13}\cdot x\cdot\frac{12}{\sqrt{23}}.$$

Получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot x\sqrt{13}\cdot\sqrt{\frac{36}{13}+\frac{144}{23}\cdot(1-x)^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot x\sqrt{13}\cdot x\cdot\frac{12}{\sqrt{23}}\cdot\frac{6}{\sqrt{13}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{36}{13}+\frac{144}{13}\cdot(1-x)^2=\frac{72^2}{13\cdot 23}\cdot x^2\Leftrightarrow 92x^2+104x-75=0.$$

Положительный корень уравнения есть $x=\frac{1}{2}$, то есть точка P является серединой отрезка SH. Наконец, применив к треугольнику HSC и секущей PL (в плоскости ASC) теорему Менелая, получим окончательный ответ:

$$\frac{CL}{LS}\cdot\frac{SP}{PH}\cdot\frac{HA}{AC}=1\Leftrightarrow\frac{SL}{LC}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: 1 : 2, считая от вершины S.

Вариант 4

1. В арифметической прогрессии первый член отрицательный и равен -376, разность равна 16. Сумма абсолютных величин (модулей) первых n членов этой прогрессии равна 5408. Найти n.

2. Решить неравенство

$$\frac{2+\log_{x+1}\left(-x^2+x+2\right)}{2-\log_{2-x}\left(x^2+2x+1\right)}\le 2.$$

3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^2\left(7y+\cos^2 x\right)+\left|\frac{7y-\cos 2x}{3}+\frac{3}{7y-\cos 2x}\right|=4\sin^2\frac{5\pi}{4}.$$

4. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ BD длины 12 является биссектрисой острого угла ABC и делит четырехугольник на два треугольника с площадями $3\sqrt{15}$ и $6\sqrt{15}$. Этот четырехугольник вписан в окружность. Найти ее радиус.

5. Найти все значения параметра a, при которых система $\begin{cases}16\cdot 4^{-\sqrt{x}}+(2-40a)\cdot 2^{-\sqrt{x}}-5a\le 0,\\ 10\cdot 2^{-\sqrt{x}}=20\cdot 4^{y}+5a+a\cdot 4^{-y}\end{cases}$ имеет решение.

6. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=1$ и $AD=4$. Высота пирамиды длиной $\frac{20}{\sqrt{47}}$ падает в точку пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Плоскость проходит через точку A, параллельна прямой BD, касается шара радиуса 2 с центром в точке S и пересекает ребро SC. В каком отношении она делит это ребро?

Ответы: **1.** 34. **2.** $x\in(-1;\,0)\cup\left(\frac{1}{2};\,1\right)\cup(1;\,2)$. **3.** $\left\{\left(\pm\arccos\sqrt{\frac{\pi-2}{3}}+\pi k;\ \frac{2\pi+2}{21}\right);\left(\pm\arccos\sqrt{\frac{4-\pi}{3}}+\pi k;\ \frac{-2\pi-4}{21}\right)\right\}$; $k\in\mathbf{Z}$. **4.** $4\sqrt{6}$. **5.** $a\in\left[\frac{1}{5};\,\frac{18-4\sqrt{14}}{5}\right]$. **6.** 2 : 1, считая от вершины S.

Вариант 5

1. Решить уравнение

$$\left|-4^x+2^{x+5}-150\right|=150.$$

Решение. Пусть $2^x=t$, $t>0$. Тогда данное уравнение примет следующий вид:

$$\left|-t^2+32t-150\right|=150\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-t^2+32t-150=150\\ -t^2+32t-150=-150\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t^2-32t+300=0\\ t^2-32t=0.\end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности решений не имеет, второе имеет положительное решение $t=32$, откуда $x=5$.

Ответ: 5.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(x-y)\sqrt{y+1}=0,\\ \sqrt{x^2+6x+y+10}=-y^2-8y+x+2.\end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения вытекают два случая. Если $y=-1$, то второе уравнение принимает следующий вид:

$$\sqrt{x^2+6x+9}=x+9\Leftrightarrow\begin{cases}x+9\ge 0,\\ x^2+6x+9=(x+9)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-6.$$

В случае, когда $y=x\ge -1$, получаем уравнение $\sqrt{x^2+7x+10}=-x^2-7x+2$. Пусть $x^2+7x=t$. Имеем:

$$\sqrt{t+10}=2-t\Leftrightarrow\begin{cases}2-t\ge 0,\\ t+10=(2-t)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t\le 2,\\ t^2-5t-6=0\end{cases}\Leftrightarrow t=-1.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем, что $x^2+7x+1=0$. Корень этого уравнения, удовлетворяющий неравенству $x\ge -1$, есть $x=\frac{-7+3\sqrt{5}}{2}$. Так как $y=x$, то $y=\frac{-7+3\sqrt{5}}{2}$. Объединяя найденные решения, получаем ответ.

Ответ: $\left\{(-6;\,-1);\ \left(\dfrac{-7+3\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{-7+3\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

3. Решить уравнение

$$\frac{9(\sin x+\cos x)^2}{\cos 2x}+\frac{32(1+7\operatorname{ctg} x\operatorname{tg} 4x)}{\operatorname{tg} x+7\operatorname{tg} 4x}+7=0$$

и найти сумму всех его корней, принадлежащих отрезку $[0;\ 120\pi]$. Выяснить, что больше: эта сумма или число 23 040.

Решение. Область определения данного уравнения есть $\sin x\neq 0$, $\cos x\neq 0$, $\cos 2x\neq 0$, $\cos 4x\neq 0$, $\operatorname{tg} x+7\operatorname{tg} 4x\neq 0$. Преобразуем на области определения это уравнение следующим образом:

$$\frac{9(\sin x+\cos x)^2}{\cos^2 x-\sin^2 x}+\frac{32(1+7\operatorname{ctg} x\operatorname{tg} 4x)}{\operatorname{tg} x\,(1+7\operatorname{ctg} x\operatorname{tg} 4x)}+7=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{9(\sin x+\cos x)}{\cos x-\sin x}+\frac{32}{\operatorname{tg} x}+7=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{9(1+\operatorname{tg} x)}{1-\operatorname{tg} x}+\frac{32}{\operatorname{tg} x}+7=0.$$

Пусть $\operatorname{tg} x=t$. Имеем:

$$\frac{9(1+t)}{1-t}+\frac{32}{t}+7=0\Leftrightarrow\frac{9t+9t^2+32-32t+7t-7t^2}{t(1-t)}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2(t-4)^2}{t(1-t)}=0.$$

Единственный корень этого уравнения есть $t=4$, откуда $x=\operatorname{arctg} 4+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Ясно, что при каждом таком x выполняются неравенства $\sin x\neq 0$ и $\cos x\neq 0$. Проверим остальные условия из области определения. Имеем:

$$\cos 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=-\frac{15}{17}\neq 0,$$

$$\cos 4x=2\cos^2 2x-1=\frac{161}{289}\neq 0,$$

$$\operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=-\frac{8}{15}\Rightarrow\operatorname{tg} 4x=\frac{2\operatorname{tg} 2x}{1-\operatorname{tg}^2 2x}=-\frac{240}{161},$$

и $\operatorname{tg} x+7\operatorname{tg} 4x\neq 0$. Итак, $x=\operatorname{arctg} 4+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$, принадлежит отрезку $[0;\ 120\pi]$ при $k=0, 1, 2, \ldots, 119$. Сумма всех таких корней равна

$$120\operatorname{arctg} 4+\pi(1+2+\ldots+119)=$$
$$=120\operatorname{arctg} 4+7140\pi<60\pi+7140\pi=$$
$$=7200\pi<7200\cdot 3{,}2=23\,040,$$

так как $\operatorname{arctg} 4<\dfrac{\pi}{2}$ и $120\operatorname{arctg} 4<60\pi$.

Ответ: $x=\operatorname{arctg} 4+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; $S=120\operatorname{arctg} 4+$ $+\,7140\pi<23\,040$.

4. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Каждая его диагональ делит его площадь в отношении $2:3$. Найти тангенсы всех углов четырехугольника $ABCD$ и радиус окружности, описанной около четырехугольника, если наибольшая сторона его имеет длину 24.

Решение. Пусть, для определенности,

$$S_{ABC}=\frac{2}{3}S_{ADC}\ \text{и}\ S_{BCD}=\frac{2}{3}S_{BAD}.$$

Пусть также K — точка пересечения диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Так как треугольники ABC и ADC имеют общее основание AC, то площади этих треугольников относятся так же, как и их высоты, опущенные на это основание. Отношение этих высот, в свою очередь, равно отношению длин отрезков BK и KD. Аналогично, отношение площадей треугольников BCD и BAD есть отношение длин отрезков CK и KA. Таким образом,

$$BK:KD=CK:KA=2:3,$$

откуда следует отношение треугольников AKD и BKC с коэффициентом $\dfrac{3}{2}$ и параллельность прямых AD и BC. Значит, $ABCD$ — равнобокая трапеция (рис. 5), $AD=24$, $BC=16$, $AB=CD=20$, так как $AB+CD=AD+BC$ (несложно показать, что если равнобокая трапеция описана около окружности, то наибольшей ее стороной всегда является одно из оснований).

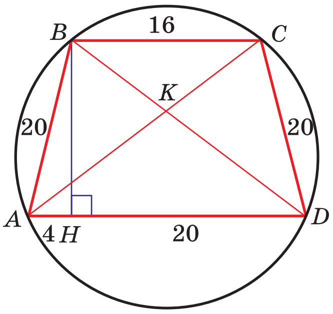


Рис. 5

Проведем высоту BH трапеции $ABCD$, тогда

$$AH=\frac{AD-BC}{2}=4,\ BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=8\sqrt{6},$$

$$HD=20,\ BD=\sqrt{BH^2+HD^2}=28.$$

Имеем:

$$\operatorname{tg}\angle BAD=\frac{BH}{AH}=2\sqrt{6}=\operatorname{tg}\angle CDA,$$
$$\operatorname{tg}\angle ABC=\operatorname{tg}\angle BCD=-2\sqrt{6},$$
$$R=\frac{BD}{2\sin\angle BAD}=\frac{35}{\sqrt{6}},$$

где R — радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$, а $\sin\angle BAD=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

Ответ: тангенсы углов равны $2\sqrt{6}$, $2\sqrt{6}$, $-2\sqrt{6}$, $-2\sqrt{6}$; $R=\dfrac{35}{\sqrt{6}}$.

5. Решить неравенство

$$4+(\cos x)(\log_3 x)(\log_4 81)+(\sin^2 x)(\log_2 x^8)\leq$$
$$\leq 2\cos x-4\cos 2x+\log_{\sqrt{2}} x^4.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$4+(2\cos x)(\log_2 3)(\log_3 x)+(8\sin^2 x)(\log_2 x)\leq$$
$$\leq 2\cos x-4\cos 2x+8\log_2 x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 + (2\cos x)(\log_2 x) + (4 - 4\cos 2x)(\log_2 x) \le$$
$$\le 2\cos x - 4\cos 2x + 8\log_2 x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\log_2 x)(2\cos x - 4\cos 2x - 4) -$$
$$-(2\cos x - 4\cos 2x - 4) \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(2\cos x - 4\cos 2x - 4) \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(\cos x)\left(\cos x - \frac{1}{4}\right) \ge 0.$$

С учетом области определения ($x > 0$), последнее неравенство сводится к объединению двух систем:

$$\begin{cases} 0 < x \le 2, \\ 0 \le \cos x \le \dfrac{1}{4} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \ge 2, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x \le 0 \\ \cos x \ge \dfrac{1}{4}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ получаем на тригонометрическом круге (рис. 6–8). При этом на рисунке 6 изображено решение первой системы, на рисунке 7 — один промежуток из решения второй системы, а на рисунке 8 — все остальные промежутки из этого решения.

Ответ: $x \in \left[\arccos\frac{1}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[2; \frac{3\pi}{2}\right] \cup$
$\cup \left[-\arccos\frac{1}{4} + 2\pi k; \arccos\frac{1}{4} + 2\pi k\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right],$
$k \in \mathbf{Z}, k \ge 1.$

6. Найти все значения x, при которых наименьшее из чисел $(x + 1)^3$ и $x^2 - 3x - 2$ меньше, чем наименьшее из чисел $x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ и $x^2 + 5x + 4$.

Решение. Условие задачи равносильно тому, что хотя бы одно из чисел первой пары меньше чем оба числа из второй пары. Имеем объединение двух систем:

$$\begin{cases} (x+1)^3 < x^3 + 3x^2 + 2x + 2, \\ (x+1)^3 < x^2 + 5x + 4 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 2 < x^3 + 3x^2 + 2x + 2, \\ x^2 - 3x - 2 < x^2 + 5x + 4. \end{cases}$$

Преобразуя, получаем:

$$\begin{cases} x < 1, \\ x^3 + 2x^2 - 2x - 3 < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^3 + 2x^2 + 5x + 4 > 0, \\ 8x > -6. \end{cases}$$

С учетом того, что $x = -1$ является корнем обоих кубических многочленов, раскладываем их на множители:

$$\begin{cases} x < 1, \\ (x+1)(x^2 + x - 3) < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (x+1)(x^2 + x + 4) > 0, \\ x > -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Решением первой системы будет служить промежуток $x \in \left(-\infty; \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)$, а решением второй — промежуток $x \in (-1; +\infty)$. Объединяя найденные промежутки, получаем ответ.

Ответ: $x \in \left(-\infty; \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup (-1; +\infty)$.

Вариант 6

1. Решить уравнение

$$|-25^x + 5^{x+2} - 100| = 100.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x - y)\sqrt{y - 5} = 0, \\ \sqrt{x^2 - 6x + y + 4} = -y^2 + 4y + x + 8. \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$\frac{9\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2} + \frac{2(1 + 8\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 4x)}{\operatorname{ctg} x + 8\operatorname{tg} 4x} + 23 = 0$$

и найти сумму всех его корней, принадлежащих отрезку $[0; 140\pi]$. Выяснить, что больше: эта сумма или число 30 380.

4. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Каждая его диагональ делит его площадь в отношении 1: 6. Найти тангенсы всех углов четырехугольника $ABCD$ и радиус окружности, описанной около четырехугольника, если наибольшая сторона его имеет длину 48.

5. Решить неравенство

$$6 + (\cos x)(\log_3 x)(\log_2 81) + (\sin^2 x)(\log_2 x^{12}) \le$$
$$\le 4\cos x - 6\cos 2x + \log_{\sqrt{2}} x^6.$$

6. Найти все значения x, при которых наименьшее из чисел $(x - 2)^3$ и $x^2 - 9x + 16$ меньше, чем наименьшее из чисел

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 4 \text{ и } x^2 - x - 2.$$

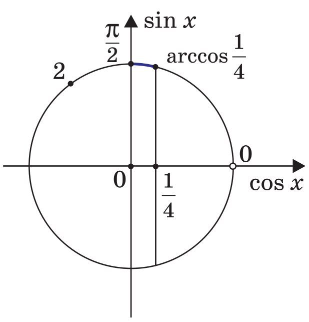


Рис. 6

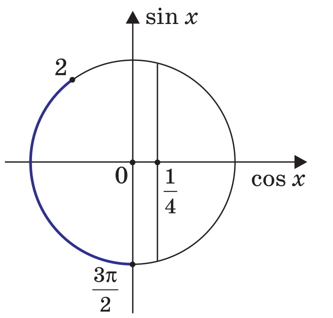


Рис. 7

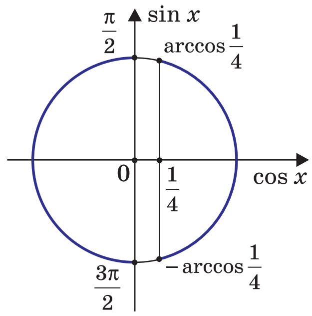


Рис. 8

Ответы: **1.** 2. **2.** $\left\{(0;\ 5);\ \left(\frac{5+3\sqrt5}{2};\ \frac{5+3\sqrt5}{2}\right)\right\}$. **3.** $x=-\text{arctg}\,4+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$; $S=-140\,\text{arctg}\,4+9870\pi>30\,380$. **4.** Тангенсы углов равны $\frac{2\sqrt6}{5}$, $\frac{2\sqrt6}{5}$, $-\frac{2\sqrt6}{5}$, $-\frac{2\sqrt6}{5}$; $R=\frac{7\sqrt{73}}{\sqrt6}$. **5.** $x\in\left[\arccos\frac13;\ \frac{\pi}{2}\right]\cup\left[2;\ \frac{3\pi}{2}\right]\cup\left[-\arccos\frac13+2\pi k;\ \arccos\frac13+2\pi k\right]\cup\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in \boldsymbol{Z}$, $k\ge 1$. **6.** $x\in\left(-\infty;\ \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)\cup(2;\ +\infty)$.

Вариант 7

1. Доказать, что при $a=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ число $6a-a^3$ — целое, и найти это число.

Решение. Имеем:

$$a^3=\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^3=2+3\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{16}+4=$$

$$=6+3\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{32}=6+6\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{4},$$

и $6a-a^3=-6$.

Ответ: -6.

2. Спортсмены Иванов и Петров участвовали в марафоне. Первую половину пути Иванов бежал в два раза быстрее Петрова. Потом он подвернул ногу и оставшуюся половину пути бежал в два раза медленнее Петрова. Петров же все время бежал с постоянной скоростью и пробежал всю дистанцию за 4 часа. Сколько времени потребовалось Иванову, чтобы добраться до финиша?

Решение. Петров на весь путь потратил 4 часа. Значит, полпути он пробежал за 2 часа. Первую половину пути Иванов бежал вдвое быстрее Петрова, поэтому потратил на нее 1 час. Вторую половину пути Иванов бежал вдвое медленнее Петрова и потратил на нее 4 часа. Значит, на весь путь Иванов затратил 5 часов.

Ответ: 5 часов.

3. Найти $\cos\alpha$ и $\text{tg}\,2\alpha$, если известно, что

$$\sin\alpha=\frac13 \text{ и } \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)<0.$$

Решение. Так как $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, то $\cos\alpha=\pm\frac{2\sqrt2}{3}$. Если $\cos\alpha=\frac{2\sqrt2}{3}$, то

$$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}=$$

$$=\frac12\cos\alpha+\frac{\sqrt3}{2}\sin\alpha=\frac{\sqrt2}{3}+\frac{\sqrt3}{6}>0,$$

что не удовлетворяет условию задачи. Если же $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt2}{3}$, то $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt2}{3}+\frac{\sqrt3}{6}<0$, поэтому $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt2}{3}$. Имеем далее:

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{2\sqrt2}$$

и

$$\text{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}^2\,\alpha}=\frac{2\cdot\frac{-1}{2\sqrt2}}{1-\frac18}=-\frac{4\sqrt2}{7}.$$

Ответ: $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt2}{3}$, $\text{tg}\,2\alpha=-\frac{4\sqrt2}{7}$.

4. Решить неравенство

$$4^{\log_9\left(x^2+4x-5\right)}\le 2^{\log_3\left(1+8x-x^2\right)}.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$4^{\log_9\left(x^2+4x-5\right)}\le 2^{\log_3\left(1+8x-x^2\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2\log_9\left(x^2+4x-5\right)}\le 2^{\log_3\left(1+8x-x^2\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\log_9(x^2+4x-5)\le\log_3(1+8x-x^2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2+4x-5)\le\log_3(1+8x-x^2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x-5>0,\\ x^2+4x-5\le 1+8x-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x-5>0,\\ x^2-2x-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;\ -5)\cup(1;\ +\infty),\\ x\in[-1;\ 3]\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(1;\ 3].$$

Ответ: $x\in(1;\ 3]$.

5. В трапеции $ABCD$ основание AD в полтора раза длиннее основания BC, а длины боковых сторон AB и CD равны. На стороне BC взята такая точка K, что $BK=2KC$. Прямые AK и CD пересекаются в точке E, а прямые DK и AB — в точке F. Найти отношение $BF:EC$.

Решение. Согласно условиям задачи можно положить $BK=4x$, $KC=2x$ и $AD=9x$ (рис. 9). Треугольник BFK подобен треугольнику AFD с коэффициентом подобия $\frac49$, поэтому $BF=\frac49AF=\frac45AB$. Аналогично, треугольник KEC подобен треугольнику AED с коэффициентом подобия, равным $\frac29$, следовательно, $EC=\frac29ED=\frac27CD$. Так как $AB=CD$, имеем:

$$\frac{BF}{EC}=\frac{\frac45AB}{\frac27CD}=\frac{14}{5}.$$

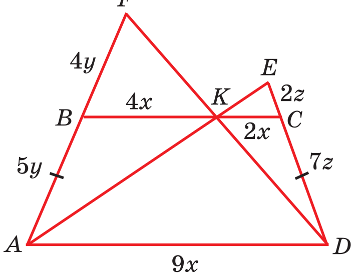


Рис. 9

Ответ: $BF:EC=14:5$.

6. Найти наименьшее и наибольшее значение параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x-a}+\sqrt{x^3+1}=2$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. При любом a функция $f(x)=\sqrt{x-a}+\sqrt{x^3+1}$ определена на множестве $x \ge b = \max\{a; -1\}$. Эта функция есть сумма двух возрастающих функций и поэтому возрастает. Она непрерывна и принимает сколь угодно большие значения. Следовательно, уравнение

$$\sqrt{x-a}+\sqrt{x^3+1}=2$$

будет иметь решение в том и только том случае, когда наименьшее значение функции $f(x)$, то есть $f(b)$, не превосходит 2. Рассмотрим два случая.

Если $a \ge -1$, имеем:

$$f(b)=f(a)=\sqrt{a^3+1}\le 2 \Leftrightarrow a \le \sqrt[3]{3};$$

с учетом $a \ge -1$ получаем $a \in \left[-1; \sqrt[3]{3}\right]$.

Если же $a < -1$, то в этом случае

$$f(b)=f(-1)=\sqrt{-1-a}\le 2 \Leftrightarrow a \ge -5;$$

с учетом $a < -1$ находим, что $a \in [-5; -1)$.

Таким образом, при $a \in \left[-5; \sqrt[3]{3}\right]$ данное уравнение имеет решение, наименьшее из этих a равно $a_{\min}=-5$, наибольшее равно $a_{\max}=\sqrt[3]{3}$.

Ответ: $a_{\min}=-5$, $a_{\max}=\sqrt[3]{3}$.

Вариант 8

1. Доказать, что при $c=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}$ число $c^3 + 9c$ — целое, и найти это число.

2. Рабочие Лопатин и Совков копали яму. Сначала Совков ленился и копал в полтора раза медленнее Лопатина. Через 15 минут, когда они выкопали треть ямы, Лопатин возмутился медлительности Совкова, и тот стал копать в полтора раза быстрее Лопатина. За какое время они выкопали яму, если Лопатин все время копал с постоянной скоростью?

3. Найти $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$, если известно, что $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ и $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)<0$.

4. Решить неравенство

$$3^{\log_2\left(6+x-x^2\right)} \le 9^{\log_4\left(x^2-5x-2\right)}.$$

5. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Через точку E проведена прямая, параллельная CD и пересекающая основания трапеции AD и BC в точках F и G соответственно. Найти отношение $EF : EG$, если известно, что $AF = 2BG$.

6. Найти наименьшее и наибольшее значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{a^3-x^3}+\sqrt{1-x}=4$ имеет хотя бы одно решение.

Ответы: **1.** -6. **2.** 35 минут. **3.** $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{24}{7}$. **4.** $x \in (-2; -1]$. **5.** $\frac{EF}{EG}=\sqrt{2}$. **6.** $a_{\min}=-15$, $a_{\max}=\sqrt[3]{17}$.

ФОТО НА КОНКУРС

Игра командная, но думать приходится каждому!

Автор: О.А. Болдырева, учитель математики Физико-математического лицея № 30, г. Санкт-Петербург

Издательский дом
первое сентября
новый этап развития

ЖУРНАЛ* «МАТЕМАТИКА»

ПОДПИСКА НА ЭЛЕКТРОННУЮ ВЕРСИЮ ПРОДОЛЖАЕТСЯ!

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЕ НОМЕРА И ОФОРМЛЕНИЕ ПОДПИСКИ –

НА САЙТЕ www.1september.ru

699 рублей

– цена подписки для индивидуальных подписчиков и организаций за полгода
(в июле журнал не выходит)

ЭЛЕКТРОННАЯ ВЕРСИЯ

- Полностью соответствует бумажной
- Выходит гарантированно в срок
- Легко распечатывается на принтере
- Стоит существенно дешевле
- Доставляется по Интернету

* Внимание: со II полугодия 2011 года газета «Математика» становится журналом.

ДЕСЯТИЧНАЯ ДРОБЬ

$\pm a_0, a_1 a_2 \ldots$

Известна следующая теорема.

Всякое действительное число α, не представимое в виде $\frac{p}{10^s}$, где p — целое, s — целое неотрицательное, допускает единственное представление в виде десятичной дроби; при этом эта дробь является бесконечной.

Всякое действительное число вида $\alpha = \frac{p}{10^s}$ может быть представлено в виде десятичной дроби более чем одним способом. Если $\alpha \neq 0$, то оно может быть представлено как в виде конечной десятичной дроби, а также бесконечной дроби, полученной приписыванием нулей в конец после запятой, так и в виде бесконечной дроби, оканчивающейся на 999... Число $\alpha = 0$ может быть представлено дробями вида +0,000..., а также дробями вида — 0,000.

Однако с точки зрения погрешности запись десятичной дроби с нулями в конце не совсем тождественна записи без этих нулей.

Принято считать, что если погрешность не указана, то абсолютная погрешность равна плюс-минус половина последнего написанного разряда. Поэтому если написать «3,7», то такая запись будет означать, что абсолютная погрешность равна ±0,05. А в записи «3,700» абсолютная погрешность равна ±0,0005. Другой пример:

«25» абсолютная погрешность равна ±0,5 ;

«25,0» абсолютная погрешность равна ±0,05;

«25,00» абсолютная погрешность равна ±0,005 .

Поэтому «лишние» нули имеют смысл!

0,5=0,50=0,500=0,5000=...

0,(3)=0,333333333333333333333333333333333333333...

0,25=0,250=0,2500=...

0,2=0,20=0,200=...

0,1(6)=0,1666666666666666...

0,(142857)=0,142857142857...

0,125=0,1250=0,12500=0,125000=...

0,(1)=0,1111111111111111111111111111111...

0,1=0,10=0,100=0,1000=...

mat.1september.ru | Индексы подписки: Почта России 79073 (инд.); 79583 (орг.); Роспечать 32030 (инд.); 32594 (орг.)