МАТЕМАТИКА

основана в 1992 г.

МЕТОДИЧЕСКАЯ ГАЗЕТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

16–31 мая 2011

mat.1september.ru

10

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД | *см. с. 48*

издательский дом

Первое сентября

1september.ru

МАТЕМАТИКА индексы подписки Почта россии - 79083 (инд.); - 79584 (орг.) Роспечать - 32031 (инд.); - 32598 (орг.)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Главный редактор: Артем Соловейчик (генеральный директор)
Коммерческая деятельность: Константин Шмарковский (финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов: Сергей Островский (исполнительный директор)
Реклама и продвижение: Марк Сартан
Мультимедиа, конференции и техническое обеспечение: Павел Кузнецов
Производство: Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение: Андрей Ушаков
Дизайн: Иван Лукьянов, Андрей Балдин
Педагогический университет: Валерия Арсланьян (ректор)

ГАЗЕТЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Первое сентября – Е. Бирюкова,
Английский язык – А. Громушкина,
Библиотека в школе – О. Громова,
Биология – Н. Иванова,
География – О. Коротова,
Дошкольное образование – М. Аромштам,
Здоровье детей – Н. Сёмина,
Информатика – С. Островский,
Искусство – М. Сартан,
История – А. Савельев,
Классное руководство и воспитание школьников –О. Леонтьева,
Литература – С. Волков,
Математика – Л. Рослова,
Начальная школа – М. Соловейчик,
Немецкий язык – М. Бузоева,
Русский язык – Л. Гончар,
Спорт в школе – О. Леонтьева,
Управление школой – Я. Сартан,
Физика – Н. Козлова,
Французский язык – Г. Чесновицкая,
Химия – О. Блохина,
Школьный психолог – И. Вачков

УЧРЕДИТЕЛЬ: ООО «ЧИСТЫЕ ПРУДЫ»
Зарегистрировано ПИ № 77-7241 от 12.04.01 в Министерстве РФ по делам печати
Подписано в печать: по графику 13.04.11, фактически 13.04.11 Заказ №
Отпечатано в ОАО «Чеховский полиграфический комбинат» ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: (499) 249-3138
Отдел рекламы: (499) 249-9870
Сайт: 1september.ru

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: (499) 249-4758
E-mail: podpiska@1september.ru

Документооборот Издательского дома «Первое сентября» защищен антивирусной программой Dr.Web

В НОМЕРЕ:

ТЕМА НОМЕРА: МАТЕМАТИКА И ЛИТЕРАТУРА

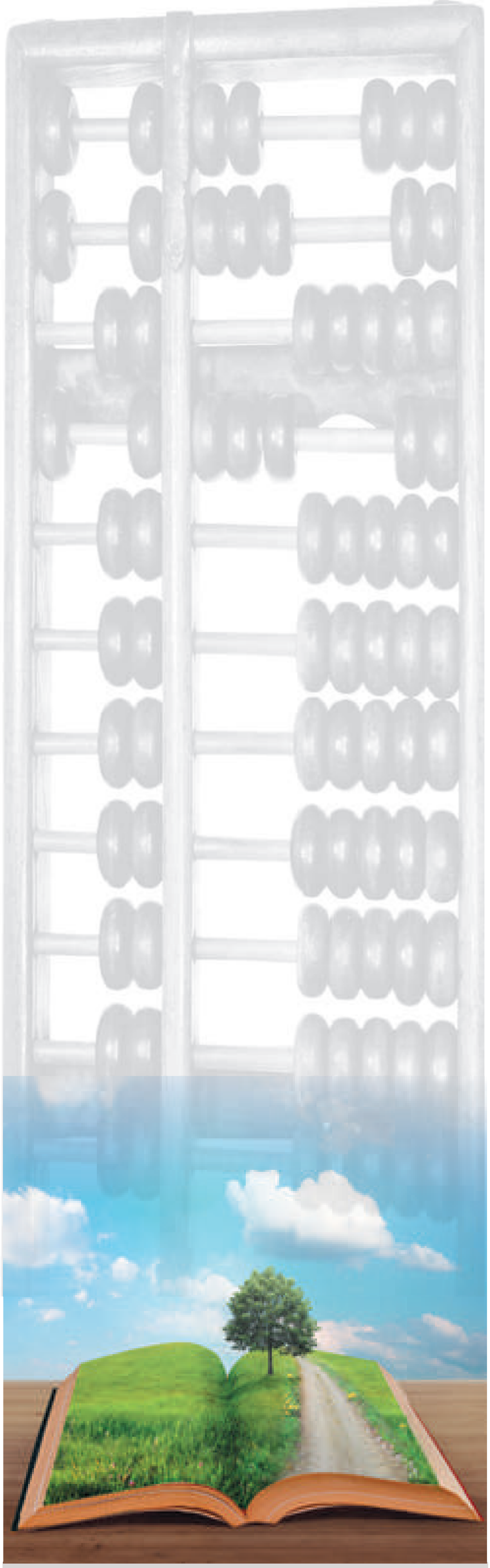
К материалам, обозначенным этим символом, есть приложение на CD-диске, вложенном в № 12.

МАТЕМАТИКА
Методическая газета для учителей математики
Основана в 1992 г.
Выходит два раза в месяц

Газета распространяется по подписке
Цена свободная Тираж 10 000 экз.
Тел. редакции: (499) 249-3460
E-mail: mat@1september.ru
Сайт: mat.1september.ru

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, И. Бокова, О. Макарова
Дизайн макета и обложки: И. Лукьянов
Корректор: Л. Громова
Верстка: Д. Кардановская

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Роспечать:
инд.–**32030**;
орг.–**32594**
Почта России:
инд.–**79073**;
орг.–**79583**



И В СЕРДЦЕ ПЕСНЮ ЗАРОНИ

Л. РОСЛОВА

Все. Конец учебного года! Ура! Настроение – лирическое. Цветут цветы, поют птицы, светит солнце – все, как в стихах. Поют-звенят последние звонки. Для одних они действительно последние, для других – последние в этом году. Выпускники читают стихи о том, как они любят свою школу и учителей. Остальные – как они мечтают вернуться в школу через три месяца.

Стихи, стихи, стихи… Как-то сами собой проникли они на страницы газеты. Но поскольку на страницы нашей газеты – математической, то и поищем мы в них математическую подоплеку. А действительно, сочетание математики и музыки кажется вполне естественным, ведь в создании теории музыки принимали участие и великие математики: музыкальные доли, гармонический ряд – даже понятия пересекаются. Что же стихосложение отстает? Разве стих – это не ритм, повторяемость, закономерность? И разве у поэтов не возникало ассоциаций с математическими образами?

Оказывается, поэтам все это не чуждо, даже интересно. Мы привыкли к штампам – вот один из них: поэт Пушкин был в своем классе последним учеником по математике. Конечно, интересно было бы проэкзаменовать лицеиста Пушкина по программе нашей современной школы. Но я о другом: что это был за класс! Элита своего времени. А программу, которую изучали в лицее, вы видели? Если нет, советую прочитать. Я, помню, была удивлена, узнав, что это был не гимназический, а вполне себе университетский курс того времени. Кстати сказать, все обучение в лицее занимало 6 лет, а поступали туда в 11. Поэтому не стала бы я судить о его математических успехах-способностях так уж однозначно негативно.

Но если поэты играют с математическими формами, то литературоведы, оказывается, занимаются вполне математическими исследованиями литературных форм. Действительно, если есть закономерность, структура, то она вполне может быть описана на языке математики, к ней могут быть применены уже известные методы исследования, например статистические. Вы, конечно, помните, как было доказано, что именно Шолохов является автором романа «Тихий Дон». С применением статистических методов исследования. И это только начало. Возможно, кто-то из сидящих за партами сегодня завтра создаст математическую теорию стихосложения или что-то в этом духе. Как знать! Как нет пределов познания, так нет пределов применения математического аппарата к исследованию закономерностей окружающего нас мира.

С.СМИРНОВ,
Москва

ПЕРЕЛЬМАН И ПУАНКАРЕ

В ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

«Чары гипотезы Пуанкаре»

(англ. *The Spell of the Poincare Conjecture*) — документальный фильм японского режиссера Масахито Касуги, снятый телерадиокомпанией NHK в 2008 году.
Награды:
Японская премия (NHK).
Награда губернатора Токио в категории образовательных программ.
Награда Фестиваля научных фильмов под патронажем Института Гёте в категории «История и культура».

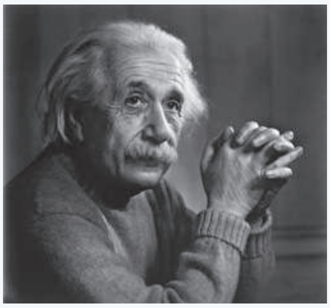
МНЕНИЕ

14 марта 2011 г. Эйнштейну исполнилось бы 122 года. В этот день телеканал «Культура» впервые показал нашим зрителям телефильм «Чары гипотезы Пуанкаре». Спасибо японской компании «ТРЛ»! Ибо российские журналисты и литераторы пока ничего удачного о математическом монахе из Петербурга создать не смогли. Правда, и японцам Григорий Перельман не дал прямого интервью. Даже от личной встречи со своим давним тренером — Александром Абрамовым, он вежливо уклонился. Видимо, понял, что встреча получится не личная, а публичная — под объективом телекамеры, под шорох магнитной ленты. Это не подобает никакому монаху: ни православному, ни католическому, ни буддийскому, ни математическому. Ибо задача монаха — духовно совершенствовать весь род людской. В той форме священного труда, которая дана ему от природы — а большинству людей, к сожалению, не дана. Ведь не каждый человек умеет взойти на Эверест, или нарисовать икону, или написать житие праведника — так, что даже грешники захотят это прочесть. Не каждый может сделать научное открытие и изложить его на языке, понятном хотя бы специалисту.

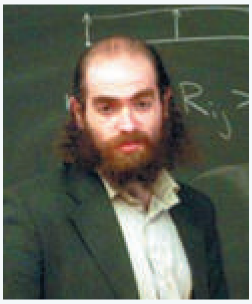
Перельману это удалось. Что именно удалось? И почему НЕ удалось его предшественникам? Пожалуй, главная заслуга японских тележурналистов в том, что они дали цельный портрет пирамиды ученых-геометров: от Анри Пуанкаре до Григория Перельмана. Вековой семейный портрет — с 1904-го по 2006-й, от великого призыва до пирровой победы. Не зря мудрый француз завершил свою статью 1904 г. многозначительной фразой: «Обсуждение этого вопроса завело бы нас слишком далеко». После чего Пуанкаре оставил созданную им топологию молодым удальцам. А сам вернулся в математическую физику, где его вскоре превзошел молодой Эйнштейн. После этого усталый Пуанкаре занялся философией и психологией науки. Но вскоре умер — в 58 лет. А что было с его наследниками?

Вдумчивые японцы сопоставили творческие биографии двоих «пуанкаристов»: грека Христоса Папакириякопулоса и немца Вольфганга Хакена. Оба отдали классической гипотезе Пуанкаре лучшие годы своей жизни, — а она не отпустила их до самого конца. Но финал их жизни оказался разным. Грек-одиночка замкнулся в себе и умер от скоротечного рака, не оставив научным преемникам сколько-нибудь внятно оформленного наследия. Немец-семьянин был спасен от профессионального психоза («острого пуанкарита») веселой и дружной семьей, которая поныне успешно вытаскивает отца из приступов депрессии. Повезло человеку... А что было потом?

Потом пришел молодой и буйный американец Стефан Смейл. Он сообразил, что можно атаковать гипотезу Пуанкаре не в лоб,



А. Эйнштейн



Г. Перельман

А. Пуанкаре

Фото с сайтов:
http://www.lapl.org/newsroom/karsh/Albert_Einstein.jpg
http://2.bp.blogspot.com/_JK950slkNGg/TKiBpvNZGfI/AAAAAAAABA8/Vk2Ygh4ykok/s1600/Grigori_Perelman.jpg
http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/0/0b/Henri_Poincar%C3%A9_by_H_Manuel.jpg

а сверху — сначала доказав ее аналог в больших размерностях (*кЮ*4). Это Смейлу удалось — очень изящным геометрическим путем, так что изобретателю сразу пожаловали международную премию Филдса (Москва, 1966 г.). И он тут же вернулся из топологии многообразий к дифференциальным уравнениям, чтобы не было соблазна многократно проигрывать все ту же пластинку. Об этом седой и знаменитый Смейл кратко и честно рассказал японским журналистам.

Через 20 лет у Смейла появилась четверка удалых наследников: два американца (Дональдсон и Фридман) и два немца — Кассен и Фрелих, которые придумали необходимую геометрическую конструкцию в размерности 4. В итоге 4-мерная гипотеза Пуанкаре также была побеждена и увенчана Филдсовской премией (1986 г.). Но авторы фильма умолчали об этом. Почему?

Во-первых, не хватило времени: фильм длится всего один час. Во-вторых, неохота раньше ключевого момента вводить в игру физику. Ведь Саймон Дональдсон прославился прежде всего тем, что ввел в топологию из физики солитоны — особые решения уравнений квантовой теории, которые в корне изменяют геометрию физического вакуума. И заодно порождают бесконечное семейство разных двойников 4-мерного евклидова пространства. Стоит об этом публично заикнуться — и аудитория будет увлечена. Но напрочь забудет об исходной гипотезе Пуанкаре и о каком-то нелюдимом Перельмане. Законы жанра не допускают таких вольностей!

Поэтому в японском фильме Дональдсон и Фридман остались в тени. Вместо них на авансцену вышел Вильям Терстон, во многом похожий на Стефана Смейла. Он тоже ставил задачу широко: хочу классифицировать ВСЕ трехмерные многообразия так же, как Риман и Пуанкаре классифицировали все замкнутые поверхности! Среди разных поверхностей нашлись всего две неразложимые на более простые элементы: это тор и проективная плоскость. Сколько неразложимых элементов может быть в трехмерном случае?

Терстон угадал, что их не более восьми — или даже семи, если верна гипотеза Пуанкаре. Но добить ее до конца Терстон не сумел — и отложил в сторону свою восьмеричную гипотезу. Пусть ею займется следующее поколение геометров, алгебраистов и матфизиков! Все это моложавый еще Терстон рассказывает журналистам в кругу своей благополучной семьи: его, как видно, «острый пуанкарит» миновал. Не потому ли, что он успел вовремя (в 36 лет) получить премию Филдса? Теперь мудрый Терстон советует всем нам (особенно журналистам) с уважением отнестись к интеллектуальным порывам и душевным ранам тех, кто завершил покорение гипотезы Пуанкаре.

Вслед за вдохновенным Терстоном в эту область заглянул методичный Ричард Гамильтон. Следуя примеру Дональдсона, он начал изучать геометрию тех физических миров, в которые можно превратить трехмерные многообразия. Какие физические поля можно там ввести? Как они связаны с кривизною, хорошо знакомой еще Риману и Эйнштейну?

Результаты Гамильтона о «потоках Риччи» вызвали большой интерес среди геометров. Но ни один читатель не догадался тогда связать новые факты с древней гипотезой Пуанкаре. Пока в державный Принстон не приехал в начале 90-х годов скромный стажер из Петербурга по фамилии Перельман.

На родине он был широко известен в узких кругах — как чемпион многих школьных олимпиад по математике. По воспоминанию А.М. Абрамова, возглавлявшего тогда наши олимпиадные команды, Перельман умел решить почти любую задачу, предварительно полюбив ее. Неудивительно — если учесть, в каком свирепом математическом кружке вырос этот юноша и какую блестящую физматшколу он окончил. Потом был математический факультет ЛГУ. Затем — скромное рабочее место в Математическом институте на Фонтанке, который постперестроечные бюрократы переименовали в ПОМИРАН. Типун им на язык!

В свой черед подающий надежды геометр получил приглашение в заморский Принстон – к профессору Чигеру. Тот сразу понял, что молодой человек нуждается в моральной поддержке — но не в профессиональном воспитании. Он думает и пишет, как Моцарт – без лишних нот в основной мелодии. Докторская диссертация родилась через два года: она никак не была связана с гипотезой Пуанкаре. Потому что изначально геометр Перельман НЕ имел склонности к топологии! Его интересовали аналитические, а не гомотопические свойства физических или геометрических миров. Так было, пока в Принстоне молодой доктор Перельман не прочел свежую статью незнакомого ему Гамильтона о «потоках Риччи». Сперва она вызвала только интерес: как красиво этот автор преобразует друг в друга разные физические миры! Постепенно упрощая их...

Но ведь эдак можно и до простейшего мира дойти, сиречь до трехмерной сферы! Или до одного из прочих многообразий Терстона. Неужели этот физический путь ведет к доказательству вековых геометрических гипотез? Великие надежды чередовались в уме Перельмана с великими опасениями; в таком смутном настроение он покинул Принстон и вернулся на берег Фонтанки. Здесь подспудная работа молодого ума затянулась еще на семь лет.

Отчего так долго? Да потому, что план великого доказательства довольно быстро рождается из немногих крупных блоков. Но потом каждый блок приходится разбирать на мелкие кирпичи: нет ли где-то «сухого» шва, не скрепленного цементом четкого рассуждения? Первопроходцы сплошь и рядом пропускают такие швы — и большинство читателей следуют их примеру, пленяясь красотою основного рассуждения. Но если путь ведет к великой цели, то никаких пробелов терпеть нельзя. Ведь каждый из них может сгубить и все рассуждение, и великую мечту. Не говоря уже о твоей научной репутации!

Почти так же мучился молодой Эйнштейн в многолетнем переходе от специальной к общей теории относительности. Или британец Эндрю Уайлз — когда он семь лет сочинял доказательство гипотезы Танияма, зная, что из нее вытекает Большая теорема Ферма. Понятно, что в месяцы или годы такого подвижничества соискатель не расположен к душевной открытости. В институте на Фонтанке молодого буку Перельмана ценили и уважали, но не обожали. Так всякий, кто подальше брата видит, будет одинок среди своих.

В 2002 г. великий труд завершился. Григорий Перельман изложил свои открытия в трех статьях, общим объемом меньше сотни страниц. Вывесил эти тексты в Интернете: читайте все, кому это близко! И замолк в ожидании: кажется, что главное дело жизни сделано. Как отреагируют коллеги?

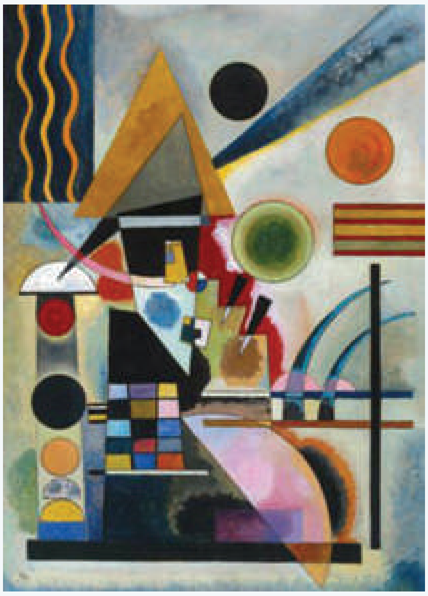
Их реакция была пестрой и неоднозначной. Многие «чистые» математики отказались разбирать тексты, написанные на простом английском языке, но густо пропитанные физической терминологией. Это — не наша наука; хорошее решение задачи нужно изложить на том же языке, на котором она была сформулирована!

Напротив, удалая китайская молодежь сразу начала поиск ошибок в рассуждениях Перельмана. Не мог же российский романтик нигде не провраться! Два года искали — но ничего не нашли. Оказалось, что петербургский герой успешно сочетает русский размах фантазии с китайской въедливостью в деталях. Значит, он тихий гений — вроде Гаусса или Римана. Надо его наградить премией Филдса, пока не поздно: ведь в 2006 г. Перельману исполнится 40 лет!

Что и было сделано на международном конгрессе в Испании. Да вот беда: Перельман отказался приехать в Мадрид за премией. И вообще уволился из Математического института. Теперь весь ученый мир знает о его успехе: честному математику этого довольно. А честному человеку излишняя слава не нужна: так ведь и Эйнштейн думал. Вдобавок, Гамильтона знатные математики ничем не наградили: это нечестно со стороны Международного союза математиков! Вот и решил сорокалетний отшельник Перельман пренебречь деньгами и властью, никому ни в чем не исповедуясь. Кому дано понять это — тот поймет без слов. Иным же лучше ничего не знать.

И вот ютится наш гений-одиночка в маленькой квартирке на окраине Питера, вдвоем со старушкой мамой. Подрабатывает репетиторством; живет на хлебе и молоке, как первые христианские отшельники. Академия наук о Перельмане не вспоминает. Городские власти не сообразили ни объявить Григория почетным гражданином Питера, ни назначить его маме повышенную пенсию. Как не вспомнить горькие слова матери Льва Ландау: «Я хочу, чтобы у меня был не гений, а сын!». Но от материнского хотения в этой сфере мало что зависит. Вдобавок, Лев Ландау рассчитал ужасную бомбу — и за это стал академиком, неуязвимым для чиновников и чекистов. Перельман же доказал безвредную математическую гипотезу: какое дело до этого его властным современникам? Или до того, что честный петербургский еврей не хочет покидать родной город во имя сытных заморских хлебов? Когда-нибудь его восславят в России как блаженного праведника. Но пока это заметили только японцы. Спасибо им, и стыд нам!

В. Кандинский. Акцент розового



В. Кандинский. Качающееся

В. Кандинский. Из прохладных глубин

Н. БЕЛЯЕВА,
Москва

В оформлении статьи использованы иллюстрации с сайта http://www.wassilykandinsky.ru; http://avos111.narod.ru/proza/taganka.htm, в основу положена публикация в газете «Литература», 2011, № 1

ГЕОМЕТРИЯ В ПОЭЗИИ

Если век может идти себе вперед, науки, философия и гражданственность могут усовершенствоваться и изменяться, – то поэзия остается на одном месте, не стареет и не изменяется. Цель ее одна, средства те же. И между тем как понятия, труды, открытия великих представителей старинной астрономии, физики, медицины и философии состарились и каждый день заменяются другими – произведения истинных поэтов остаются свежи и вечно юны.

А.С. Пушкин

Возьмем в судьи Пушкина!

Вдохновение нужно в поэзии, как и в геометрии... – эти строки восходят к известному изречению французского историка и математика Жана Даламбера (1717–1783). Его книга сохранилась в библиотеке Пушкина, который в 1827 году записал: «Вдохновение есть расположение души к живейшему принятию впечатлений и соображению понятий, следственно и объяснению оных. Вдохновение нужно в геометрии, как и в поэзии». Что же побудило и Даламбера, и Пушкина поставить в один смысловой ряд геометрию и поэзию?

Во времена Пушкина «математика, физика, механика завоевывали все большее признание, становились модной темой салонных разговоров. Интерес к ним со стороны молодого поколения, казалось, возрастал в большей степени, чем интерес к “изящным искусствам” и отвлеченным, метафизическим проблемам». Пушкин же видел преимущества поэзии перед наукой и философией в том, что поэтические шедевры со временем не устаревают и продолжают свою жизнь в веках.

С другой стороны, Пушкина интересовало то, что сближает поэзию и науку: «Великая поэзия всегда включает в себя и великую мысль. И “высшая смелость” в поэзии – это “смелость изобретения, создания, где план обширный объемлется творческою мыслию”».

В связи с этим вспоминается смелое стихотворение Семена Кирсанова «Любовь математика», наполненное не только математическими терминами, но и тонким комизмом, скрытой насмешкой над образом мысли «влюбленного технаря»:

Расчлененные в скобках подробно,
эти формулы явно мертвы.
Узнаю: эта линия – вы!
Это вы, Катерина Петровна!
Жизнь прочерчена острым углом,
в тридцать градусов пущен уклон,
и разрезан надвое я вами,
о, биссектриса моя!

Знаки смерти на тайном лице,
угол рта, хорды глаз – рассеки!
Это ж имя мое – ABC –
Александр Борисыч Сухих!

И когда я изогнут дугой,
неизвестною точкой маня,
вы проходите дальней такой
по касательной мимо меня!

Вот бок о бок поставлены мы
над пюпитрами школьных недель, –
только двум параллельным прямым
не сойтись никогда и нигде!

Стихотворение демонстрирует высочайшую смелость автора, о котором Евгений Евтушенко высказался так: «Про Кирсанова была такая эпиграмма: “У Кирсанова три качества: трюкачество, трюкачество и еще раз трюкачество”. Эпиграмма хлесткая и частично правильная, но в ней забывается и четвертое качество Кирсанова – его несомненная талантливость. Его поиски стихотворной формы, ассонансные способы рифмовки были впоследствии развиты поэтами, пришедшими в 50–60-е, а затем и другими поэтами, помоложе. Поэтика Кирсанова циркового происхождения – это вольтижировка, жонгляж, фейерверк; как жаль, что у нас на сегодняшний день нет ни одного формалиста такого класса».

Что же такое геометрия в поэзии? Употребление в стихах математической лексики, как это может показаться на первый взгляд? Или что-то другое?

В плену «совершенных линий»

В последней строфе стихотворения Кирсанова упомянуты параллельные прямые. Явление параллельности пришло в поэзию из геометрии. **Параллелизм** в поэзии – это «композиционный прием, подчеркивающий структурную связь двух или трех элементов стиля в художественном произведении; связь этих элементов состоит в том, что они располагаются параллельно в двух или трех смежных фразах, стихах, строфах, благодаря чему выявляется их общность». Синтаксический параллелизм предполагает одинаковую структуру предложений в смежных стихах:

Ко мне приплывала зеленая рыба,
Ко мне прилетала белая чайка!
А. Ахматова

Если одинаковое синтаксическое построение повторяется в смежных строфах, как в стихотворении М.Ю. Лермонтова «Парус», то параллелизм называется строфическим, а при повторении ритмического рисунка внутри строф – ритмическим:

Сад весь в цвету,
вечер в огне,
Так освежительно радостно мне!
Вот я стою,
вот я иду.
Словно таинственной речи я жду.
А. Фет

Настоящие поэты всегда стремились совершенствовать форму своих произведений и вносить в них скрытый, зашифрованный смысл. Если уподобить первые буквы стихов вертикальной прямой, то примером внесения смысла в бессмысленность вертикальных буквенных рядов можно считать **акростих**, в котором начальные буквы каждого стиха при чтении сверху вниз составляют слово, иногда фразу. Это была «попытка внести смысл даже в вертикальную бессмыслицу букв, стройность, порядок – в хаос».

Как «суровый Дант не презирал сонета», так и многие крупные поэты слагали акростихи: «с... пиететом относился к акростиху Валерий Брюсов... Но акростих занимал в то же время и Анненского, и Северянина, и Городецкого, и Гумилева, и Кузмина, и даже Ахматову, в принципе не склонную к рациональным построениям. Есть акростихи и у поэтов уж сугубо органических – Сергея Есенина и Павла Васильева... Кстати, сам Пастернак написал по крайней мере два акростиха, обращенных к Марине Цветаевой».

Некогда опальный Николай Глазков, мастер акростиха, прислал в молодежную газету стихотворение, где поначалу не увидели крамолы. Но вскоре обнаружилось, что в первых буквах стихотворных строк зашифровано «Дорогому Леониду Ильичу». «Кто такой Леонид Ильич, объяснять было не надо. Брежнев, конечно. Был расцвет “Малой земли”, а тут стихи про цветочки. Криминал! Сейчас бы сказали – соц-арт, концептуализм, а тогда – издевательство». Так акростих использовали и как средство борьбы с цензурой.

Изящный акростих подарил А. Ахматовой М. Лозинский:

Я Ахматовой покорён.
Шарм Аннеты необорён.
Милой цеховой царевны
Анны дорогой Андревны.

Как геометрическую линию можно представить в поэзии и **моностих**, то есть поэтическое произведение из одной строки. Моностихи мы встречаем и в классической литературе («Покойся, милый прах, до радостного утра» Карамзина), и в поэзии Серебряного века («О, закрой свои бледные ноги!» Брюсова; «Всевыразительность есть ключ миров и тайн» Бальмонта), и в более поздней лирике («Он в зеркало смотрел, как в уголовный кодекс» Александра Гатова; «Лучше недо – чем пере» Ильи Сельвинского), и в современной поэзии («Не пугайся, любимая, это еще не стихи» Владимира Вишневского; «Дышала ночь восторгом самиздата» Б. Констриктора; «Осознал. Содрогнулся. Привык» Кирилла Ковальджи). Конечно, моностихи сами по себе с геометрией связаны слабо, но как изящен «одностих» Ивана Жданова, который имеет совершенно геометрическое название – «Лента Мебиуса» – и может читаться бесконечно: «Я нужен тебе для того, чтобы ты была мне нужна».

Магическими становятся и **пи-стихотворения**, состоящие из последовательности слов, где количество букв представляет десятичную последовательность числа: 3,14... На русском языке известно несколько анонимных пи-моностихов: «Что я знаю о кругах», «Что я тебе и Дарье рассказал», «Это я знаю и знать продолжаю», и даже двустишие «Где и волк, и выдра властелин – ту страну лютый рок обошел».

С. Фединым написан прозаический текст, где количество букв в словах соответствуют числу π – 3,141 592 653 589 793 238 462 643...: «***Тип***. Я ехал в метро. Тщедушный, но наглый пижон (шея будто акушером вытянутая) брюзжал – заталкали его. Он был скользок... День спустя на Арбате вижу его».

Внутренней геометрией обладает и такая форма, как **палиндром** – буквально «бегущий назад». Это «число, буквосочетание, слово (фин. saippuakauppias продавец мыла – самое длинное слово-палиндром в мире) или текст, одинаково (или почти одинаково) читающийся в обоих направлениях». По-русски палиндром часто называют «перевертень».

В древности палиндромам придавали магический или сакральный смысл. Самым древним из магических палиндромов считают такой: SATOR AREPO TENET OPERA ROTAS (Сеятель Арепо с трудом держит колеса). Из него складывается магический квадрат, где выражение читается как вертикально, так и горизонтально, как слева направо, сверху вниз, так и наоборот. Из-за магических свойств этот палиндром считали оберегом от болезней и злых духов.

Волшебный смысл палиндрома, видимо, осознавали и русские скоморохи, в своих представлениях выкрикивающие «На в лоб, болван». Широко известен и палиндром Державина «Я иду съ мечемъ судия», и палиндромный стих Фета «А роза упала на лапу Азора». В.Хлебников создал целую палиндромическую поэму «Ра-зин» (См. «перевертень» В.Хлебникова в статье Е.Абелюк из серии «Эксперимент в поэзии Серебряного века» – «Литература». 2010. № 18. С. 39).

Разновидность палиндрома – **реверс**, где рифма при чтении наоборот меняется:

Глаза зеленые твои
Мне будут снова сниться, и
Слеза, как чистый образ твой,
Весне запомнится шальной.
Неизвестный автор

Подводя итог размышлениям о палиндроме, приведу изящный пример, принадлежащий Кириллу Решетникову: «Он дивен, палиндром, и ни морд, ни лап не видно...»

«Стихи растут, как звезды и как розы»

Нетрадиционные формы поэзии нередко вызывали негативные оценки. Даже в «Словаре литературоведческих терминов» читаем: «Фигурные формы – стихотворения, составленные из строк разного размера, таким образом, чтобы их контуры изображали какую-либо фигуру: треугольник, крест, звезду, сердце и т.п. Принадлежа только графике, *подобные ухищрения не имеют никакого отношения к поэзии* (курсив мой. – *Н.Б.*). Они связаны главным образом с периодами упадка, отрыва поэзии от жизни (в книжной латинской поэзии Средневековья, в стихах С. Полоцкого, адресованных к царю, в русской предреволюционной поэзии декаданса и пр.)». Однако есть и другое мнение: «В России фигурные стихи появляются в период виршеписания. Наиболее виртуозным “фигуристом” проявил себя неистощимый Симеон Полоцкий. По сути дела это была уже грань визуальной поэзии, роднящейся с изобразительным искусством». Стремление изобразить стихом какую-либо фигуру «вполне отвечало представлениям барочных авторов о стихе как картине мира, о магических свойствах словесно-зрительного ряда».

Интерес к фигурной поэзии проявил XX век. «Поэзия должна последовать за живописью», –

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

Магический палиндром читается во всех направлениях: справа налево, слева направо, сверху вниз и снизу вверх

Стремление проникнуть в «обратный» мир, в «антимир» с помощью слова предпринял и А.Вознесенский. В его сборнике «Тень звука» (1970 г.) помещён фигурный палиндром «А луна канула». Такие словесно-изобразительные построения поэт называл изопами

призывал В. Хлебников, предвосхищая эпоху визуальной поэзии, соединяющей в себе словесное и зрительное творчество. Ее истоки – в искусстве поэтической каллиграфии (в особенности в мусульманских, а также дальневосточных культурах), где неразличимо связаны узор и смысл; в визуальной поэзии эпох маньеризма и барокко. Визуальную поэзию, которой увлекались футуристы, дадаисты, постмодернисты, С.Е. Бирюков назвал «поэзией под микроскопом»: «Это преувеличенная поэзия или преувеличение поэзией собственных прав. Поэзия хочет быть всем, но прежде всего она хочет быть видимой».

В середине XX века стихи – архитектурные композиции начал создавать Андрей Вознесенский. Яркий пример – фигурное стихотворение о сносе Сухаревой башни. Такие стихи лучше не читать, а рассматривать и оценивать как архитектурную конструкцию.

Нужно ли воспринимать такую поэзию всерьез? Вот пример принципиальной позиции: «Переориентация смысла с текста-сообщения (иногда при некоторой фонетической красивости) на текст-картинку делает ситуацию более одномерной, но и более естественной, более профессиональной. Воспринимаемый глазами текст должен быть рассчитан прежде всего на визуальность (что всего остального не исключает). Но воспринимать «музыку» стихов Пушкина глазами, как раньше, – это противоестественно. Для «музыки» есть саунд-поэзия. Литература расщепляется, словно атом, на визуальную и фонетическую, что, безусловно, позволит в будущем создать и НОВЫЙ синтез обеих половин».

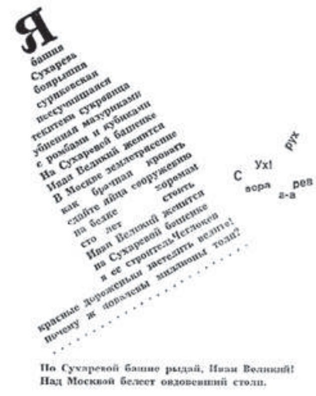
Два в одном, три в одном…

Уникальность двойных стихотворений, которые при прочтении вместе образуют третье, способна немало удивить читателей поэзии. Геометрия здесь простая: слева – первое стихотворение, справа – второе, а если читать по очереди сначала первую строчку первого, затем первую строчку второго и так далее, то получится новый текст. Таково стихотворение французского поэта Агриппы Д'Обинье (1552–1630) (пер. Э.Линецкой), которое можно читать и как два трехстопных восьмистишия (одно из них выделено), и как одно шестистопное. Трехстопные стихи между собой не связаны, это отдельные стихотворения, где описываются горести любящих. Но если их соединить, получается стихотворение противоположного смысла, воспевающее счастье влюбленных.

Чей здравый смысл угас? – *бежит любовных нег,*
Тот не боится мук, – *кого прельщает воля,*
Мой друг, любовь для нас – *завиднейшая доля –*
Несчастье и недуг – *любви не знать вовек.*
Отрада всех отрад – *лелеять чаровницу –*
Свобода и покой – *ну, это ль не напасть?*
Удел стократ благой – *в любовный плен попасть,*
Хранить сердечный хлад –
что лечь живым в гробницу.

По такой модели построен и сонет Валерия Брюсова: если мысленно разрезать его по вертикали на месте каждого тире – интонационной паузы за очередной внутренней рифмой, – то текст распадется на два самостоятельных сонета. Можно найти в нем и стих-разгадку: «Скрывает тайный смысл в *полустихах* сонета…»:

Отточенный булат – луч рдяного заката!
Твоя игрушка, Рок, – прозрачный серп луны!
Но иногда в клинок – из серебра и злата
Судьба вливает яд: – пленительные сны!
Чудесен женский взгляд – в час грез и аромата,



Одно из фигурных стихотворений А. Вознесенского – о сносе Сухаревой башни

И моя небесная свирель
Лучистая,
Чистая,
Истая,
Стая,
Тая,
А я –
я.

В русской поэзии логогриф видим в стихотворении «Соловей» Вас. Каменского (1916 г.)

Зрю
Зарю,
Лучами,
Как свещами,
Во мраке блестящу,
В восторг все души приводящу.
Но что? – от солнца ль в ней толь милое блистанье?
Нет! – Пирамида – дел благих воспоминанье.

В XVIII веке Г.Р. Державин написал знаменитую «Пирамиду»

Когда порой глубок, – чудесен сон весны!
Но он порой жесток – и мы им пленены.
За ним таится ад – навеки, без возврата.
Прекрасен нежный зов –
под ропот нежный струй,
Есть в сочетанье слов, – как будто поцелуй,
Залог предвечных числ – влечет творить поэта!
Но и певучий стих – твой раб всегдашний, страсть,
Порой в словах своих – певец находит власть:
Скрывает тайный смысл – в полустихах сонета.

Такой технически отточенный текст поражает виртуозностью формы, показывает, до какого совершенства мог подняться поэт. Вкус к технической стороне дела с легкой руки Брюсова становится не только достоянием Серебряного века, но и появляется в парадоксальной поэзии эпохи постмодернизма (например, у Генриха Сапгира).

«Заветные кольца»

Геометрически точна композиция тех стихов, строф и даже целых стихотворений, которые построены по принципу **кольца**, то есть повторения в конце произведения или фразы каких-либо элементов его начала. В лирике это повторение в конце стиха, строфы или всего стихотворения начальных звуков, слов, строк.

Композиция кольца в целом стихотворении, когда в нем повторяются первая и последняя строчки, – излюбленная форма поэтов. Таковы «Ночь, улица, фонарь, аптека...» Блока, «Прощание с друзьями» Николая Заболоцкого и др. По принципу внутристрофического кольца строятся и такие твердые формы, как рондо и триолет. Вот триолет Игоря Северянина:

Еще весной благоухает сад,
Еще душа весенится и верит,
Что поправимы страшные потери, –
Еще весной благоухает сад...
О, нежная сестра и милый брат!
Мой дом не спит, для вас раскрыты двери...
Еще весной благоухает сад,
Еще душа весенится и верит...

«Что отражают зеркала?»

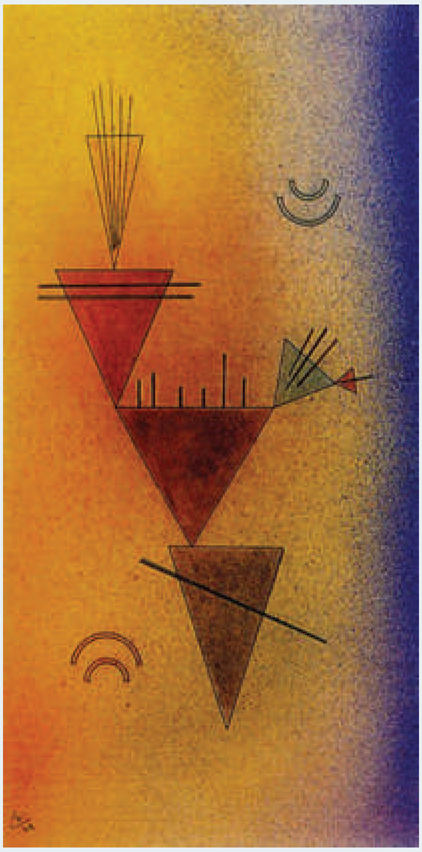
Ю.М. Лотман первым научно обосновал мысль о том, что в поэтическом тексте все элементы речевого уровня, от фонем до композиции, «могут возводиться в ранг значимых» и что «любые моменты, являющиеся в языке формальными, могут приобретать в поэзии семантический характер, получая дополнительные значения». Следуя логике Лотмана, стоит присмотреться к замечанию Ю.К. Олеши по поводу двух стихов из «Путешествия Онегина»:

Там упоительный Россини,
Европы баловень – Орфей...

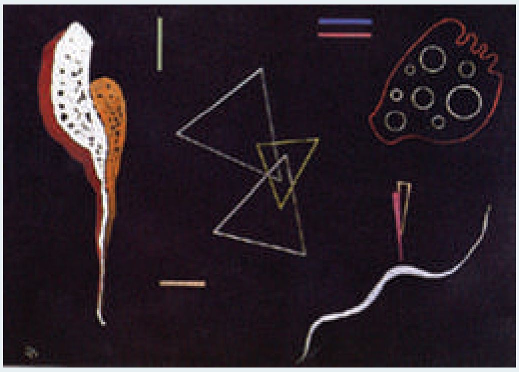
«Я заметил, – пишет Ю. Олеша, – что слова “Орфей” и “Европы” зрительно чем-то похожи. Я пригляделся и обнаружил, что слово “Орфей” есть в довольно сильной степени обратное чтение слова “Европа”. Таким образом, в строчку как бы вставлено зеркало!» [9, 455]. Действительно, можно представить звуковой образ этих слов так: [арфэй] | [йэвро]. Одно их них как бы отражает другое, образуя симметричную звуковую картину.

Эффект зеркала можно обнаружить и в строчках стихотворения Б. Пастернака «Сложа весла», только отражение будет уже не звуковым, а слоговым:

Лодка колотится в сонной груди
[лот-ка] | [ка-лот (итцъ)...]
Ивы нависли целуют в ключицы
[и-въ] |н| [ъв-и...(сли)].



В. Кандинский. Маленькая игра



В. Кандинский. Три треугольника

В. Кандинский. Безмолвное

«Кольца» могут быть:

фонетическими

Не пой, красавица, при *мне*…
А.С. Пушкин

строфическими

Тихо розы бегут по полям,
Сердцу снится страна другая.
Я спою тебе сам, дорогая,
То, что сроду не пел Хаям…
Тихо розы бегут по полям…
С.А. Есенин

лексическими

Я не люблю манежи и арены,
На них мильон меняют по рублю, –
Пусть впереди большие перемены,
Я это никогда *не полюблю*.
В.С. Высоцкий

Если говорить о зеркальных отражениях, то очень важно, в каком месте будет стоять «зеркало». Изящный зеркальный сонет, посвященный А.Ахматовой, создал Н.В. Недоброво, автор первой статьи о ее творчестве. Воспитанный Серебряным веком, он придавал большое значение безупречности художественной формы. Его сонет можно читать по стихам сверху вниз и снизу вверх, начиная с последней строчки. В этом случае отражающая поверхность «зеркала» располагается сразу за последним стихом.

Законодательным скучая взором,
Сквозь невниманье, ленью угнетен,
Как ровное жужжанье веретен,
Я слышал голоса за дряблым спором.
Но жар души не весь был заметен.
Три А я бережно чертил узором,
Пока трех черт удачным уговором
Вам в монограмму не был он вплетен.
Созвучье черт созвучьям музыкальным
Раскрыло дверь – и внешних звуков нет.
Ваш голос слышен в музыке планет...
И здесь при всех, назло глазам нахальным,
Что Леонардо, я письмом зеркальным
Записываю спевшийся сонет.

Многие строки сонета трудно понять без культурологического комментария. Так, «Три А я бережно чертил узором» – это монограмма имени, отчества и фамилии А.А. Ахматовой. А намек на зеркальное письмо Леонардо да Винчи в последнем стихе – разгадка сонета.

Конкурс фотографий «Лето–осень-2011»

На конкурс принимаются фотографии, на которых запечатлены учителя математики и их ученики 5–11-х классов в учебном процессе, на занятиях кружка, олимпиадах, в летних математических школах и пр. К каждой фотографии необходимо приложить краткое описание изображенного на ней события (место, время, действующие лица).

Фотографии могут быть цветными или черно-белыми. Формат для фотографий, отпечатанных на фотобумаге, не менее 10 × 15 см. Цифровые фотографии могут быть присланы на электронном носителе или по электронной почте. Размер цифровых фотографий не менее 800 × 600 пикселей, формат — JPG, качество, используемое при сохранении JPG-файлов, — высокое (high).

Лучшие фотографии будут напечатаны в газете, а победитель получит бесплатную подписку на первое полугодие 2012 года.

М. ДИХТЯРЬ,
А. ПАРФЕНОВА,
Е. ЭРГЛЕ,
г. Саратов

Тема урока:

«СТАТИСТИКА И СТИХОСЛОЖЕНИЕ»

Поэт тем талантливее, чем более математичен его дар.
Эдгар По

Если рассматривать содержание программы обучения в средней школе как целостную систему, то межпредметные связи входящих в нее дисциплин желательно распространять на все изучаемые предметы. Помочь решить эту проблему могут интегрированные уроки — уроки, на которых темы изучаются на основе разных учебных предметов. Такие уроки, показывая глубокую взаимосвязь разных наук, даже таких, казалось бы, несочетаемых, как математика и литература, могут занять в системе школьного образования особое место.

Предлагаем вашему вниманию интегрированный урок в 10-м профильном, гуманитарном классе, который, по нашему мнению, показал эффективность интеграции учебных занятий.

Цели урока:

— обобщить и систематизировать знания, полученные на уроках математики по теме «Элементы статистики», на уроках литературы по теме «Стихосложение», на уроках информатики по теме «Построение диаграмм и графиков»;

— показать, что понятия и законы статистики применимы для широкого класса задач различных областей, в том числе литературы;

— продолжить развитие познавательной активности учащихся, интереса к изучению предметов.

Организация урока: урок рассчитан на 90 минут и проводится в компьютерном классе, в классе три учителя: литературы, математики и информатики. До начала урока учащиеся разбиваются на 3 группы.

Оборудование: мультимедийный проектор, компьютерный класс с установленным необходимым программным обеспечением (Microsoft PowerPoint, Microsoft Excel), раздаточный материал со стихами А. Фета «Цветы», Н. Заболоцкого «Возвращение с работы», И. Бунина «Родине» и Ф. Тютчева «Сияет солнце...».

Ход урока

Учитель литературы. Хотелось бы начать наш урок со слов Александра Сергеевича Пушкина: «Вдохновение нужно в поэзии, как и в геометрии». В данном случае слово «геометрия» можно заменить на «математика», так как сегодня на уроке мы с вами узнаем, что математика и литература могут иметь точки соприкосновения.

Тема нашего урока звучит так: «Статистика и стихосложение». И прежде я хотела бы, чтобы мы вспомнили о наиболее распространенном в русской поэзии стихотворном размере (метре) — *ямбе*.

Три четверти стихотворений на русском языке написаны ямбом. Четырехстопный ямб легко узнаваем. Эти размеры имеют,

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 12.

например, «Белеет парус одинокий» М.Ю. Лермонтова, «Няня» А.С. Пушкина, «Весенняя гроза» Ф.И. Тютчева. Ямбом А.С. Пушкин написал 87% поэтических произведений, а четырехстопные размеры составляют в его творчестве 68%.

Учитель математики. Математический анализ стихотворных размеров имеет давнюю традицию, идущую от русского писателя, поэта, критика, одного из ведущих деятелей символизма Андрея Белого — выпускника математического факультета Московского университета. Своему второму рождению это направление математического стихосложения обязано работам двух выдающихся ученых XX века — математику А.Н. Колмогорову и филологу М.Л. Гаспарову.

Интересен тот факт, что закон чередования женских и мужских окончаний был установлен французским поэтом Пьером Ронсаром в теоретическом труде «Алгебра французского поэтического искусства», написанном еще в 1565 г. Так что «проверять» алгеброй гармонию поэты начали задолго до Сальери!

Разницу между длиной слов или слоговой длиной слов отдельных стихотворений можно определить точными цифрами с помощью статистики. Длина слова – это количество букв, входящих в слово. Слоговая длина – это количество слогов, входящих в слово.

Учитель литературы. К сегодняшнему уроку вы должны были подготовить выразительное чтение стихотворения «Цветы» А. Фета. Давайте послушаем его.

(*Ученик читает стихотворение.*)

С полей несется голос стада,
В кустах малиновки звенят,
И с побелевших яблонь сада
Струится сладкий аромат.

Цветы глядят с тоской влюбленной,
Безгрешно чисты, как весна,
Роняя с пылью благовонной
Плодов румяных семена.

Сестра цветов, подруга розы,
Очами в очи мне взгляни,
Навей живительные грезы
И в сердце песню зарони.

Задания по литературе

1. Определите размер этого стихотворения.

Четырехстопный ямб, так как каждая строка состоит из четырех двухсложных стоп с ударением на втором слоге стопы.

2. Охарактеризуйте рифму в зависимости от расположения ударений.

Чередуется женская и мужская рифмы.

3. Определите количество строф и охарактеризуйте эти строфы.

В стихотворении три строфы; каждая состоит из четырех строк с перекрестной рифмовкой АбАб.

Задания по математике

1. Дайте определение *среднего арифметического* нескольких чисел.

Средним арифметическим нескольких чисел называется такое число $\bar{X}$, которое получается делением суммы всех этих чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ на их количество n.

(*На экране появляется формула среднего значения* $\bar{X} = \dfrac{x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_km_k}{n}$.)

2. Дайте определение *моды* набора чисел.

Модой (*Мо*) набора чисел называется число, которое встречается наиболее часто в этом наборе. Набор чисел может и не иметь моды.

3. Дайте определение *медианы*.

Медианой (*Ме*) набора n чисел (среди которых могут быть совпадающие) называется:

— число, стоящее посередине в упорядоченном по возрастанию наборе этих чисел, если n нечетно;

— полусумма чисел, стоящих на средних местах в упорядоченном по возрастанию ряду этих чисел, если n четно.

(*На столе у каждого ученика находится раздаточный материал со стихами А. Фета «Цветы».*)

Учитель литературы. В стихотворении А. Фета «Цветы» подсчитайте:

1-я группа: количество слов разной буквенной длины, при этом если предлог состоит из одной согласной буквы, то считайте его вместе со словом, к которому он относится (табл. 1).

2-я группа: количество слов разной слоговой длины, при этом если предлог не образует слога, то считайте его вместе со словом, к которому он относится (табл. 2).

3-я группа: количество сонорных согласных (Й, Л, М, Н, Р) и количество мягких знаков (табл. 3).

Учитель информатики. Вам известно, что данные для последующей обработки и построения диаграмм и графиков удобнее и эффективнее вносить в электронные таблицы. Работать с электронными таблицами (на примере программного пакета Microsoft Office Excel) вы уже умеем, поэтому можете смело воспользоваться имеющимися знаниями. Давайте вспомним, как же работают электронные таблицы и чем они могут нам помочь на этом уроке.

Вопросы по информатике

1. Что называют электронной таблицей?

Электронная таблица (табличный процессор) является программой для обработки одного из видов информации — числовой. Она используется для упрощения математических операций и расчетов, позволяет решать широкий спектр задач из различных предметных областей.

2. Какие данные могут вводиться и храниться в электронной таблице?

Электронная таблица (ЭТ) позволяет хранить в табличной форме большое количество исходных данных, результатов, а также связей (алгебраических или логических соотношений) между ними. Формат данных может быть:

3. Какие форматы данных, хранимых в электронных таблицах, вам известны?

- общий;
- числовой;
- денежный;
- финансовый;
- процентный;
- дробный;
- дата, время и т.д.

Учитель информатики. При изменении исходных данных все результаты автоматически пересчитываются и отражаются в таблице. Электронные таблицы не только автоматизируют расчеты, но и являются эффективным средством просчитывания различных вариантов и моделирования ситуаций. Меняя значения исходных данных, можно следить за изменением получаемых результатов, в том числе представленных в виде диаграмм или графиков.

(*Во время выполнения задания один из членов группы вносит результаты в электронную таблицу. По мере работы на экране появляются таблицы с результатами исследования.*)

Таблица 1

Длина слова	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Количество слов	2	0	2	3	10	11	8	1	2	1	3

Таблица 2

Слоговая длина	1	2	3	4	5
Количество слов	4	24	11	3	1

Таблица 3

Категория букв	Гласные	Сонорные согласные	Остальные согласные	Мягкий знак	Всего
Количество слов	102	53	94	2	261

(*Ученики сверяют свои подсчеты с результатами на экране.*)

Учитель математики. На основе полученных данных вам нужно построить для этого стихотворения полигоны числового ряда по длине слова, по слоговой длине и по категории букв. Подсчитаем $\bar{X}$, Mo, Me. Каждая группа будет работать с полученными ей числовыми характеристиками.

Учитель информатики. Для этого необходимо вспомнить, как построить диаграмму или график по числовым данным, введенным в электронную таблицу.

Вопросы по информатике

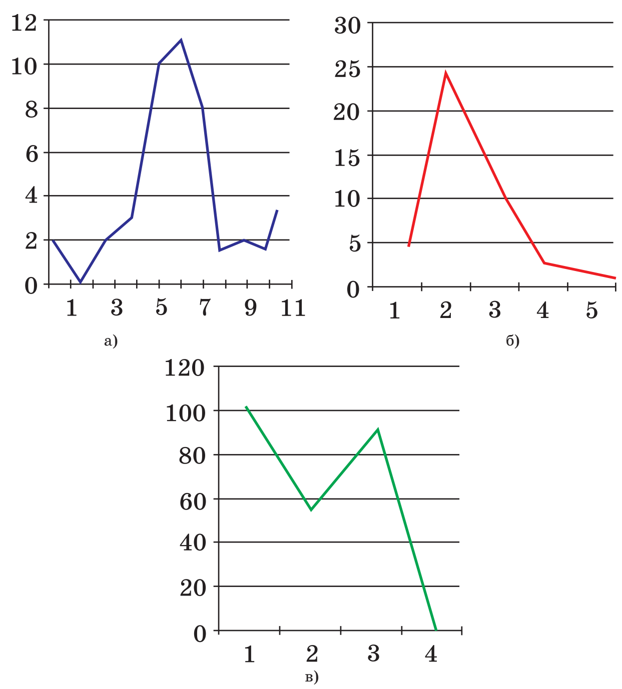
1. Для чего предназначены диаграммы и графики?

Диаграмма (график) — наглядное графическое представление числовых данных. Диаграммы предназначены для сравнения нескольких величин или нескольких значений одной величины и слежения за изменением их значений и т.п., график — для слежения за изменением при переходе от одной точки к другой.

2. Какая служебная команда позволяет вызвать *Мастер диаграмм*?

На панели инструментов *Стандартная* выбрать пиктограмму *Мастер диаграмм*. В строке *Меню* выбрать *Вставка*, в выпавшем меню выбрать *Диаграмма*.

В результате работы учащихся появляются полигоны частот:



а) по длине слова;
б) по слоговой длине;
в) по категории букв

Н. Заболоцкий

Возвращение с работы

Вокруг села бродили грозы,
И часто, полные тоски,
Удары молнии сквозь слезы
Ломали небо на куски.

Хлестало, словно из баклаги,
И над собранием берез,
Пир электричества и влаги
Сливался в радостный хаос.

А мы шагали по дороге
Среди кустарников и трав,
Как древнегреческие боги,
Трезубцы в облако подняв.

И. Бунин

Родине

Они глумятся над тобою,
Они, о родина, корят
Тебя твоею простотою,
Убогим видом черных хат...

Так сын, спокойный
и нахальный,
Стыдится матери своей —
Усталой, робкой и печальной
Средь городских его друзей.

Глядит с улыбкой состраданья
На ту, кто сотни верст брела
И для него, ко дню свиданья,
Последний грошик берегла.

Ф. Тютчев

Сияет солнце...

Сияет солнце, воды блещут,
На всем улыбка,
жизнь во всем,
Деревья радостно трепещут,
Купаясь в небе голубом.

Поют деревья, блещут воды,
Любовью воздух растворен,
И мир, цветущий
мир природы,
Избытком жизни упоен.

Но и в избытке упоенья
Нет упоения сильней
Одной улыбки умиленья
Измученной души твоей...

Таблица 4

Длина слова	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	5	4	3	5	9	8	3	3	2	0	1	0	1	1	1
2	4	3	10	2	9	8	2	4	6	0	1				
3	2	3	3	6	7	6	9	1	1						

Таблица 5

Характеристика	1	2	3
Среднее значение, $\bar{X}$	5,46	5,14	5,5
Мода, *Mo*	5	5	6
Медиана, *Me*	5	5	5

Диаграммы 1

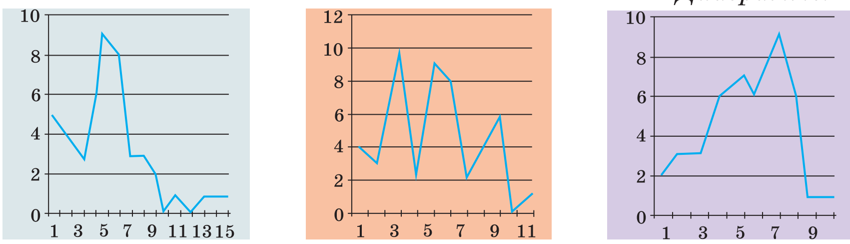


Таблица 7

Слоговая длина	1	2	3	4	5	6
1	14	15	13	2	1	1
2	16	15	16	2	0	0
3	11	13	16	3	1	0

Таблица 8

Характеристика	1	2	3
Среднее значение, $\bar{X}$	2,23	2,1	2,3
Мода, *Mo*	2	3	3
Медиана, *Me*	2	3	2

Диаграммы 2

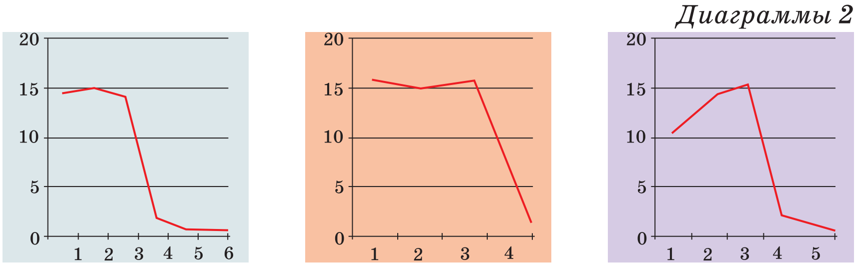
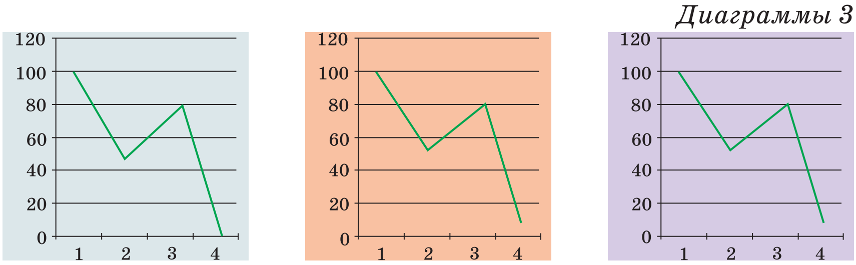


Таблица 9

Категория букв	1	2	3
Гласные	102	102	102
Сонорные согласные	47	53	48
Остальные согласные	83	94	84
Мягкий знак	1	5	8
Всего	242	252	242

Диаграммы 3



Учитель математики. Итак, вы получили числовые характеристики стихотворения:

- по длине слова: $\overline{X} = \frac{261}{43} = 6,06$, $Mo = 6$, $Me = 6$;
- по слоговой длине: $\overline{X} = \frac{102}{43} \approx 2,37$, $Mo = 2$, $Me = 2$.

Обратите внимание, что числовые характеристики стихотворения по длине слова одинаковы, одинаковы они и по слоговой длине; типичные по длине (*ближайшие к среднему значению величины*) — это шестибуквенные слова; типичные по слоговой длине — это двуслоговые слова.

Учитель литературы. Стихотворение А. Фета необыкновенно музыкально. А. Фет писал: «Поэзия и музыка не только родственны, но и нераздельны». Из исследования видно, что музыкальность стихотворения обусловлена:

1) подбором звуков (недаром во всем стихотворении 102 гласных и 53 сонорных согласных, то есть вместе их больше, чем шумных согласных, — 94);

2) равномерным распределением гласных и согласных звуков (преобладание двуслоговых слов и в то же время наличие слов, в которых более 5 букв, показывает, что нет ни большого скопления согласных, ни большого скопления гласных).

А теперь самостоятельно проведите исследование стихотворений Николая Заболоцкого «Возвращение с работы», Ивана Бунина «Родине» и Федора Тютчева «Сияет солнце...».

(*Учитель раздает листы со стихами.*)

Учитель математики. Как и в предыдущем задании, постройте полигоны частот и подсчитайте числовые характеристики для длины слова и для слоговой длины.

По окончании работы учитель информатики, проверив результаты, выводит на экран подсчитанные частоты длин слов (табл. 4) и вычисленные числовые характеристики (табл. 5).

Учащиеся под руководством учителя информатики строят на компьютере:

а) полигоны частот по длине слова (диагр. 1);

б) частоты слоговой длины (табл. 7);

в) числовые характеристики (табл. 8);

г) полигоны частот по слоговой длине (диагр. 2);

д) частоты по категориям букв (звукобукв) (табл. 9).

е) полигоны частот по категориям букв (диагр. 3).

Учитель математики. Обратите внимание, что в стихотворении И. Бунина числовой ряд по слоговой длине имеет две моды. Числовые характеристики стихотворений и у Н. Заболоцкого, и у И. Бунина по длине слов одинаковы. Но числовые характеристики по слоговой длине одинаковы только у Н. Заболоцкого.

Учитель литературы. Ученый-археолог, историк А.П. Журавлев писал: «Мы не осознаем отдельно звука или отдельно буквы, а воспринимаем единый звукобуквенный образ. Это очень хорошо чувствуют поэты... поэты в стихах, как правило, ориентируются именно на такие звукобуквы».

Во всех рассмотренных стихотворениях количество гласных одинаковое. Это обусловлено размером стихотворений.

Соотношение между гласными вместе с сонорными согласными и остальными согласными во всех стихотворениях одинаковое, но у Н. Заболоцкого больше более длинных слов, чем у двух других поэтов. За счет этого стихотворение менее музыкальное и требует вдумчивого чтения, размышления над смыслом. Возникают задержки в чтении (останавливается внимание на отдельных словах).

Стихотворение И. Бунина делится на две части. Первая строфа более напевная, а две следующие требуют размышления над смыслом (за счет большего количества длинных слов).

Стихотворение Ф. Тютчева, как и стихотворение А. Фета, музыкально, так как равномерно распределены гласные и согласные звуки. Преобладают трехслоговые слова, в то же время наличествуют слова, в которых 4–8 букв. В стихотворении нет большого скопления согласных и гласных.

Итак, математика помогает понять строение стихотворения. Поэты интуитивно подбирают подходящее слово, они не подсчитывают количество согласных и гласных. Математико-статистический метод отнюдь не универсален, но он дает богатейший материал для филологической интерпретации и объяснения. И задача филологов найти способы проанализировать, понять и объяснить то, что описано методами математики.

Литература

1. *Винокуров Е.* Лирика Афанасия Фета / А.А. Фет. Стихотворения. — М.: Художественная литература, 1979.

2. *Гаспаров М.Л.* Русский стих начала XX века в комментариях. — М.: Фортуна Лимитед, 2001.

3. *Журавлев А.П.* Звук и смысл. — М.: Просвещение, 1991.

4. *Колмогоров А.Н., Прохоров А.В.* О дольнике современной русской поэзии // Вопросы языкознания, 1963, № 6.

5. *Шенгели Г.А.* Техника стиха. — М.: Художественная литература, 1960.

Л. МИШИНА,
с. Истобное,
Белгородская обл.

ВОСПИТАНИЕ ЧУВСТВ

Работа над усвоением математической науки неизбежно воспитывает в молодом человеке целый ряд черт, имеющих яркую моральную окраску и способных в дальнейшем стать важнейшими в его нравственном облике. К таким чертам нельзя не отнести правдивость и честность, настойчивость и мужество, эстетическую сторону вопроса, наконец. Каждому школьнику хорошо известно, что никакое красноречие не поможет ему выдать незнание за знание. Как бы лжив он ни был в других отношениях, в математике он остережется отстаивать неверное утверждение или неправильное доказательство.

Равным образом и качество работы в математике может быть оценено совершенно однозначно: задача должна быть решена верно, теорема должна быть доказана. Легко понять, какое стимулирующее влияние на упорство, настойчивость может оказывать эта четкая определенность показателей результата, когда сам ученик может так же уверенно оценить свое достижение, как и его учитель.

Имея многолетний опыт преподавания, могу уверенно утверждать: каждый учитель должен следовать истине: «Обучать — это не значит набивать человека фактами. Важно передать учащемуся точку зрения, благодаря которой достигается понимание» (*Ф. Каррерас*). Кроме сообщения учащимся как можно большего количества конкретных знаний, новых понятий, не менее важно воспитать человека, сформировать его мировоззрение, привить ему черты высокой нравственности, милосердия, доброты — всего того, чего так не хватает нам в теперешней непростой жизни.

Приведу примеры того, как стараюсь обогатить свои уроки дополнительным содержанием, помочь детям взглянуть на отдельные математические понятия с другой, несколько неожиданной стороны, что, несомненно, сможет оставить в их душах и памяти добрый след и помочь им стать более грамотными, более эрудированными людьми.

Тема: «Отрезок. Длина отрезка»

Утверждение «Отрезок AB короче любой линии, соединяющей точки A и B» наполняется более глубоким эмоциональным содержанием после рассуждений: путь по прямой короче пути по кривой; путь по прямой — путь правды, путь по кривой и любой извилистой линии — это путь хитрости, непорядочности, обмана.

Привожу отрывок из книги А. Сент-Экзюпери «Планета людей».

«Самолет — машина, но притом какое орудие знания! Это он открыл нам истинное лицо земли. В самом деле, дороги веками нас обманывали. Мы были точно императрица, пожелавшая посетить своих подданных и посмотреть, довольны ли они ее правлением. Чтобы провести ее, лукавые царедворцы расставили вдоль дороги веселенькие декорации. Кроме этой тоненькой ниточки, государыня ничего не увидела в своих владениях и не узнала, что на бескрайних равнинах люди умирают с голоду и проклинают ее.

Так и мы брели по извилистым дорогам. Они обходят стороной бесполезные земли, скалы и пески.

И мы обманывались их бесчисленными изгибами, словно утешительной ложью, на пути нам то и дело попадались орошенные земли, плодовые сады, сочные луга. Мы верили, что планета наша — влажная и мягкая.

А потом зрение наше обострилось, и мы сделали жестокое открытие. Самолет научил нас ***двигаться по прямой****. Едва оторвавшись от земли, мы покидаем дороги, что сворачивают к водоемам или ***вьются*** от города к городу. Отныне мы свободны от милого нам рабства, не зависим больше от родников и берем курс на дальние цели.

Только теперь, с высоты прямолинейного полета, мы открываем истинную основу нашей земли, фундамент из скал, песка и соли, на котором, пробиваясь там и сям, словно мох среди развалин, зацветает жизнь.

Мы смотрим в иллюминатор, как ученый в микроскоп, и судим человека по его месту во вселенной. Мы заново перечитываем свою историю...»

Еще одна интересная цитата, на этот раз из поэмы Марка Аврелия «К самому себе» (II в. н.э.). Марк Аврелий был удивительной аномалией среди массы жестоких, глупых, алчных императоров Древнего Рима. Он был честным — без непреклонности, скромным — без слабости, серьезным — без угрюмости. Он презирал доносчиков. Он делал плохих людей хорошими, хороших — превосходными, а благоденствие страны и народа называл главной целью своей жизни.

В своей поэме Аврелий писал: «Не поступай ни против своей воли, ни против общего блага... Иди кратчайшим путем. Кратчайший путь, согласный с природой, он в том, чтобы блюсти правду во всех делах и поступках».

Этот же материал может служить иллюстрацией при обсуждении темы: «Существование и единственность перпендикуляра к прямой».

Тема: «Основное свойство дроби»

Вывод: две равные дроби являются различными записями одного и того же числа. Здесь мы с ребятами развиваем идею, что любое число — будь оно целое или дробное – имеет много себе равных. В самом деле, $2=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=\frac{2}{1}=$ и т.д.; $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{9}{27}$ и т.д. То есть у каждого числа много друзей, которые смогут друг друга выручить, заменить. Это же здорово!

> Плохо человеку, когда он один.
> Плохо одному — один не воин.
> Каждый дюжий ему — господин,
> И даже слабые, если их двое!
>
> *В. Маяковский*

Нужно только беречь друзей, всегда бояться обидеть человека ненароком оброненным грубым словом, тем более предать его.

Темы: «Аксиомы планиметрии», «Аксиомы стереометрии»

В контексте этих тем предлагаю ребятам подумать, а только ли в математике существуют подобные утверждения. И они называют подобные аксиомы из жизни: «Без труда не вынешь и рыбку из пруда», «Любишь кататься — люби и саночки возить», «Кончил дело — гуляй смело», «Делу — время, а потехе час» и т.д. Вспомнили и заповеди Божии: «Не убий», «Не укради». И суть этих заповедей: «Возлюби ближнего твоего, как самого себя».

Тема: «Функция»

Примеров функциональных зависимостей очень много в жизни, природе, технике. Привожу такие:

- аргумент — состояние и количество зеленых насаждений; функция — чистота воздуха;
- аргумент — хозяйственная деятельность человека; функция — состояние природы.

Угрожающи прогнозы ученых: если рост численности населения не прекратится, потребление ресурсов не замедлится, а загрязнение окружающей среды продолжится теми же темпами, то катастрофа неизбежна. Возможны голод, эпидемии, невиданный упадок промышленности.

Но такой путь не неизбежен. Человечество может попробовать изменить ход событий с помощью различных ограничений, экономии сырьевых ресурсов, строительства очистных сооружений и других мер. Тогда положение начнет выправляться. Но делать это нужно уже сейчас.

Настоящее понимание будет только на тех уроках, где будут задействованы не только мысли, но и чувства, где учитель смог заставить учеников удивляться и восхищаться. Такие уроки надолго остаются в памяти ученика, как и образ учителя, любящего свой труд, свой предмет, свою профессию...

---

* Выделено автором.

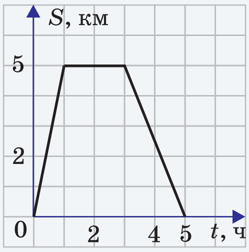
ЛЕТНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ, ОКОНЧИВШИХ 7 КЛАСС

АВГУСТ

1 | Понедельник

Тема: «График движения»



На графике показано движение рабочего от дома до работы и обратно. Определи:

а) с какой скоростью шел рабочий до работы и обратно;

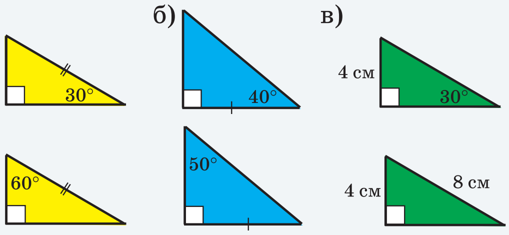
б) сколько времени находился на работе;

в) сколько времени был в пути.

2 | Вторник

Тема: «Признаки равенства треугольников»

а) б) в)



Докажи равенство треугольников.

3 | Среда

Проверь себя

Тема: «Формулы сокращенного умножения»

Разложи на множители:

1. $400 - m^2$.

2. $4x^2 - 25$.

3. $16a^4 - 81$.

4. $(x + 1)^2 - 16$.

5. $a^2 - 12a + 36$.

6. $16m^2 + 24mn + 9m^2$.

4 | Четверг

Тема: «Задачи на работу»

Для распечатки 340 страниц использованы две копировальные машины. Первая работает 10 мин., вторая — 15 мин. Сколько страниц в минуту печатает каждая машина, если первая печатает на 4 страницы больше?

5 | Пятница

Развивай мышление

Рита, Олеся и Марина выступали на соревнованиях по легкой атлетике. Рита занималась не бегом и не метанием диска. Олеся — не бегом. А Марина — не прыжками в длину и не метанием диска. Кто каким видом спорта занимался?

6 | Суббота

Готовься к экзамену

1. Найди разность значений выражений

$$\frac{0,6}{0,14} \text{ и } \frac{1\frac{4}{5}}{0,3}.$$

1) $-1\frac{5}{7}$ 2) $-3\frac{12}{17}$

3) $-2\frac{2}{7}$ 4) $3\frac{12}{17}$

Ответы к заданиям

1.

1	2	3	4

2. ____________

3.

А	Б	В

4.

5. Запиши решение.

2. Упрости выражение

$$4x(2 - x) - (x - 4)^2.$$

3. Соотнеси процент от числа с его результатом.

А) 20% от 60 Б) 35% от 90 В) 82% от 200

1) 164 2) 12 3) 315 4) 31,5

4. Найди сумму НОД (84; 35) и НОК(84; 35).

5. Реши графически систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2 - 2x, \\ x - y = -5. \end{cases}$$

7 | Воскресенье

Совет 8. Действуй методически! Прежде всего, исходи из данных, имеющихся в твоем распоряжении, изобрази их все при помощи таблицы или рисунка на листе бумаги — для наглядности. Вспомни и напиши все теоремы или правила, имеющие отношение к данному вопросу.

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 12.

КАЛЕНДАРЬ

Л.ГОРИНА

8 | Понедельник

Тема: «Действия с дробями»

1. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{2ab}{a^2-b^2}$. **2.** $\left(\frac{1}{m-n}-\frac{1}{m+n}\right):\frac{2}{3m-3n}$.

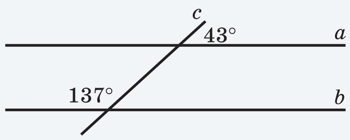
3. $a-\frac{a^2-5a}{a+1}\cdot\frac{1}{a-5}$. **4.** $\frac{x^2-y^2}{xy}:\frac{x-y}{3y}\cdot\frac{1}{x+y}$.

9 | Вторник

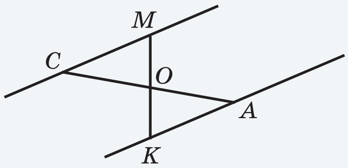
Тема: «Признаки параллельности двух прямых»

Реши задачи по готовым чертежам.

1. Докажи, что $a \parallel b$.



2. Докажи, что $CM \parallel AK$, если точка O — середина отрезков MK и AC.



10 | Среда

Проверь себя

Тема: «Многочлены»

Упрости выражение.

1. $2x^2 + 7xy - 5x^2 - 11xy + 3y^2$.

2. $-(8c^2 + 3c) + (-7c^2 - 11c + 3) - (3c^2 - 4)$.

3. $x(x^3 + x^2 + x) - x^2(x^3 + x^2 + x)$.

4. $-5x^4(2x - x^3) + 10x^5$.

5. $(x^3 + 2y)(x^2 - 2y) - (x^2 + 2y)(x^3 - 2y)$.

11 | Четверг

Тема: «Задачи на движение»

Катер проходит путь от одной пристани до другой за 4 ч, а обратно за 5 ч. Какова скорость катера в стоячей воде, если 70 км по течению он проходит за 3,5 ч?

12 | Пятница

Развивай мышление

Полный бидон с молоком весит 7 кг, а наполненный наполовину — 4 кг. Сколько весит бидон?

13 | Суббота

Готовься к экзамену

1. Установи соответствие между дробью и ее десятичной записью.

А) $\frac{3}{4}$ Б) $\frac{7}{16}$ В) $\frac{1}{2}$ Г) $\frac{17}{50}$

1) 0,5 2) 0,4375 3) 0,75 4) 0,34

2. Представь выражение $\frac{2^{12}\cdot 7^8}{14^8}$ в виде степени с основанием 4.

1) 4 2) 4^2 3) 4^3 4) 4^4

3. Реши систему уравнений

$$\begin{cases} 2x-3y=5, \\ 3x+2y=14. \end{cases}$$

4. Для засолки 14 кг грибов берут 700 г соли. Сколько соли понадобится для засолки 18 кг грибов?

5. Разложи на множители:

$$12x^4y^4 - 75x^2y^2 + 4x^3y^5 - 25xy^3.$$

Ответы к заданиям

1.

А	Б	В	Г

2.

1	2	3	4

3. ____________________

4.

5. Запиши решение.

14 | Воскресенье

Совет 9. Контролируй свои действия! Каждый раз проверяй произведенные математические операции, чтобы в них не закралась какая-нибудь неточность, которая потом повлияет на правильность окончательного решения. Также не забывай проверять, все ли исходные данные были задействованы — они очень редко могут остаться не востребованными в решении задания.

Фото Е. Чудаевой

15 | Понедельник

Тема: «Линейная функция: основные типы заданий»

Дана функция $y = 3 - 4x$.

1. Найди значение функции, если
$$x = 8;\ x = -5;\ x = 1.$$

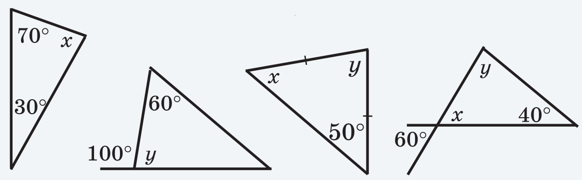
2. Найди значение x, при котором
$$y = 15;\ y = -7;\ y = 3{,}5.$$

3. Выясни, принадлежат ли точки A, B и C графику функции, если
$$A(0; -1),\ B(-2; -5),\ C(5; -17).$$

16 | Вторник

Тема: «Сумма углов треугольника»

Найди неизвестные углы, обозначенные буквами x и y.



17 | Среда

Тема: «Системы линейных уравнений»

Реши систему способом сложения.

1. $\begin{cases} x - 2y = 7, \\ x + 2y = -1. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x + 3y = 7, \\ x + 2y = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x - 6y = 26, \\ 5x + 3y = 1. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ 2x + 5y = 16. \end{cases}$

Проверь себя:

1. (3; –2). **2.** (1; 2). **3.** (2; –3). **4.** (3; 2).

18 | Четверг

Тема: «Текстовые задачи»

1. В книжном шкафу две полки. На одной полке m книг, а на другой — на 10 книг больше. Сколько книг в шкафу?

2. На вечерний сеанс было продано m билетов по 70 р. и n билетов по 90 р. Сколько денег выручено от продажи всех билетов?

3. У Толи на 17 марок больше, чем у Кати. А у Пети в 2 раза больше марок, чем у Толи и Кати вместе. Сколько марок у Пети, если у Толи a марок?

19 | Пятница

Развивай мышление

Кузнечик прыгает вперед и назад большими и маленькими прыжками. Большой прыжок составляет 12 см, а малый 7 см. Нарисуй, как ему попасть из точки A в точку B, если расстояние между этими точками равно 3 см.

20 | Суббота

Готовься к экзамену

1. Найди значение выражения $-3\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{x}$, если $x = 0{,}6$.

1) –0,6 2) 6 3) –6 4) –0,8

2. Масса сушеных слив составляет 35% от массы свежих. Сколько сушеных слив получится из 800 кг свежих?

3. Разложи на множители:
$$2x^3 - 3x^2 - 8x + 12.$$

4. Установи соответствие между степенью числа и ее значением.

А) 2^3 1) 6
Б) 3^2 2) 9
В) 4^2 3) 8
Г) 2^4 4) 16

5. Найди значение выражения
$$4(4x - y - 5) - 3(5x - y - 8),$$
если
$$\frac{y-x}{3} = \frac{x-y}{2}.$$

Ответы к заданиям

1.

1	2	3	4

2.

3. ____________________

4.

А	Б	В	Г

5. Запиши решение.

21 | Воскресенье

Совет 10. Наведи порядок в цифрах! Математика — наука точная и не терпит даже малейших неточностей. Сколько ошибок наделали из-за неправильно прочитанного числа, лишнего нуля или из-за того, что пишешь как курица лапой. Итак, если хочешь подружиться с математикой, придется стать точным и последовательным, не оставляя без внимания даже такие мелочи, как промежутки между цифрами, ровные и аккуратные столбики выполнения действий, а также знаки действий, запятые и т.д.

22 | Понедельник

Тема: «Системы линейных уравнений»

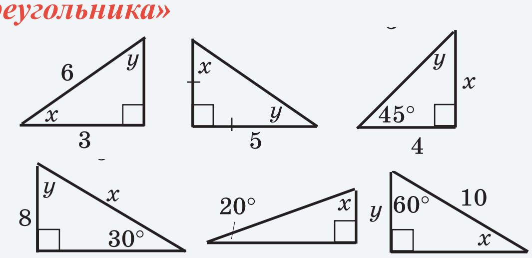
Реши систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x+y=8, \\ x-y=1 \end{cases}$ **тремя** способами.

Для повторения

Способы решения систем линейных уравнений: а) подстановки; б) сложения; в) графический.

23 | Вторник

Тема: «Свойства прямоугольного треугольника»



Найди неизвестные элементы треугольника, обозначенные буквами x и y.

24 | Среда

Проверь себя

Тема: «Умножение и деление дробей»

Пройди по цепочке вычислений:

1) $\frac{4m^4a}{6x^2}\cdot\frac{2x^2}{4m^3a^2}=\bigcirc$ 2) $\bigcirc:\frac{10+2a}{6a^2}=\triangle$

3) $\triangle\cdot\frac{a^2-25}{2m^2}=\nabla$ 4) $\nabla:\frac{a^2-10a+25}{6m}=$ …

Проверь себя: $\frac{3a}{a-5}$.

25 | Четверг

Тема: «Текстовые задачи»

1. Сумма двух чисел равна 137, а их разность равна 19. Найди эти числа.

2. Одно из двух положительных чисел в 2,5 раза больше другого, а их разность равна 9. Найди эти числа.

3. Сумма цифр двузначного числа равна 7, а разность цифр десятков и единиц равна 3. Найди данное двузначное число.

26 | Пятница

Развивай мышление

Сумма скоростей теплохода по течению реки и против течения составляет 92 км/ч. Чему равна скорость теплохода в стоячей воде?

27 | Суббота

Готовимся к экзамену

1. Если к задуманному числу прибавить 9, полученную сумму умножить на 4 и из произведения вычесть 72, то получится задуманное число. Найди это число.

Ответы к заданиям

1.

2.

1	2	3	4

3. ____________

4.

А	Б	В

5. Запиши решение.

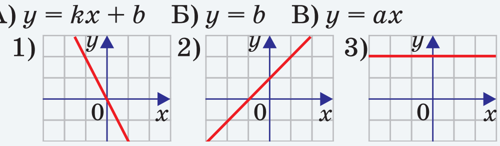
2. Упрости выражение: $\frac{a}{2a-b}+\frac{3a-b}{b-2a}$.

1) 1 2) 0 3) –1 4) –3

3. В коробке лежали кубики. Шесть из них были зелеными, и это составляло 15%. Сколько кубиков в коробке?

4. Соотнеси функцию и ее графики.

А) $y = kx + b$ Б) $y = b$ В) $y = ax$



5. Найди значение выражения

$$\frac{14,4\cdot 3,75+13\frac{1}{11}\cdot 4,125}{11\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{2}{7}\right)}.$$

28 | Воскресенье

Отдыхай и не скучай!

Это стихотворение поможет тебе запомнить степени числа 2: от 2^1 до 2^{10}.

Слон живет у нас в квартире,
*В доме **2**, подъезд **4**.*
По часам привык питаться:
*Утром — в **8**, днем — в **16**.*
*Ест на завтрак непременно **32** охапки сена.*
*После утренней прогулки — **64** булки.*
*На обед ему приносим огурцов **128**.*
*Помидоров может съесть **256**.*
*Съест блинов **512**, — это если не стараться.*
*А замесишь на кефире — **1024**.*

До встречи 1 сентября!

В. ДУБРОВСКИЙ,
Москва

Фото С. Воробьева

ДИНАМИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ С «МАТЕМАТИЧЕСКИМ КОНСТРУКТОРОМ»

Мы открываем серию заметок, посвященных использованию программ динамической геометрии. В каждой из них мы рассмотрим 1–2 примера, в основном из школьных учебников и задачников, иллюстрирующих различные ситуации, в которых эти программы оказываются наиболее полезными. Наши заметки предназначены в первую очередь читателям, или, правильнее сказать, «пользователям», уже знакомым хотя бы в общих чертах с какой-нибудь из таких программ. Но некоторые технические детали построения моделей мы будем пояснять дополнительно, ориентируясь конкретно на среду «1С: Математический конструктор 4.5» (МК), подробно представленную в газете «Математика» (2009 г., № 13). Впрочем, вместо МК можно использовать, с соответствующими поправками, и «Живую геометрию» («The Geometer's Sketchpad»), и программу GeoGebra, и другие подобные программы: набор основных функций у них примерно одинаковый.

Эпизод 1. Свойство и признак вписанного четырехугольника

Если у вас в классе установлены компьютер, проектор и экран, то на уроке геометрии они вполне могут заменить доску. При минимальном навыке работы с этим оборудованием вам даже не придется специально готовиться к уроку: с помощью программы вы легко построите все необходимые чертежи, причем они будут более аккуратными и выразительными, сможете написать нужные формулировки. А главное – ваши чертежи будут «динамическими», то есть их можно будет изменять «в режиме реального времени», говоря компьютерным языком.

Что это дает по сравнению с обычными, «статическими» чертежами?

Мы покажем на примерах два способа использования этого замечательного свойства. Во-первых, наблюдая за тем, что и как меняется или сохраняется в фигуре, можно открыть (или переоткрыть) какие-то связанные с ней факты и проверить их экспериментально. Во-вторых, благодаря легкости, с которой получаются любые допустимые расположения, можно обнаружить случаи, подчас неожиданные, которые нужно учесть при доказательстве некоторых теорем. Кстати, привычка и умение учитывать разные случаи стали в последнее время особенно актуальными в связи с включением «многовариантной» планиметрической задачи в задания ЕГЭ.

В качестве материала для наших примеров возьмем хорошо известные свойства углов вписанного четырехугольника.

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 12.

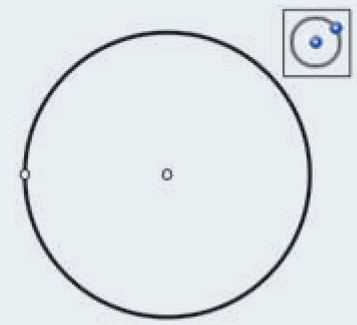


Рис. 1

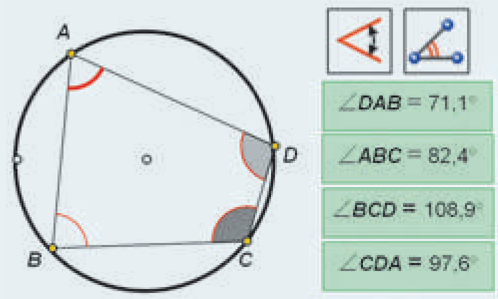


Рис. 3

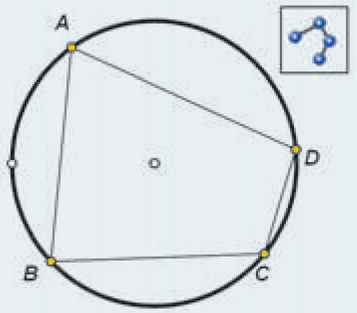


Рис. 2

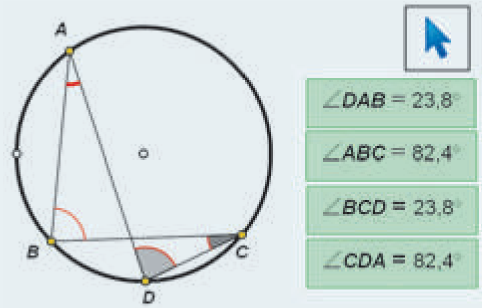


Рис. 4

Начнем с построения модели.

1. Построим окружность (рис. 1). Задающие ее точки в дальнейшем не нужны – их можно спрятать.

2. С помощью инструмента *Ломаная* вписываем в окружность четырехугольник (рис. 2).

3. Измеряем его углы (рис. 3); можно также отметить их дужками.

Теперь можно подвигать вершину D и посмотреть, что при этом произойдет с углами (см. рис. 3, 4). Это наблюдение позволит высказать гипотезы как о равенстве вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу, так и о том, что сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°, и проверить их экспериментально. Сумму углов удобно вычислить с помощью специального инструмента $\boxed{A + B}$ – в результате на экране появится равенство $\angle ABC + \angle CDA = 180°$, которое остается неизменным, пока точка D находится по разные стороны с B относительно AC, и начинает изменяться, как только точка D переходит на сторону B. После того, как гипотезы будут высказаны, можно показать словесную формулировку соответствующих теорем. Для экономии времени лучше заготовить их заранее и сделать кнопку, которая будет их прятать или показывать. Можно аналогично заготовить и всю картинку, но более поучительно построить ее на глазах учеников – на это уйдет буквально минута. Будет еще полезнее, если ученики вслед за вами построят эту простую модель на своих компьютерах и самостоятельно исследуют, что происходит с величинами углов при перемещении вершин четырехугольника. Эксперимент можно провести перед изучением теоремы о вписанном угле.

Итак, динамический чертеж служит не просто картинкой, поясняющей смысл теоремы, но и инструментом, позволяющим ее «открыть». А самостоятельно сделанное открытие вызывает большее желание найти ему объяснение, то есть доказать теорему.

В доказательствах как таковых нас интересуют те моменты, в которых можно существенным образом использовать «динамичность» нашей модели. Например, в стандартном доказательстве теоремы о вписанном угле обычно рассматриваются три случая расположения центра окружности относительно угла, и все эти случаи будут видны на одной модели. Но более интересно в этом смысле рассмотреть доказательство обратной теоремы о вписанном четырехугольнике: «Если $\angle ABC + \angle CDA = 180°$, то четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность». Поскольку через вершины A, B, C можно всегда провести единственную окружность, достаточно доказать, что если точка D не лежит на этой окружности, то суммы противоположных углов четырехугольника не равны 180°.

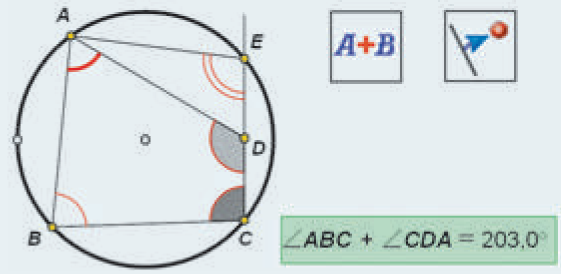


Рис. 5

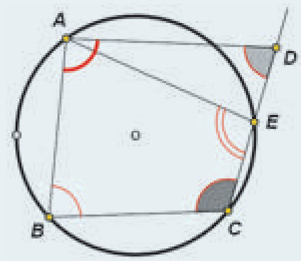


Рис. 6

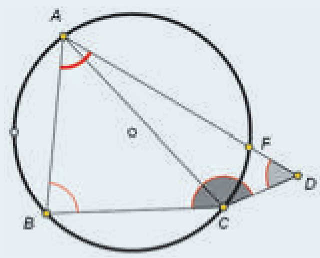


Рис. 7

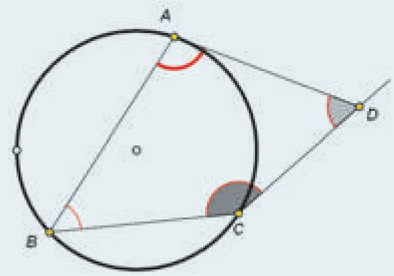


Рис. 8

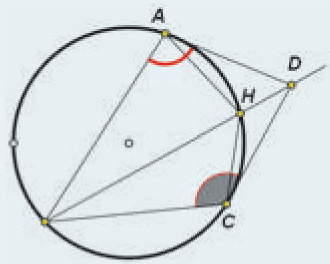


Рис. 9

Экспериментально убедиться в справедливости этого можно с помощью той же модели, «отклеив» точку D от окружности с помощью команды *Привязать/отвязать точку*.

Пусть точка D находится внутри окружности (рис. 5). Продолжим сторону CD до пересечения с окружностью в точке E (построив луч CD), тогда $\angle CDA$ – внешний для треугольника ADE, и потому $\angle ABC + \angle CDA > \angle ABC + \angle CEA = 180°$. Аналогично рассматривается и случай точки вне окружности (рис. 6): та же сумма оказывается меньше 180°. На первый взгляд, все в порядке. Но если подвигать точку D, а проще всего это сделать на динамической модели, то мы увидим, что не все так просто.

На рисунке 7 точка E отсутствует — сторона (и луч) CD имеют только одну общую точку с окружностью, и приведенное рассуждение не проходит. В этом случае точку E можно заменить точкой F пересечения окружности со стороной AD. Но может оказаться, что и этого пересечения не будет (рис. 8)! Этого случая можно избежать с помощью специального — не произвольного — выбора трех вершин, через которые проводится окружность. Но можно поступить иначе: рассмотрим сумму углов нашего четырехугольника при вершинах A и C и сравним ее с аналогичной суммой, равной 180°, для вписанного четырехугольника $ABCH$, где H — точка пересечения луча BD с окружностью (рис. 9). Очевидно, эти две суммы равны только в том случае, когда D совпадает с H, то есть когда D лежит на окружности. (Если уж быть до конца педантичным, то нужно сказать, что точку D можно передвинуть так, что луч BD выйдет из угла ABC. Тогда четырехугольник станет невыпуклым и один из его углов, а тем более сумма этого угла с противоположным, станет больше 180°. Аналогичную оговорку нужно сделать и при первом подходе к доказательству.)

В заключение перечислим еще несколько теорем, доказательства которых требуют рассмотрения разных случаев, не всегда очевидных. Это теорема о биссектрисе угла как геометрическом месте точек внутри угла, равноудаленных от его сторон; теорема косинусов; признак описанного четырехугольника и др. Попробуйте построить соответствующие модели и при необходимости проверять с их помощью полноту доказательств этих теорем.

Л. НУРЕЕВА,
г. Нефтеюганск,
Тюменская обл.

КАРТОЧКИ С ПРОПУСКАМИ ПО ТЕМЕ «ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ»

Всем, наверное, приходилось видеть такую картину: учитель подвел к открытию новых знаний, все теоремы доказаны, алгоритмы расписаны — начинается первичное закрепление. А в классе чуть ли не половина учеников не справляется с простейшими заданиями. Поэтому, прежде чем переходить к упражнениям из учебника, нужно организовать работу по карточкам с пропусками. Такие карточки позволяют избежать ситуации, описанной выше. Предлагаю один из таких наборов карточек по теме «Производная степенной функции. Правила дифференцирования». Карточки составлены к учебнику «Алгебра и начала анализа» авторов С.М. Никольского и др., но могут быть использованы и при работе по другим учебно-методическим комплектам.

Алгебра и начала анализа, 10–11

Производная степенной функции

$(x^n)' = nx^{n-1}$.

а) $\left(x^{-5}\right)' = -5x^{-\ldots-1} = \ldots x^{\ldots} = -\dfrac{5}{\ldots}$;

б) $\left(x^{-8}\right)' = \ldots x^{-8-\ldots} = \ldots \cdot x^{-\ldots} = -\dfrac{\ldots}{x^{\ldots}}$;

в) $x' = 1 \cdot x^{1-1} = x^{\ldots} = \ldots$;

г) $\left(x^{\frac{2}{5}}\right)' = \dfrac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-\frac{\ldots}{\ldots}=\frac{2}{5}x^{-\frac{\ldots}{\ldots}}} = \dfrac{2}{5x^{\ldots}} = \dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$;

д) $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{\ldots}{\ldots}x^{\frac{1}{3}-\ldots} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{\ldots}{3\sqrt[\ldots]{x^{\ldots}}}$;

е) $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}x^{\ldots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;

ж) $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{\ldots}{\ldots}}\right)' = \dfrac{\ldots}{\ldots}x^{\ldots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Алгебра и начала анализа, 10–11

Производная степенной функции

Функции вида $\dfrac{a}{x^n}$, $\dfrac{1}{bx^n}$, $\dfrac{x^n}{c}$ нужно записать в виде kx^n и вычислить производную.

а) $\left(\dfrac{144}{x^5}\right)' = 144 \cdot \left(x^{-5}\right)' = 144 \cdot (\ldots)x^{-5-\ldots} = -\ldots\ldots\ldots\, x^{-\ldots} = -\dfrac{720}{x^6}$;

б) $\left(\dfrac{1}{6x^5}\right)' = \dfrac{1}{6}\left(x^{-5}\right)' = \ldots \cdot (-5)x^{-5\ldots\ldots} = \ldots\ldots x^{\ldots} = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$;

в) $\left(\dfrac{x^4}{30}\right)' = \dfrac{1}{30}\left(x^4\right)' = \dfrac{1 \cdot 4}{30}x^{\ldots} = \dfrac{2}{15}x^{\ldots}$;

г) $(4x^3 \cdot 4x^4)' = \ldots(x^{\ldots})' = \ldots\ldots\, x^{\ldots} = \ldots\ldots\ldots$;

д) $\left(\dfrac{3}{x^3}\right)' = 3 \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots)' = \ldots\ldots\ldots\, x^{\ldots} = \ldots\ldots\ldots$;

е) $\left(\dfrac{7}{x}\right)' = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;

ж) $\left(\dfrac{x^5}{125}\right)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 12.

Алгебра и начала анализа, 10–11

Производная суммы функций

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

а) $(6 + x^3)' = 0 + 3x^{\cdots}$;

б) $\left(6x^4+\frac{x}{2}\right)'=\left(6x^4\right)'+\left(\frac{1}{2}x\right)'=6\cdot 4x^{\cdots}+\frac{\cdots}{\cdots}=\ldots\ldots\ldots\ldots;$

в) $\left(\frac{x^2}{5}+\frac{1}{5}\right)'=\left(\frac{\cdots}{\cdots}x^2\right)'+\left(\frac{1}{5}\right)'=\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots;$

г) $(0,5x^6 - 3x^4 + 5x^2 + 7x + 13)' = \ldots;$

д) $\left(x^5+\frac{1}{x}\right)'=\left(x^5\right)'+\left(x^{-1}\right)'=5x^{\cdots}-x^{\cdots};$

е) $\left(5+\frac{1}{x^3}\right)'=5'+\left(x^{\cdots}\right)'=\ldots+\left(-3x^{-\cdots}\right)=-\frac{3}{x^{\cdots}};$

ж) $\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)'=\left(x^{\frac{\cdots}{\cdots}}\right)'+\left(x^{\frac{\cdots}{\cdots}}\right)'=\ldots$

Алгебра и начала анализа, 10–11

Производная произведения функций

$(uv)' = u'\cdot v + v'\cdot u$

$(kx^n)' = k\cdot(x^n)' = knx^{n-1}$

а) $((2x-3)(3x^2+1))' = (2x-3)'(3x^2+1) + (2x-1)(3x^2+1)' = 2(3x^2+1) + 6x(2x-3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$

б) $((x-5)(2x-5))' = (\ldots\ldots\ldots)'(2x-5) + (x-5)(\ldots\ldots\ldots\ldots)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$

в) $((x^2+1)\sin x)' = (x^2+1)'\ldots\ldots + (x^2+1)(\ldots\ldots\ldots)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$

г) $(x^2\cdot\cos x)' = (\ldots\ldots)'\cos x + \ldots\ldots(\ldots\ldots)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$

д) $(5x^4)' = 5\cdot(x^4)' = \ldots\cdot\ldots x^{4-\cdots} = 20x^3;$

е) $\left(\frac{1}{3}x^6\right)'=\frac{\cdots}{\cdots}(\ldots)'=\frac{1\cdot 6}{3}x^{\cdots}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Алгебра и начала анализа, 10–11

Производная частного двух функций

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

а) $\left(\frac{x-4}{3x-7}\right)'=\frac{(x-4)'(3x-7)-(\ldots)'(\ldots)}{(3x-7)^2}=\frac{\cdots\cdot(3x-7)-3(\ldots\ldots\ldots)}{(3x-7)^2}=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{(\ldots\ldots\ldots)^2}=\frac{\ldots\ldots}{(\ldots\ldots\ldots\ldots)^{\cdots}};$

б) $\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'(\ldots\ldots\ldots)-(\ldots\ldots\ldots)'\sin x}{(\ldots\ldots\ldots)^2}=\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}=\frac{1}{\cos^2 x};$

в) $\left(\frac{3x^3}{\cos x}\right)'=\frac{(\ldots\ldots\ldots)'\cos x-(\ldots\ldots\ldots)'\cdot\ldots\ldots\ldots}{\cos^2 x}=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

А. ШЕВКИН,
Москва

ВОКРУГ ТЕОРЕМ ЧЕВЫ И МЕНЕЛАЯ

О теореме Чевы
читайте в № 9/2011

Теорема Менелая

Пусть дан треугольник ABC и на его сторонах AC и CB отмечены точки B_1 и A_1 соответственно, а на продолжении стороны AB отмечена точка C_1 (рис. 17).

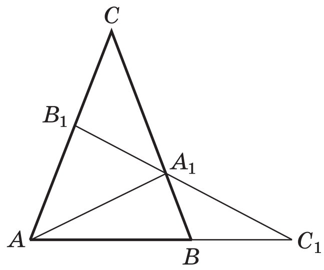


Рис. 17

а) Если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, то

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1. \qquad (7)$$

б) Если верно равенство (7), то точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

Как запомнить равенство Менелая?

Прием запоминания равенства (7) тот же, что и для равенства (1)*. Вершины треугольника в каждом отношении и сами отношения записываются в направлении обхода вершин треугольника ABC — от вершины к вершине, проходя через точки деления (внутренние или внешние).

Задание 22. Докажите, что при записи равенства (7) от любой вершины треугольника в любом направлении получается один и тот же результат.

Чтобы доказать теорему Менелая, надо доказать утверждение «а» любым из предложенных ниже способов, а также доказать утверждение «б». Доказательство утверждения «б» приведено после первого способа доказательства утверждения «а».

Доказательство с помощью теоремы о пропорциональных отрезках

Способ I. а) Идея доказательства заключается в замене отношений длин отрезков в равенстве (7) отношениями длин отрезков, лежащих на одной прямой.

Пусть точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Через точку C проведем прямую l, параллельную прямой A_1B_1, она пересекает прямую AB в точке M (рис. 18).

* Нумерация отражает единство изложения с материалом из № 9; то же с рисунками.

По теореме о пропорциональных отрезках имеем:

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{C_1A}{C_1M} \text{ и } \frac{CA_1}{A_1B}=\frac{C_1M}{BC_1}.$$

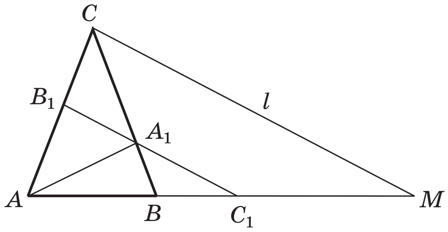


Рис. 18

Тогда верно равенство

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{C_1A\cdot C_1M\cdot BC_1}{C_1M\cdot BC_1\cdot C_1A}=1.$$

Утверждение «а» теоремы Менелая доказано.

Доказательство утверждения «б» теоремы Менелая

Пусть теперь верно равенство (7), докажем, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Пусть прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке C_2 (рис. 19).

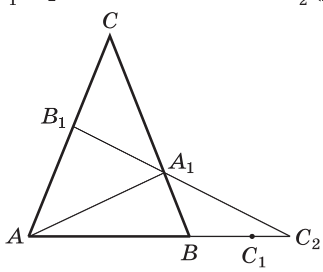


Рис. 19

Так как точки A_1 B_1 и C_2 лежат на одной прямой, то по утверждению «а» теоремы Менелая

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_2}{C_2A}=1. \qquad (8)$$

Из сравнения равенств (7) и (8) имеем: $\frac{BC_2}{C_2A}=\frac{BC_1}{C_1A}$, откуда следует, что верны равенства

$$\frac{AC_2}{C_2B}=\frac{AC_1}{C_1B},\ \frac{AB+BC_2}{C_2B}=\frac{AB+BC_1}{C_1B},\ \frac{AB}{C_2B}=\frac{AB}{C_1B}.$$

Последнее равенство верно лишь при условии $C_2B=C_1B$, то есть если точки C_1 и C_2 совпадают.

Утверждение «б» теоремы Менелая доказано.

Доказательства с помощью подобия треугольников

Способ II. а) Идея доказательства заключается в том, чтобы заменить отношения длин отрезков из равенства (7) отношениями длин отрезков, лежащих на параллельных прямых.

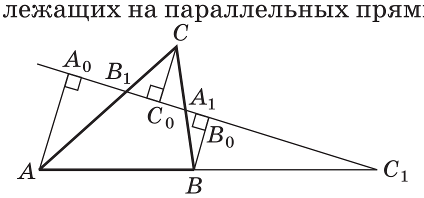


Рис. 20

Пусть точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Из точек A, B и C проведем перпендикуляры AA_0, BB_0 и CC_0 к этой прямой (рис. 20).

Из подобия трех пар треугольников: AA_0B_1 и CC_0B_1, CC_0A_1 и BB_0A_1, C_1B_0B и C_1A_0A (по двум углам), имеем верные равенства:

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{AA_0}{CC_0},\ \frac{CA_1}{A_1B}=\frac{CC_0}{BB_0},\ \frac{BC_1}{C_1A}=\frac{BB_0}{AA_0},$$

перемножив их, получим:

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{AA_0\cdot CC_0\cdot BB_0}{CC_0\cdot BB_0\cdot AA_0}=1.$$

Утверждение «а» теоремы Менелая доказано.

Способ III. а) Уменьшим число используемых пар подобных треугольников. Пусть точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Через точку B проведем прямую l, параллельную прямой AC, она пересекает прямую A_1B_1 в точке M (рис. 21).

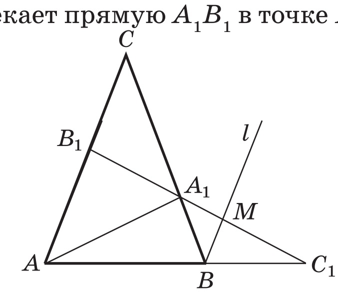


Рис. 21

Из подобия двух пар треугольников, AB_1C_1 и BMC_1, B_1CA_1 и MBA_1, имеем:

$$\frac{AB_1}{BM}=\frac{C_1A}{BC_1} \text{ и } \frac{BM}{B_1C}=\frac{A_1B}{CA_1}. \qquad (9)$$

Перемножив равенства (9), получим, что $\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{C_1A\cdot A_1B}{BC_1\cdot CA_1}$, откуда следуют равенства:

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{C_1A\cdot A_1B\cdot CA_1\cdot BC_1}{BC_1\cdot CA_1\cdot A_1B\cdot C_1A}=1.$$

Утверждение «а» теоремы Менелая доказано.

Доказательство с помощью площадей

Способ IV. Идея доказательства заключается в замене отношения длин отрезков из равенства (7) отношениями площадей треугольников.

а) Пусть точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Соединим точки C и C_1. Обозначим площади треугольников S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 (рис. 22).

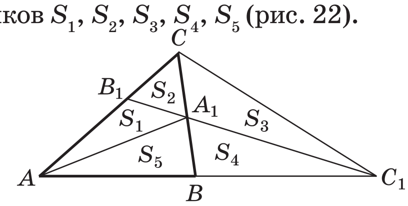


Рис. 22

Тогда справедливы равенства:

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{S_1}{S_2},\ \frac{CA_1}{A_1B}=\frac{S_3}{S_4},\ \frac{C_1B}{C_1A}=\frac{S_4}{S_4+S_5}. \qquad (10)$$

Перемножив равенства (10), получим:

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{C_1B}{C_1A}=\frac{S_1\cdot S_3}{S_2\cdot(S_4+S_5)}=$$

$$=\frac{S_1}{S_4+S_5}\cdot\frac{S_3}{S_2}=\frac{A_1B_1}{A_1C_1}\cdot\frac{A_1C_1}{A_1B_1}=1.$$

Утверждение «а» теоремы Менелая доказано.

Подобно тому, как теорема Чевы остается справедливой и в том случае, если точка пересечения чевиан находится вне треугольника, теорема Менелая остается справедливой и в том случае, если секущая пересекает только продолжения сторон треугольника. В этом случае можно говорить о пересечении сторон треугольника во внешних точках.

Доказательство для случая внешних точек

а) Пусть секущая пересекает стороны треугольника ABC во внешних точках, то есть пересекает продолжения сторон AB, BC и AC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно и эти точки лежат на одной прямой (рис. 23).

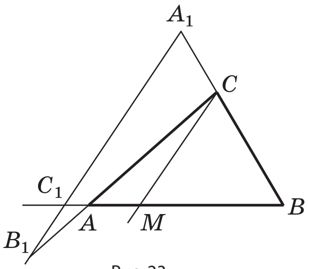


Рис. 23

Проведем прямую CM параллельно прямой A_1C_1. По теореме о пропорциональных отрезках имеем:

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{C_1A}{C_1M}\text{ и }\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{C_1M}{BC_1}.$$

Тогда верно равенство

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{C_1A\cdot C_1M\cdot BC_1}{C_1M\cdot BC_1\cdot C_1A}=1.$$

Утверждение «а» теоремы Менелая доказано.

Заметим, что приведенное доказательство совпадает с доказательством теоремы Менелая для случая, когда секущая пересекает две стороны треугольника во внутренних точках и одну во внешней.

Доказательство утверждения «б» теоремы Менелая для случая внешних точек аналогично доказательству, приведенному выше.

Задание 23. В треугольнике ABC точки A_1, B_1 лежат соответственно на сторонах BC и AC. P — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1.

$$AB_1:B_1C=7:8,\ CA_1:A_1B=4:3.$$

Найдите отношение $BP:PB_1$.

Решение. Обозначим $AB_1=7m$, $B_1C=8m$, $CA_1=4k$, $A_1B=3k$ (рис. 24). По теореме Менелая для треугольника BCB_1 и секущей PA_1 запишем верное равенство:

$$\frac{BP}{PB_1}\cdot\frac{B_1A}{AC}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}=1,$$

откуда следует, что

$$\frac{BP}{PB_1}=\frac{AC}{B_1A}\cdot\frac{A_1B}{CA_1}=\frac{15m}{7m}\cdot\frac{3k}{4k}=\frac{45}{28}.$$

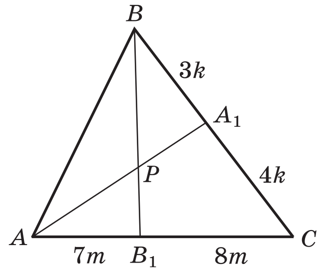


Рис. 24

Ответ: $\frac{45}{28}$.

Задание 24. (*МГУ, заочные подготовительные курсы.*) В треугольнике ABC, площадь которого равна 6, на стороне AB взята точка K, делящая эту сторону в отношении $AK:BK=2:3$, а на стороне AC — точка L, делящая AC в отношении $AL:LC=5:3$. Точка P пересечения прямых CK и BL удалена от прямой AB на расстояние 1,5. Найдите длину стороны AB.

Решение. Из точек P и C опустим перпендикуляры PR и CM на прямую AB. Обозначим $AK=2n$, $BK=3n$, $AL=5m$, $LC=3m$ (рис. 25). По теореме Менелая для треугольника AKC и секущей PL запишем верное равенство: $\frac{AL}{LC}\cdot\frac{CP}{PK}\cdot\frac{KB}{BA}=1$, откуда получим, что $\frac{CP}{PK}=\frac{3m}{5m}\cdot\frac{5n}{3n}=1$, $CP=KP$.

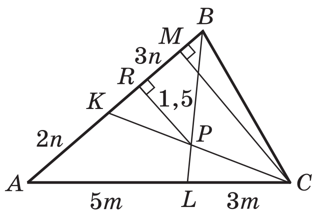


Рис. 25

Из подобия треугольников KMC и KRP (по двум углам) получим, что $\frac{MC}{PR}=\frac{KC}{PK}$, откуда следует, что $CM=3$.

Теперь, зная длину высоты, проведенной к стороне AB треугольника ABC, и площадь этого треугольника, вычислим длину стороны:

$$AB=\frac{6\cdot 2}{3}=4.$$

Ответ: 4.

Задание 25. Три окружности с центрами A, B, C, радиусы которых относятся как $11:12:9$, касаются друг друга внешним образом в точках X, Y, Z как показано на рисунке 26. Отрезки AX и BY пересекаются в точке O. В каком отношении, считая от точки B, отрезок CZ делит отрезок BY?

Решение. Обозначим $AY = 11k$, $CX = 9k$, $BZ = 12k$ (рис. 26). Так как

$$\frac{AY}{YC}\cdot\frac{CX}{XB}\cdot\frac{BZ}{ZA}=\frac{11k\cdot 9k\cdot 12k}{9k\cdot 11k\cdot 12k}=1,$$

то, по утверждению «б» теоремы Чевы, отрезки AX, BY и CZ пересекаются в одной точке — точке O.

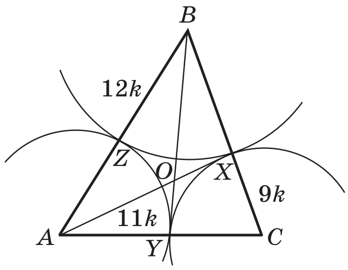


Рис. 26

Тогда отрезок CZ делит отрезок BY в отношении $\frac{BO}{OY}$. Найдем это отношение.

По теореме Менелая для треугольника BCY и секущей OX имеем: $\frac{BO}{OY}\cdot\frac{YA}{AC}\cdot\frac{CX}{XB}=1$, откуда следует, что $\frac{BO}{OY}=\frac{20k}{11k}\cdot\frac{12k}{9k}=\frac{80}{33}$.

Ответ: $\frac{80}{33}$.

Задание 26. (*Теорема Паскаля.*) Точки пересечения противоположных сторон вписанного в окружность шестиугольника лежат на одной прямой.

Доказательство. Пусть дан шестиугольник $ABCDEF$, вписанный в окружность. Продолжения противоположных сторон AB и DE, BC и EF, CD и FA шестиугольника пересекаются в точках G, H и K соответственно (рис. 27).

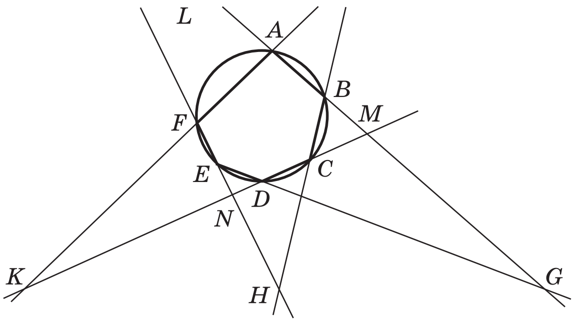


Рис. 27

Пусть прямые AB и EF, AB и CD, CD и EF пересекаются в точках L, M и N соответственно (точки L находится за пределами рисунка). По теореме Менелая для треугольника LMN имеем верные равенства:

$$\frac{LG\cdot MD\cdot NE}{GM\cdot DN\cdot EL}=1,\ \frac{MK\cdot NF\cdot LA}{KN\cdot FL\cdot AM}=1,$$

$$\frac{NH\cdot LB\cdot MC}{HL\cdot BM\cdot CN}=1.$$

Перемножив их, получим:

$$\frac{LG\cdot MD\cdot NE\cdot MK\cdot NF\cdot LA\cdot NH\cdot LB\cdot MC}{GM\cdot DN\cdot EL\cdot KN\cdot FL\cdot AM\cdot HL\cdot BM\cdot CN}=1. \quad (11)$$

Из теоремы о свойстве секущих, проведенных к окружности из одной точки, следует, что верны равенства: $MD\cdot MC = AM\cdot BM$, $NE\cdot NF = CN\cdot DN$, $LA\cdot LB = EL\cdot FL$.

Сократив равные произведения отрезков в левой части равенства (11), получим верное равенство

$$\frac{LG\cdot MK\cdot NH}{GM\cdot KN\cdot HL}=1,$$

означающее, на основании утверждения «б» теоремы Менелая для случая внешних точек, что точки G, H и K лежат на одной прямой.

Задание 27. Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений ее боковых сторон лежат на одной прямой.

В статье И.Ф. Шарыгина [5] нашлось утверждение, которое мы сформулируем ниже. Отметим только, что его доказательство было получено как следствие теоремы Чевы, записанной в форме синусов. Так как у нас эта техника не использовалась, то приведем иное доказательство того же утверждения. Для этого докажем теорему о вписанном шестиугольнике.

Лемма 2. Если точки F и F_1 принадлежит дуге AE окружности и $\frac{EF}{FA}=\frac{EF_1}{F_1A}$, то точки F и F_1 совпадают.

Доказательство. Пусть точка F_1 принадлежит дуге AFE окружности и $\frac{EF}{FA}=\frac{EF_1}{F_1A}$. Проведем биссектрисы вписанных углов AFE и AF_1E. Они пересекутся в середине дуги AE, не содержащей точек F и F_1, и пересекут хорду AE в точках M и N (рис. 28).

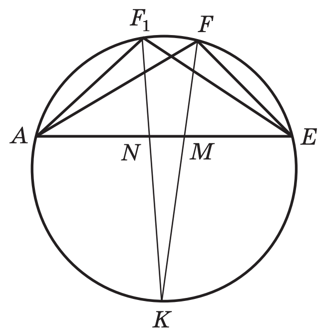


Рис. 28

В треугольниках AFE и AF_1E, по свойству биссектрисы угла, имеем: $\frac{EF}{FA}=\frac{EM}{MA}$ и $\frac{EF_1}{F_1A}=\frac{EN}{NA}$. Так как $\frac{EF}{FA}=\frac{EF_1}{F_1A}$ по условию, то $\frac{EM}{MA}=\frac{EN}{NA}$, то есть точки M и N делят один и тот же отрезок в одном и том же отношении, считая от одной и той же точки. Тогда точки M и N совпадают (лемма 1), и точки F и F_1 совпадают, что и требовалось доказать.

Теорема о вписанном шестиугольнике. Пусть шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность.

а) Если его диагонали AD, BE, CF пересекаются в одной точке, то верно равенство

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=1. \tag{12}$$

б) Если верно равенство (12), то диагонали AD, BE, CF шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в одной точке.

Доказательство. а) Пусть шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность и его диагонали AD, BE, CF пересекаются в точке O (рис. 29).

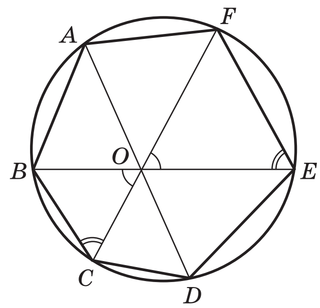


Рис. 29

Имеется три пары треугольников, подобных по двум углам (вертикальные углы равны, вписанные углы, опирающиеся на одну дугу окружности, равны): AOB и EOD, BOC и FOE, COD и AOF. Их стороны пропорциональны, поэтому верны равенства:

$$\frac{AB}{DE}=\frac{BO}{DO},\ \frac{EF}{BC}=\frac{FO}{BO},\ \frac{CD}{FA}=\frac{DO}{FO}. \tag{13}$$

Перемножив равенства (13), получим равенство (12).

Утверждение «а» теоремы о вписанном шестиугольнике доказано.

б) Пусть теперь шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность и выполняется равенство (12). Докажем, что диагонали AD, BE, CF пересекаются в одной точке.

Через точку O пересечения диагоналей AD и BE проведем луч CO. Этот луч пересечет окружность в точке F_1. Тогда по утверждению «а» теоремы о вписанном шестиугольнике верно равенство

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF_1}{F_1A}=1. \tag{14}$$

Из равенств (12) и (14) следует, что для точек F и F_1, принадлежащих дуге AE окружности, выполняется равенство $\frac{EF}{FA}=\frac{EF_1}{F_1A}$. Это означает, что точки F и F_1 совпадают (лемма 2), а диагонали AD, BE, CF пересекаются в одной точке.

Утверждение «б» теоремы о вписанном шестиугольнике доказано.

Задание 28. Докажите, что если противоположные стороны вписанного шестиугольника $ABCDEF$ равны, то его диагонали AD, BE, CF пересекаются в одной точке.

Теперь сформулируем утверждение 5 из статьи И.Ф. Шарыгина в виде очередного задания.

Задание 29. Пусть из точки A, взятой вне окружности, проведены две касательные AM и AN к окружности и две секущие и пусть P и Q — точки пересечения окружности с первой секущей, а точки K и L — со второй. Тогда прямые PK, QL и MN пересекаются в одной точке (рис. 30). Докажите это.

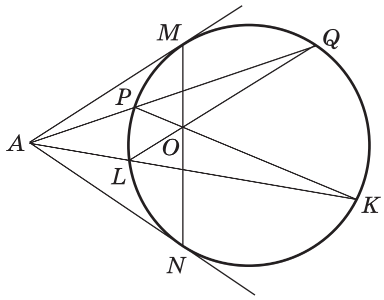


Рис. 30

Доказательство. Рассмотрим шестиугольник $PLNKQM$ (рис. 31).

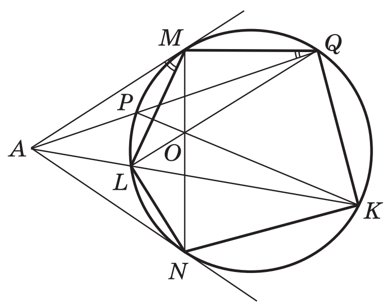


Рис. 31

Треугольники APM и AMQ, ALN и ANK подобны по двум углам, следовательно, их стороны пропорциональны:

$$\frac{MP}{QM}=\frac{AM}{AQ},\ \frac{LN}{NK}=\frac{AN}{AK}. \tag{15}$$

Из подобия треугольников AQL и AKP (по двум углам) имеем:

$$\frac{AQ}{AK}=\frac{AL}{AP},\ \text{или}\ \frac{AP}{AK}=\frac{AL}{AQ}.$$

Тогда треугольники APL и AKQ подобны (по двум сторонам и углу между ними), а их стороны пропорциональны:

$$\frac{KQ}{PL}=\frac{AQ}{AL}. \qquad (16)$$

Перемножив равенства (15) и (16), получим:

$$\frac{MP}{QM}\cdot\frac{LN}{NK}\cdot\frac{KQ}{PL}=\frac{AM}{AQ}\cdot\frac{AN}{AK}\cdot\frac{AQ}{AL}. \qquad (17)$$

Так как касательные AM и AN равны и верно равенство $AM^2=AK\cdot AL$, то из равенства (17) следует, что

$$\frac{MP}{PL}\cdot\frac{LN}{NK}\cdot\frac{KQ}{QM}=1.$$

Тогда, по теореме о вписанном шестиугольнике, диагонали PK, QL и MN пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

«Из утверждения 5, — писал Игорь Федорович, — следует, что с помощью одной линейки через данную точку вне окружности можно провести касательную». Способ построения показан на рисунке 32.

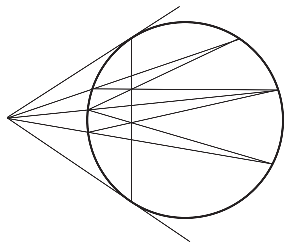


Рис. 32

До сих пор мы доказывали, что прямые пересекаются в одной точке, что три точки лежат на одной прямой и т. п., а утверждение 5 позволяет решить красивую задачу на построение с ограниченными средствами.

Задание 32. На рисунке 32 показано, как с помощью одной линейки через данную точку вне окружности провести касательную. Дайте обоснование этому способу построения.

Выражаю благодарность учителям физматшколы № 2007 г. Москвы П.В. Чулкову, Д.В. Прокопенко, Н.А. Ленской за участие в обсуждении статьи и полезные советы. Особая благодарность за ценные редакционные замечания доценту кафедры прикладной математики Самарского аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева С.В. Дворянинову, а также В.М. Бусеву.

Литература

1. *Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б.* и др. Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 8 класса: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением. — М.: Вита-Пресс, 2005. — 208 с.

2. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Замечательные точки и линии треугольника // Математика, 2006, № 17.

3. *Мякишев А.Г.* Элементы геометрии треугольника. — М.: МЦНМО, 2002. — (Библиотека «Математическое просвещение».)

4. *Эрдниев П., Манцаев Н.* Теоремы Чевы и Менелая // Квант, 1990, № 3, с. 56–59.

5. *Шарыгин И.Ф.* Теоремы Чевы и Менелая// Квант, 1976, № 11, с. 22–30.

6. *Вавилов В.В.* Медианы и средние линии треугольника // Математика, 2006, № 1, с. 11–15.

7. *Ефремов Д.* Новая геометрия треугольника. — Одесса, 1902. — 334 с.

ФОТО НА КОНКУРС

Симметрия и квиллинг накануне летних каникул

Автор: О.А. Ефремова, учитель математики основной школы с. Яблоновка Саратовской обл.

Г. ФАЛИН,
А. ФАЛИН,
Москва

ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛНОГО КВАДРАТА ПРИ РЕШЕНИИ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Выделение полного квадрата является одним из основных преобразований квадратного трехчлена. Оно играет ключевую роль при выводе формулы корней квадратного уравнения, построении графика квадратичной функции, доказательстве формулы для разложения квадратного трехчлена на линейные множители. В настоящей статье на примере задач, предлагавшихся в разные годы на вступительных экзаменах и олимпиадах МГУ им. М.В. Ломоносова, мы расскажем, как это преобразование может быть применено для решения специфических, нестандартных систем алгебраических уравнений (то есть уравнений, левая и правая части которых являются многочленами от одной или нескольких переменных).

Общая схема решения

Очень часто сложная система алгебраических уравнений устроена так, что одно из уравнений после надлежащей группировки членов можно записать в виде

$$A^2 + B^2 = 0. \qquad (1)$$

Поскольку сумма двух неотрицательных чисел может быть равна нулю тогда и только тогда, когда они оба одновременно равны нулю, это преобразование позволяет сделать вывод о том, что уравнение $A^2 + B^2 = 0$ равносильно системе из двух уравнений $A = 0$, $B = 0$:

$$A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Это уравнение проще исходного, так как содержит меньше членов и, самое главное, их степень вдвое меньше степени исходного уравнения. Как правило, уравнения $A = 0$, $B = 0$ — линейные, что позволяет применить метод исключения неизвестных и решить систему стандартным приемом.

Описанная общая схема может модифицироваться: иногда для получения выражения вида (1) нужны более сложные преобразования, чем просто группировка членов (например, рассмотрение линейной комбинации уравнений системы), иногда вместо выражения вида (1) получается выражение вида $A^2 + B^2 + C^2 = 0$.

Менее стандартной является модификация общей схемы (2), когда исходная система, скажем, из двух уравнений приводится к виду

$$\begin{cases} A^2 + B^2 = f(x), \\ C^2 + D^2 = g(x). \end{cases}$$

Из этой системы следует система двух неравенств с одной неизвестной x:

$$\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0, \end{cases}$$

причем задача ставится так, что множество M решений этой системы неравенств не содержит бесконечных интервалов, то есть либо пусто, либо состоит из конечного числа изолированных точек $x = x_1, \ldots, x = x_n$ (обычно одной-двух). Если $M = \varnothing$, то это означает, что исходная система не имеет решений. Если же M — конечное непустое множество, то это означает, что мы нашли возможные значения неизвестной x. После этого исходная система распадается на соответствующее число систем, в каждой из которых одно из уравнений имеет вид $x = x_0$, так что эти системы обычно решаются без труда.

Задачи приведенных выше типов можно найти в хорошо известных учебниках и учебных пособиях по алгебре. При этом рассматривается, как правило, небольшое число задач. Но идея выделения полного квадрата настолько важна и красива, что нужно о ней почаще вспоминать. Рассматриваемые ниже задачи допускают различные решения. Мы умышленно ограничиваемся только методом выделения полного квадрата.

Примеры решения задач

Задача 1. (*Химический факультет, 1998, июль, № 3.*) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x - y) + 2 = 0, \\ z^2 + xz + yz - 4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение системы можно переписать в виде:

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 0.$$

Используя преобразование (2), мы получим, что первое уравнение исходной системы равносильно системе

$$\begin{cases} x + 1 = 0, \\ y - 1 = 0, \end{cases}$$

которая тривиально решается; она имеет единственное решение $(x; y) = (-1; 1)$.

Таким образом, в исходной системе первое уравнение с *двумя* неизвестными имеет *единственное* решение $(x; y) = (-1; 1)$.

Теперь второе уравнение системы примет вид $z^2 - 4 = 0$, откуда $z = \pm 2$. Соответственно, исходная система имеет два решения:

$$(x; y; z) = (-1; 1; 2),\ (x; y; z) = (-1; 1; -2).$$

Ответ: $\{(-1; 1; 2); (-1; 1; -2)\}$.

Задача 2. (*Факультет почвоведения, 1979, № 5.*) Найдите все решения системы

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим первое уравнение как квадратное относительно неизвестной x; неизвестную y будем считать параметром. Это, в частности, означает, что уравнение нужно переписать:

$$10x^2 - 2(y + 19)x + (5y^2 - 6y + 41) = 0.$$

Теперь выделим полный квадрат:

$$x^2 - 2 \cdot \frac{y+19}{10} x + \frac{5y^2 - 6y + 41}{10} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot \frac{y+19}{10} x + \left(\frac{y+19}{10}\right)^2 - \left(\frac{y+19}{10}\right)^2 + \frac{5y^2 - 6y + 41}{10} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{y+19}{10}\right)^2 + \left(\frac{7}{10}(y-1)\right)^2 = 0.$$

Используя преобразование (2), мы получим, что первое уравнение исходной системы равносильно системе

$$\begin{cases} x - \dfrac{y+19}{10} = 0, \\ y - 1 = 0, \end{cases}$$

которая тривиально решается; она имеет единственное решение $(x; y) = (2; 1)$.

Соответственно, в исходной системе первое уравнение с *двумя* неизвестными имеет *единственное* решение $(x; y) = (2; 1)$.

Оно будет решением исходной системы тогда и только тогда, когда удовлетворяет второму уравнению системы. Убедиться в этом можно простой подстановкой.

Ответ: $\{(2; 1)\}$.

Задача 3. (*Факультет государственного управления, 2003, июль, № 6.*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2xy - z^2 = 4. \end{cases}$$

Решение. После исключения из первого уравнения неизвестной x: $x = 2 - y - z$, второе уравнение системы примет вид:

$$2y^2 + z^2 + 2yz - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y^2 + 2yz + z^2) + (y^2 - 4y + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y + z)^2 + (y - 2)^2 = 0.$$

Используя преобразование (2), мы получим, что последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} y + z = 0, \\ y - 2 = 0, \end{cases}$$

которая тривиально решается; она имеет единственное решение $(y; z) = (2; -2)$. Восстанавливая исключенную неизвестную x:

$$x = 2 - y - z = 2,$$

мы получим, что исходная система имеет единственное решение $(x; y; z) = (2; 2; -2)$.

Ответ: $\{(2; 2; -2)\}$.

Задача 4. (*Олимпиада «Покори Воробьевы горы», 2011, 9–10-е классы, № 2.*) Решите систему

$$\begin{cases} x^2-2y+2=0, \\ y^2+4z+3=0, \\ z^2+4x+4=0. \end{cases}$$

Решение. Если сложить все три уравнения системы, то получившееся уравнение-следствие можно записать в виде

$$(x+2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=0.$$

Это равенство равносильно тому, что $x=-2$, $y=1$, $z=-2$.

Таким образом, если исходная система имеет решение, то это может быть только тройка $x=-2$, $y=1$, $z=-2$. Однако проверка показывает, что этот набор неизвестных не удовлетворяет первому и второму уравнениям.

Ответ: $\varnothing$.

Задача 5. (*Олимпиада «Покори Воробьевы горы», 2011, 11-й класс, № 8.*) Решите систему

$$\begin{cases} 5x^2+3y^2+3xy+2xz-yz-10y+5=0, \\ 49x^2+65y^2+49z^2-14xy-98xz+14yz-182x-102y+182z+233=0. \end{cases}$$

Решение. Обращая внимание на то, что
$49x^2=(7x)^2$, $49z^2=(7z)^2$, $14xy=2\cdot 7x\cdot y$,
$98xz=2\cdot 7x\cdot 7z$, $14yz=2\cdot y\cdot 7z$, $182x=26\cdot 7x$,
$182z=26\cdot 7z$,
перепишем второе уравнение:

$$(7x)^2+(7z)^2-2\cdot 7x\cdot y-2\cdot 7x\cdot 7z+$$
$$+2\cdot y\cdot 7z-26\cdot 7x+26\cdot 7z+65y^2-102y+233=0.$$

Обозначим (для сокращения записей) $a=-7x$, $c=7z$ и (для симметрии обозначений) $b=y$:

$$a^2+c^2+2ab+2ac+2bc+$$
$$+26(a+c)+65b^2-102b+233=0.$$

Выражение $a^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ является «осколком» известной формулы: $(a+b+c)^2=$ $=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$. Имея это в виду, «отщепим» от члена $65b^2$ член b^2 и применим эту формулу:

$$(a+b+c)^2+26(a+c)+64b^2-102b+233=0.$$

Второе слагаемое $26(a+c)$ содержит выражение $a+c$, которое является частью выражения $a+b+c$. Имея это в виду, «отщепим» от члена $-102b$ член $26b$:

$$(a+b+c)^2+26(a+b+c)+$$
$$+64b^2-128b+233=0.$$

Поскольку $128b=64\cdot 2b$, естественно продолжить преобразования следующим образом:

$$(a+b+c)^2+26(a+b+c)+$$
$$+64(b^2-2b)+233=0 \Leftrightarrow (a+b+c)^2+$$
$$+26(a+b+c)+64(b^2-2b+1)+169=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((a+b+c)+13)^2+64(b-1)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+13=0, \\ b=1. \end{cases}$$

Возвращаясь к основным неизвестным x, y, z, мы получим, что второе уравнение исходной системы равносильно системе

$$\begin{cases} y=1, \\ z=x-2. \end{cases}$$

Теперь первое уравнение исходной системы примет вид:

$$7x^2-2x=0.$$

Оно имеет два корня: $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{7}$. Соответственно, исходная система имеет два решения:

$$(0;\ 1;\ -2) \text{ и } \left(\frac{2}{7};\ 1;\ -\frac{12}{7}\right).$$

Ответ: $(0;\ 1;\ -2)$, $\left(\frac{2}{7};\ 1;\ -\frac{12}{7}\right)$.

Задача 6. (*Олимпиада механико-математического факультета, 2002, 8-й класс, № 6.*) Существуют ли рациональные числа x, y, u, v, удовлетворяющие уравнению

$$\left(x+y\sqrt{2}\right)^2+\left(u+v\sqrt{2}\right)^2=7+5\sqrt{2}\ ?$$

Решение. Допустим, что уравнение

$$\left(x+y\sqrt{2}\right)^2+\left(u+v\sqrt{2}\right)^2=7+5\sqrt{2}$$

имеет решение, где x, y, u, v — рациональные числа.

Раскрывая скобки в левой части, перепишем уравнение:

$$x^2+2xy\sqrt{2}+2y^2+u^2+2uv\sqrt{2}+2v^2=7+5\sqrt{2}. \qquad (3)$$

Из иррациональности числа $\sqrt{2}$ следует, что равенство $a+b\sqrt{2}=0$, где a и b — рациональные, равносильно равенствам $a=0$, $b=0$. В нашей задаче это означает, что уравнение (2) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+2y^2+u^2+2v^2=7, \\ 2xy+2uv=5. \end{cases} \qquad (4)$$

Итак, задача решения исходного уравнения свелась к решению системы (4). Начиная с этого места рациональность чисел x, y, u, v уже не будет играть никакой роли.

Первое уравнение системы (4) содержит две группы членов

$$x^2+2y^2=x^2+\left(\sqrt{2}y\right)^2 \text{ и } u^2+2v^2=u^2+\left(\sqrt{2}v\right)^2,$$

которые можно дополнить до полных квадратов, если из этого уравнения вычесть второе уравнение, умноженное на $\sqrt{2}$:

$$\left(x^2-2\sqrt{2}xy+2y^2\right)+\left(u^2-2\sqrt{2}uv+2v^2\right)=7-5\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{2}y\right)^2+\left(u-\sqrt{2}v\right)^2=7-5\sqrt{2}. \qquad (5)$$

Число $7-5\sqrt{2}$ отрицательно:

$$7-5\sqrt{2}<0 \Leftrightarrow 7<5\sqrt{2} \Leftrightarrow 49<50,$$

и потому уравнение (5), а вместе с ним и исходная система, из которой это уравнение следует, не имеют решений.

Ответ: нет.

Задача 7. (*Географический факультет, 1981, № 5.*) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0, \\ x^2 + 2x = -y^2 - 2y - 1. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим уравнения системы как квадратные относительно y и выделим полные квадраты:

$$\begin{cases} \left(y - \dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{4} - 1, \\ (y+1)^2 = -x^2 - 2x. \end{cases}$$

Поэтому из исходной системы следует система двух неравенств относительно одной неизвестной x:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - 1 \ge 0, \\ -x^2 - 2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \ge 4, \\ x(x+2) \le 0. \end{cases}$$

Множество решений первого неравенства последней системы состоит из двух лучей: $(-\infty; -2]$ и $[2; +\infty)$, а множеством решений второго неравенства является отрезок $[-2; 0]$. Эти два множества пересекаются в единственной точке: $x = -2$.

Итак, из исходной системы следует, что $x = -2$. Если к этому равенству добавить оба уравнения исходной системы, то получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0, \\ x^2 + 2x = -y^2 - 2y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y^2 - xy + 1 = 0, \\ x^2 + 2x = -y^2 - 2y - 1. \end{cases}$$

При подстановке во второе и третье уравнения последней системы значения $x = -2$ мы получим одно и то же уравнение $y^2 + 2y + 1 = 0$, которое имеет единственный корень $y = -1$. Соответственно, исходная система имеет единственное решение $(-2; -1)$.

Ответ: $\{(-2; -1)\}$.

Задача 8. (*Факультет ВМК, устный экзамен, 2001.*) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} (x+3)^3 = 3 - 2y, \\ z^2 + 4y^2 = 8y, \\ (2z - x)(x+3) = 5x + 16, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z \ge 0$.

Решение. Дополнительное условие задачи, что $z \ge 0$, фактически означает, что решать нужно не систему из трех уравнений, а систему из трех уравнений и неравенства $z \ge 0$:

$$\begin{cases} (x+3)^3 = 3 - 2y, \\ z^2 + 4y^2 = 8y, \\ (2z - x)(x+3) = 5x + 16, \\ z \ge 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Рассмотрим второе уравнение системы как квадратное относительно y, а третье — как квадратное относительно x и выделим в них полные квадраты. Кроме того, сохраним неравенство $z \ge 0$:

$$\begin{cases} 4(y-1)^2 = -z^2 + 4, \\ (x - (z-4))^2 = z^2 - 2z, \\ z \ge 0. \end{cases}$$

Поэтому из исходной системы следует система трех неравенств относительно одной неизвестной z:

$$\begin{cases} -z^2 + 4 \ge 0, \\ z^2 - 2z \ge 0, \\ z \ge 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Множество решений подсистемы, составленной из двух первых неравенств, состоит из отрезка $[-2; 0]$ и изолированной точки $z = 2$. Однако если учесть третье неравенство, то мы получим, что множество решений системы (7) состоит из двух точек: $z = 0$ и $z = 2$. Теперь, кстати, понятно, зачем в условие задачи добавили неравенство $z \ge 0$ — нужно было как-то бесконечное множество $[-2; 0]$ превратить в конечное.

Итак, из исходной системы следует, что $z = 0$ или $z = 2$. Если к этим равенствам добавить уравнения исходной системы, то мы получим совокупность из двух систем, которая равносильна исходной системе:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} z = 0, \\ (x+3)^3 = 3 - 2y, \\ z^2 + 4y^2 = 8y, \\ (2z - x)(x+3) = 5x + 16; \end{cases} \\ \begin{cases} z = 2, \\ (x+3)^3 = 3 - 2y, \\ z^2 + 4y^2 = 8y, \\ (2z - x)(x+3) = 5x + 16. \end{cases} \end{array}\right.$$

При подстановке в уравнения этих систем соответствующих значений z мы получим совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} z = 0, \\ (x+3)^3 = 3 - 2y, \\ y^2 - 2y = 0, \\ x^2 + 8x + 16 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} z = 2, \\ (x+3)^3 = 3 - 2y, \\ y^2 - 2y + 1 = 0, \\ x^2 + 4x + 4 = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Для первой системы (в которой $z = 0$) последнее уравнение дает $x = -4$. Оставшиеся уравнения системы дают $y = 2$. Поэтому решением первой системы будет тройка $(x; y; z) = (-4; 2; 0)$.

Для второй системы (в которой $z = 2$) последнее уравнение дает $x = -2$. Оставшиеся уравнения системы дают $y = 1$. Поэтому решением второй системы будет тройка $(x; y; z) = (-2; 1; 2)$.

Ответ: $\{(-4; 2; 0); (-2; 1; 2)\}$.

9. (*Факультет ВМК, устный экзамен, 2002.*) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2xy-z^2=16. \end{cases}$$

10. (*Черноморский филиал МГУ, 2003, № 7.*) Найдите все тройки чисел $(x;\ y;\ z)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x+2y+z=2, \\ 4xy-4y-z^2=1. \end{cases}$$

11. (*Олимпиада «Покори Воробьевы горы», 2006, № 9.*) Существуют ли рациональные числа x, y, u, v, удовлетворяющие уравнению

$$\left(x+y\sqrt{2}\right)^6+\left(u+v\sqrt{2}\right)^6=7+5\sqrt{2}\,?$$

12. (*Географический факультет, 1981, № 5.*) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0, \\ 2x^2-4x+3+y^3=0. \end{cases}$$

13. (*Биологический факультет, 1993, № 6; химический факультет, 1978, № 5.*) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y+2=(3-x)^3, \\ (2z-y)(y+2)=9+4y, \\ x^2+z^2=4x, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z\geq 0$.

14. (*Факультет ВМК, 1984, № 5.*) Найдите все решения $(x;\ y;\ z)$ системы уравнений

$$\begin{cases} x^3+x^2(13-y-z)+x(2y+2z-2yz-26)+5yz-7y-7z+30=0, \\ x^3+x^2(17-y-z)-x(2y+2z+2yz-26)+y+z-3yz-2=0, \end{cases}$$

такие, что x принадлежит отрезку $[4;\ 7]$.

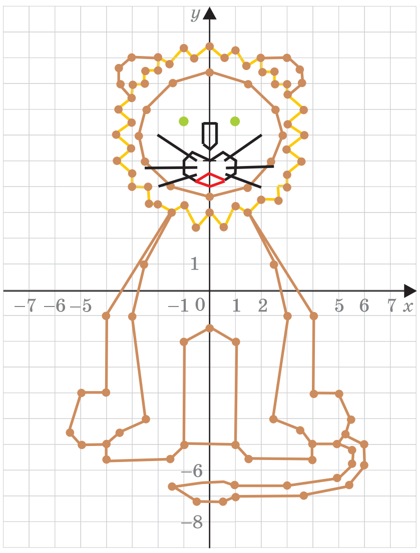
Ответы: **9.** $\{(4;4;-4)\}$. **10.** $\left\{\left(2;\ \frac{1}{2};\ -1\right)\right\}$. **11.** Нет.

Указание. Докажите, что левая часть уравнения может быть записана в виде $\left(x'+y'\sqrt{2}\right)^2+\left(u'+v'\sqrt{2}\right)^2$, где x', y', u', v' — рациональные. **12.** $\{(1;\ -1)\}$. **13.** $\{(2;\ -1;\ 2);\ (4;\ -3;\ 0)\}$. **14.** $\{(7;\ 6;\ 6)\}$. *Указание.* Рассмотрите систему как систему относительно двух неизвестных y и z (x считайте параметром) и решите ее с помощью новых неизвестных $a=y+z$, $b=yz$.

ТВОРЧЕСКАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «КООРДИНАТНАЯ ПЛОСКОСТЬ»

Автор: Нарушева Маша.
Учитель: Т.В. Тараканова,
Большетолкайская средняя школа
Самарской области

«Львенок»



(−1,5; 3), (−2,5; 1), (−3; −1), (−2,5; −5), (−3,5; −5,5), (−4; −6), (−4; −6,5), (−1,5; −6,5), (−1; −6), (−1; −2), (0; −1,5), (1; −2), (1; −6), (1,5; −6,5), (4; −6,5), (4; −6), (3,5; −5,5), (2,5; −5), (3; −1), (2,5; 1), (1,5; 3), (4; −1), (4; −4), (5; −4), (5,5; −5), (5,25; −5,5), (6; −6), (6; −6,75), (5,5; −7,5), (3,5; −8), (1; −8), (0,5; −8,25), (−0,5; −8,25), (−1,5; −7,75), (−0,5; −7,25), (0,5; −7,25), (1; −7,5), (3,5; −7,5), (5; −7,25), (5,5; −6,75), (5,5; −6,25), (5; −6), (4; −6), (4; −6,5), (1,5; −6,5), (1; −6), (−1; −6), (−1,5; −6,5), (−4; −6,5), (−4; −6), (−5; −6), (−5,5; −5), (−5; −4), (−4; −4), (−4; −1), (−1,5; 3), (−1; 3,25), (−0,5; 2,5), (0; 3), (0,5; 2,5), (1; 3,25), (1,5; 3), (2; 3,5), (2,5; 3,5), (2,5; 4), (3; 4), (3; 4,5), (3,5; 5), (3; 5,5), (3,5; 6), (3; 6,5), (3,5; 7), (3; 7,5), (3; 8), (2,5; 8), (2,5; 8,5), (2; 8,5), (2; 9), (1,5; 8,75), (1; 9,25), (0,5; 9), (0; 9,5), (−0,5; 9), (−1; 9,25), (−1,5; 8,75), (−2; 9), (−2; 8,5), (−2,5; 8,5), (−2,5; 8), (−3; 8), (−3; 7,5), (−3,5; 7), (−3; 6,5), (−3,5; 6), (−3; 5,5), (−3,5; 5), (−3; 4,5), (−3; 4), (−2,5; 4), (−2,5; 3,5), (−2; 3,5), (−1,5; 3). ***Мордочка:*** (0; 3,5), (−1,5; 4), (−2,5; 5), (−2,75; 6), (−2,5; 7), (−1,5; 8), (0; 8,5), (1,5; 8), (2,5; 7), (2,75; 6), (2,5; 5), (1,5; 4), (0, 3,5). ***Уши:*** 1) (−3; 7,5), (−3,5; 8), (−3,5; 8,5), (−3; 9), (−2; 9); 2) (2; 9), (3; 9), (3,5; 8,5), (3,5; 8), (3; 7,5). ***Глаза:*** (−1; 6,5) и (1; 6,5). ***Пасть:*** (−0,5; 4,25), (0; 4,5), (0,5; 4,25), (1; 4,5), (1; 5), (0,5; 5,25), (0; 5), (−0,5; 5,25), (−1; 5), (−1; 4,5), (−0,5; 4,25), (0; 4), (0,5; 4,25). ***Усы:*** 1) (0,5; 5), (2; 6); 2) (0,5; 4,75), (2,5; 4,75); 3) (0,5; 4,5), (2; 4); 4) (−0,5; 4,5), (−2; 4); 5) (−0,5; 4,75), (−2,5; 4,75); 6) (−0,5; 5), (−2; 6).

И. ИОФЕ,
г. Санкт-Петербург

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Данная тема рассматривается, как правило, в курсе алгебры 7-го класса. В учебниках приводятся три способа решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными: способ подстановки, способ сложения и графический способ. Эти способы решения хороши, если хотя бы в одном уравнении хотя бы один из коэффициентов равен 1 или –1. Рассмотрим систему, в которой пары коэффициентов при x и y являются взаимно простыми числами, среди которых нет ±1, например,

$$\begin{cases}4x+5y=7,\\3x-8y=2.\end{cases}$$

Графическим способом эту систему решить невозможно.

Решим ее способом подстановки.

$$\begin{cases}4x+5y=7,\\3x-8y=2;\end{cases}\quad\begin{cases}x=\dfrac{7-5y}{4},\\3\cdot\dfrac{7-5y}{4}-8y=2.\end{cases}$$

Умножим обе части второго уравнения на 4 и раскроем скобки.

$$\begin{cases}x=\dfrac{7-5y}{4},\\21-15y-32y=8;\end{cases}\quad\begin{cases}x=\dfrac{7-5y}{4},\\-47y=-13;\end{cases}\quad\begin{cases}x=\dfrac{7-5\cdot\dfrac{13}{47}}{4},\\y=\dfrac{13}{47};\end{cases}\quad\begin{cases}x=\dfrac{7\cdot47-5\cdot13}{47\cdot4},\\y=\dfrac{13}{47};\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{264}{47\cdot4},\\y=\dfrac{13}{47};\end{cases}\quad\begin{cases}x=\dfrac{66}{47},\\y=\dfrac{13}{47}.\end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{66}{47};\dfrac{13}{47}\right)$.

Как мы видим, решение достаточно громоздкое и требует большой вычислительной работы. Немногим легче и решение данной системы *способом сложения*.

$$\begin{cases}4x+5y=7,\ |\cdot8\\3x-8y=2;\ |\cdot5\end{cases}\quad\begin{cases}32x+40y=56,\\15x-40y=10.\end{cases}$$

Сложим эти уравнения, второе уравнение оставим без изменений.

$$\begin{cases}32x+40y+15x-40y=56+10,\\3x-8y=2;\end{cases}\quad\begin{cases}47x=66,\\3x-8y=2.\end{cases}$$

Найдем x из первого уравнения и подставим его во второе.

$$\begin{cases} x=\dfrac{66}{47}, \\ 3\cdot\dfrac{66}{47}-8y=2. \end{cases}$$

Решая второе уравнение, находим y.

$$8y=3\cdot\frac{66}{47}-2; 8y=\frac{198}{47}-2; 8y=\frac{104}{47}; y=\frac{104}{47\cdot 8}; y=\frac{13}{47}.$$

Ответ: $\left(\dfrac{66}{47}; \dfrac{13}{47}\right)$.

При нахождении y мы опять столкнулись с объемными вычислениями с дробными числами.

Я обучаю своих учеников решать такие системы способом, который я назвала «способом двойного сложения».

Подберем к уравнениям две пары дополнительных множителей: первую так, чтобы при одной из переменных коэффициенты стали противоположны, а вторую так, чтобы они были противоположны при другой переменной.

$$\begin{cases} 4x+5y=7, \;|\cdot 8 \quad |\cdot 3 \\ 3x-8y=2. \;|\cdot 5 \quad |\cdot(-4) \end{cases}$$

Запишем первым уравнением системы сумму данных уравнений, умноженную на первую пару дополнительных множителей, а вторым уравнением — на вторую.

$$\begin{cases} 8(4x+5y)+5(3x-8y)=8\cdot 7+5\cdot 2, \\ 3(4x+5y)-4(3x-8y)=3\cdot 7-4\cdot 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32x+40y+15x-40y=56+10, \\ 12x+15y-12x+32y=21-8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 47x=66, \\ 47y=13; \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{66}{47}, \\ y=\dfrac{13}{47}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{66}{47}; \dfrac{13}{47}\right)$.

При решении систем двух линейных уравнений с двумя переменными этим способом решение становится существенно короче и нигде не приходится складывать или вычитать дробные числа. Это значит, что решение не только занимает меньше времени, но и уменьшается вероятность допустить в нем арифметическую ошибку.

Отметим в заключение, что системы уравнений, имеющие кратные коэффициенты, этим способом решаются почти устно.

$$\begin{cases} 2x+y=13, \;|\cdot(-3) \quad |\cdot 1 \\ x+3y=14; \;|\cdot 1 \quad |\cdot(-2) \end{cases} \begin{cases} -5x=-25, \\ -5y=-15; \end{cases} \begin{cases} x=5, \\ y=3. \end{cases}$$

Ответ: (5; 3).

КАК СТАТЬ АВТОРОМ ГАЗЕТЫ «МАТЕМАТИКА»?

Сделать это несложно: надо лишь написать статью и прислать ее в редакцию газеты. И еще одно условие — она должна быть интересна и полезна вашим коллегам.

Требования к оформлению статьи таковы:

Материал должен быть либо напечатан, на компьютере или на пишущей машинке.

Рисунки должны быть четкими, аккуратными, выполненными на белой нелинованной или клетчатой бумаге с помощью чертежных инструментов. Если вы хорошо владеете компьютером, можете воспользоваться для этого программой Corel Draw.

Рисунки надо пронумеровать, нумерация должна соответствовать их нумерации в тексте.

Фотографии могут быть цветными или черно-белыми. Формат фотографий, отпечатанных на бумаге, не менее 10 × 15 см. Размер цифровых фотографий не менее 800 × 600 пикселей, формат JPG, качество, используемое при сохранении JPG-файлов, высокое (high).

Прислать статью можно по почте или по электронной почте. Всю необходимую для этого информацию вы найдете на последней странице 2 газеты.

Для выплаты гонорара необходимо заполнить авторскую карточку.

Приглашаем вас к сотрудничеству и желаем удачи!

Данные автора

Фамилия		
Имя		
Отчество		
Дата рождения		
Место рождения		
Паспорт		
Серия	№	Когда выдан
Кем выдан		
Адрес прописки		
Индекс	город	
Улица		
Дом	корпус	квартира
Адрес проживания		
Индекс	город	
Улица		
Дом	корпус	квартира
Телефон		
Номер пенсионного страхового свидетельства		
ИНН (можно не указывать)		

Часы на башне кремля в Суздале (автор фотографии — С.Г. Григорьев)

«Бородовой знак» – своеобразная квитанция об оплате пошлины за небритую бороду

Д. ЗЛАТОПОЛЬСКИЙ,
Москва

КАК ЗАПИСЫВАЛИ ЧИСЛА И КАК СЧИТАЛИ В СТАРИНУ

В оформлении статьи использованы фото с сайта: http://ru.wikipedia.org

Буквенная цифирь

> Мы не стали бы разумными,
> если бы исключили число
> из человеческой природы.
> *Платон*

В Древней Руси числа записывались с помощью букв применявшегося тогда славянского алфавита (поэтому такую систему называли *буквенной цифирью*). Чтобы отличить буквы-числа от обычных букв, над ними ставился специальный знак «~» — так называемый *титло*[x] — в виде ломаной или искривленной линии.

Числа от 1 до 9 записывали так:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
А҃	Б҃	Г҃	Д҃	Є҃	Ѕ҃	З҃	И҃	Ѳ҃

Числа от 11 до 19 выглядели так, как показано на рисунке:

11	12	13	14	15	16	17	18	19
А҃І	Б҃І	Г҃І	Д҃І	Є҃І	Ѕ҃І	З҃І	И҃І	Ѳ҃І

Обратите внимание, что числа от 11 до 19 записывали так же, как говорили: «один — над десять», ..., «девять — над десять», то есть цифру единиц ставили до цифры десятков, и знак титло ста-

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 12.

вился только один — над всем числом. Одно из подтверждений этого — часы на колокольне Суздальского кремля.

Десятки обозначались так:

10	20	30	40	50	60	70	80	90
і҃	к҃	л҃	м҃	н҃	ѯ҃	о҃	п҃	ч҃

а сотни так:

100	200	300	400	500	600	700	800	900
р҃	с҃	т҃	ѵ҃	ф҃	х҃	ѱ҃	ѿ҃	ц҃

Благодаря использованию 27 цифр запись даже трехзначных чисел была достаточно короткой (вы, очевидно, знаете, чем меньше цифр используется в системе счисления, тем длиннее запись чисел в ней, — вспомните представление чисел в двоичной системе). Например, число 544 выглядело так: ФМД

Тысячи обозначались теми же буквами с титлами, что и первые девять цифр, но у них слева внизу ставился знак «҂» («тысяща»): ҂А-1000 ҂В-2000 ҂З-7000

Например, число 1135 записывалось так: ҂АЛЕ

Десятки тысяч назывались «тьмы». До XVI в. их обозначали, обводя знаки единиц кружками, например, числа 10 000, 20 000, 50 000 соответственно записывались следующим образом: А В Е

Отсюда пошли выражения: «тьма народу» (то есть очень много народу); «тьма-тьмущая» (очень много, бесчисленное множество).

10 тем (множественное число от слова «тьма»), или 100 000, было единицей высшего разряда. Ее называли «легион».

Миллионы назывались «леодрами». До XVI в. их обозначали, обводя знаки единиц кружками из лучей или запятых. Так, число $2 \cdot 10^6$ обозначалось так: В.

В XVI–XVII вв. для записи десятков и сотен тысяч вместо кружочков (сплошных и из лучей) стал использоваться тысячный знак «҂», который записывался перед числом десятков тысяч или сотен тысяч [1].

Самая большая из величин, имеющих свое обозначение, называлась «колода», и равнялась она 10^{50}. Считалось, что «боле сего несть человеческому уму разумевати».

Описанный способ записи чисел можно рассматривать как зачатки позиционной системы, так как в нем для обозначения единиц разных разрядов применялись одни и те же символы, к которым лишь добавлялись специальные знаки для определения значения разряда.

В России буквенная цифирь активно использовалась до начала XVII в.: в гражданской азбуке Петра I (1710 г.) буквенные цифры даны параллельно с арабскими в разделе «Число церковное и арифметическое».

В заключение заметим, что системы счисления, в которых для записи чисел используются *буквы* некоторого алфавита, называют «алфавитными». К числу таких систем, кроме буквенной цифири («славянская алфавитная система»), относились также ионийская (греческая), финикийская и другие.

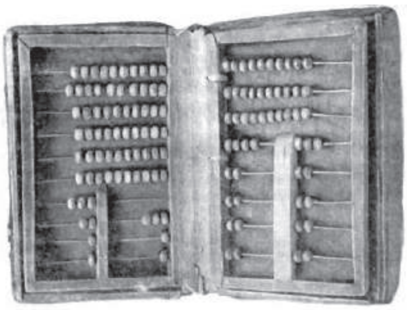
Задания для самостоятельной работы учащихся

1. Запишите в славянской алфавитной системе следующие десятичные числа: а) 15; б) 83; в) 516; г) 557; д) 4 818; е) 5 642; ж) 70 241 (без использования кружочков).

2. На фото (см. с. 44) изображен «бородовой знак», введенный Петром I после его возвращения из знаменитого путешествия в Европу. Царь ввел новый порядок, по которому бояре должны были брить бороду. Те, кто не хотел подвергаться такому «позору», должны были заплатить большую пошлину и носить при себе «квитанцию» об оплате этой пошлины — «бородовой знак». Надпись на знаке в первой строке под гербом означает не «аще», как может показаться на первый взгляд, а год изготовления знака. Определите его.

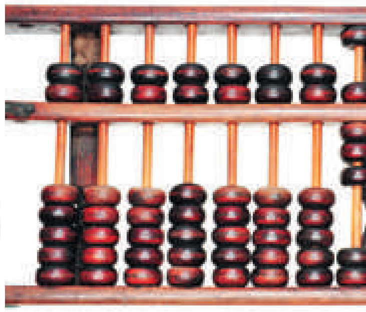
Суздальский кремль

Дощаной счет (реконструкция)



Счеты с четырьмя полями

Современные счеты.
Отложено число 725,34



Китайский суаньпань.
Отложено число 8087

Как считали на счетах

> Русские счеты... с наглядностью приемов... соединяют в себе и все существенные для усвоения понятия не только о десятичной системе, но, с изменением числа косточек, и всякой другой системы счисления.
>
> *В.Я. Буняковский*

Вряд ли найдется ученик, не слышавший о русских счетах. А знают ли ваши ученики, как считать на счетах? О том, как это делалось, и будет рассказано в данной статье.

Но сначала немного истории. Прообразом известных нам счетов был старинный русский счетный прибор — так называемый «дощаной счет». Он состоял из одного или двух неглубоких ящиков, поперек которых были натянуты веревки или проволоки с надетыми на них косточками. Как писалось в древнем руководстве: «А изряднее вместо вервей проволока медная или железная». На верхних проволоках было надето 9 или 10 косточек, на нескольких нижних — от 1 до 6. Ящики разделялись перегородкой на два отделения. Перегородка могла быть по всей высоте прибора или только для нескольких нижних неполных рядов.

На рисунке показана реконструкция одного из вариантов дощаного счета, представленная в музее истории вычислительной техники гимназии № 1530 г. Москвы (www.museum.ru/m2744).

Наиболее старыми русскими счетами являются счеты середины XVII в., хранящиеся в Государственном историческом музее в Москве, которые имеют четыре счетных поля для неполных рядов. В конце XVII в. счеты утратили неполные ряды, но имели еще два счетных поля. «Современный» вид счеты приняли в XVIII в.

Счеты — старинный прибор, который долгое время пользовался популярностью у разных народов. При этом в разных странах они выглядели по-разному.

Несколько слов о конструкции русских счетов. Верхние ряды имели 10 костяшек и использовались для откладывания целых чисел. Имелся также неполный ряд, обычно из четырех костей, под которым находились 2 или 3 полных ряда. Последние использовались для откладывания копеек (при денежных расчетах) или десятых, сотых и тысячных долей чисел (в общем случае), то есть неполный ряд являлся, выражаясь математически, «разделителем целой и дробной частей».

Для наглядности вычислений костяшки счетов имели двухцветную окраску. Пятая и шестая костяшки на каждой проволоке окрашивались в темный (черный) цвет, остальные — в светлый. Двухцветная окраска костяшек облегчала откладывание цифр, поскольку, согласитесь, что, например, четыре светлых костяшки и две темных на левой стороне быстрее определяются как цифра 6, чем шесть одноцветных костяшек. Такая окраска позволяла также очень быстро определить, какое число набрано на счетах.

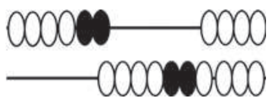
Вычисления на счетах

Дальнейшие разъяснения, связанные с методикой вычислений на счетах, проведем с использованием их схематических изображений.

Например, отложено число 25 081 (последовательность вычислений дана на с. 47). Для сложения с ним числа 32 715 цифры последнего последовательно набирались в каждом разряде из оставшихся «неиспользованными» в соответствующем ряду, и набранные костяшки перемещались влево к «цифрам» первого слагаемого; в итоге слева получалось число-результат.

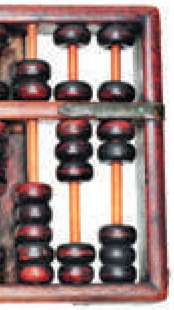
Если в каком-то разряде после сложения оказывалось 10 костяшек, то все они сбрасывались (возвращались в исходное, правое положение), а в старшем разряде добавлялась одна костяшка. Ясно, что если при этом в старшем разряде было уже отложено 9, то в нем проводились аналогичные действия.

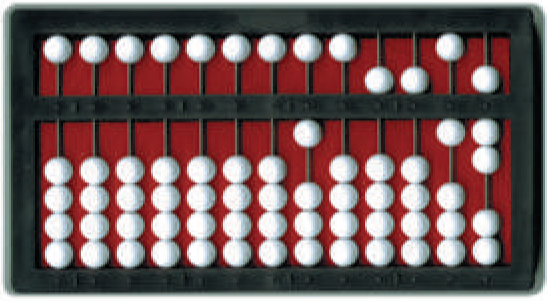
К 57 добавляется 3



Результат сложения: 60

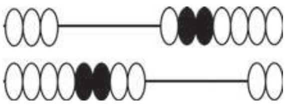
Определенная проблема возникает, когда в каком-то разряде сумма цифр превышает 10. Например, такая ситуация показана ниже — к 8 костяшкам на нижней проволоке нужно при-





Японский соробан. Отложено число 105517

бавить 6. Непосредственно добавить нужное количество в данном случае нельзя.



Небольшая проблема: к 38 + 6

Как быть? Здесь возможны два варианта решения.

Можно добавить одну костяшку в старшем разряде, а в разряде «с проблемой» — вычесть 4 (10 – 6). Можно поступить иначе:

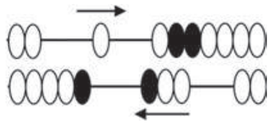
1) на нижней проволоке добавить имеющиеся справа две костяшки;

2) поскольку в результате в этом разряде получилось 10, то сбросить их все, а в старшем разряде добавить 1;

3) на нижней проволоке добавить еще 6 – 2 = 4 костяшки.

Теперь о вычитании. Когда в каждом разряде количество уже отложенных костяшек (цифр уменьшаемого) не меньше, чем количество костяшек, которые нужно снять (соответствующих цифр вычитаемого), то задача решается просто — снимаем необходимые костяшки. Пример вычитания из числа 57 796 значения 32 765 показан на рисунке внизу.

Как поступить в случае, когда в каком-то разряде количество отложенных костяшек меньше количества костяшек, которые надо снять при вычитании, вы, конечно, уже догадались — надо «заимствовать единицу» из старшего разряда. Например, когда в нижнем разряде требовалось вычесть 7, снималась одна костяшка в старшем (верхнем) разряде, в нижнем — добавлялись 3.



Вычитание с заимствованием единицы

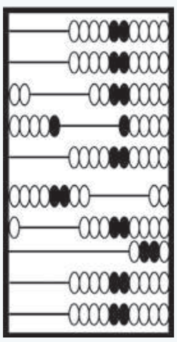
«А умножение?» — спросите вы. Да, на счетах можно было и умножать даже многозначные числа на многозначные, правда, заменяя умножение многократным сложением, а затем суммируя частные произведения с учетом весомости разряда. Например, при умножении 81 на 23 результат умножения 81 на 2 (162) откладывался на неиспользуемых верхних проволоках, а произведение 81 на 3 (243) добавлялось к нему как к числу 1620. Конечно, для умножения требовалось большое число проволочек или еще одни счеты (вспомните о нескольких счетных полях на предшественниках счетов).

В музее, который упоминался в статье, представлен доклад известного русского математика В.Я. Буняковского, который он сделал 14 февраля 1876 г. на заседании физико-математического отделения Императорской академии наук. В докладе описывается изобретенное ученым вычислительное устройство, которое автор назвал «самосчеты». В.Я. Буняковский пишет: «Мы едва ли ошибемся, утверждая, что ни один из существующих арифметических снарядов, и даже вероятно из тех, которые со временем будут придуманы, не вытеснят из всеобщего у нас употребления простых русских счетов». Прав или нет оказался ученый, судить вам, уважаемый читатель...

Литература

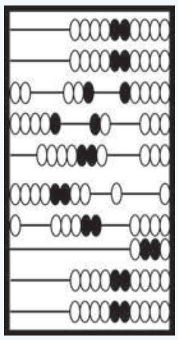
1. *Апокин И.А.*, *Майстров Л.Е.* Развитие вычислительных машин. — М.: Наука, 1974.

2. *Цайгер М.А.* Арифметика в Московском государстве XVI века. — Беэр-Шэва: Берилл, 2010.



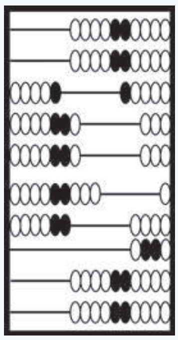
Отложено первое слагаемое (25 081)

⇒

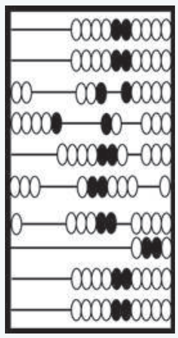


Набрано второе слагаемое (32 715)

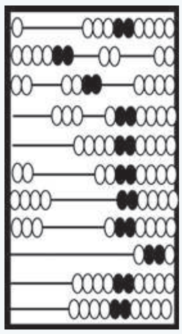
⇒



Получен результат сложения (57 796)



Вычитание без проблем



Пример умножения

ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Гармонический ряд представляет собой сумму, составленную из бесконечного количества членов, обратных последовательным числам натурального ряда.

Ряд назван гармоническим, так как каждый его член, начиная со второго, является гармоническим средним двух соседних.

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{1}}+\frac{1}{\frac{1}{3}}};\quad \frac{1}{3}=\frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{4}}};\quad \frac{1}{4}=\frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{3}}+\frac{1}{\frac{1}{5}}};\quad \frac{1}{5}=\frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{4}}+\frac{1}{\frac{1}{6}}};\ldots$$

Последовательность членов ряда стремится к нулю, однако сумма бесконечно возрастает и сам ряд расходится.

Доказательство расходимости ряда можно построить, группируя слагаемые следующим образом:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=$$

$$=1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\ldots\right)+\ldots>$$

$$>1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\ldots\right)+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}+\ldots$$

Последний ряд, очевидно, расходится.

Это доказательство принадлежит средневековому французскому учёному Николаю Орему (родился до 1330 г., умер в 1382 г.).

Расходится гармонический ряд очень медленно: для того, чтобы частичная сумма превысила 100, необходимо около 10^{43} элементов ряда.

По материалам Википедии