МАТЕМАТИКА

основана в 1992 г.

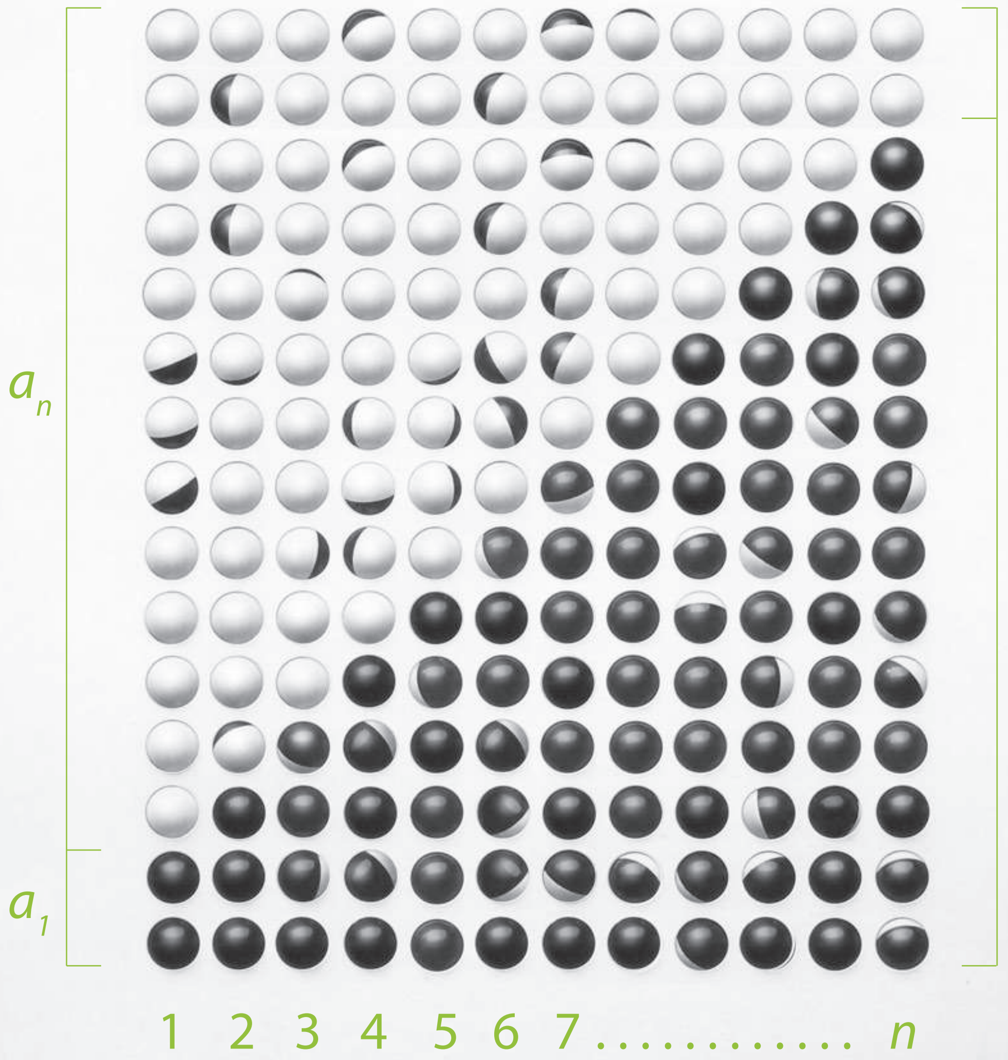
МЕТОДИЧЕСКАЯ ГАЗЕТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

1–15 мая 2011

mat.1september.ru

9

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$



АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ | *см. с. 48*

издательский дом
Первое сентября

1september.ru

МАТЕМАТИКА индексы подписки Почта россии - 79083 (инд.); - 79584 (орг.) Роспечать - 32031 (инд.); - 32598 (орг.)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ
«ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Главный редактор:
Артем Соловейчик
(генеральный директор)
Коммерческая деятельность:
Константин Шмарковский
(финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов:
Сергей Островский
(исполнительный директор)
Реклама и продвижение:
Марк Сартан
Мультимедиа, конференции и техническое обеспечение:
Павел Кузнецов
Производство:
Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение: Андрей Ушаков
Дизайн:
Иван Лукьянов, Андрей Балдин
Педагогический университет:
Валерия Арсланьян
(ректор)

ГАЗЕТЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Первое сентября – Е. Бирюкова,
Английский язык – А. Громушкина,
Библиотека в школе – О. Громова,
Биология – Н. Иванова,
География – О. Коротова,
Дошкольное образование – М. Аромштам,
Здоровье детей – Н. Сёмина,
Информатика – С. Островский,
Искусство – М. Сартан,
История – А. Савельев,
Классное руководство и воспитание школьников – О. Леонтьева,
Литература – С. Волков,
Математика – Л. Рослова,
Начальная школа – М. Соловейчик,
Немецкий язык – М. Бузоева,
Русский язык – Л. Гончар,
Спорт в школе – О. Леонтьева,
Управление школой – Я. Сартан,
Физика – Н. Козлова,
Французский язык – Г. Чесновицкая,
Химия – О. Блохина,
Школьный психолог – И. Вачков

УЧРЕДИТЕЛЬ: ООО «ЧИСТЫЕ ПРУДЫ»
Зарегистрировано ПИ № 77-7241 от 12.04.01
в Министерстве РФ по делам печати
Подписано в печать: по графику 30.03.11,
фактически 30.03.11 Заказ №
Отпечатано в ОАО «Чеховский полиграфический комбинат»
ул. Полиграфистов, д. 1,
Московская область,
г. Чехов, 142300

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: (499) 249-3138
Отдел рекламы: (499) 249-9870
Сайт: 1september.ru

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: (499) 249-4758
E-mail: podpiska@1september.ru

В НОМЕРЕ:

ТЕМА НОМЕРА: НЕПРОСТЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ

К материалам, обозначенным этим символом, есть приложение на CD-диске, вложенном в № 12.

МАТЕМАТИКА
Методическая газета для учителей математики
Основана в 1992 г.
Выходит два раза в месяц

Газета распространяется по подписке
Цена свободная Тираж 10 000 экз.
Тел. редакции: (499) 249-3460
E-mail: mat@1september.ru
Сайт: mat.1september.ru

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, И. Бокова, О. Макарова
Дизайн макета и обложки: И. Лукьянов
Корректор: Л. Громова
Верстка: Д. Кардановская

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Роспечать: инд.–**32030**; орг.–**32594**
Почта России: инд.–**79073**; орг.–**79583**

ЕЩЕ НЕМНОГО, ЕЩЕ ЧУТЬ-ЧУТЬ

Л. РОСЛОВА

Все рано или поздно заканчивается. Вот и подходит к концу учебный год: май – последний учебный месяц. Но можно еще успеть доделать, дорешать, додумать. Сделать последнее усилие. Так приятно осознавать, что еще чуть-чуть — и напряжение уйдет, финишная черта будет достигнута. Можно будет отдохнуть. Вот придут каникулы…

Возможно, для кого-то такие усилия станут решающими. Самое время тем выпускникам, кому математику нужно сдавать в вуз и получать как можно больше баллов, выйти на новый уровень — научиться решать самые сложные задачи, освоить новые методы решения. Пожелаем им успехов и поможем сделать этот финишный рывок. Тем более что впереди у них не только экзамены и принятие ответственного решения, определяющего многое в жизни, – куда пойти учиться, куда отнести заветный сертификат (который еще надо получить!), но и последний звонок, и подготовка к выпускному вечеру, ведь проститься со школой надо так, чтобы это запомнилось на всю жизнь. Голова кругом! И у учителя еще есть возможность нанести на эту, уже оконченную, по сути, картину последний штрих, завершающий мазок. И – с богом!

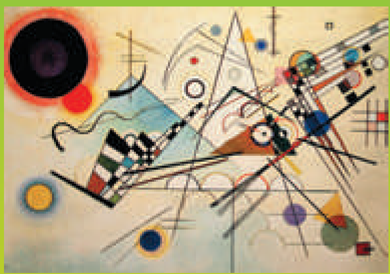
Ну, а у кого-то все это еще далеко впереди, и в непосредственной видимости маячит лето с очередными каникулами. И тут тоже еще можно успеть подготовить для наших каникуляров подходящие задания: чтобы не расслаблялись, чтобы математику не забывали, навыки не теряли. И не испортят такие задания каникул, если выполнять их не из-под палки, а добровольно, с желанием. Осознанный выбор от человека требуется всегда. Давайте учить и этому.

Но как широки и размашисты наши каникулы! Нигде в мире ученики так массированно не отдыхают. Может, это одна из причин переутомления, о котором столько говорится в последнее время? Просто притча во языцех российского образования. Может, равномернее надо? Возможно, причина тому в нашем климате? Но и он, говорят, меняется…

Фото Л.Г. Егоровой

В. БАРДУШКИН,
А. БЕЛОВ,
А. ПРОКОФЬЕВ,
Т. ФАДЕИЧЕВА,
Москва

КОМПОЗИЦИЯ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



В. Кандинский. Композиция VIII

Функция

Function

Swyddogaeth

Függvény

chức năng

λειτουργία

פונקציה

Fheidhm

Funzione

تابع

Funktsioon

Funkce

Fonction

Школьный курс математики предполагает обучение учащихся различным методам решения задач на композицию функций, функциональные уравнения и неравенства. Однако, пожалуй, впервые в явном виде учащиеся общеобразовательных классов сталкиваются с понятием композиция функций в теме «Производная и ее применение» при выводе формулы производной сложной функции. Использование же этого понятия даже в достаточно простых задачах из других тем школьного курса вызывает у них большие трудности. Поэтому обращение авторов к данной теме является актуальным.

Наш опыт показывает, что и в ЕГЭ, и на олимпиадах разного уровня довольно часто встречаются задания на композицию функций, функциональные уравнения и неравенства, которые необходимо решать нетрадиционными способами, но в школьных учебниках не уделяется должного внимания методам их решения. Кроме того, при решении этих задач не подходит ни один стандартный (известный) алгоритм и учащимся приходится применять более широкий спектр теоретических знаний, проявлять сообразительность и умение рассуждать. Можно добавить, что они просто интересны, а решения некоторых из них необыкновенно красивы. Заметим, что такие задачи не выходят за рамки школьной программы, поскольку могут быть решены школьными методами. Поэтому изучение школьниками данной тематики улучшает закрепление пройденного материала, способствует развитию интереса к предмету, позволяет отработать различные способы решения задач при подготовке к ЕГЭ, олимпиадам разного уровня и вступительным испытаниям в вузы (в которых эти испытания сохранились).

Для начала напомним определение. Пусть заданы две функции $y = f(x)$ и $x = g(t)$, причем область определения функции f содержит множество значений функции g. Тогда каждому числу t из области определения функции g соответствует значение $x = g(t)$, принадлежащее области определения функции f, а ему, в свою очередь, соответствует число $y = f(x)$. Таким образом, каждому числу t из области определения функции g ставится в соответствие единственное число y из множества значений функции f, а это означает, что на области определения функции g задана функция, которую называют сложной функцией или композицией функций. При этом пишут $y = f(g(x))$.

Пример 1. Представьте функцию $y=\sqrt{2x^3+3}$ как композицию других элементарных функций.

Решение. Заметим, что задача имеет бесконечно много решений. Приведем лишь одно из них. Рассмотрим функции

$$g(x) = 2x^3 + 3 \text{ и } f(x)=\sqrt{x}.$$

Тогда

$$y=\sqrt{2x^3+3}=f\left(g(x)\right).$$

Пример 2. Дана функция $y = x^2$. Найдите:

а) $y(-x)$; б) $y(x - 1)$; в) $y\left(\frac{1}{x}\right)$.

Решение. а) Функция $y(-x)$ представляет собой композицию функций

$$y(x) = x^2 \text{ и } g(x) = -x.$$

Тогда

$$y(-x) = y(g(x)) = (g(x))^2 = (-x)^2 = x^2.$$

б) Функция $y(x - 1)$ представляет собой композицию функций

$$y(x) = x^2 \text{ и } g(x) = x - 1.$$

Тогда

$$y(x - 1) = y(g(x)) = (g(x))^2 = (x - 1)^2 = x^2- 2x + 1.$$

в) Функция $y\left(\frac{1}{x}\right)$ представляет собой композицию функций

$$y(x) = x^2 \text{ и } g(x)=\frac{1}{x}.$$

Тогда

$$y\left(\frac{1}{x}\right)=y\left(g(x)\right)=\left(g(x)\right)^2=\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{x^2}.$$

Ответ: а) $y(-x) = x^2$; б) $y(x - 1) = x^2 - 2x + 1$; в) $y\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}$.

Пример 3. (*Открытый банк заданий ЕГЭ-2010.*) Найдите $\frac{g(2-x)}{g(2+x)}$, если $g(x)=\sqrt[3]{x(x-4)}$ при $|x|\neq 2$.

Решение. Функция $g(x)$ определена при $x \in R$, $g(2 - x)$ — композиция функций $g(x)$ и $f(x) = 2 - x$, а $g(2 + x)$ — композиция $g(x)$ и $h(x) = 2 + x$. Тогда

$$g(2-x)=g\left(f(x)\right)=\sqrt[3]{(2-x)\left((2-x)-4\right)}=$$

$$=\sqrt[3]{(2-x)(-2-x)}=\sqrt[3]{(x-2)(2+x)},$$

$$g(2+x)=g\left(h(x)\right)=\sqrt[3]{(2+x)\left((2+x)-4\right)}=\sqrt[3]{(2+x)(x-2)}.$$

Отсюда получаем, что выражение $\frac{g(2-x)}{g(2+x)}$ имеет смысл при всех $|x|\neq 2$ и

$$\frac{g(2-x)}{g(2+x)}=\sqrt[3]{\frac{(x-2)(2+x)}{(2+x)(x-2)}}=1.$$

Ответ: 1.

Пример 4. Для функции $f(x) = 2x - 3$ найдите: $f(f(x))$; $f(f(f(x)))$.

Решение. Функция $f(f(x))$ представляет композицию «самой себя». Тогда

$$f(f(x)) = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9.$$

Функция $f(f(f(x)))$ представляет композицию функций

$$f(x) = 2x - 3 \text{ и } g(x) = f(f(x)).$$

Тогда

$$f(f(f(x))) = f(g(x)) = 2g(x) - 3 =$$
$$= 2(4x - 9) - 3 = 8x - 21.$$

Ответ: $f(f(x)) = 4x - 9$; $f(f(f(x))) = 8x - 21$.

Пример 5. Дана функция $f(x) = -x^2 + 4x - 3$. Решите уравнение

$$f(2x + 3) = 4f(x - 2).$$

Решение. Опуская некоторые очевидные рассуждения и выкладки, получим для всех действительных x:

$$f(2x + 3) = -(2x + 3)^2 + 4(2x + 3) - 3 = -4x^2 - 4x,$$
$$f(x - 2) = -(x - 2)^2 + 4(x - 2) - 3 = -x^2 + 8x - 15.$$

Уравнение $f(2x + 3) = 4f(x - 2)$ примет вид:

$$-4x^2 - 4x = -4x^2 + 32x - 60 \Leftrightarrow 36x = 60 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}.$$

Ответ: $\frac{5}{3}$.

Пример 6. Дана функция $f(x)=\frac{x}{x+1}$.

Решите неравенство $2f(x + 3) < f(3x + 5)$.

Решение. $f(x+3)=\frac{x+3}{(x+3)+1}=\frac{x+3}{x+4}$,

$$f(3x+5)=\frac{3x+5}{(3x+5)+1}=\frac{3x+5}{3x+6}.$$

Тогда неравенство $2f(x + 3) < f(3x + 5)$ примет вид:

$$\frac{2x+6}{x+4}<\frac{3x+5}{3x+6} \Leftrightarrow \frac{2x+6}{x+4}-\frac{3x+5}{3x+6}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2+13x+16}{3(x+4)(x+2)}<0.$$

Поскольку $3x^2 + 13x + 16 > 0$ для всех действительных x, то последнее неравенство выполняется при $x \in (-4; -2)$.

Ответ: $(-4; -2)$.

Пример 7. (*МИЭТ, 2004 г., № 9 из 11.*) Найдите значение $f(f(1))$, если $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<-2,\\ -x-5, & x\geq -2.\end{cases}$

Решение. Найдем вначале $f(1)$. Так как $1 \geq -2$, то $f(1) = -1 - 5 = -6$. Значит, $f(f(1)) = f(-6)$. Так как $-6 < -2$, то

$$f(-6) = 2\cdot(-6) + 1 = -11.$$

Итак, $f(f(1)) = -11$.

Ответ: -11.

Пример 8. (*МИЭТ, 2002 г., № 9 из 11.*) Пусть $f(x)=\frac{x^2-14x+33}{9-x^2}$, $g(x)=\sqrt{x}$. Решите неравенство $f(g(x-9))\ge f(4)$.

Решение. Поскольку $g(x-9)=\sqrt{x-9}$, то

$$f(g(x-9))=f\left(\sqrt{x-9}\right)=\frac{\left(\sqrt{x-9}\right)^2-14\sqrt{x-9}+33}{9-\left(\sqrt{x-9}\right)^2}.$$

Так как $f(4)=1$, то неравенство $f(g(x-9))\ge f(4)$ примет вид:

$$\frac{\left(\sqrt{x-9}\right)^2-14\sqrt{x-9}+33}{9-\left(\sqrt{x-9}\right)^2}\ge 1.$$

Пусть $\sqrt{x-9}=t$, тогда $t\ge 0$ и имеем систему:

$$\begin{cases}\frac{t^2-14t+33}{9-t^2}\ge 1,\\ t\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{t^2-7t+12}{t^2-9}\le 0,\\ t\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{t-4}{t+3}\le 0,\\ t\ge 0,\ t\ne 3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le t<3\\ 3<t\le 4.\end{array}\right.$$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$\left[\begin{array}{l}0\le\sqrt{x-9}<3\\ 3<\sqrt{x-9}\le 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le x-9<9\\ 9<x-9\le 16\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}9\le x<18\\ 18<x\le 25.\end{array}\right.$$

Ответ: $[9;\,18)\cup(18;\,25]$.

Пример 9. (*Московская межвузовская олимпиада, 2009 г., № 5.*) Пусть $f(x)=\frac{x}{3}+2$. Найдите значение функции $\underbrace{f(\ldots f(f(x))\ldots)}_{2009\text{ раз}}$ в точке $x=4$.

Решение. Установим вид функции

$$\underbrace{f(\ldots f(f(x))\ldots)}_{n\text{ раз}}$$

для первых трех натуральных значений n.

При $n=1$:

$$f(x)=2+\frac{x}{3}.$$

При $n=2$:

$$f(f(x))=2+\frac{2+\frac{x}{3}}{3}=2+\frac{2}{3}+\frac{x}{3^2}.$$

При $n=3$:

$$f(f(f(x)))=2+\frac{2+\frac{2}{3}+\frac{x}{3^2}}{3}=2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{x}{3^3}.$$

Возникает предположение, что

$$\underbrace{f(\ldots f(f(x))\ldots)}_{n\text{ раз}}=\left(2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2}{3^{n-1}}\right)+\frac{x}{3^n}.$$

Докажем это утверждение методом математической индукции.

При $n=1$, согласно условию задачи, $f(x)=2+\frac{x}{3}$. Утверждение истинно.

Пусть при $n=k$ утверждение истинно и функция $\underbrace{f(\ldots f(f(x))\ldots)}_{n\text{ раз}}$ имеет вид:

$$\underbrace{f(\ldots f(f(x))\ldots)}_{k\text{ раз}}=\left(2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2}{3^{k-1}}\right)+\frac{x}{3^k}.$$

Докажем, что при $n=k+1$ функция $\underbrace{f(\ldots f(f(x))\ldots)}_{n\text{ раз}}$ имеет вид:

$$\underbrace{f(\ldots f(f(x))\ldots)}_{(k+1)\text{ раз}}=\left(2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2}{3^{k}}\right)+\frac{x}{3^{k+1}}.$$

Действительно,

$$\underbrace{f(\ldots f(f(x))\ldots)}_{(k+1)\text{ раз}}=f\left(\underbrace{f(\ldots f(f(x))\ldots)}_{k\text{ раз}}\right)=$$

$$=2+\frac{\left(2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2}{3^{k-1}}\right)+\frac{x}{3^k}}{3}=$$

$$=2+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\ldots+\frac{2}{3^k}\right)+\frac{x}{3^{k+1}}=$$

$$=\left(2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2}{3^k}\right)+\frac{x}{3^{k+1}}.$$

Что и требовалось доказать.

Итак,

$$\underbrace{f(\ldots f(f(x))\ldots)}_{n\text{ раз}}=\left(2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2}{3^{n-1}}\right)+\frac{x}{3^n}$$

при всех натуральных n. Следовательно, при $n=2009$:

$$\underbrace{f(\ldots f(f(x))\ldots)}_{2009\text{ раз}}=\left(2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{2}{3^{2008}}\right)+\frac{x}{3^{2009}}.$$

В последнем соотношении выражение, заключенное в скобки, представляет собой сумму первых 2009 членов геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{3}$ и первым членом, равным 2. Тогда

$$\underbrace{f(\ldots f(f(x))\ldots)}_{2009\text{ раз}}=2\cdot\frac{1-\frac{1}{3^{2009}}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{x}{3^{2009}},$$

или

$$\underbrace{f(\ldots f(f(x))\ldots)}_{2009\text{ раз}}=3+\frac{x-3}{3^{2009}}.$$

Подставляя в последнее соотношение $x=4$, получим ответ:

$$\underbrace{f(\ldots f(f(x))\ldots)}_{2009\text{ раз}}=3+\frac{1}{3^{2009}}.$$

Ответ: $3+3^{-2009}$.

Пример 10. (*МИЭТ, 2002 г., № 10 из 11.*) Постройте график функции $y=3|f(f(x))|+1$, где $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$.

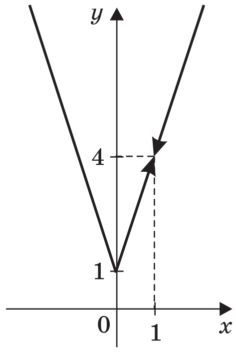


Рис. 1

Решение. Выполним (по определению композиции функций) формальные преобразования:

$$f(f(x))=\frac{f(x)+2}{f(x)-1}=\frac{\frac{x+2}{x-1}+2}{\frac{x+2}{x-1}-1}=x.$$

Найдем область определения функции $f(f(x))$:

$$\begin{cases} x\neq 1, \\ f(x)\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1, \\ \frac{x+2}{x-1}\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\neq 1.$$

Таким образом, функция $y = 3\cdot|f(f(x))| + 1$ может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} y=|3x|+1, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow y=\begin{cases} 1-3x,\ x<0, \\ 3x+1,\ x\geq 0,\ x\neq 1. \end{cases}$$

График функции $y = 3\cdot|f(f(x))| + 1$ изображен на рисунке 1.

Пример 11. (*МИЭТ, 1999 г., № 7 из 11.*) Изобразите на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$|y|=f\left(\frac{4}{f(x)}\right),$$

где $f(x) = 1 - |x|$.

Решение. Преобразуем уравнение, задающее на плоскости Oxy искомое множество точек:

$$|y|=f\left(\frac{4}{f(x)}\right) \Leftrightarrow |y|=f\left(\frac{4}{1-|x|}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |y|=1-\left|\frac{4}{1-|x|}\right| \Leftrightarrow |y|=1-\frac{4}{||x|-1|}.$$

Множество точек на плоскости Oxy, удовлетворяющихуравнению $|y|=1-\frac{4}{||x|-1|}$, очевидно, симметрично относительно координатных осей. Поэтому можно изобразить точки этого множества в первой координатной четверти, а затем окончательно достроить его, последовательно симметрично отразив относительно осей Ox и Oy. Итак, при $x \geq 0$ и $y \geq 0$ уравнение $|y|=1-\frac{4}{||x|-1|}$ примет вид $y=1-\frac{4}{|x-1|}$. Тогда, раскрывая по определению модуль, получим:

$$\begin{cases} x\geq 0,\ y\geq 0, \\ y=1-\frac{4}{|x-1|} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0\leq x<1,\ y\geq 0, \\ y=1+\frac{4}{x-1} \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq 1,\ y\geq 0, \\ y=1-\frac{4}{x-1}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Поскольку при $0 \leq x < 1$ значения $y=1+\frac{4}{x-1}$ отрицательны, то в первой координатной четверти нет точек, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 0\leq x<1,\ y\geq 0, \\ y=1+\frac{4}{x-1}. \end{cases}$$

Множество точек на координатной плоскости, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} x\geq 1,\ y\geq 0, \\ y=1-\frac{4}{x-1}, \end{cases}$$

изображено на рисунке 2.

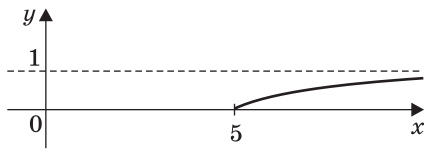


Рис. 2

Окончательно, графическое изображение множества точек на плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют условию $|y|=1-\frac{4}{||x|-1|}$, показано на рисунке 3.

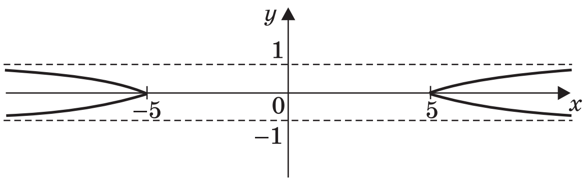


Рис. 3

Пример 12. (*МИЭТ, 1998 г., № 10 из 11.*) Постройте график функции $y = f(f(x))$, где

$$f(x)=\begin{cases} x+2, \text{ если } x\leq 1, \\ 5-2x, \text{ если } x>1. \end{cases}$$

Решение. По определению композиции функций:

$$f(f(x))=\begin{cases} f(x)+2, \\ 5-2f(x). \end{cases}$$

Формально возможны следующие четыре случая:

$$f(f(x))=\begin{cases} (x+2)+2, \\ (5-2x)+2, \\ 5-2(x+2), \\ 5-2(5-2x) \end{cases} \Leftrightarrow f(f(x))=\begin{cases} x+4, \\ 7-2x, \\ 1-2x, \\ 4x-5. \end{cases}$$

Найдем значения переменной x, при которых выполняется каждый из этих четырех случаев.

Первый случай выполняется, когда:

$$\begin{cases} x \le 1, \\ x+2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1, \\ x \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \le -1.$$

Второй случай выполняется, когда:

$$\begin{cases} x > 1, \\ 5-2x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2.$$

Третий случай выполняется, когда:

$$\begin{cases} x \le 1, \\ x+2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1, \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \le 1.$$

Четвертый случай выполняется, когда:

$$\begin{cases} x > 1, \\ 5-2x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Таким образом,

$$f\left(f(x)\right) = \begin{cases} x+4, \ x \le -1, \\ 1-2x, \ -1 < x \le 1, \\ 4x-5, \ 1 < x < 2, \\ 7-2x, \ x \ge 2. \end{cases}$$

График функции $y = f(f(x))$ изображен на рисунке 4.

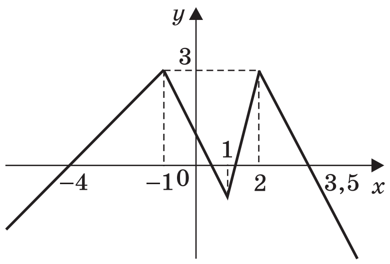


Рис. 4

Пример 13. (*МИЭТ, 2003 г., № 10 из 11.*) Функция $f(x)$ для каждого x равна наименьшему значению многочлена $g(t) = t^2 - 6t + 8$ на отрезке $[x+1;\ x+2]$. Постройте график функции $f(x)$.

Решение. Приведем функцию $g(t)$ к виду:

$$g(t) = (t-3)^2 - 1.$$

Графиком функции $g(t)$ является парабола, ветви которой направлены вверх, с вершиной в точке $(3; -1)$. Значит, наименьшее значение функции $g(t)$ на отрезке $[x+1;\ x+2]$ будет равно -1, если $3 \in [x+1;\ x+2]$, то есть записав систему неравенств

$$\begin{cases} 3 \ge x+1, \\ 3 \le x+2, \end{cases}$$

получим $x \in [1; 2]$.

Если $3 \notin [x+1;\ x+2]$, то наименьшее значение функции $g(t)$ достигается на левом конце отрезка $[x+1;\ x+2]$ (в случае $3 < x+1$) или на правом конце отрезка $[x+1;\ x+2]$ (в случае $3 > x+2$).

Следовательно, если $x > 2$, то наименьшее значение функции $g(t)$ на отрезке $[x+1;\ x+2]$ будет равно

$$g(x+1) = (x+1-3)^2 - 1 = (x-2)^2 - 1.$$

Если же $x < 1$, то наименьшее значение функции $g(t)$ на отрезке $[x+1;\ x+2]$ будет равно

$$g(x+2) = (x+2-3)^2 - 1 = (x-1)^2 - 1.$$

Окончательно получим:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 1, \ x < 1, \\ -1, \ 1 \le x \le 2, \\ (x-2)^2 - 1, \ x > 2. \end{cases}$$

График функции $f(x)$ изображен на рисунке 5.

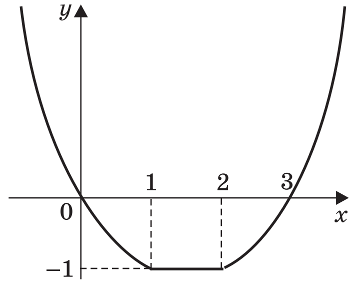


Рис. 5

Далее рассмотрим тип задач, в которых надо найти функцию, если задано некоторое уравнение, в котором в качестве неизвестной выступает сама функция. Такие уравнения называют *функциональными уравнениями*. В дальнейшем будем рассматривать функциональные уравнения, в которых искомые функции связаны с известными функциями одной переменной с помощью операции образования сложной функции. Отметим также, что функциональные уравнения можно рассматривать как выражение свойства, характеризующего тот или иной класс функций. Например, $f(x) = f(-x)$ — уравнение четности, $f(x+T) = f(x)$ — уравнение периодичности и т.д.

Рассмотрим сначала задачи, в которых требуется найти значения функции, не заданной явно, но обладающей свойствами четности (нечетности), периодичности, или когда из данного функционального уравнения надо вывести (доказать) указанные свойства.

Пример 14. (*МИЭТ, 2004 г., № 8 из 11.*) Функция $f(x)$ нечетная и периодическая с периодом $T = 10$. Найдите значение $f(2004)$, если $f(-4) = 1{,}5$.

Решение. Воспользуемся вначале условием периодичности функции $f(x)$. Тогда

$$f(2004) = f(4 + 10 \cdot 200) = f(4).$$

Поскольку функция $f(x)$ нечетная, то $f(-x) = -f(x)$, следовательно,

$$f(4) = -f(-4) = -1{,}5.$$

Ответ: $-1{,}5$.

Пример 15. (*МИЭТ, 2005 г., № 10 из 11.*) Известно, что $f(x)$ нечетная периодическая функция с периодом 4 и $f(x) = x^4 - 2x^3$ при $x \in [0; 2]$. Вычислите сумму $f(1) + f(2) + \ldots + f(150)$.

Решение. $f(0) = 0$,

$$f(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^3 = -1, \ f(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 = 0.$$

Поскольку $f(x)$ нечетная функция, то $f(-x) = -f(x)$, следовательно, $f(-1) = -f(1) = 1$. Так как

$f(x)$ — периодическая с периодом 4, то

$$f(3) = f(3 - 4) = f(-1) = 1,$$
$$f(4) = f(4 - 4) = f(0) = 0,$$
$$f(5) = f(5 - 4) = f(1) = -1,$$
$$f(6) = f(6 - 4) = f(2) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(147) = f(-1 + 4 \cdot 37) = f(-1) = 1,$$
$$f(148) = f(0 + 4 \cdot 37) = f(0) = 0,$$
$$f(149) = f(1 + 4 \cdot 37) = f(1) = -1,$$
$$f(150) = f(2 + 4 \cdot 37) = f(2) = 0.$$

Таким образом, получаем, что искомая сумма равна

$$f(1) + f(2) + (f(3) + f(4) + f(5) + f(6)) + \ldots + (f(147) + f(148) + f(149) + f(150)) = -1 + 0 + (1 + 0 - 1 + 0) + \ldots + (1 + 0 - 1 + 0) = -1.$$

Ответ: -1.

Пример 16. Известно, что $f(x + 3) = 2f(x) - 5$ при всех x. Выразите $f(x + 6)$ и $f(x + 9)$ через $f(x)$.

Решение. Пусть $x + 3 = t + 6$, тогда $x = t + 3$, и исходное функциональное уравнение примет вид:

$$f(t + 6) = 2f(t + 3) - 5.$$

В последнем уравнении вместо переменной (буквы) t может выступать любая другая буква. Поэтому, заменив t на x, получим:

$$f(x + 6) = 2f(x + 3) - 5.$$

Теперь подставим $f(x + 3) = 2f(x) - 5$ в правую часть получившегося соотношения, тогда

$$f(x + 6) = 2 \cdot (2f(x) - 5) - 5 \Leftrightarrow f(x + 6) = 4f(x) - 15.$$

В исходном функциональном уравнении $f(x + 3) = 2f(x) - 5$ совершим теперь замену $x + 3 = t + 9$. Тогда $x = t + 6$, и данное соотношение примет вид $f(t + 9) = 2f(t + 6) - 5$. В этом уравнении вместо переменной t тоже может выступать любая другая буква. Поэтому, заменив t на x, получим: $f(x + 9) = 2f(x + 6) - 5$. Подставим уже найденное выражение $f(x + 6) = 4f(x) - 15$ в правую часть последнего соотношения для $f(x + 9)$, тогда

$$f(x + 9) = 2 \cdot (4f(x) - 15) - 5 \Leftrightarrow f(x + 9) = 8f(x) - 35.$$

Ответ: $f(x + 6) = 4f(x) - 15$;
$f(x + 9) = 8f(x) - 35$.

Пример 17. (*МИЭТ, 1994 г., № 6 из 11.*) Известно, что равенство $f(x + 2) = -f(x)$ имеет место для всех действительных x. Докажите, что функция $f(x)$ является периодической с периодом 4.

Решение. Пусть $t = x + 2$, тогда $x = t - 2$, и соотношение $f(x + 2) = -f(x)$ примет вид $f(t) = -f(t - 2)$. В последнем уравнении вместо переменной (буквы) t может выступать любая другая буква. Поэтому, заменив t на x, получим: $f(x) = -f(x - 2)$. Подставим последнее выражение для $f(x)$ в исходное уравнение и выполним преобразования:

$$f(x + 2) = -(-f(x - 2)) \Leftrightarrow f(x + 2) = f(x - 2).$$

Пусть $u = x - 2$, тогда $x + 2 = u + 4$, и соотношение $f(x + 2) = f(x - 2)$ примет вид:

$$f(u + 4) = f(u) \Leftrightarrow \text{переобозначение: } u \leftrightarrow x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x + 4) = f(x).$$

Это означает, что функция $f(x)$ является периодической с периодом 4.

Пример 18. (*МИЭТ, 1999 г., № 9 из 11.*) Функция $f(x)$, определенная при всех значениях x и не равная 1 ни при каком значении x, удовлетворяет условию $f(x+2)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$. Найдите $f(2000)$, если $f(2) = 3$.

Решение. Докажем, что функция $f(x)$ является периодической, и найдем ее период. Пусть $t = x + 2$, тогда $x = t - 2$, и соотношение $f(x+2)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ примет вид

$$f(t)=\frac{1+f(t-2)}{1-f(t-2)}.$$

В этом уравнении вместо переменной (буквы) t может выступать любая другая буква. Поэтому, заменив t на x, получим:

$$f(x)=\frac{1+f(x-2)}{1-f(x-2)}.$$

Подставим последнее выражение для $f(x)$ в исходное соотношение и выполним преобразования:

$$f(x+2)=\frac{1+\dfrac{1+f(x-2)}{1-f(x-2)}}{1-\dfrac{1+f(x-2)}{1-f(x-2)}} \Leftrightarrow f(x+2)=-\frac{1}{f(x-2)}.$$

Пусть $u = x - 2$, тогда $x + 2 = u + 4$, и соотношение $f(x+2)=-\dfrac{1}{f(x-2)}$ примет вид:

$$f(u+4)=-\frac{1}{f(u)} \Leftrightarrow \text{переобозначение: } u \leftrightarrow x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x+4)=-\frac{1}{f(x)}.$$

Пусть $v = x + 4$, тогда $x = v - 4$, и соотношение $f(x+4)=-\dfrac{1}{f(x)}$ примет вид:

$$f(v)=-\frac{1}{f(v-4)} \Leftrightarrow \text{переобозначение: } v \leftrightarrow x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{f(x-4)}.$$

Подставим последнее выражение для $f(x)$ в уравнение $f(x+4)=-\dfrac{1}{f(x)}$ и выполним преобразования:

$$f(x+4)=-\frac{1}{-\dfrac{1}{f(x-4)}} \Leftrightarrow f(x + 4) = f(x - 4).$$

Пусть $w = x - 4$, тогда $x + 4 = w + 8$, и уравнение $f(x + 4) = f(x - 4)$ примет вид:

$$f(w + 8) = f(w) \Leftrightarrow \text{переобозначение: } w \leftrightarrow x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x + 8) = f(x).$$

Таким образом, функция $f(x)$ является периодической с периодом 8. Отсюда следует, что значение функции $f(x)$ при $x = 2000$ будет равно значению $f(x)$ при $x = 8$, так как $2000 = 8 \cdot 249 + 8$. Найдем:

$$f(4)=f(2+2)=\frac{1+f(2)}{1-f(2)}=\frac{1+3}{1-3}=\frac{4}{-2};$$

$$f(6)=f(4+2)=\frac{1+f(4)}{1-f(4)}=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3};$$

$$f(8)=f(6+2)=\frac{1+f(6)}{1-f(6)}=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $f(2000) = f(8) = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

Пример 19. (*МИЭТ, 2005 г., № 8 из 11.*) Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет равенству $f(x + 3) = x + 5 - f(x)$, а при $x \in [0; 3)$ задается формулой $f(x) = 1 + 6{,}5x - x^2$. Найдите $f(100)$.

Решение. В функциональном уравнении $f(x+3) = x + 5 - f(x)$ сделаем замену $t = x + 3$, тогда $x = t - 3$, и соотношение $f(x + 3) = x + 5 - f(x)$ примет вид:

$$f(t) = t + 2 - f(t - 3) \Leftrightarrow \text{переобозначение: } t \leftrightarrow x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x) = x + 2 - f(x - 3).$$

Подставим последнее выражение для $f(x)$ в уравнение $f(x + 3) = x + 5 - f(x)$ и выполним преобразования:

$$f(x + 3) = x + 5 - (x + 2 - f(x - 3)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x + 3) = 3 + f(x - 3).$$

Пусть $w = x - 3$, тогда $x + 3 = w + 6$, и уравнение $f(x + 3) = 3 + f(x - 3)$ примет вид:

$$f(w + 6) = 3 + f(w) \Leftrightarrow \text{переобозначение: } w \leftrightarrow x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x + 6) = 3 + f(x).$$

Значит, функция $f(x)$ является «почти периодической» с периодом 6. Причем при любом x значение функции f в точке $x + 6$ увеличивается на 3 по сравнению с ее значением в точке x. Поскольку $100 = 6 \cdot 16 + 4$, то

$$f(100) = 3 \cdot 16 + f(4) \Leftrightarrow f(100) = 48 + f(4).$$

Осталось вычислить $f(4)$. Для этого воспользуемся соотношением $f(x + 3) = x + 5 - f(x)$. При $x = 1$ получим:

$$f(4) = 1 + 5 - f(1) \Leftrightarrow f(4) = 6 - f(1).$$

Найдем теперь $f(1)$. Поскольку $1 \in [0; 3)$, то функция $f(x)$ при $x = 1$ задается формулой $f(x) = 1 + 6{,}5x - x^2$. Тогда $f(1) = 1 + 6{,}5 \cdot 1 - 1^2 = 6{,}5$.

Таким образом,

$$f(100) = 48 + f(4) \Leftrightarrow f(100) = 48 + 6 - f(1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(100) = 54 - 6{,}5 \Leftrightarrow f(100) = 47{,}5.$$

Ответ: 47,5.

Функция $f(x)$ называется решением данного функционального уравнения, если при подстановке ее в уравнение последнее превращается в тождество при всех значениях аргумента в области ее определения. Решить функциональное уравнение — означает установить, имеет ли оно решения, и найти их, если таковые имеются.

Пример 20. (*LXVIV Московская математическая олимпиада, окружной тур, 11 класс, 2006 г., № 3.*) Найдите все такие функции $f(x)$, что

$$f(2x + 1) = 4x^2 + 14x + 7.$$

Решение. Пусть $t = 2x + 1$, тогда $x=\frac{t-1}{2}$. Совершив замену переменной в уравнении $f(2x + 1) = 4x^2 + 14x + 7$, получим:

$$f(t)=4\cdot\left(\frac{t-1}{2}\right)^2+14\cdot\frac{t-1}{2}+7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(t) = t^2 - 2t + 1 + 7t - 7 + 7 \Leftrightarrow f(t) = t^2 + 5t + 1.$$

В последнем соотношении для функции $f(t)$ вместо переменной (буквы) t может выступать любая другая переменная (буква). Поэтому, заменив букву t на букву x, получим: $f(x) = x^2 + 5x + 1$.

Ответ: $f(x) = x^2 + 5x + 1$.

Пример 21. (*МИЭТ, 1995 г., № 11 из 11.*) Найдите $f(x)$, если для всех $x \neq 0$ имеет место соотношение $(x+1)\cdot f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x+3$.

Решение. Предположим, что функция $f(x)$, удовлетворяющая функциональному уравнению $(x+1)\cdot f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x+3$, существует. Тогда можно выполнить описанные ниже преобразования.

Пусть $t=\frac{1}{x}$, тогда $x=\frac{1}{t}$, и исходное уравнение примет вид:

$$\left(\frac{1}{t}+1\right)\cdot f\left(\frac{1}{t}\right)+2f(t)=\frac{1}{t}+3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \text{переобозначение: } t \leftrightarrow x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+1\right)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{1}{x}+3.$$

Получаем систему

$$\begin{cases}(x+1)\cdot f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x+3,\\ \left(\frac{1}{x}+1\right)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{1}{x}+3.\end{cases}$$

Из первого уравнения системы выразим $f\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x+3}{2}-\frac{x+1}{2}\cdot f(x).$$

Подставим $f\left(\frac{1}{x}\right)$ во второе уравнение системы. Получим:

$$\frac{x+1}{x}\cdot\left(\frac{x+3}{2}-\frac{x+1}{2}\cdot f(x)\right)+2f(x)=\frac{1+3x}{x}.$$

По условию $x \neq 0$. Поэтому, умножив обе части последнего уравнения на $2x$ и приведя подобные члены, получим соотношение:

$$f(x) \cdot (x - 1)^2 = (x - 1)^2.$$

Отсюда следует, что $f(x)=1$ при $x\neq 1$. При $x=1$ из исходного уравнения $(x+1)\cdot f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x+3$ получаем $f(1)=1$.

Проверкой убеждаемся, что функция $f(x)=1$ при всех $x\neq 0$ удовлетворяет условию задачи.

Замечание. В условии данной задачи не было указано, что функция $f(x)$, удовлетворяющая функциональному уравнению $(x+1)\cdot f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x+3$, существует. Предположив, что такая функция $f(x)$ имеется, мы осуществили логический переход к *следствию*. Поэтому проверка в этой ситуации необходима.

Ответ: $f(x)=1$, $x\neq 0$.

Пример 22. (*МГУ, ВМК, устный экзамен, 1997 г.*) Существует ли линейная функция $f(x)$, удовлетворяющая для всех x соотношению

$$f(x+1)+f(2x)=(x+1)^2?$$

Решение. Функция $f(x)$ является линейной тогда и только тогда, когда она может быть задана формулой $f(x)=kx+b$. Тогда

$$f(x+1)=k(x+1)+b,$$
$$f(2x)=k\cdot 2x+b.$$

Следовательно, должны существовать такие единственные k и b, что *для всех значений* x будет выполняться равенство

$$k(x+1)+b+2kx+b=(x+1)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3kx+(k+2b)=x^2+2x+1.$$

Полученное равенство не может выполняться *при любых значениях* x (многочлен первой степени $3kx+(k+2b)$ не при всех x может равняться многочлену второй степени x^2+2x+1). Это означает, что линейной функции, удовлетворяющей данным условиям, не существует.

Ответ: не существует.

Пример 23. (*МГУ, экономический факультет, 1997 г., № 6.*) Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является нечетной, периодической с периодом 4, и на промежутке $0\le x\le 2$ ее значения вычисляются по правилу $f(x)=1-|x-1|$. Решите уравнение

$$2f(x)\cdot f(x-8)+5f(x+12)+2=0.$$

Решение. Раскроем модуль в выражении для функции $f(x)$ на отрезке $[0;2]$:

$$f(x)=\begin{cases}1+x-1, & 0\le x<1,\\ 1-x+1, & 1\le x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1,\\ -x+2, & 1\le x\le 2.\end{cases}$$

Так как функция $f(x)$ — нечетная, то

$$f(x)=\begin{cases}x, & -1<x<0,\\ -x-2, & -2\le x\le -1.\end{cases}$$

По условию, функция $f(x)$ — периодическая с периодом 4. Значит, $f(x-8)=f(x)$, $f(x+12)=f(x)$. Значит, исходное уравнение примет вид:

$$2f(x)\cdot f(x)+5f(x)+2=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2f^2(x)+5f(x)+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=-2\\ f(x)=-0,5.\end{array}\right.$$

Найдем решения последней совокупности на отрезке $[-2;2]$ (то есть на одном из полных периодов функции $f(x)$).

Если $f(x)=-2$, то:

при $x\in[-2;-1]$ получим уравнение $-x-2=-2$, решением которого является значение $x=0$, не удовлетворяющее условию $x\in[-2;-1]$;

при $x\in(-1;1)$ получим $x=-2$, что не удовлетворяет условию $x\in(-1;1)$;

при $x\in[1;2]$ получим уравнение $-x+2=-2$, решением которого является $x=4$, не удовлетворяющее условию $x\in[1;2]$.

Если $f(x)=-0,5$, то:

при $x\in[-2;-1]$ получим уравнение $-x-2=-0,5$, решением которого является $x=-1,5$, $-1,5\in[-2;-1]$;

при $x\in(-1;1)$ получим $x=-0,5$, $-0,5\in(-1;1)$;

при $x\in[1;2]$ получим уравнение $-x+2=-0,5$, решением которого является $x=2,5$, не удовлетворяющее условию $x\in[1;2]$.

Поскольку функция $f(x)$ является периодической с периодом 4, то окончательно получим две серии решений уравнения $2f(x)\cdot f(x-8)+5f(x+12)+2=0$:

$$x=-1,5+4k,\ k\in\mathbf{Z};\ x=-0,5+4n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $-1,5+4k$, $k\in\mathbf{Z}$; $-0,5+4n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Пример 24. (*LXX Московская математическая олимпиада, окружной тур, 11-й класс, 2007 г., № 4.*) Функция $f(x)$ такова, что для любых положительных x и y выполняется равенство $f(xy)=f(x)+f(y)$. Найдите $f(2007)$, если $f\left(\frac{1}{2007}\right)=1$.

Решение. По условию $f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)$, или $f(1)=2f(1)$. Значит, $f(1)=0$. Кроме того, для всех положительных x выполнено:

$$f(1)=f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow 0=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow f(x)=-f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Отсюда, при $x=2007$, получим:

$$f(2007)=-f\left(\frac{1}{2007}\right)\Leftrightarrow f(2007)=-1.$$

Ответ: -1.

Пример 25. (*МГУ, биологический факультет, 2005 г., № 7.*) Функция $f(x)$ такова, что для всех рациональных чисел x и y выполнено равенство $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Известно, что $f(10)=-\pi$. Найдите $f\left(-\frac{2}{7}\right)$.

Решение. По условию $f(0+0)=f(0)+f(0)$, или $f(0)=f(0)+f(0)$. Значит, $f(0)=0$. Кроме того,

$$f(0)=f(x-x), \text{ или } 0=f(x+(-x)).$$

Отсюда получим:

$$f(x+(-x))=f(x)+f(-x)\Leftrightarrow 0=f(x)+f(-x).$$

Следовательно, $f(-x)=-f(x)$. Значит, $f\left(-\frac{2}{7}\right)=$ $=-f\left(\frac{2}{7}\right)$. Далее,

$$f(10)=f\left(34\cdot\frac{2}{7}+\frac{2}{7}\right)=f\left(34\cdot\frac{2}{7}\right)+f\left(\frac{2}{7}\right)=$$

$$=f\left(33\cdot\frac{2}{7}+\frac{2}{7}\right)+f\left(\frac{2}{7}\right)=f\left(33\cdot\frac{2}{7}\right)+f\left(\frac{2}{7}\right)+f\left(\frac{2}{7}\right)=\ldots=$$

$$=\underbrace{f\left(\frac{2}{7}\right)+f\left(\frac{2}{7}\right)+\ldots+f\left(\frac{2}{7}\right)}_{35\text{ раз}}=35f\left(\frac{2}{7}\right).$$

Таким образом, $f\left(\frac{2}{7}\right)=\frac{f(10)}{35}=-\frac{\pi}{35}$. Отсюда искомое значение $f\left(-\frac{2}{7}\right)=\frac{\pi}{35}$.

Ответ: $\frac{\pi}{35}$.

Пример 26. (*МГУ, химический факультет, 1999 г., № 7.*) Функция $f(x)$ удовлетворяет следующему условию: для любых чисел a и b выполняется равенство

$$f\left(\frac{a+2b}{3}\right)=\frac{f(a)+2f(b)}{3}.$$

Найдите $f(1999)$, если $f(1)=1$, $f(4)=7$.

Решение. При $b=0$ исходное функциональное уравнение примет вид:

$$f\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{f(a)+2f(0)}{3}.$$

При $a=0$ исходное уравнение примет вид:

$$f\left(\frac{2b}{3}\right)=\frac{f(0)+2f(b)}{3}.$$

Сложив два последних уравнения, получим:

$$f\left(\frac{a}{3}\right)+f\left(\frac{2b}{3}\right)=\frac{f(a)+2f(b)}{3}+f(0)\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{a}{3}\right)+f\left(\frac{2b}{3}\right)=f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(0)\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{a}{3}+\frac{2b}{3}\right)=f\left(\frac{a}{3}\right)+f\left(\frac{2b}{3}\right)-f(0)\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{замена: } x=\frac{a}{3},\; y=\frac{2b}{3}\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x+y)=f(x)+f(y)-f(0).$$

Если $x+y=1$, то $y=1-x$. Тогда уравнение $f(x+y)=f(x)+f(y)-f(0)$ с учетом условия $f(1)=1$ примет следующий вид:

$$f(1)=f(x)+f(1-x)-f(0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1=f(x)+f(1-x)-f(0).$$

Если же $x+y=4$, то $y=4-x$. Тогда уравнение $f(x+y)=f(x)+f(y)-f(0)$ с учетом условия $f(4)=7$ примет вид:

$$f(4)=f(x)+f(4-x)-f(0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7=f(x)+f(4-x)-f(0).$$

Вычитая из уравнения $7=f(x)+f(4-x)-f(0)$ уравнение $1=f(x)+f(1-x)-f(0)$, получим соотношение:

$$f(4-x)=6+f(1-x).$$

Пусть $t=1-x$, тогда $4-x=t+3$, и уравнение $f(4-x)=6+f(1-x)$ примет вид:

$$f(t+3)=6+f(t)\Leftrightarrow \text{переобозначение: } t\leftrightarrow x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x+3)=6+f(x).$$

Значит, функция $f(x)$ является «почти периодической» с периодом 3. Причем при любом x значение функции f в точке $x+3$ увеличивается на 6 по сравнению с ее значением в точке x. Поскольку $1999=3\cdot 666+1$, то

$$f(1999)=6\cdot 666+f(1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(1999)=3996+1=3997.$$

Ответ: 3997.

Пример 27. (*LXXI Московская математическая олимпиада, окружной тур, 11-й класс, 2008 г., № 4.*) Непрерывная функция $f(x)$ такова, что для всех действительных x выполняется неравенство $f\left(x^2\right)-\left(f(x)\right)^2\ge\frac{1}{4}$. Верно ли, что функция $f(x)$ обязательно имеет точки экстремума?

Решение. При $x=0$, получим:

$$f(0)-\left(f(0)\right)^2\ge\frac{1}{4}\;\Leftrightarrow\;\left(f(0)\right)^2-f(0)+\frac{1}{4}\le 0\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(f(0)-\frac{1}{2}\right)^2\le 0\;\Leftrightarrow f(0)=\frac{1}{2}.$$

Аналогично, при $x=1$:

$$f(1)-\left(f(1)\right)^2\ge\frac{1}{4}\;\Leftrightarrow\;\left(f(1)\right)^2-f(1)+\frac{1}{4}\le 0\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(f(1)-\frac{1}{2}\right)^2\le 0\;\Leftrightarrow f(1)=\frac{1}{2}.$$

Так как непрерывная функция принимает одинаковые значения на концах отрезка $[0;\,1]$, то внутри этого отрезка существует хотя бы одна точка максимума или точка минимума.

Замечание. Если $f(x)=\frac{1}{2}$ для всех $x\in[0;\,1]$, то любая точка этого отрезка является точкой экстремума.

Ответ: да, верно.

В заключение статьи рассмотрим задачу С5 одного из вариантов ЕГЭ по математике 2009 года.

Пример 28. Решите уравнение

$$87\cos x^2+(8-6x)^4=x^8+87\cos(8-6x).$$

Решение. Приведем данное уравнение к виду

$$x^8-87\cos x^2=(8-6x)^4-87\cos(8-6x).$$

Введем непрерывную четную функцию $f(t)=$ $=t^4-87\cos t$. Найдем ее производную:

$$f'(t)=4t^3+87\sin t.$$

При $t \in (0; \pi)$:

$$f'(t) = 4t^3 + 87\sin t > 0 + 0 = 0,$$

а при $t \in [\pi; +\infty)$:

$$f'(t) = 4t^3 + 87\sin t > 4\pi^3 - 87 > 4\cdot 3^3 - 87 = = 4\cdot 27 - 87 > 0.$$

Таким образом, $f'(t) > 0$ при $t \in (0; +\infty)$, следовательно, $f(t)$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Значит, каждое свое значение функция принимает в точности в двух симметричных относительно $t = 0$ точках (если $t = 0$, то исходное уравнение не имеет решений, так как при $x^2 = 0$ не выполняется $8 - 6x = 0$), а стало быть, исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 8-6x \\ x^2 = 6x-8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+6x-8=0 \\ x^2-6x+8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3-\sqrt{17} \\ x=-3+\sqrt{17} \\ x=2 \\ x=4. \end{array}\right.$$

Ответ: $-3-\sqrt{17};\ -3+\sqrt{17};\ 2;\ 4.$

Авторы настоящей статьи ставили перед собой цель познакомить заинтересованного читателя с основными подходами и методами решения задач, в которых фигурирует понятие сложной функции. Надеемся, что подобранный и систематизированный нами материал, а также максимально подробное его изложение будут полезны как учителям, так и школьникам.

В заключение читателю предлагается подборка заданий для самостоятельного решения с ответами. Авторы не сомневаются, что решение этих задач поможет учащимся при подготовке к различным творческим и аттестационным испытаниям.

Задачи для самостоятельного решения

1. (*МИЭТ, 2004 г., № 8 из 11.*) Функция $f(x)$ нечетная и периодическая с периодом $T = 40$. Найдите значение $f(2004)$, если $f(-4) = -4{,}5$.

2. (*МИЭТ, 2004 г., № 9 из 11.*) Найдите значение $f(f(1))$, если

$$f(x) = \begin{cases} 7-2x, & x<2, \\ 2x-1, & x\ge 2. \end{cases}$$

3. (*МИЭТ, 2002 г., № 9 из 11.*) Пусть

$$f(x) = \sqrt{2x-7},\quad g(x) = \frac{3x^2-22x+35}{x^2-4x-5}.$$

Решите неравенство $f(4) \le g(f(x+3))$.

4. (*МИЭТ, 2002 г., № 10 из 11.*) Постройте график функции $y = 2\cdot|f(f(x))| - 1$, где $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$.

5. (*МИЭТ, 1999 г., № 7 из 11.*) Изобразите на плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $|y| = f\left(\left|\dfrac{1}{f(|x|)}\right|\right)$, где $f(x) = x - 2$.

6. (*МИЭТ, 1998 г., № 10 из 11.*) Постройте график функции $y = f(f(x))$, где $f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{если } x\le 2, \\ 2x-4, & \text{если } x>2, \end{cases}$

7. (*МИЭТ, 2003 г., № 10 из 11.*) Функция $f(x)$ для каждого x равна наибольшему значению многочлена $g(t) = -t^2 - 8t - 15$ на отрезке $[x - 3; x + 1]$. Постройте график функции $f(x)$.

8. Найдите $f(x)$, если:

а) $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$;

б) $f(x+4) = x^2 + 8x + 2$;

в) $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2},\ x \ne 0$;

г) $f(2-x) = 8 + 4x - x^2$;

д) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2},\ x > 0$;

е) $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = x^2,\ x \ne \pm 1$.

9. (*МИЭТ, 1994 г., № 6 из 11.*) Известно, что равенство $f(x+1) = -\dfrac{1}{f(x)}$ имеет место для всех действительных x. Докажите, что функция $f(x)$ является периодической с периодом 2.

10. (*МИЭТ, 1999 г., № 9 из 11.*) Функция $f(x)$, определенная при всех значениях x и не равная 0 ни при каком значении x, удовлетворяет равенству $f(x+4) = \dfrac{f(x)-1}{f(x)}$. Найдите $f(2004)$, если $f(8) = 5$.

11. (*МИЭТ, 2005 г., № 10 из 11.*) Известно, что $f(x)$ нечетная периодическая функция с периодом 6 и $f(x) = 3x - x^2$ при $x \in [0; 3]$. Вычислите сумму $f(1) + f(2) + \ldots + f(100)$.

12. (*МИЭТ, 1995 г., № 11 из 11.*) Найдите $f(x)$, если для всех x имеет место соотношение

$$xf(x) + f(2 - x) = 2(x + 1).$$

13. (*МИЭТ, 2005 г., № 8 из 11.*) Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет равенству

$$f(x + 4) = 2x - 1 - f(x),$$

а при $x \in [0; 4)$ задается формулой $f(x) = x^2 - 3x$. Найдите $f(135)$.

14. (*МГУ, ВМК, устный экзамен, 1997 г.*) Существует ли линейная функция $f(x)$, удовлетворяющая для всех x соотношению

$$2f(x + 2) + f(4 - x) = 2x + 5?$$

15. (*МГУ, химический факультет, 2001 г., № 7.*) Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет уравнению

$$f(x + 1) = f(x) + 2x + 1.$$

Найдите $f(2001)$, если $f(0) = 0$.

16. (*МГУ, биологический факультет, 2005 г., № 7.*) Функция $f(x)$ такова, что для всех рациональных чисел x и y выполнено равенство $f(x + y) = f(x)\cdot f(y)$. Известно, что $f(4) = 16$. Найдите $f(-1{,}5)$.

17. (*ЕГЭ-2009, задача С5.*) Решите уравнение
$x^6 - |7 - 6x|^3 = 26\cos x^2 - 26\cos(7 - 6x)$.

18. (*ЕГЭ-2009, задача С5.*) Решите уравнение
$x^6 - |4x + 3|^3 = 25\cos x^2 - 25\cos(4x + 3)$.

Ответы

1. 4,5. **2.** 9.

3. $[8{,}5;\ 13) \cup (13;\ +\infty)$.

4. $y = \begin{cases} -1 - 2x, & x < 0, \\ 2x - 1, & x \ge 0,\ x \ne 1 \end{cases}$ (рис. 6).

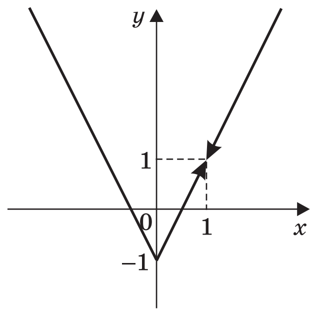


Рис. 6

5. $|y| = \dfrac{1}{||x| - 2|} - 2$ (рис. 7).

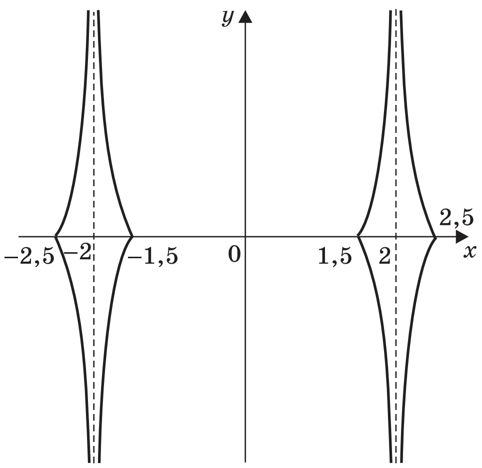


Рис. 7

6. $f(f(x)) = \begin{cases} -2x, & x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 2, \\ 6 - 2x, & 2 < x \le 3, \\ 4x - 12, & x > 3 \end{cases}$ (рис. 8).

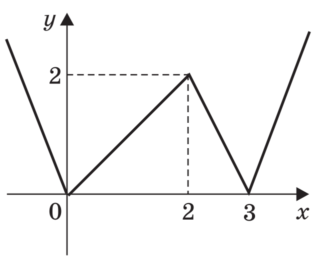


Рис. 8

7. $f(x) = \begin{cases} 1 - (x+5)^2, & x < -5, \\ 1, & -5 \le x \le -1, \\ 1 - (x+1)^2, & x > -1 \end{cases}$ (рис. 9).

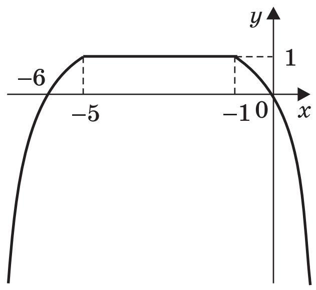


Рис. 9

8. а) $f(x) = x^2 - 5x + 6$; б) $f(x) = x^2 - 14$; в) $f(x) = x^2 - 2$, $x \ne 0$; г) $f(x) = 12 - x^2$; д) $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$, $x > 0$; е) $f(x) = \left(\dfrac{x}{x - 1}\right)^2$, $x \ne \pm 1$.

10. 0,8.

11. 2.

12. $f(x) = 2$.

13. 133.

14. Существует (и единственная!) $f(x) = 2x - \dfrac{11}{3}$.

15. 2001^2. *Указание.* Достаточно доказать, что функция $f(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению $f(x + a) = f(x - a) + 4ax$ при любом натуральном a. Это можно сделать, например, с помощью метода математической индукции. Тогда, положив $x = a$, из уравнения $f(2a) = f(0) + 4a^2$ можно вычислить $f(2000)$: $f(2000) = 2000^2$. Тогда получим: $f(2000 + 1) = f(2000) + 2 \cdot 2000 + 1$, или $f(2001) = 2001^2$. *Замечание.* Можно также доказать, что общее решение исходного функционального уравнения имеет вид $f(x) = x^2 + g(x)$, где $g(x)$ — произвольная периодическая функция с периодом $T = 1$, определенная на всей числовой прямой.

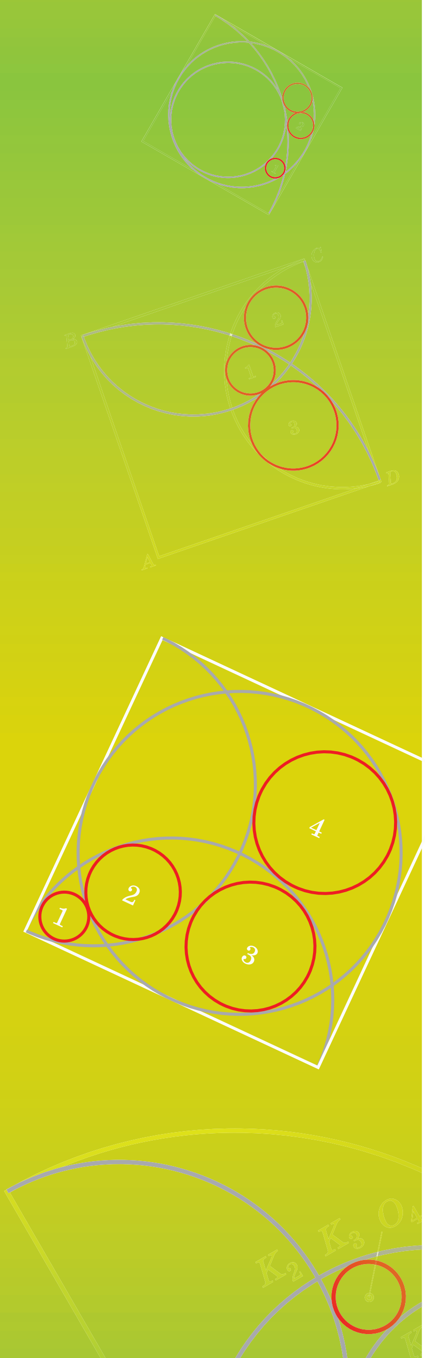
16. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. *Указание.* Установите вначале, что $f(0) = 1$. Затем, показав, что $f(x) \ne 0$, докажите равенство $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Выведите для всех натуральных n соотношение $f(nx) = f^n(x)$. Поскольку $f(4) = f(8 \cdot 0{,}5)$, или $16 = f^8(0{,}5)$, то $f(0{,}5) = \sqrt{2}$. (Подумайте, почему $f(x) > 0$?!) Тогда $f(1{,}5) = f(3 \cdot 0{,}5)$. *Замечание.* Можно также доказать, что $f(x) = 2^x$ для рациональных x.

17. $-7;\ 1;\ 3 - \sqrt{2};\ 3 + \sqrt{2}$.

18. $-3;\ -1;\ 2 - \sqrt{7};\ 2 + \sqrt{7}$.

А. ХАЛИУЛЛИН,
с. Старые Какерли,
Республика Татарстан

ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ЕГЭ



Обучение решению планиметрических задач — важнейшая составляющая преподавания математики. Решение задач развивает математическое мышление, геометрическую интуицию, творческую активность учащихся, формирует умение применять теоретические знания на практике.

Однако, как показывает практика обучения и анализ результатов ЕГЭ, умение решать планиметрические задачи оставляет желать лучшего. Причина — сложившаяся и ставшая традиционной практика обучения решению задач по по образцу.

Обычно, приступая к решению задачи по планиметрии, учитель предлагает выполнить рисунок, выясняет, что известно и что нужно найти. В процессе выполнения рисунка анализируется условие задачи, устанавливается взаимное расположение отдельных элементов геометрической фигуры и взаимосвязь между ними. Выполнение рисунка требует знания свойств геометрических фигур, умения применять эти свойства на практике.

Если в условии задачи оказывается недостаточно данных для решения, то возникает вопрос о выполнении дополнительного построения, которое преобразовало бы условие задачи и направило мысль учащихся в нужном направлении.

Имеется немало задач, процесс решения которых состоит в последовательном уточнении рассматриваемой конфигурации — с соответствующими изменениями рисунка, окончательный вид рисунок принимает лишь с окончанием решения.

В данной работе предлагается несколько планиметрических задач, детальный анализ которых позволит убедиться в реальной и существенной пользе проделанной работы.

Проиллюстрируем сказанное на геометрических задачах на взаимное расположение окружностей и взаимное расположение прямой и окружности, которые могут быть рассмотрены на факультативных или внеурочных занятиях с наиболее успевающими учащимися.

Решение этих задач, как и большого класса других задач на вычисление, сводится к последовательному решению ряда прямоугольных треугольников. Но в рисунках к задачам их сразу не видно, поэтому учителю необходимо обучать учащихся умению видеть, чего не достает в рисунке и какие линии надо провести, чтобы можно было создать прямоугольные треугольники и с помощью теоремы Пифагора составить уравнения, из которых будут найдены искомые величины.

Поскольку здесь мы имеем дело с окружностями и ее дугами, то является очевидным использование следующих утверждений:

— если две окружности касаются внешне или внутренне, то точка касания и центры этих окружностей лежат на одной прямой;

— расстояние между центрами двух внешне касающихся окружностей равно сумме радиусов этих окружностей, а расстояние между центрами двух внутренне касающихся окружностей

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 12.

равно разности радиусов большей и меньшей окружностей;

— касательная к окружности или ее дуге перпендикулярна к радиусу окружности или ее дуги, проведенному в точку касания.

В процессе решения задач придется много вычислять, что способствует развитию у учащихся вычислительных навыков. Из всего сказанного ясно, что эти задачи окажут учащимся двоякую пользу: во-первых, они помогут учащимся глубже и прочнее усвоить тему «Окружность», во-вторых, разовьют у учащихся умение выполнять различные алгебраические действия.

Задача 1. Внутри квадрата $ABCD$ со стороной a из точки A как из центра проведена дуга через вершины B и D. На стороне DC как на диаметре построена внутри квадрата полуокружность. Найти радиус окружности, касающейся проведенной дуги, полуокружности и одной из сторон квадрата.

Решение. Поскольку в условии задачи не указано, какой стороны квадрата касается искомая окружность, то мы должны рассмотреть три случая, схематически изображенные на рисунках 1–3.

1. Рассмотрим случай, когда искомая окружность касается стороны AB квадрата $ABCD$ (рис. 1), и пусть радиус этой окружности равен x. Соединим центр окружности O с центром полуокружности O_1 и с центром дуги A, опустим из центра окружности O перпендикуляры OM и ON на противоположные стороны AB и CD и рассмотрим полученные при этом построении прямоугольные треугольники.

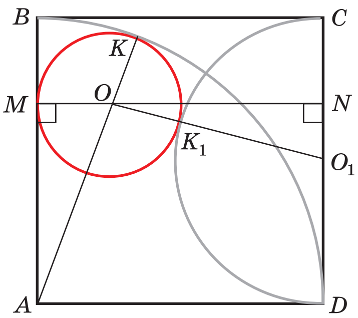


Рис. 1

Из прямоугольного треугольника AMO следует, что

$$AM=\sqrt{AO^2-MO^2}=\sqrt{(a-x)^2-x^2}=\sqrt{a(a-2x)}.$$

Теперь рассмотрим треугольник OO_1N, в котором гипотенуза $OO_1=OK_1+K_1O_1=\frac{a}{2}+x$, катет $ON=MN-OM=a-x$ и катет $O_1N=DN-DO_1$, где $DN=AM=\sqrt{a(a-2x)}$ и $DO_1=\frac{a}{2}$, поэтому $O_1N=\sqrt{a(a-2x)}-\frac{a}{2}$. По теореме Пифагора находим: $OO_1^2=ON^2+O_1N^2$. Подставляя найденные выражения для OO_1, ON и O_1N, получим уравнение

$$\left(\frac{a}{2}+x\right)^2=(a-x)^2+\left(\sqrt{a(a-2x)}-\frac{a}{2}\right)^2,$$

откуда $x=\frac{a}{25}\left(9-\sqrt{6}\right)$.

2. Пусть искомая окружность касается стороны BC (рис. 2) и радиус этой окружности равен y. Выполнив дополнительные построения, получим прямоугольные треугольники AOM и O_1ON.

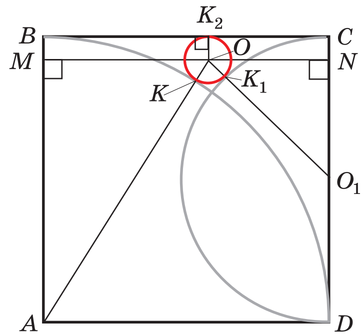


Рис. 2

Из треугольника AOM:

$$MO=\sqrt{AO^2-AM^2}=\sqrt{(a+y)^2-(a-y)^2}=2\sqrt{ay}.$$

Аналогично, из треугольника O_1ON:

$$ON=\sqrt{OO_1^2-O_1N^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}+y\right)^2-\left(\frac{a}{2}-y\right)^2}=\sqrt{2ay}.$$

Подставляя найденные значения величин OM и ON в соотношение $BC = MO + ON$, получим уравнение $a=2\sqrt{ay}+\sqrt{2ay}$, откуда

$$y=\frac{a}{2}\left(3-2\sqrt{2}\right).$$

3. Пусть искомая окружность касается стороны DC (рис. 3) и радиус этой окружности равен z. Выполнив те же построения, получим прямоугольные треугольники AOM и O_1ON.

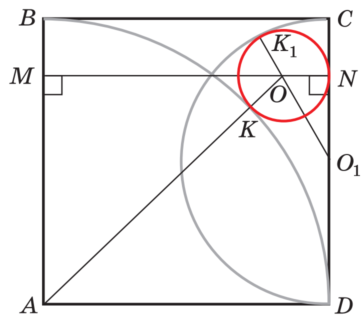


Рис. 3

Из треугольника OO_1N по теореме Пифагора имеем:

$$O_1N=\sqrt{OO_1^2-ON^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-z\right)^2-z^2}=\frac{\sqrt{a^2-4az}}{2}.$$

В прямоугольном треугольнике AMO катет AM равен $AM=\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2-4az}}{2}$, а по теореме Пифагора $AO^2 = AM^2 + OM^2$. Подставляя выражения для AO, AM и OM, получим уравнение

$$(a+z)^2=\left(\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2-4az}}{2}\right)^2+(a-z)^2,$$

откуда $z=\frac{4a}{25}$.

Задача 2. Дан круговой сектор AOB радиуса R с центральным углом 90°. На радиусах OA и OB как на диаметрах построены полуокружности, расположенные внутри данного сектора. Полуокружность с центром O_1 на радиусе OB сектора AOB радиуса O_1B касается полуокружности, построенной на радиусе AO, и дуги AB в точке B (рис. 4). Определить радиус окружности, касающейся этих трех полуокружностей.

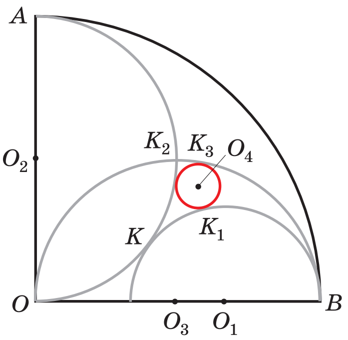


Рис. 4

Решение. Проведем из центров полуокружностей O_1 и O_2 радиусы в точки касания (рис. 5). Получим прямоугольный треугольник OO_1O_2, из которого найдем $O_1O_2^2=O_1O^2+O_2O^2$.

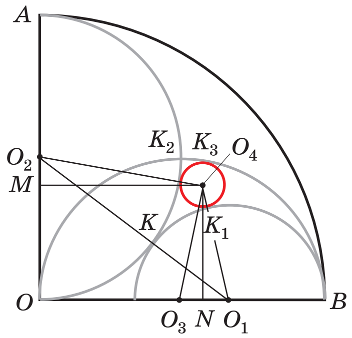


Рис. 5

Так как $O_1O_2=O_2K+O_1K=\frac{R}{2}+O_1B$,

$$O_1O = OB - O_1B = R - O_1B \text{ и } O_2O=\frac{R}{2},$$

то получаем уравнение

$$\left(\frac{R}{2}+O_1B\right)^2=(R-O_1B)^2+\frac{R^2}{4},$$

откуда $O_1B=\frac{R}{3}$.

Далее центры полуокружностей O_1, O_2 и O_3 соединим с центром окружности O_4 и из центра O_4 этой же окружности опустим перпендикуляры O_4M и O_4N на радиусы OA и OB сектора AOB. Рассмотрим прямоугольные треугольники O_1O_4N и O_3O_4N. Катет O_4N — общий для этих треугольников; по теореме Пифагора получим следующее равенство;

$$O_1O_4^2-O_3O_4^2=NO_1^2-NO_3^2,$$

или

$$(O_1O_4-O_3O_4)(O_1O_4+O_3O_4)=$$
$$=(NO_1-NO_3)(NO_1+NO_3).$$

Подставив сюда значения

$$O_1O_4=\frac{R}{3}+K_1O_4,\quad O_3O_4=\frac{R}{2}-K_1O_4,\quad NO_1+NO_3=\frac{R}{6},$$

$$NO_1-NO_3=\frac{R}{6}-2NO_3,$$

получаем уравнение

$$\frac{5R}{6}\left(2K_1O_4-\frac{R}{6}\right)=\frac{R}{6}\left(\frac{R}{6}-2NO_3\right),$$

откуда

$$NO_3=\frac{R-10K_1O_4}{2}.$$

Следовательно, высота

$$O_4N=\sqrt{O_3O_4^2-NO_3^2}=\sqrt{\left(\frac{R}{2}-K_1O_4\right)^2-\left(\frac{R-10K_1O_4}{2}\right)^2}=$$
$$=2\sqrt{K_1O_4\,(R-6K_1O_4)}.$$

Теперь определим стороны прямоугольного треугольника O_2O_4M.

Гипотенуза

$$O_2O_4=O_2K_2+K_2O_4=\frac{R}{2}+K_1O_4,$$

1-й катет

$$O_2M=OO_2-OM=\frac{R}{2}-2\sqrt{K_1O_4\,(R-6K_1O_4)},$$

2-й катет

$$O_4M = R - 5K_1O_4.$$

По теореме Пифагора имеем

$$O_2O_4^2=O_2M^2+MO_4^2,$$

или

$$\left(\frac{R}{2}+K_1O_4\right)^2=\left(\frac{R}{2}-2\sqrt{K_1O_4\,(R-6K_1O_4)}\right)^2+(R-5K_1O_4)^2,$$

откуда

$$K_1O_4=\frac{R}{73}\left(9-2\sqrt{2}\right).$$

Подводя итог, заметим, что ознакомление с предложенными задачами способствует совершенствованию навыков построения и чтения геометрических чертежей.

И в заключение приведем условия задач, которые можно предложить для самостоятельного решения ученикам, проявляющим особый интерес к математике.

Задачи для самостоятельного решения

3. Внутри квадрата $ABCD$ из точки A как из центра проведена дуга, проходящая через вершины B и D. На сторонах BC и CD как на диаметрах построены полуокружности (рис. 6). Найдите радиус окружности, касающейся построенных полуокружностей и дуги BD, если сторона квадрата равна a.

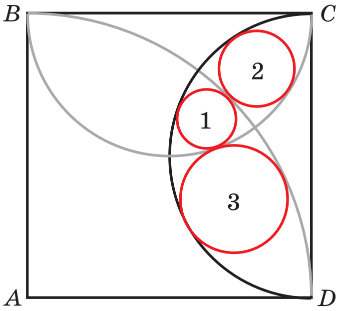


Рис. 6

4. Окружность вписана в квадрат со стороной 1. Из одной вершины квадрата проведена дуга окружности радиуса 1, проходящая через две противоположные вершины. Построена окружность, касающаяся вписанной окружности и проведенной дуги (рис. 7). Найдите радиус окружности, касающейся этой окружности, вписанной окружности и дуги.

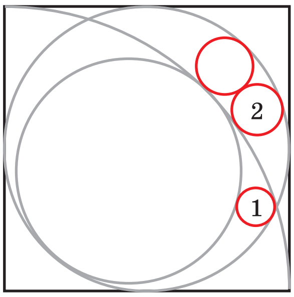


Рис. 7

5. Около окружности описан квадрат со стороной a. На двух смежных сторонах этого квадрата построены полуокружности, расположенные внутри квадрата (рис. 8). Найдите радиус окружности, касающейся этих двух полуокружностей и окружности.

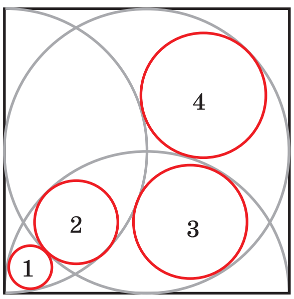


Рис. 8

6. Две окружности радиусов a и b $(a < b)$ имеют внутреннее касание. Внутри большей окружности проведена касательная к меньшей окружности, перпендикулярная общему диаметру этих окружностей (рис. 9). Докажите, что отношение радиуса окружности S_1, касающейся двух данных окружностей и проведенной касательной, к радиусу окружности S_2, касающейся большей окружности, проведенной касательной и общего диаметра двух данных окружностей, равно $\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{a}{b}\right)$.

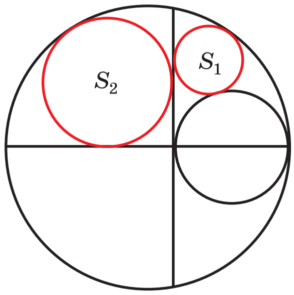


Рис. 9

7. Внутри квадрата со стороной a на двух его смежных сторонах как на диаметрах построены полуокружности (рис. 10). Найдите радиус окружности, касающейся этих двух построенных полуокружностей и одной из сторон данного квадрата.

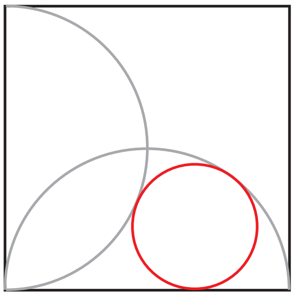


Рис. 10

Ответы:

3. 1) $\frac{a\left(5-3\sqrt{2}\right)}{7}$; 2) $\frac{a\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}$; 3) $\frac{a\left(3\sqrt{2}-1\right)}{17}$.

4. 1) $\frac{5\sqrt{2}-1}{84}$; 2) $\frac{7\left(4\sqrt{2}-5\right)}{4\left(37-17\sqrt{2}\right)}$.

5. 1) $\frac{a\left(\sqrt{2}-1\right)}{2\left(4-\sqrt{2}\right)}$; 2) $\frac{a\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}$; 3) $\frac{a}{2\sqrt{6}}$; 4) $\frac{a\left(\sqrt{2}+1\right)}{2\left(\sqrt{2}+4\right)}$.

7. $\frac{2a}{9}$.

Н. ЖАРКОВСКАЯ,
Санкт-Петербург

«КЕНГУРУ»-ТЕСТИРОВАНИЕ

Фото Н. Шокаревой

Тестирование «Кенгуру» — выпускникам» проводится Институтом продуктивного обучения РАО совместно с Центром технологии тестирования «Кенгуру плюс» начиная с 2003 года, в нем принимают участие сотни тысяч школьников из большинства российских регионов. Первоначально оно было организовано только для учащихся 11-х классов, но позже были разработаны тесты для выпускников основной и начальной школы.

Отличительная особенность тестирования — развернутые индивидуальные рецензии, которые получает каждый ученик. В этих рецензиях математическая подготовка школьника оценивается по широкому кругу параметров. Например, в тестировании, прошедшем 20 января 2011 года, работы одиннадцатиклассников оценивались по 18 параметрам, разделенным на три основные группы. К первой группе относились параметры, связанные с конкретными разделами программы (линейная и квадратичная функции, тождества, вычисления в геометрии и т.п.), ко второй — связанные с общими умениями (использование стандартных алгоритмов, использование наглядных представлений, логические рассуждения), наконец, в последнюю группу были включены параметры, характеризующие в той или иной мере умение организовать работу.

По содержанию тесты нацелены на проверку всех основных тем, которые изучаются на данной ступени обучения. Работа выполняется в начале второго полугодия, когда основной программный материал уже пройден, но еще есть время на исправление выявленных недочетов подготовки.

За годы проведения данного тестирования накоплен интересный опыт и значительный статистический материал. Можно говорить о сложившейся системе независимого мониторинга математической подготовки школьников. Важным обстоятельством является то, что в «Кенгуру» — выпускникам» школы участвуют по собственной инициативе, основная цель тестирования – самопроверка, и школа больше всех заинтересована в объективности полученных результатов. При анализе этой системы наибольший интерес вызывают следующие вопросы:

- Как соотносятся результаты данного мониторинга с результатами официального контроля математической подготовки, а также с уровнем школьных оценок участников тестирования?
- Как можно использовать результаты тестирования в школьной практике?
- Какие выводы можно сделать на основе полученных статистических данных?
- Каковы перспективы развития системы мониторинга?

Для ответа на первый из этих вопросов по заказу ЦТТ «Кенгуру плюс» было проведено социологическое исследование выпускников 11-го класса, поступивших в вузы, результаты которого планируется опубликовать. Итоги этого исследования коротко можно сформулировать так: в средней и высокой части спектра наблюдается хорошее согласование результатов различных видов контроля. Судя по многочисленным отзывам как учителей, так и участников тестирования, рецензии для этих учащихся адекватно оценивают сильные и слабые стороны их математической подготовки. Соответственно, для них такая рецензия вполне может служить ориентиром при подготовке к итоговым испытаниям.

Для участников с низким уровнем подготовки корреляция оказывается низкой (для этой категории участников очень велик фактор случайности). Достоверность индивидуальной рецензии для таких учащихся за счет высокой доли случайно выбранных ответов оказывается низкой. Делать какие-то содержательные выводы по этим рецензиям трудно, так как подготовка данной категории школьников в целом сильно хромает.

Что касается использования результатов тестирования в школьной практике, то здесь накоплен значительный опыт.

Во-первых, ученики старших классов уже достаточно самостоятельны для того, чтобы использовать рецензии при подготовке к экзамену (если у тебя низкие показатели по какой-то теме, значит, на нее надо обратить больше внимания). А учителя, просматривая рецензии, могут заметить какие-то общие дефекты в подготовке своих учеников и учесть это при организации повторения.

В первые годы проведения тестирования организаторы считали, что рецензия обращена, прежде всего, к ученику, и для старших классов никаких сводных отчетов по итогам тестирования не составляли. Однако опыт показывает, что во многих школах учителя не только являются инициаторами тестирования, но и активно используют его результаты в своей работе. Поэтому начиная с этого учебного года школа получает отчет по каждой параллели (то есть для 4-х, 9-х и 11-х классов, если они принимали участие в тестировании). В этом отчете для каждого ученика указаны выбранные им ответы (с указанием верных и неверных), общий балл и успешность по всем оцениваемым параметрам, а также средние данные по всем участникам тестирования. Мы надеемся, что эти сведения облегчат учителю работу с итогами тестирования.

Интересно отметить инициативу некоторых учителей, которые побуждают своих учеников принять участие в тестировании для 11-х классов еще в десятом классе (конечно, часть материала еще не пройдена, но большая часть заданий ученикам уже доступна). На основе полученной рецензии составляется долгосрочный индивидуальный план подготовки к экзаменам. Важно, что в этом случае появляется возможность работать над улучшением показателей по параметрам второй группы, что, как правило, требует гораздо больше времени, чем работа над конкретными темами.

Конечно, статистический материал, полученный по результатам этих тестирований, очень интересен. И в первую очередь обращает на себя внимание большой разброс в уровнях подготовки учащихся: то есть по ряду простых и важных направлений заметная доля учащихся показывает низкие результаты, и в то же время немало участников тестирования показывают очень хорошие результаты по трудным разделам теста.

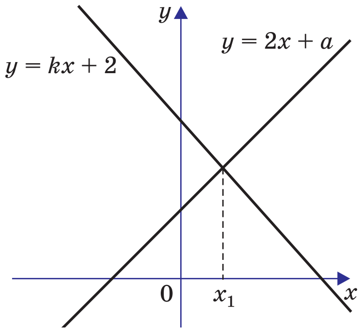
Так, например, ученикам 4-го класса предлагался ряд из 9 чисел (не более чем четырехзначных). На вопрос «Есть ли в этом ряду число две тысячи тридцать шесть?» (а оно там было) не смогли правильно ответить почти 9% школьников. Выбрать в этом ряду самое большое трехзначное число не смогли почти 15%. В примере $(12 + 7 \times 8) : 4 - 2$ выбрать верный ответ не смогли более трети участников тестирования, а в примерах $128 + 37$ и $56 : 7 + 3$ верный ответ указали около 93%.

В группе заданий, отнесенных к параметру «Чтение, запись и сравнение чисел» меньше половины верных ответов дали около 10% учащихся, а хотя бы одну ошибку допустили около трети участников тестирования. Но при этом около 20% учащихся в группе из 6 заданий, отнесенных к категории повышенной сложности, сделали не более одной ошибки.

Эти данные свидетельствуют о том, что значительная доля учеников не получает в начальной школе устойчивых базовых навыков, что является причиной нарастания трудностей в основной и старшей школе. В то же время существенное количество ребят имеют высокий уровень готовности к дальнейшему обучению.

Эти тенденции хорошо просматриваются и в старших параллелях. Рассмотрим, например, блок заданий для 9-го класса, посвященный свойствам линейной и квадратичной функций (как и везде далее, в скобках указаны процент участников, выбравших верный ответ, и процент участников, не отвечавших на вопрос).

Задача 1. На рисунке изображены графики функций $f(x) = 2x + a$ и $g(x) = kx + 2$. Верно ли утверждение?



а) $k > 0$; (41%, 15%)
б) $a < 2$; (41%, 21%)
в) $x_1 = \frac{a-2}{2-k}$. (39%, 35%)
г) абсцисса вершины параболы $y = f(x) \cdot g(x)$ обязательно равна x_1. (35%, 37%)

В целом по группе заданий, отнесенных к этим параметрам, очень низкие результаты (не более 20% выполнения) показали более четверти участников тестирования.

Блок заданий на тождественные преобразования выглядел так.

Задача 2. Верно ли тождество?
а) $(a + 3b)(a - 2b) = a^2 + ab - 6b^2$; (78%, 2%)
б) $(2ac - 5bc)^2 = 4a^2c^2 - 20abc + 25b^2c^2$; (75%, 3%)
в) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a}} = \sqrt{a}$; (43%, 16%)
г) $\frac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}} = \frac{a+b}{ab} - \frac{2}{a+b}$. (22%, 15%)

Отметим, что на близкий по характеру к заданию 2 (в), но более простой вопрос «Верно ли, что $\sqrt{\frac{2^7 \cdot 3^5}{6^3}} = 12$? » правильно ответили 62% участников (воздержались от ответа 4%).

Рассмотрим еще результаты решения нескольких заданий, отнесенных к параметру «Логические рассуждения» (к этой группе относились технически несложные задания, требующие небольшого самостоятельного рассуждения).

Задача 3. Количество способов представить число 2011 в виде суммы $a + b$ двух натуральных чисел $(a < b)$ равно 1005. (47%, 21%)

Этот вопрос был расположен в начальной части теста, и большая доля участников тестирования, воздержавшихся от ответа на него, не может объясняться нехваткой времени.

Задача 4. Если каждое из трех чисел делится на 3, то их среднее арифметическое обязательно делится на 3. (26%, 4%)

Сомневающихся в ответе на этот вопрос оказалось на удивление мало. А чтобы заметить, что выражение $(3a + 3b + 3c) : 3$ совсем необязательно делится на 3, все-таки нужно немного порассуждать.

Задача 5. Все корни уравнения
$$x^2 + 3x - 11 = 0$$
удовлетворяют неравенству
$$2x^2 + 6x - 17 \geq 0.$$ (31%, 21%)

Для ответа на этот вопрос можно было решить и уравнение, и неравенство, а затем сравнить результаты (хотя корни трехчленов — иррациональные, это задача несложная). А можно было заменить неравенство на $x^2 + 3x \geq 8{,}5$ и заметить, что корни уравнения удовлетворяют равенству $x^2 + 3x = 11$, что явно больше, чем 8,5.

Задача 6. Если $1{,}5 < x < 2$, то $\frac{x-1}{x-2} \leq 0$. (57%, 10%)

Это несложное задание нацелено на проверку понимания того, что собой представляет решение неравенства.

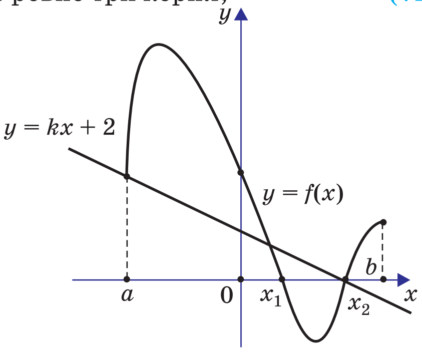
В завершение этого обзора приведем два блока заданий из теста для 11-го класса.

Задача 7. Верно ли, что среди корней данного уравнения есть числа разных знаков?
а) $x^2 + x - 6 = 0$; (93%, 2%)
б) $\sin x = \frac{1}{2}$; (39%, 7%)
в) $\lg(x^2 + 1) = 5$; (61%, 17%)
г) $|x + 2| + |x + 3| = 2$; (60%, 12%)
д) $(2^x - 3x)(2^x + 5x) = 0$. (40%, 25%)

Для ответа на вопрос этого блока можно было не решать уравнения, а воспользоваться свойствами соответствующих функций (для последнего вопроса — это единственная возможность). Конечно, настораживает очень низкий результат по вопросу 7 (б).

Задача 8. На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a; b]$, и прямая с уравнением $y = kx + 2$. Верно ли утверждение?
а) На отрезке $[0; x_1]$ функция $f(x)$ убывает; (91%, 2%)

б) на отрезке $[0; b]$ уравнение $f(x) = kx + 2$ имеет ровно три корня; (72%, 7%)



в) $f(x) < 2$; (44%, 19%)

г) $x_2 = \dfrac{2a}{2 - f(a)}$; (22%, 40%)

д) на отрезке $[a; b]$ найдутся две точки, в которых значение производной функции $f(x)$ равно k. (51%, 24%)

Статистика по заданию 8 (в) хорошо коррелирует с данными по 9-м классам.

Наконец, несколько слов о перспективах развития обсуждаемой системы мониторинга. Наш опыт и многочисленные отзывы учителей показывают, что участие в независимом тестировании (не имеющем, кстати, административных последствий, но позволяющем сравнить свои результаты с достаточно значимым массивом тестируемых) помогает правильно сориентироваться и оптимально организовать повторение с учетом индивидуальных особенностей подготовки конкретных учащихся.

К сожалению, традиционная организация тестирования требует довольно большого времени (рассылка заданий по школам, отправка заполненных бланков в места проверки, отправка результатов проверки по школам). В итоге, от проведения тестирования до получения школой результатов проходит месяц, а то и полтора-два.

В начале этого учебного года впервые было организовано пробное тестирование с использованием интернет-технологий. Для эксперимента «Входной контроль» была выбрана параллель 7-го класса. Выбор этот обусловлен тем, что в 7-м классе существенно меняется характер преподавания математики, нередко происходит переформирование классов, и развернутый анализ подготовки школьников в это момент достаточно важен.

Тестирование было организовано следующим образом: в начале учебного года заинтересованные учителя могли зарегистрироваться на сайте конкурса «Кенгуру». При этом каждый учитель получал персональную страничку на сайте, доступ к которой, кроме него, имели только организаторы тестирования. В определенный заранее день (в последнюю декаду сентября) владельцы этих страничек получали доступ к заданиям тестирования. В течение недели надо было провести эту работу в классах и внести ответы учеников в заранее заготовленные шаблоны. Затем возможность редактировать странички закрывалась, и через 2–3 дня на ней появлялись результаты проверки работ по 12 параметрам.

В ходе этого тестирования было создано около тысячи персональных страничек, и в нем участвовало более 10 тысяч школьников. Поскольку эксперимент прошел вполне успешно, мы планируем развивать это новое направление работы. И очередное тестирование намечено на конец этого учебного года; мы приглашаем учителей начальной школы принять участие в итоговом контроле математической подготовки учеников 4-го класса. Тестирование предполагается провести примерно в середине мая.

С деталями этого проекта можно ознакомиться на сайте http://mathkang.ru, там же размещены тексты всех тестирований, проведенных ранее. Кроме того, через раздел «Заказ книг» можно заказать сборники, посвященные как тестированию «Кенгуру» — выпускникам», так и мониторингу математической подготовки выпускников начальной школы.

ФОТО НА КОНКУРС

Мы боимся ЕГЭ

Автор: Н.И. Авилов, учитель математики средней школы № 7 им. О. Казанского, ст. Егорлыкская, Ростовская область

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

ЗАДАЧА С1 — ТРИГОНОМЕТРИЯ

С. ДВОРЯНИНОВ

Напоминаем!
Задача С1 оценивается в 2 первичных балла (из 30 возможных). Два балла начисляются за полное, обоснованное решение; один балл, если решение приведено, но не произведен отбор корней или допущены ошибки в отборе.

Основные тригонометрические формулы

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\quad 1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2};\ 1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2};$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};\quad \mathrm{tg}\,(x+y)=\frac{\mathrm{tg}\ x+\mathrm{tg}\ x}{1-\mathrm{tg}\ x\ \mathrm{tg}\ y};$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\quad 1+\mathrm{tg}^2\ x=\frac{1}{\cos^2 x};\ 1+\mathrm{ctg}^2\ x=\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Основная идея решения любого тригонометрического уравнения заключается в том, чтобы свести его к одному или нескольким простейшим с помощью равносильных преобразований, перехода к уравнению-следствию, замены переменной или применения свойств функций.

Решая уравнение, иногда мы переходим к новому, более простому уравнению, которое называется уравнением-следствием. Корни этого уравнения являются *кандидатами* в корни данного уравнения. Далее необходимо провести выборы, то есть отбор тех из них, которые являются корнями исходного уравнения. Отбор осуществляется с учетом разнообразных дополнительных требований. Вот несколько примеров таких условий: в дроби $\frac{1}{v(x)}$ выражение $v(x)$ не равно нулю; в дроби $\frac{1}{\sqrt{v(x)}}$ оно положительно; если же $\sin f(x) = v(x)$, то $|v(x)| \leqslant 1$ и т.п.

При решении задания С1 следует быть особенно внимательным! Цена ошибки здесь велика — она равна половине того, что может дать правильное решение задачи.

Пример 1. Решите уравнение

$$\sin(-5x)\cos 5x = 0{,}25.$$

Решение. Синус — нечетная функция, поэтому

$$\sin 5x\cos 5x = -0{,}25.$$

Умножим обе части уравнения на 2 и по формуле синуса двойного угла получим: $\sin 10x = -0{,}5$. Это простейшее тригонометрическое уравнение относительно $10x$. Отсюда

$$10x=(-1)^n\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},$$

или

$$10x=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

Разделив обе части уравнения на 10, по-

Способ II.

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x =$$
$$= (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x),$$
$$\sin 2x - 1 = 2\sin x\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x =$$
$$= -(\cos x - \sin x)^2.$$

Следовательно, данное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{\cos x+\sin x}{-(\cos x-\sin x)}=0.$$

Полученное уравнение в свою очередь равносильно системе

$$\begin{cases}\cos x+\sin x=0,\\ \cos x-\sin x\neq 0.\end{cases}$$

Решим уравнение $\cos x + \sin x = 0$. Если до-

Пример 4. Решите уравнение

$$\frac{\cos 2x+3\cos x+2}{\sqrt{-7-3x}\cdot\sin 2x}=0.$$

Решение. Пусть M — это множество чисел, при которых $\sqrt{-7-3x}\cdot\sin x\cdot\cos x\neq 0$.

На множестве M данное уравнение равносильно уравнению

$$\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0,$$

или

$$2\cos^2 x - 1 + 3\cos x + 2 = 0.$$

Обозначим $\cos x = y$, и получим квадратное уравнение $2y^2 + 3y + 1 = 0$. Отсюда находим: $y_1 = -1$ и $y_2=-\frac{1}{2}$. Но если $\cos x = -1$, то, согласно основному тригонометрическому тожлучим: $x=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{60}+\frac{\pi n}{10},\ \ n\in \boldsymbol{Z}.$

Ответ: $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{60}+\frac{\pi n}{10},\ \ n\in \boldsymbol{Z}.$

Пример 2. Решите уравнение

$$2\cos 2x = 8\cos x + 3.$$

Решение. Применим формулу косинуса двойного угла:

$$2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 8\cos x + 3,$$

и затем оставим в уравнении только косинус, исключив синус:

$$2(\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)) = 8\cos x + 3.$$

Мы получили квадратное уравнение относительно $t = \cos x$:

$$4t^2 - 8t - 5 = 0.$$

Его корни $t_1=-\frac{1}{2},\ \ t_2=\frac{5}{2}.$ Второй корень не может служить значением косинуса.

Ответ: $\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n,\ \ n\in \boldsymbol{Z}.$

Замечание. Применение формулы $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ могло бы ускорить решение.

Пример 3. Решите уравнение

$$\frac{\cos 2x}{\sin 2x-1}=0.$$

Решение. Способ I.

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos 2x=0,\\ \sin 2x-1\neq 0,\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}2x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z},\\ 2x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.\end{cases}$$

Ясно, что для выполнения неравенства системы целое число k не должно равняться целому числу $2n$. Следовательно,

$$k = 2n + 1.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(2n+1)$ или $\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ \ n\in \boldsymbol{Z}.$

пустить, что $\cos x=0$, то $\sin x=0$, и тогда не будет выполнено основное тригонометрическое тождество. Следовательно, в нашем уравнении $\cos x \neq 0$. Разделив обе части уравнения на $\cos x$, мы получим: $\operatorname{tg} x = -1$, следовательно,

$$x_n=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in \boldsymbol{Z}.$$

При этом неравенство из последней системы также выполняется.

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \ n\in \boldsymbol{Z}.$

Совет. На экзамене не следует особенно беспокоиться, каким путем вы придете к ответу. Времени на экзамене вполне достаточно для того, чтобы в подобных, сравнительно несложных задачах получить ответ именно разными способами. Тем самым вы обеспечите проверку своего решения и исключите потерю баллов.

деству, $\sin x=0$, и соответствующие значения x не принадлежат множеству M.

Следовательно, $\cos x=-\frac{1}{2}$, и $\sin x\cos x\neq 0$. Найдем две серии значений x — кандидатов в корни данного уравнения: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n.$ Осталось выбрать такие целые значения n, при каждом из которых выполняется неравенство $3x < -7$. В обоих случаях получаем, что n — отрицательное число.

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3}-2\pi k,\ \ k\in \boldsymbol{N}.$

Пример 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(y+\sin x)\log_2\cos x=0,\\ 2y^2+5\sin x+2=0.\end{cases}$$

Решение. Обратимся к первому уравнению. Если допустить, что $\log_2 \cos x = 0$, то $\cos x = 1$. Тогда $\sin x=0$, а при этом второе уравнение корней не имеет. Следовательно, $\cos x\neq 1$, и данная система равносильна системе

$$\begin{cases}y+\sin x=0,\\ 2y^2+5\sin x+2=0.\end{cases}$$

Эта система сводится к уравнению $2y^2-5y+2=0$. Отсюда находим: $y_1=2$, соответственно, $\sin x=-2$, что невозможно, и $y_2=\frac{1}{2}$. При этом $\sin x=-\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \ \text{или}\ x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \ n\in \boldsymbol{Z}.$$

Вспоминая условие $\cos x>0$, осуществляем отбор корней и получаем:

$$x_n=-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \ y_n=0{,}5,\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $x_n=-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \ y_n=0{,}5,\ n\in \boldsymbol{Z}.$

ИНДЕКСЫ ПОДПИСКИ | Почта России - 79083 (инд.); - 79584 (орг.) | Роспечать - 32031 (инд.); - 32598 (орг.)

Е. ГЕНИКЕ,
США

ЧТО ЗНАЕТ ВАНЯ И НЕ ЗНАЕТ ДЖОННИ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ТЕСТА SAT

Хотите проверить своих учеников? Взять пробный тест SAT можно бесплатно в Интернете. Для русскоязычных школьников в этих целях можно посоветовать использовать вэб-сайт www.uniprep.ru.


Фото Л. Рословой

Всем хорошо известна статья английского профессора Артура С. Трейса-младшего «Что знает Ваня и не знает Джонни», опубликованная в лондонской «Таймс». Статья так запала в душу россиянам, что они с радостью продолжают ее цитировать до сих пор. Но надо сказать, что статья была опубликована около пятидесяти лет назад: 17 ноября 1961 года. Почему-то люди, которые ее цитируют как истину в первой инстанции, не затрудняют себя вопросом: а не произошли ли какие-либо изменения за сорок лет? Не изменилась ли ситуация?

И сравнивая образовательные системы, выбирая аргументы в поддержку своих рассуждений, нужно быть уверенным, что они не устарели. Я хочу привести результаты своих наблюдений за последние два года, которые мне позволяют сравнить современную подготовку выпускников российских и американских школ.

О том, что образование по точным дисциплинам, полученное в СССР, ценится в США, я знаю по себе. Я закончила институт двадцать с лишним лет назад, тем не менее мой диплом был подтвержден без проблем в Америке, я нашла работу преподавателя математики и физики сначала в частной школе, а затем в колледже. По старой российской традиции, параллельно с основной работой я подрабатываю репетитором. Первоначально я «репетировала» американских школьников. Какое-то время назад возникла неожиданная для меня самой ситуация: знакомые попросили подготовить мальчика из России к вступительным тестам в университеты США. С этого начался мой опыт подготовки российских школьников к поступлению в американские вузы.

Так что то, о чем вам предстоит прочитать, это результат моих наблюдений, не более того. Но, может быть, он будет интересен читателю в связи с его свежестью. Мои выводы, безусловно, не догма. Но возможно, для кого-то они будут руководством к действию.

Как поступить в американский университет?

Процесс повышения интереса к американским вузам со стороны российских граждан имеет место: все больше и больше студентов из России приезжает на учебу в США. Не буду утомлять читателя рассуждениями на тему, что является причиной этого процесса, а перейду к ответу на вопрос «как».

Каждый университет имеет свой собственный перечень документов, которые необходимо подать в приемную комиссию, но везде во главе него стоит средний балл абитуриента из школы и проходной балл по тестам SAT (эс-эй-ти) или ACT (эй-си-ти). Около 80% учебных заведений используют результаты этих тестов для принятия решения о зачислении студента. Остановимся на том, что это за тесты, более подробно.

Начнем с того, что высказывание, что SAT — «это типа российского ЕГЭ», довольно далеко от истины. Тесты SAT или ACT не имеют никакого отношения к итоговым экзаменам за курс средней школы. Эти тесты выпускники сдают в независимых от школ организациях только в том случае, если они идут учиться в вуз.

Система тестирования SAT была разработана в 1901 году компанией «Educational Testing Service» (Служба по образовательному тестированию). За более чем сто лет существования система претерпела ряд изменений. С 2005 года абитуриентам дается 3 часа 45 минут на выполнение этого теста, который состоит из 3 частей: письмо, чтение и математика. Максимальное число баллов — 800 за каждую часть.

В 1959 году была создана альтернативная система ACT (American College Testing) — тестирование для американских колледжей, которое проходит по четырем дисциплинам: английский язык, математика, чтение, естествознание. На тестирование отводится 3 часа 30 минут. Экзаменационный балл может быть от 1 до 36; обозначается только целым числом.

Несмотря на то, что тесты SAT и ACT были созданы конкурирующими фирмами, в настоящее время практически каждый университет принимает любой из этих тестов. Российские студенты обычно отдают предпочтение тесту SAT, потому что он состоит только из частей по английскому и по математике. То, что ACT-тестирование, кроме математики и английского языка, содержит часть по естествознанию, осложняет его прохождение, особенно для иностранных абитуриентов. Чтобы его сдать, необходимо знание на английском языке терминов по физике, химии и биологии, кроме самих этих предметов. Что создает для абитуриентов дополнительные сложности.

Вернемся к тому, с чего начали. При решении поступать в американский вуз российский абитуриент сдает те же тесты, что и американский выпускник. Уровень владения английским за последние годы повысился очень существенно. От «читаю и перевожу со словарем» совершен переход к разговорной речи.

Сравним знания американских и русских школьников по математике. Хорошо известен факт, что в США параллельно используется много учебников по каждому предмету. На основании учебника, утвержденного школьным советом, учитель самостоятельно составляет план прохождения материала. Трудно объяснить почему, но многие учителя не включают в свой план арифметическую и геометрическую прогрессии. При подготовке к тесту SAT те школьники, которые занимаются с репетитором или на курсах, проходят этот материал дополнительно. Российские школьники, как правило, материал о прогрессиях знают.

Если говорить о геометрии, то тут боевая ничья. И те и другие застревают иногда на легком материале, например, таком как нахождение катетов или гипотенузы в прямоугольном треугольнике по одной известной стороне и углам в 30° и 60° или 45°. А казалось бы, что тут трудного?

В задачах по статистике верх одерживают американцы. Этот материал хорошо и подробно изучается ими в школе.

При прохождении теста SAT ученикам разрешается пользоваться графическим калькулятором определенной модели — TI-83/84. По этому пункту американцы, безусловно, впереди. Калькуляторы TI-83/84 являются неотъемлемым инструментом при обучении математике в старших классах американской школы. При сдаче теста графический калькулятор является важнейшим средством экономии времени (каждая часть теста должна быть выполнена за определенное время). С его помощью в считанные секунды можно найти корни квадратного уравнения, перемножить матрицы, найти значение тригонометрических функций и многое другое, но для этого надо знать, как им пользоваться.

Что касается части по английскому языку, то, конечно, для американцев они легче, так как они тестируются по родному языку, а наши ребята — по иностранному. Тем не менее, говоря о затруднениях, нужно назвать два самые большие: нахождение синонимов и написание эссе. Мне представляется, что ребят в некоторых случаях сбивает с толку то, что им сейчас в школе объясняют, как писать эссе. Но трактовка российских учителей не совпадает с видением этой формы письменной работы американской стороной.

Умом Россию не понять

Пришло время открыть самый большой секрет. Лично для меня это было большим сюрпризом! Как вы думаете, кто эти Иваны, пытающиеся титаническим трудом пробить себе дорогу в американские университеты?

Думаете, это прилежные отличники, гордость и честь школ? Ничего подобного. Мне не попался ни один отличник. Часто на пути в американские вузы оказываются школьники, которые в российских школах «уничтожены вечной тройкой» — это выражение учительницы, учившей меня в школе много лет назад. Это была ее самая большая угроза.

Так вот, это безнадежные троечники, у которых хромает дисциплина и т.п., оказывается, вполне прилично владеют английским и способны потратить много времени на упорную подготовку к SAT.

А. ПАВЛОВ,
г. Лобня

НЕСТАНДАРТНЫЕ РЕШЕНИЯ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ

Цели занятия:
— обучение нестандартным приемам и методам решения задач;
— развитие умения отыскивать рациональные способы решения;

Ход занятия

Рассмотрим несколько задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в МГУ. Данные задачи мы решим методами, отличными от тех, которые предлагали авторы в своих сборниках.

Задача 1. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases}(2-x)(3x-2z)=3-z,\\ y^3+3y^3=x^2-3x+2,\\ z^2+y^2=6z,\end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z \le 3$.

Решение. Первый вопрос, который приходит на ум, это: «Какое отношение условие $z \le 3$ имеет к системе уравнений?» И тут по ассоциации вспомнилось, что иногда вместо одного уравнения решают систему уравнений. Например, чтобы решить уравнение $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$, нужно перейти к системе

$$\begin{cases}\sqrt[4]{x+8}=a,\\ \sqrt[4]{x-8}=b,\\ a-b=2.\end{cases}$$

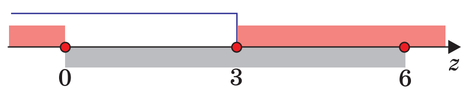
Вот и подумалось, а почему бы от системы уравнений не перейти к системе неравенств, благо, одно из них ($z \le 3$) уже есть. Перепишем первое уравнение в виде

$$3x^2-(2z+6)x+(3z+3)=0,$$

а третье — в форме $y^2 = 6z - z^2$.

Если система имеет решение, то дискриминант первого уравнения (где z — параметр!) неотрицателен, да и величина $6z - z^2 \ge 0$. В итоге вместо системы уравнений получаем систему неравенств:

$$\begin{cases}(2z+6)^2-4\cdot 3\cdot(3z+3)\ge 0,\\ 6z-z^2\ge 0,\\ z\le 3;\end{cases} \qquad \begin{cases}z(z-3)\ge 0,\\ z(6-z)\ge 0,\\ z\le 3.\end{cases}$$



Вывод: $z = 0$ или $z = 3$.

Остальное – дело техники.

Ответ: (2; –3; 3), (1; 0; 0).

Аналогично решается и другая, более сложная задача.

Задача 2. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^3+x^2(13-y-z)+x(2y+2z-2yz-26)+5yz-7y-7z=-30,\\ x^3+x^2(17-y-z)-x(2y+2z+2yz-26)+y+z-3yz=2, \end{cases}$$

для которых x принадлежит отрезку $[4;\ 7]$.

Решение. Если вместо данных двух уравнений перейти к их сумме и разности и ввести обозначения $y + z = a$ и $yz = b$, то получим:

$$\begin{cases} a\left(-x^2-3\right)+b(-2x+1)=-14-15x^2-x^3,\\ a(x-2)+2b=-8+13x+x^2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} a=\dfrac{-5x^2-29x-20}{-5x-4}=x+5,\\ b=5x+1. \end{cases}$$

Итак,

$$\begin{cases} y+z=x+5,\\ yz=5x+1; \end{cases} \quad \begin{cases} y=x+5-z,\\ z^2-(x+5)z+(5x+1)=0. \end{cases}$$

Получаем (как и в задаче 1) систему неравенств:

$$\begin{cases} (x+5)^2-4\cdot(5x+1)\ge 0,\\ 4\le x\le 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-10x+21\ge 0,\\ 4\le x\le 7. \end{cases}$$

Отсюда $x = 7$.

Ответ: (7; 6; 6).

Задача 3. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1.$$

Решение. Увидев $\sqrt{1-x^2}$, сразу вспомнилось, как на первом курсе вуза «брали» интегралы вида $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$. С помощью замены: $x = \cos t$.

Сделав ее, получим:

$$\sqrt{\frac{1+2\cos t\cdot|\sin t|}{2}}=1-2\cos^2 t.$$

Учитывая, что

$$2\cos t\sin t = \sin 2t,$$

а

$$1 - 2\cos^2 t = -\cos 2t,$$

получаем элементарные квадратные уравнения. Остальное просто.

Задача 4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{1}{2}|a-2|\cdot|x+a-4|+\left(\frac{a^2-4a+3}{|a-2|}-|a-2|\right)\cdot|x-2|+$$
$$+\frac{1}{2}|a-2|\cdot|x-a|\le 1$$

выполняется ровно для двух различных значений x.

Решение. Учитывая, что $a\ne 2$ и поэтому $|a-2|>$ >0, умножим неравенство на $|a-2|$. Знак неравенства не изменится, а вместо $|a-2|^2$ можно написать $(a-2)^2$. Тогда неравенство легко преобразовать к виду

$$\frac{1}{2}(a-2)^2\left(|x+a-4|+|x-a|\right)\le|x-2|+|a-2|.$$

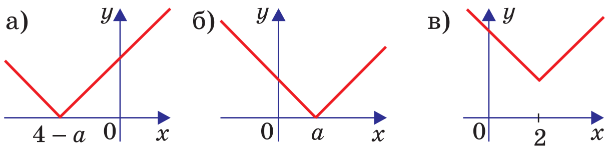
Рассмотрим три функции:

а) $y_1 = |x + a - 4|$,

б) $y_2 = |x - a|$,

в) $y_3 = |x - 2| + |a - 2|$.

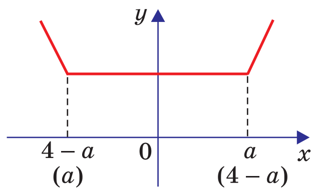
Они имеют вид «галочек»:



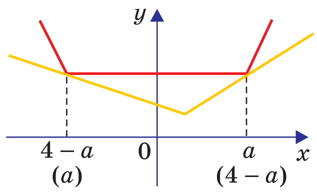
Учитывая, что $\frac{1}{2}(a-2)^2>0$, получим, что функция

$$y=\frac{1}{2}(a-2)^2\left(y_1+y_2\right)$$

будет иметь форму «корыта»:



Нужно, чтобы «галочка» y_3 лежала целиком под «корытом» и имела с ним две точки пересечения. Это возможно в единственном случае:



Отсюда $y = y_3$ при $x = 4 - a$ и $x = a$.

Подставляя $x = 4 - a$ и $x = a$ в уравнение

$$\frac{1}{2}(a-2)^2\left(|x+a-4|+|x-a|\right)=|x-2|+|a-2|,$$

получим ответ: $a=2\pm\sqrt{2}$.

Задача 5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых число решений уравнения

$$2x^3+6x=\left(3^{6a}-9\right)\sqrt{2^{8a}-\frac{1}{6}-(3a-1)^2\cdot 12^x}$$

не меньше числа решений уравнения

$$3(5x^2 - a^4) - 2x = 2a^2(6x - 1).$$

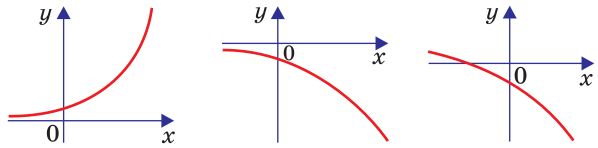
Решение. Учитывая, что

$$(2x^3 + 6x)' = 6x^2 + 6 > 0$$

для всех x, $y_1 = 2x^3 + 6x$ — возрастающая кубическая парабола.

Определим вид кривой

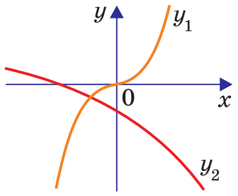
$$y_2=\left(3^{6a}-9\right)\sqrt{2^{8a}-\frac{1}{6}-(3a-1)^2\cdot 12^x}.$$



$y = 12^x$ $y = -(3a-1)^2 \cdot 12^x, \ a \neq \frac{1}{3}$

Если $a = \frac{1}{3}$, то $y_2 = \text{const}$ (прямая).

В любом случае, уравнение $y_1 = y_2$ имеет не более одного корня.



Точнее: если $2^{8a} - \frac{1}{6} \geq 0$, то один корень;

если $2^{8a} - \frac{1}{6} < 0$, то корней нет.

Второе уравнение можно переписать в виде

$$15x^2 - (2 + 12a^2)x + (2a^2 - 3a^4) = 0.$$

Отсюда: если $D > 0$, то у уравнения два корня;
если $D = 0$, то один корень;
если $D < 0$, то корней нет.

По условию, число корней первого уравнения должно быть не меньше числа второго. Возможны два варианта:

$$\begin{cases} 2^{8a} - \frac{1}{6} \geq 0, \\ D \leq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2^{8a} - \frac{1}{6} < 0, \\ D < 0. \end{cases}$$

Но $D = 4(9a^2 - 1)^2 \geq 0$, значит, второй вариант отпадает, и получается, что

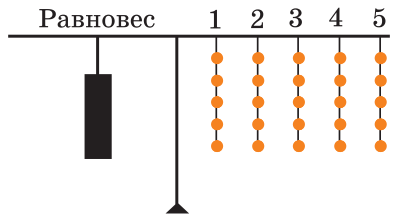
$$\begin{cases} 2^{8a} - \frac{1}{6} \geq 0, \\ D = 0. \end{cases}$$

При $a = \pm\frac{1}{3}$ $D = 0$. Но $2^{-\frac{8}{3}} - \frac{1}{6} < 0$ при $a = -\frac{1}{3}$.

Ответ: при $a = \frac{1}{3}$.

Задача 6. В подъезде на лестничной клетке 5 ступенек, на каждой ступеньке по 5 котов. Если один кот перескакивает на 1 ступеньку вниз, то одновременно другой кот перескакивает на 1 ступеньку вверх (например, перескоки $4 \to 3$ и $1 \to 2$ вполне допустимы одновременно). Как нужно перескакивать котам, чтобы на первой, третьей и пятой ступеньках было по 5 котов, на второй — 4 кота, на четвертой — 6 котов?

Решение (навеяно физикой). Пусть 1 кот равен 1 единице веса. Нарисуем «весы»:



Если мы один грузик перевесим на одну позицию вправо, а любой другой — на одну позицию влево, то суммарный момент сил не изменится и весы останутся в равновесии. Поэтому «равновесие весов» — инвариант указанного в условии задачи преобразования системы (коты на лестнице). В нашем случае $(5 + 4 + 5 + 6 + 5)$ равновесие нарушается, поэтому задача не имеет решения.

ФОТО НА КОНКУРС

Мы за ЕГЭ

Автор:
Н.И. Авилов,
учитель математики средней школы № 7 им. О. Казанского, ст. Егорлыкская, Ростовская область

А. ШЕВКИН,
Москва

О теореме Менелая читайте в №10/2011.

ВОКРУГ ТЕОРЕМ ЧЕВЫ И МЕНЕЛАЯ

Теоремы Чевы и Менелая входят в программу по геометрии в девятых классах с углубленным изучением математики. Первую теорему доказал итальянский инженер Джованни Чева (1648–1734), а вторая носит имя Менелая Александрийского (I в.) потому, что сохранился арабский перевод его книги «Сферика», содержащий доказательство аналогичной теоремы для сферического треугольника. Предполагается, что теорема для плоского треугольника была известна Менелаю, возможно, даже была им доказана.

Обе эти теоремы имеют несколько способов доказательства — с помощью теоремы о пропорциональных отрезках, с помощью подобия треугольников, с помощью площадей, а также с помощью комбинирования перечисленных приемов доказательства. Это позволяет приступить к их изучению уже в 8-м классе (пример включения этого материала в учебный процесс дан в учебнике [1]). Независимо от времени включения этих красивых теорем в учебный процесс, использование различных приемов их доказательства, их применение к решению задач будет способствовать развитию творческого подхода к доказательствам теорем и к решению задач.

Последовательность использования теоретических фактов в статье соответствует учебнику А.В. Погорелова, при работе по другому учебнику, возможно, придется подобие треугольников применять после площадей.

Теорема Чевы

Пусть дан треугольник ABC и на его сторонах AB, BC и AC отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно (рис. 1).

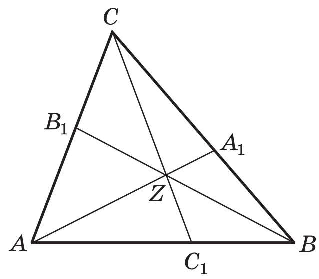


Рис. 1

а) Если отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (1)$$

б) Если верно равенство (1), то отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

На рисунке 1 изображен случай, когда отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке внутри треугольника. Это так называемый случай внутренней точки. Теорема Чевы справедлива и в случае внешней точки, когда одна из точек, A_1, B_1 или C_1, принадлежит стороне треугольника, а две другие — продолжениям сторон треуголь-

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 12.

ника. В этом случае точка пересечения отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 лежит вне треугольника (рис. 2).

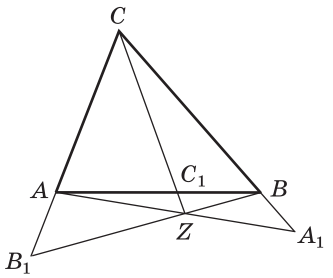


Рис. 2

Как запомнить равенство Чевы?

Обратим внимание на прием запоминания равенства (1). Вершины треугольника в каждом отношении и сами отношения записываются в направлении обхода вершин треугольника ABC, начиная с точки A. От точки A идем к точке B, встречаем точку C_1, записываем дробь $\frac{AC_1}{C_1B}$. Далее от точки B идем к точке C, встречаем точку A_1, записываем дробь $\frac{BA_1}{A_1C}$. Наконец, от точки C идем к точке A, встречаем точку B_1, записываем дробь $\frac{CB_1}{B_1A}$. В случае внешней точки порядок записи дробей сохраняется, хотя две «точки деления» отрезка оказываются вне своих отрезков. В таких случаях говорят, что точка делит отрезок внешним образом.

Любой отрезок, соединяющий вершину треугольника с любой точкой прямой, содержащей противоположную сторону треугольника, называют чевианой.

Рассмотрим несколько способов доказательства утверждения «а» теоремы Чевы для случая внутренней точки. Чтобы доказать теорему Чевы, надо доказать утверждение «а» любым из предложенных ниже способов, а также доказать утверждение «б». Доказательство утверждения «б» приведено после первого способа доказательства утверждения «а». Доказательства теоремы Чевы для случая внешней точки проводятся аналогично.

Доказательство с помощью теоремы о пропорциональных отрезках

Способ I. а) Пусть три чевианы, AA_1, BB_1 и CC_1, пересекаются в точке Z внутри треугольника ABC.

Идея доказательства заключается в том, чтобы отношения отрезков из равенства (1) заменить отношениями отрезков, лежащих на одной прямой.

Через точку B проведем прямую, параллельную чевиане CC_1. Прямая AA_1 пересекает построенную прямую в точке M, а прямая, проходящая через точку C и параллельная AA_1, — в точке T. Через точки A и C проведем прямые, параллельные чевиане BB_1. Они пересекут прямую BM в точках N и R соответственно (рис. 3).

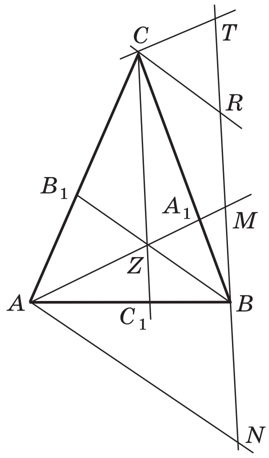


Рис. 3

По теореме о пропорциональных отрезках имеем:

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BM}{TM},\quad \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{BR}{BN},\quad \frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AZ}{ZM}=\frac{BN}{BM}.$$

Тогда справедливы равенства

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{BM\cdot BR\cdot BN}{TM\cdot BN\cdot BM}=\frac{BR}{TM}.$$

В параллелограммах $ZCTM$ и $ZCRB$ отрезки TM, CZ и BR равны, как противоположные стороны параллелограмма. Следовательно, $\frac{BR}{TM}=1$, и верно равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Утверждение «а» теоремы Чевы доказано.

При доказательстве утверждения «б» используем следующее утверждение.

Лемма 1. Если точки C_1 и C_2 делят отрезок AB внутренним (или внешним) образом в одном и том же отношении, считая от одной и той же точки, то эти точки совпадают.

Докажем лемму для случая, когда точки C_1 и C_2 делят отрезок AB внутренним образом в одном и том же отношении: $\frac{AC_2}{C_2B}=\frac{AC_1}{C_1B}$.

Доказательство. Из равенства $\frac{AC_2}{C_2B}=\frac{AC_1}{C_1B}$ следуют равенства

$$\frac{AC_2}{C_2B}+\frac{C_2B}{C_2B}=\frac{AC_1}{C_1B}+\frac{C_1B}{C_1B} \quad\text{и}\quad \frac{AB}{C_2B}=\frac{AB}{C_1B}.$$

Последнее из них выполняется лишь при условии, что C_1B и C_2B равны, то есть при условии, что точки C_1 и C_2 совпадают.

Доказательство леммы для случая, когда точки C_1 и C_2 делят отрезок AB внешним образом, проводится аналогично.

Доказательство утверждения «б» теоремы Чевы

Пусть теперь верно равенство (1). Докажем, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Пусть чевианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке Z, проведем через эту точку отрезок CC_2 (C_2 лежит на отрезке AB). Тогда на основании утверждения «а» получаем верное равенство

$$\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (2)$$

Из сравнения равенств (1) и (2) заключаем, что $\frac{AC_2}{C_2B}=\frac{AC_1}{C_1B}$, то есть точки C_1 и C_2 делят отрезок AB в одном и том же отношении, считая от одной и той же точки. Из леммы 1 следует, что точки C_1 и C_2 совпадают. Это означает, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

Задание 1. Докажите, что процедура записи равенства (1) не зависит, от того, от какой точки и в каком направлении совершается обход вершин треугольника.

Задание 2. Найдите длину отрезка AN на рисунке 4, на котором указаны длины других отрезков.

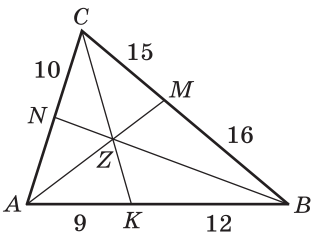


Рис. 4

Ответ: 8.

Задание 3. Чевианы AM, BN, CK пересекаются в одной точке внутри треугольника ABC. Найдите отношение $CN : NA$, если

$$AK : KB = 3 : 4,\ BM : MC = 6 : 5.$$

Ответ: 10 : 9.

Задание 4. С помощью теоремы Чевы докажите:

а) что три медианы треугольника пересекаются в одной точке;

б) три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке;

в) три высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

Приведем доказательство утверждения «в» из учебника [1].

Доказательство. Пусть в остроугольном треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах BC, AC и AB соответственно (рис. 5). Прямоугольные треугольники AA_1C и BB_1C подобны по двум углам, поэтому $\frac{CA_1}{B_1C}=\frac{CA}{BC}$.

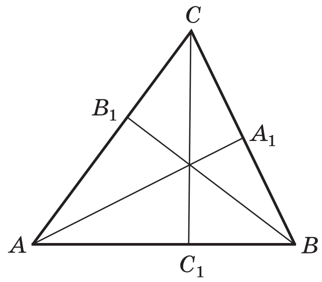


Рис. 5

Аналогично, из подобия прямоугольных треугольников AA_1B и CC_1B, BB_1A и CC_1A следует, что верны равенства:

$$\frac{BC_1}{A_1B}=\frac{BC}{AB},\quad \frac{AB_1}{C_1A}=\frac{AB}{CA}.$$

Перемножив три полученные равенства, получим:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Равенство (1) доказано. Из теоремы Чевы следует, что три высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

Задание 5. Докажите утверждение «в» из задания 4 без применения подобия треугольников.

Задание 6. Три окружности касаются друг друга внешним образом. Центр каждой окружности соединили отрезком с точкой касания двух других окружностей. Докажите, что эти отрезки пересекаются в одной точке.

Задание 7. Докажите, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вписанной окружности, пересекаются в одной точке. Эту точку называют точкой Жергона.

Вневписанная окружность — это окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Её центр является точкой пересечения биссектрис двух внешних углов треугольника (рис. 6).

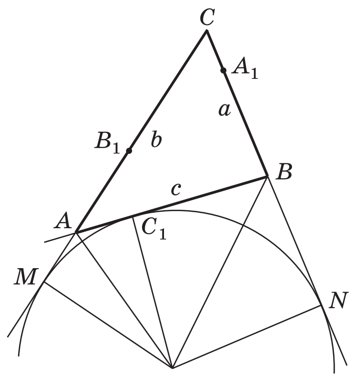


Рис. 6

Рассмотрим задания 8 и 9, с помощью которых будет решено задание 10.

Задание 8. Докажите, что каждая точка касания вневписанной окружности делит периметр треугольника пополам, то есть если A_1 — точка касания вневписанной окружности, принадлежащая стороне BC треугольника ABC, то $AC + CA_1 = AB + BA_1$ (см. рис. 6).

Решение. Рассмотрим вневписанную окружность, касающуюся стороны AB треугольника ABC и продолжений сторон AC и BC в точках C_1, M и N соответственно. По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, $CM = CN$, $AM = AC_1$, $BN = BC_1$, поэтому $CA + AC_1 = C_1B + BC$. Это означает, что точка C_1 делит периметр треугольника пополам. Аналогично показывается, что каждая из точек A_1 и B_1 — точек касания вневписанной окружности со сторонами треугольника — делит периметр треугольника пополам, что и требовалось доказать.

Задание 9. Три вневписанные окружности касаются сторон треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1, принадлежащих сторонам BC, AC и AB соответственно. $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Выразите через a, b и c длины отрезков, на которые точки касания делят стороны треугольника.

Решение. Так как

$$CM = CN = \frac{a+b+c}{2} = p,$$

то

$$AM = AC_1 = p - b,\ BN = BC_1 = p - a.$$

Аналогично получаем, что $AB_1 = p - c$, $CB_1 = p - a$, $A_1C = p - b$, $AB_1 = p - c$ (см. рис. 6).

Задание 10. Пусть дан треугольник ABC. Вневписанные окружности касаются его сторон AB, BC и AC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Эту точку называют точкой Нагеля.

Задание 11. Докажите теорему Чевы для случая внешней точки.

Задание 12. С помощью теоремы Чевы докажите, что три прямые, содержащие высоты тупоугольного треугольника, пересекаются в одной точке.

Доказательства с помощью подобия треугольников

Приведем доказательство теоремы Чевы из статьи [2]. Идея, изложенная там, заключается в том, чтобы заменить отношения отрезков из равенства (1) отношениями отрезков, лежащих на параллельных прямых.

Способ II. а) Пусть прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O внутри треугольника ABC (рис. 7). Через вершину C треугольника ABC проведем прямую, параллельную AB, и ее точки пересечения с прямыми AA_1, BB_1 обозначим соответственно A_2, B_2.

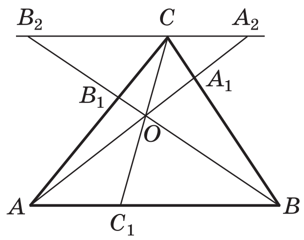


Рис. 7

Из подобия двух пар треугольников: CB_2B_1 и ABB_1, BAA_1 и CA_2A_1, имеем равенства

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{CB_2},\quad \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CA_2}{AB}. \qquad (3)$$

Из подобия треугольников BC_1O и B_2CO, AC_1O и A_2CO имеем равенства $\dfrac{BC_1}{CB_2} = \dfrac{C_1O}{OC} = \dfrac{C_1A}{CA_2}$, из которых следует, что

$$\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{CB_2}{CA_2}. \qquad (4)$$

Перемножив равенства (3) и (4), получим равенство (1).

Утверждение «а» теоремы Чевы доказано.

Способ III. а) Пусть три чевианы, AA_1, BB_1 и CC_1, пересекаются в точке Z внутри треугольника ABC.

Из вершин треугольника ABC проведем высоты к трем чевианам (рис. 8).

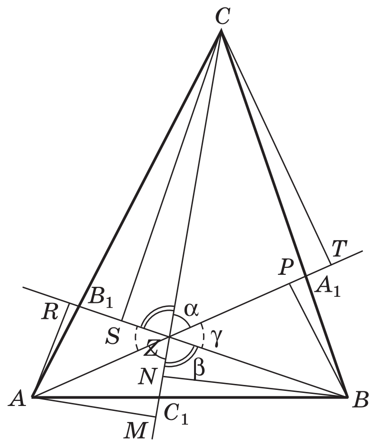


Рис. 8

Треугольники AMC_1 и BNC_1 подобны по двум углам, поэтому верно равенство $\dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{AM}{BN}$.

Аналогично, верны равенства

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BP}{CT} \quad\text{и}\quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CS}{RA}.$$

откуда следует, что

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AM\cdot BP\cdot CS}{BN\cdot CT\cdot RA}. \qquad (5)$$

Выразив в равенстве (5) шесть отрезков через отрезки AZ, BZ и CZ с помощью синусов углов α, β и γ, получим верное равенство:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AM\cdot BP\cdot CS}{BN\cdot CT\cdot AR}=$$

$$=\frac{AZ\cdot\sin\alpha\cdot BZ\cdot\sin\gamma\cdot CZ\cdot\sin\beta}{BZ\cdot\sin\beta\cdot CZ\cdot\sin\alpha\cdot AZ\cdot\sin\gamma}=1.$$

Утверждение «а» теоремы Чевы доказано.

Способ IV. а) Пусть три чевианы, AA_1, BB_1 и CC_1, пересекаются в точке Z внутри треугольника ABC.

Через точку C проведем прямую, параллельную чевиане BB_1 и пересекающую прямую AA_1 в точке M. Через точку A проведем прямую, параллельную чевиане BB_1 и пересекающую прямую CC_1 в точке N (рис. 9).

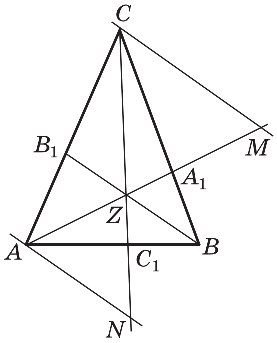


Рис. 9

Используя теорему о пропорциональных отрезках и подобие треугольников, запишем равенства:

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AN}{BZ},\quad \frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BZ}{CM},\quad \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CZ}{NZ}=\frac{CM}{AN}.$$

Тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AN\cdot BZ\cdot CM}{BZ\cdot CM\cdot AN}=1.$$

Утверждение «а» теоремы Чевы доказано.

Доказательства с помощью площадей

Рассмотрим доказательства теоремы Чевы с помощью площадей. Первое из них, изложенное в книге А.Г. Мякишева [3], простое и опирается на утверждения, которые мы сформулируем в виде заданий 13 и 14.

Задание 13. Отношение площадей двух треугольников с общей вершиной и основаниями, лежащими на одной прямой, равно отношению длин этих оснований. Докажите это утверждение.

Задание 14. Докажите, что если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то

$$\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d} \text{ и } \frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-d}.$$

Способ V. а) Пусть отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке Z (рис. 10), тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{S_{AC_1C}}{S_{C_1BC}},\quad \frac{AC_1}{C_1B}=\frac{S_{AC_1Z}}{S_{C_1BZ}}. \qquad (6)$$

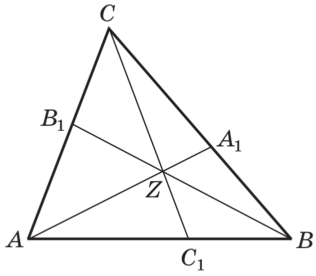


Рис. 10

Из равенств (6) и второго утверждения задания 14 следует, что

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{S_{AC_1C}-S_{AC_1Z}}{S_{C_1BC}-S_{C_1BZ}}\text{, или } \frac{AC_1}{C_1B}=\frac{S_{ACZ}}{S_{BCZ}}.$$

Аналогично получим, что

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{S_{ABZ}}{S_{ACZ}} \text{ и } \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_{BCZ}}{S_{ABZ}}.$$

Перемножив три последние равенства, получим:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_{ACZ}}{S_{BCZ}}\cdot\frac{S_{ABZ}}{S_{ACZ}}\cdot\frac{S_{BCZ}}{S_{ABZ}}=1,$$

то есть верно равенство (1), что и требовалось доказать.

Утверждение «а» теоремы Чевы доказано.

Отношение площадей треугольников с общим основанием, которое использовалось в приведенном способе доказательства, можно получить другим способом. Приведем доказательство теоремы Чевы из статьи [4].

Способ VI. а) Пусть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Опустим из вершин A и B треугольника ABC перпендикуляры AA_0, BB_0 на прямую CC_0 (рис. 11). Треугольники AC_1A_0 и BC_1B_0 подобны, следовательно,

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AA_0}{BB_0}=\frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}.$$

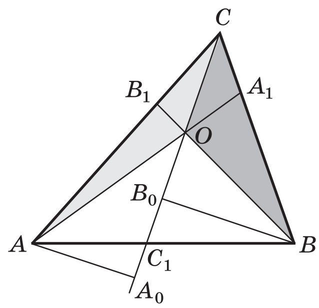


Рис. 11

Аналогичным образом получаем, что

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{S_{BOA}}{S_{COA}} \text{ и } \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_{COB}}{S_{AOB}}.$$

Перемножив полученные равенства, получим:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Утверждение «а» теоремы Чевы доказано.

Задание 15. Пусть чевианы пересекаются в одной точке внутри треугольника и разбивают его на 6 треугольников, площади которых равны S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 (рис. 12). Докажите, что $S_1 \cdot S_3 \cdot S_5 = S_2 \cdot S_4 \cdot S_6$.

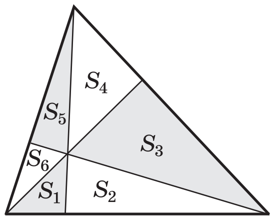


Рис. 12

Задание 16. Найдите площадь S треугольника CNZ (площади других треугольников указаны на рисунке 13).

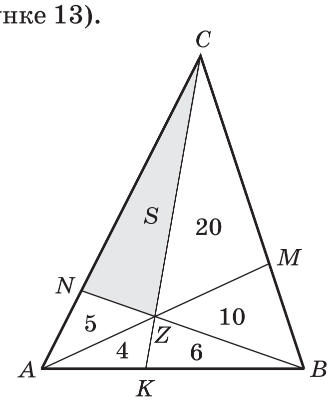


Рис. 13

Ответ: 15.

Задание 17. Найдите площадь S треугольника CNO, если площадь треугольника ANO равна 10 и $AK : KB = 2 : 3$, $BM : MC = 1 : 2$ (рис. 14).

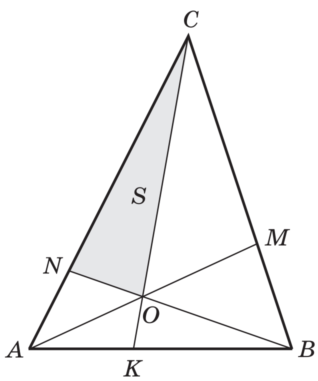


Рис. 14

Ответ: 30.

Задание 18. Найдите площадь S треугольника CNO, если площадь треугольника ABC равна 88 и $AK : KB = 2 : 3$, $BM : MC = 1 : 2$ (см. рис. 14).

Решение. Так как $AK : KB = 2 : 3$, то обозначим $S_{AKO} = 2x$, $S_{BKO} = 3x$. Так как $BM : MC = 1 : 2$, то обозначим $S_{BMO} = y$, $S_{CMO} = 2y$. Из теоремы Чевы следует, что $\frac{CN}{NA}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=1$, и тогда $\frac{CN}{NA}=3$.

Если $S_{CNO} = S$, то $S_{ANO}=\frac{S}{3}$ (рис. 15). У нас три неизвестные величины (x, y и S), поэтому для нахождения S составим три уравнения.

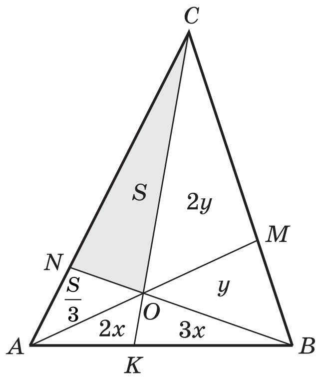


Рис. 15

Так как $S_{ABC} = 88$, то $\frac{4S}{3}+3y+5x=88$. Так как $S_{AOC} : S_{BOC} = 2 : 3$, то $\frac{1}{2}\cdot\frac{4S}{3}=\frac{3y}{3}$, откуда $3y = 2S$.

Так как $S_{AOB} \cdot S_{AOC} = 1 : 2$, то $5x=\frac{1}{2}\cdot\frac{4S}{3}=\frac{2S}{3}$.

Итак, $\frac{4S}{3}+2S+\frac{2S}{3}=88$, откуда $S = 22$.

Задание 19. (*МГУ, заочные подготовительные курсы.*) В треугольнике ABC точки K и L принадлежат соответственно сторонам AB и BC. $AK : KB = 1 : 2$, $CL : LB = 2 : 1$. P — точка пересечения отрезков AL и CK. Площадь треугольника PBC равна 1. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: 1,75.

Задание 20. (*Теорема Жергона и ее следствие.*) Докажите, что если прямые, соединяющие вершины треугольника ABC с точками противоположных сторон A_1, B_1 и C_1, пересекаются в точке Z, то верно равенство:

а) $\frac{ZA_1}{A_1A}+\frac{ZB_1}{B_1B}+\frac{ZC_1}{C_1C}=1$;

б) $\frac{ZA}{A_1A}+\frac{ZB}{B_1B}+\frac{ZC}{C_1C}=2$.

Идея доказательства теоремы Жергона заключается в замене отношений длин отрезков отношениями площадей. Покажем применение этой идеи при доказательстве более сложного утверждения.

Задание 21. Докажите, что если прямые, соединяющие вершины треугольника ABC с точками противоположных сторон A_1 и B_1, взятыми на продолжениях сторон BC и AC соответственно, и точкой C_1, взятой на стороне AB, пересекаются в точке Z (рис. 16), то:

а) $\dfrac{ZA_1}{AA_1}+\dfrac{ZB_1}{BB_1}-\dfrac{ZC_1}{CC_1}=1;$

б) $\dfrac{ZA}{AA_1}+\dfrac{ZB}{BB_1}-\dfrac{ZC}{CC_1}=0.$

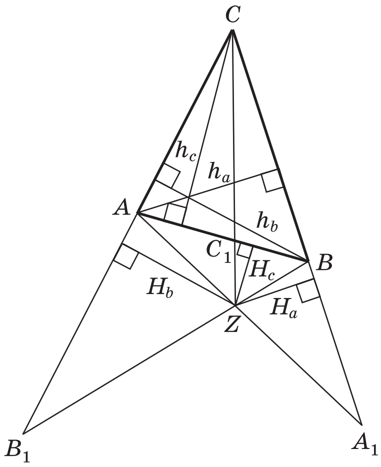


Рис. 16

Доказательство. а) Пусть h_a, h_b, h_c — высоты треугольника ABC, H_a, H_b, H_c — расстояния от точки Z до прямых BC, AC, AB соответственно. Из подобия прямоугольных треугольников с общим острым углов имеем: $\dfrac{ZA_1}{AA_1}=\dfrac{H_a}{h_a}$. Отношение $\dfrac{H_a}{h_a}$ равно отношению площадей треугольников ZBC и ABC с общим основанием BC: $\dfrac{H_a}{h_a}=\dfrac{S_{ZBC}}{S_{ABC}}$, то есть $\dfrac{ZA_1}{AA_1}=\dfrac{S_{ZBC}}{S_{ABC}}$.

Аналогично получим, что

$$\frac{ZB_1}{BB_1}=\frac{H_b}{h_b}=\frac{S_{ZAC}}{S_{ABC}} \text{ и } \frac{ZC_1}{CC_1}=\frac{H_c}{h_c}=\frac{S_{ZAB}}{S_{ABC}}.$$

Тогда

$$\frac{ZA_1}{AA_1}+\frac{ZB_1}{BB_1}-\frac{ZC_1}{CC_1}=\frac{S_{ZBC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{ZAC}}{S_{ABC}}-\frac{S_{ZAB}}{S_{ABC}}=$$

$$=\frac{S_{ZBC}+S_{ZAC}-S_{ZAB}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1,$$

что и требовалось доказать.

б) Преобразуем левую часть доказываемого равенства, используя результат, полученный при выполнении задания 21 (а):

$$\frac{ZA}{AA_1}+\frac{ZB}{BB_1}-\frac{ZC}{CC_1}=\frac{AA_1-ZA_1}{AA_1}+\frac{BB_1-ZB_1}{BB_1}-\frac{CC_1-ZC_1}{CC_1}=$$

$$=1-\frac{ZA_1}{AA_1}+1-\frac{ZB_1}{BB_1}-1+\frac{ZC_1}{CC_1}=$$

$$=1-\left(\frac{ZA_1}{AA_1}+\frac{ZB_1}{BB_1}-\frac{ZC_1}{CC_1}\right)=1-1=0,$$

что и требовалось доказать.

Литература

1. *Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б.* и др. Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 8 класса: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением. — М.: Вита-Пресс, 2005. — 208 с.
2. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Замечательные точки и линии треугольника // Математика, 2006, № 17.
3. *Мякишев А.Г.* Элементы геометрии треугольника. — М.: МЦНМО, 2002. — (Библиотека «Математическое просвещение».)
4. *Эрдниев П., Манцаев Н.* Теоремы Чевы и Менелая // Квант, 1990, № 3, с. 56–59.

ФОТО НА КОНКУРС

– Рома, и как же пройдет это сечение?
– Погоди, дай соображу!

Автор: А.А. Абдуллина,
средняя школа № 4, пос. Чишмы,
Республика Башкортостан

ЛЕТНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ, ОКОНЧИВШИХ 7 КЛАСС

Считай несчастным тот день или тот час, в который ты не усвоил ничего нового и ничего не прибавил к своему образованию.
Я.А. Коменский

ИЮЛЬ

1 | Пятница

Развивай мышление

Среди всех трехзначных чисел, в записи которых все цифры различны, выбрали наибольшее и наименьшее числа. Чему равна разность этих чисел?

2 | Суббота

Готовься к экзамену

1. Из данных чисел $\frac{1}{2}$, 0,45, $\frac{1}{4}$, 0,2 выбери наименьшее.

2. Упрости выражение $-3xy^2 \cdot (-2)xy^3$.

1) $6x^2y^6$ 2) $-6x^2y^5$ 3) $6x^2y^5$ 4) $-6x^2y^6$

3. Реши уравнение $\frac{2-3x}{6}+\frac{x+5}{3}=\frac{2}{3}$.

4. Для каждой точки укажи соответствующую ей координатную четверть.

$A(-4; 2)$ $Б(6; 8)$
$В(-1; -9)$ $Г(2; -3)$

1) I 2) II
3) III 4) IV

5. У двух друзей 140 р. Когда первый потратил 26 р., а второй 60 р., у первого осталось денег в 2 раза больше, чем у второго. Сколько денег было у каждого первоначально?

Ответы к заданиям

1.

2.

1	2	3	4

3. ______________________

4.

А	Б	В	Г

5. Запиши решение.

3 | Воскресенье

Совет 3. Воспринимай математические примеры как игру! Никаких пробелов в знаниях быть не должно, все пройденные правила и теоремы надо знать наизусть — именно они основа всего, без них не обойтись, как и без карты местности, где зарыт клад.

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 8.

КАЛЕНДАРЬ

4 | Понедельник

Тема: «Стандартный вид чисел-великанов»

1. Запиши числа в стандартном виде: 34000000000; 91800000; 800; 324509000.

2. Население Китая 1 млрд 200 млн человек. Запиши эту величину в стандартном виде.

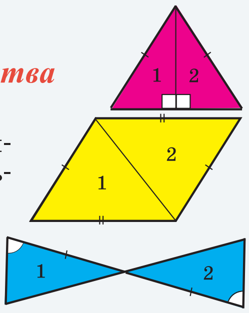
3. Среднее расстояние до Солнца около 150 млн км. Представь эту величину в стандартном виде.

Для повторения

Каждое число, большее 10, можно записать в виде $a\cdot 10^n$, где $1 \le a < 10$ и n — натуральное число. Такая запись называется *стандартным видом числа*.

5 | Вторник

Тема: «Признаки равенства треугольников»



1. Сформулируй три признака равенства треугольников.

2. Докажи равенство треугольников, применяя один из признаков.

6 | Среда

Проверь себя

Тема: «Системы линейных уравнений»

Реши системы способом подстановки:

1. $\begin{cases}3x+y=7,\\ 2x-3y=1;\end{cases}$ **2.** $\begin{cases}x+5y=7,\\ 3x+2y=-5;\end{cases}$ **3.** $\begin{cases}3x-y=3,\\ 3x-2y=0.\end{cases}$

7 | Четверг

Тема: «Задачи на работу»

1. Бригада планировала заготовить лес за 6 дней, но, перевыполняя нормы ежедневно на 16 м^3, она справилась за 4 дня. Сколько кубометров заготовляла бригада в день?

2. Фермер планировал провести сев за 14 дней. Но ежедневно засевал на 30 га больше, чем планировал, и за 4 дня до срока осталось засеять 20 га. Сколько гектаров должно быть засеяно?

8 | Пятница

Развивай мышление

С одного участка собрали 320 кг моркови, а с другого в 2 раза больше. Четвертую часть всей моркови отдали на корм кроликам, половину оставшейся моркови разложили в ящики по 18 кг и отправили в санаторий. Сколько ящиков моркови отправили в санаторий?

9 | Суббота

Готовься к экзамену

1. Отрезок длиной 50 см разделили в отношении 3 : 7. Найди длину большей части.

2. Соотнеси пару чисел с ее наименьшим общим кратным.

А) 12 и 15 Б) 4 и 18 В) 6 и 24

1) 24 2) 36 3) 60

3. Упрости выражение

$$4\cdot\left(3-\frac{2}{5}x\right)-2\left(0,6x+\frac{3}{4}\right).$$

1) $13,5-2,8x$
2) $13,5-0,4x$
3) $10,5-2,8x$
4) $10,5-14,8x$

4. Вычисли:

$$\frac{27^2\cdot\left(3^4\right)^4}{\left(9\cdot 27^3\right)^3}.$$

5. В жилом доме 50 квартир, одни из них двухкомнатные, другие — трехкомнатные. Сколько квартир каждого вида в этом доме, если в доме всего 115 комнат?

Ответы к заданиям

1.

2.

А	Б	В

3.

1	2	3	4

4. ________________

5. Запиши решение.

10 | Воскресенье

Совет 4. Необходимо хорошо понимать смысл правил и теорем! Ты не сдвинешься с места, если просто вызубрить все теоремы. Необходимо хорошо представлять себе, о чем именно в них идет речь. Мало поможет то, что «квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов», если ты не представляешь, что такое катет и где он находится. Во время объяснения нового материала не стесняйся спрашивать учителя, что непонятно, поскольку учитель для этого и находится в классе.

11 | Понедельник

Тема: «Уравнения»

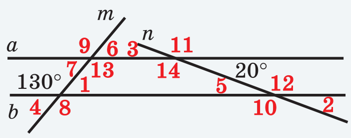
Реши уравнение.

1. $2x = 10.$ **2.** $10x = 2.$
3. $-2x = 10.$ **4.** $-10x = 2.$
5. $2x = -10.$ **6.** $10x = -2.$
7. $-2x = -10.$ **8.** $-10x = -2.$
9. $2(x - 5) = 2x - 10.$
10. $2 - 2(10 - x) = 2(x - 10) + 10.$
11. $\frac{x-10}{2}=\frac{x-2}{10}.$

12 | Вторник

Тема: «Свойства углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей»

Найди величины пронумерованных углов, если $a \parallel b$.



13 | Среда

Проверь себя

Тема: «Сложение и вычитание алгебраических дробей»

1. $\frac{4c+3y}{c^2-y^2}-\frac{3}{c-y}= \bigcirc$

2. $\bigcirc + \frac{1}{y-c} = \bigcirc$

3. $\bigcirc - \frac{4}{5y+5c} = \bigcirc$

Для самоконтроля

Ответ: $\frac{5\left(y^2-c^2\right)}{4c+y}.$

14 | Четверг

Тема: «Задачи на проценты»

1. Груши при сушке теряют 80% своего веса. Сколько сушеных груш получится из 35 кг свежих?

2. Вес изюма, получаемого при сушке винограда, составляет 32% от массы винограда. Из какого количества винограда получится 2 кг изюма?

15 | Пятница

Развивай мышление

Внук спросил своего дедушку: «Сколько тебе лет?» Дедушка ответил: «Если я проживу половину того, что я прожил, да еще 1 год, то мне будет 100 лет». Сколько лет дедушке?

16 | Суббота

Готовься к экзамену

1. Какую прямую **не** пересекает график функции $y = -2x + 4$?

1) $y = x - 1$
2) $y = 2x + 2$
3) $y = -x + 4$
4) $y = -2x - 3$

2. Вычисли:

$$\frac{(-2)^5 \cdot \left(2^{2}\right)^6}{4^7}.$$

3. Реши уравнение

$$3-\frac{x-2}{3}=\frac{3x}{2}.$$

4. Соотнеси дробь, которая выражает долю некоторой величины, и соответствующие ей проценты.

А) $\frac{1}{2}$ Б) 0,1 В) $\frac{1}{4}$ Г) $\frac{4}{5}$

1) 10% 2) 25% 3) 50% 4) 80%

5. Упрости выражение

$$\frac{c^2-10c+25}{2c+4}\cdot\frac{4c+8}{c^2-25}+\frac{2}{c+5}$$

и найди его значение при $c = -3$.

Ответы к заданиям

1.

1	2	3	4

2.

3. ______________

4.

А	Б	В	Г

5. Запиши решение.

17 | Воскресенье

Совет 5. Окружи себя формулами, которые тебе необходимо выучить. Напиши их на листах бумаги и повесь в своей комнате или около зеркала. Постоянно натыкаясь на них, ты запомнишь их как навязчивую телевизионную рекламу и, в случае надобности, всегда сможешь вызвать их из памяти.

18 | Понедельник

Тема: «Расположение чисел на координатной прямой»

1. Даны числа: $0;\ 1;\ 7;\ -5;\ \frac{1}{2};\ -3\frac{1}{4};\ 4;\ -2{,}5$.

Отметь их на координатной прямой.

2. Числа x и y отмечены точками на координатной прямой.

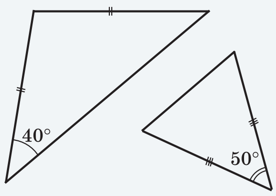
а) Запиши в порядке возрастания числа $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и 1.

б) Сравни: $-x$ и y; y^3 и y^2.

19 | Вторник

Тема: «Равнобедренный треугольник»

1. Найди стороны равнобедренного треугольника, если известно, что боковая сторона на 3 см больше основания, а периметр треугольника равен 42 см.



2. На каждом рисунке найди неизвестные углы треугольника.

20 | Среда

Проверь себя

Тема: «Сокращение дробей»

Сократи дроби.

1. $\dfrac{12a^8x^9}{4a^2x^{11}}$. **2.** $\dfrac{x-y}{x^2-y^2}$. **3.** $\dfrac{a^2-2ay+y^2}{a-y}$.

4. $\dfrac{n^2-x^2}{n^2+2nx+x^2}$. **5.** $\dfrac{3c-12}{16-c^2}$.

21 | Четверг

Тема: «Задачи на движение»

1. Лодка проплывает расстояние между селениями, стоящими на берегу, за 4 ч по течению реки и за 8 ч против течения. Скорость течения реки 2 км/ч. Найди расстояние между селениями.

2. Моторная лодка за одно и то же время может проплыть 36 км против течения реки и 48 км по течению. Найди собственную скорость лодки, если скорость течения реки 3 км/ч.

22 | Пятница

Развивай мышление

В пакетах лежит 20 яблок, причем в одном пакете в 2 раза меньше, чем в каждом из двух других. Сколько яблок в каждом пакете?

23 | Суббота

Готовься к экзамену

1. Соотнеси график функции с точкой ее пересечения с осью Ox.

А) $y = 1 - x$ Б) $y = 2x + 4$ В) $y = 3x - 6$

1) $(1;\ 0)$ 2) $(-1;\ 0)$ 3) $(-2;\ 0)$ 4) $(2;\ 0)$

2. Раскрой скобки и приведи подобные слагаемые:

$$-2(4x - 3y) - 3(2y - 5x).$$

3. Вычисли: $\dfrac{2^9\cdot\left(7^3\right)^3}{14^7}$.

4. Реши уравнение

$$\frac{80+16(4x+154)}{48}=55.$$

1) 1,5 2) 2
3) 3 4) 2,5

5. Хозяин овощной лавки купил на оптовом рынке 100 кг помидор и заплатил 4000 рублей. В конце дня оказалось, что 10% помидоров испортилось, и их не смогли продать. Остальные помидоры продали по цене 50 р. за килограмм. Какую прибыль получил хозяин?

Ответы к заданиям

1.

А	Б	В

2. ________________

3.

4.

1	2	3	4

5. Запиши решение.

24 | Воскресенье

Совет 6. Не ломай голову в одиночестве! Длинные тоскливые примеры и сложнейшие задачи прямо-таки оживают, если к их решению приступить в компании с другом или подругой. Обмениваясь своими вариантами решения, легче и веселее идти к истинному ответу.

25 | Понедельник

Тема: «Способ группировки»

Разложи на множители:

1. $ac - 3bd + ad - 3bc$.

2. $18a^2 - 27ab + 14ac - 21bc$.

3. $x^3 - 4x^2 - 4x + 16$.

4. $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

5. $x^3 - 5x^2 - 9x + 45$.

Для повторения

Чтобы разложить многочлен на множители способом группировки, нужно:

— объединить члены многочлена в такие группы, которые имеют общий множитель в виде многочлена;

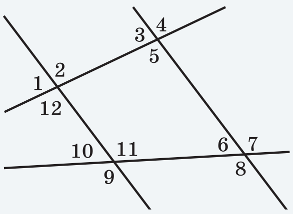
— вынести этот общий множитель за скобки.

26 | Вторник

Тема: Виды углов»

Используя рисунок, выпиши углы указанных видов:

острые;
вертикальные;
прямые;
накрест лежащие;
тупые;
односторонние;
смежные;
соответственные.



27 | Среда

Проверь себя

Тема: «Степень с натуральным показателем»

Вычисли устно:

3^3; -3^3; 3^4; $(-3)^4$; -3^4; 1^8;

$(-1)^8$; $(0,3)^2$; $(0,3)^3$; $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$;

$\left(1\frac{1}{4}\right)^2$; $20^4 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4$; $\frac{10^8}{2^6 \cdot 5^6}$; $\frac{14^5}{7^5}$.

31 | Воскресенье

Совет 7. Внимательно читай задание! Очень часто ключ к решению задачи таится в ее условии, и все наши неудачи из-за того, что невнимательно прочитали задание. Поэтому читай задание внимательно и вдумчиво и только потом приступай к решению.

28 | Четверг

Тема: «Текстовые задачи»

1. На платье и три сарафана ушло 9 м ткани, а на три таких же платья и пять сарафанов — 19 м ткани. Сколько ткани требуется на платье, а сколько на сарафан?

2. На турбазе 25 палаток и домиков, вместе взятых. В каждом домике живет 4 человека, а в каждой палатке – 2 человека. Сколько на турбазе палаток и сколько домиков, если на турбазе отдыхают одновременно 70 человек?

29 | Пятница

Развивай мышление

Толя начал читать книгу, когда Сережа уже прочитал 24 страницы той же книги. Догонит ли Толя Сережу через 5 дней, если он читает в день 18 страниц, а Сережа — 12 страниц.

30 | Суббота

Готовься к экзамену

1. Сократи дробь $\frac{7a - 14a^2}{42a^2 - 21a}$.

2. Какая точка расположена внутри треугольника, образованного прямыми

$x = 5$, $y = 3$, $y = -x + 3$?

1) (1; 1) 2) (–2; 2) 3) (2; 2) 4) (0; 0)

3. Соотнеси число с его стандартным видом.

А) 5900000 Б) $590 \cdot 10^3$ В) 590 млн

1) $5,9 \cdot 10^5$ 2) $5,9 \cdot 10^8$ 3) $5,9 \cdot 10^6$

4) $59 \cdot 10^5$ 5) $590 \cdot 10^6$

4. Летом килограмм клубники стоит 90 р. Мама купила 1 кг 400 г клубники. Сколько сдачи она должна получить с 1000 р.?

5. Реши систему уравнений

$$\begin{cases}(x+4)^2 - (x+2)^2 = 2y + 23,\\(y+5)^2 - (y+1)^2 = 6x + 15.\end{cases}$$

Ответы к заданиям

1. ______________

2.

1	2	3	4

3.

А	Б	В

4.

5. Запиши решение.

Г. ФИЛИППОВСКИЙ,
Киев

РАВНОВЕЛИКОСТЬ В ПОСТРОЕНИЯХ ОДНОЙ ЛИНЕЙКОЙ

Задачи на равенство площадей *(равновеликость)* сами по себе подразумевают определенную эрудицию в геометрии. Тем более при ограничении в инструментах, которыми можно пользоваться. Что это за ограничения? В задачах, о которых пойдет речь, построения выполняются не циркулем и линейкой, как традиционно принято, а *одной линейкой*! Возможно ли это?

У истоков построения одной линейкой стоит замечательный швейцарский геометр Якоб Штейнер (1796–1863). Он составил коллекцию задач, которые выполняются при помощи одной линейки. Он также показал, что «линейка может не все», но если в плоскости чертежа задать окружность с центром, то одна линейка «станет равна линейке с циркулем». Возвращаясь к построениям одной линейкой, отметим, что лемма 1, о которой говорится ниже, — не что иное, как задача Якоба Штейнера.

Однако прежде, чем перейти к задачам на равновеликость для одной линейки, напомним некоторые *факты и леммы*, которые будут способствовать решению этих задач.

Факт 1. Медиана делит треугольник на две равновеликие части. Покажите!

Факт 2. Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника. Треугольники, прилегающие к боковым сторонам трапеции, равновелики.

Покажите, что на рисунке 1 $S_1 = S_2$.

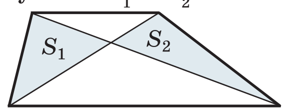


Рис. 1

Лемма 1. (*О двух параллельных и точке.*) Через точку K вне параллельных прямых a и b можно при помощи *одной линейки* провести прямую параллельно a и b.

На рисунке 2 порядок проведения линий указан цифрами.

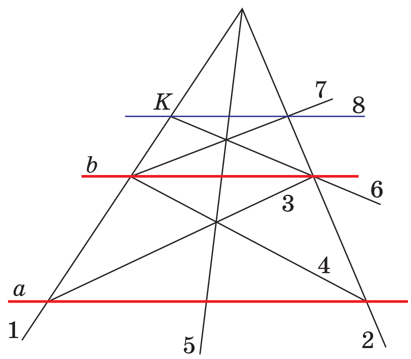


Рис. 2

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 12.

Лемма 2. (*Об отрезке с серединой.*) Если дан отрезок BC с его серединой M, то через любую точку N можно с помощью *одной линейки* провести прямую параллельно BC .

На рисунке 3 порядок проведения линий указан цифрами.

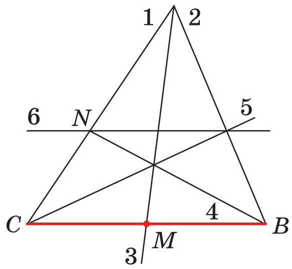


Рис. 3

Что касается самих задач на равновеликость, то мы разобьем их на три группы в зависимости от фигур, подлежащих рассмотрению. Напомним, что все построения выполняются *одной линейкой*.

Группа 1. Треугольник

Задача 1. Дан треугольник ABC и точка M — середина стороны BC. Постройте точку Q, отличную от M, такую, что $S_{ABQ} = S_{ACQ}$.

Решение. В качестве точки Q подойдет любая точка прямой AM. Поскольку вершины B и C равноудалены от прямой AM *(покажите)*, то треугольники ABQ и ACQ имеют общее основание AQ и равные высоты BE и CF (рис. 4).

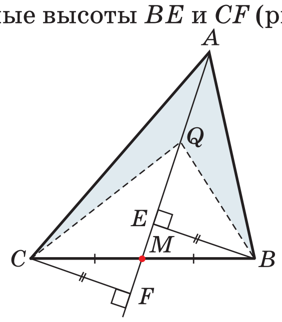


Рис. 4

Задача 2. Дан треугольник ABC, точка T на стороне BC и точка K — середина AT (рис. 5). На продолжении CA постройте точку Q такую, чтобы треугольник QCT был равновелик треугольнику ABC.

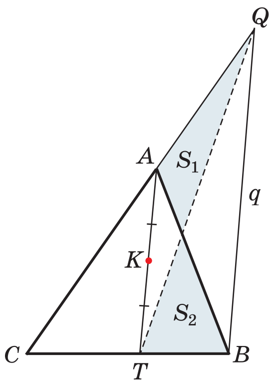


Рис. 5

Решение. Проведем через B прямую q, параллельную AT (лемма 2). Прямые CA и q пересекутся в искомой точке Q. Действительно, $S_1 = S_2$ (факт 2), следовательно, $S_{QCT} = S_{ABC}$.

Задача 3. В окружность ω с центром O вписан треугольник ABC с указанным инцентром I (точкой пересечения биссектрис). Разделите треугольник ABC на две равновеликие части.

Решение. Пусть прямая AI пересекает ω в точке W (рис. 6). Радиус OW и хорда BC пересекаются в точке M — середине BC (покажите!). Остается провести медиану AM.

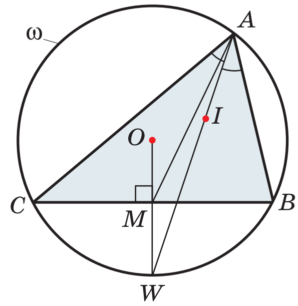


Рис. 6

Задача 4. В окружность ω с центром O вписан треугольник ABC с указанным ортоцентром H (точка пересечения высот). *Тремя линиями* разделите треугольник ABC на две равновеликие части.

Решение. Первая линия — прямая AO, которая пересекает ω в точке D (рис. 7).

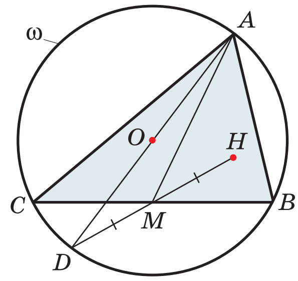


Рис. 7

Вторая линия — отрезок DH, пересекающий BC в его середине M (покажите!).

Третья линия — медиана AM.

Задача 5. При том же условии (ω с центром O; треугольник ABC с ортоцентром H) разделите треугольник ABC на две равновеликие фигуры: треугольник и четырехугольник.

Решение. Пусть прямая AH пересекает BC в точке H_1 , а ω — в точке N (рис. 8). Тогда $HH_1 = H_1N$ (точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон, лежат на описанной около этого треугольника окружности).

Через O проведем прямую параллельно HN (лемма 2). Она пересекает сторону BC в ее середине M и AC в некоторой точке Q. Отрезок QH_1 разделит треугольник ABC на две равновеликие фигуры: треугольник CQH_1 и четырехугольник AQH_1B, поскольку $S_1 = S_2$ (факт 2).

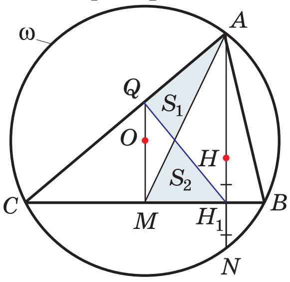


Рис. 8

Группа 2. Параллелограмм, прямоугольник, трапеция

Задача 6. Из параллелограмма $ABCD$ вырезан параллелограмм $KLNT$. Разделите оставшуюся фигуру на две равновеликие части.

Решение. Пусть диагонали AC и BD пересекаются в точке O, а диагонали KN и LT — в точке Q (рис. 9). Тогда прямая QO будет искомой (покажите!).

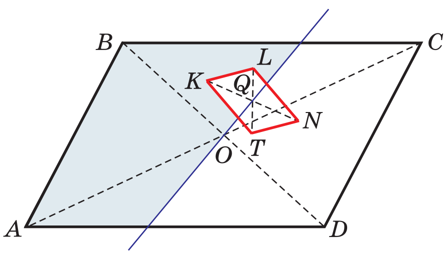


Рис. 9

Задача 7. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка K на продолжении AD. Постройте параллелограмм $AKEF$, равновеликий $ABCD$.

Решение. Проведем через точку K прямую k, параллельную стороне CD (лемма 1). Пусть прямые BC и k пересекаются в точке N, а прямые AN и CD пересекаются в точке T (рис. 10). Прямая, проведенная через T параллельно BC и AD (лемма 1), в пересечении с k и AB даст соответственно искомые точки E и F. Действительно, из подобия треугольников ATD и ANK следует: $\frac{AD}{AK} = \frac{h_1}{h}$, или $AD \cdot h = AK \cdot h_1$, что и означает равенство площадей параллелограммов $ABCD$ и $AKEF$.

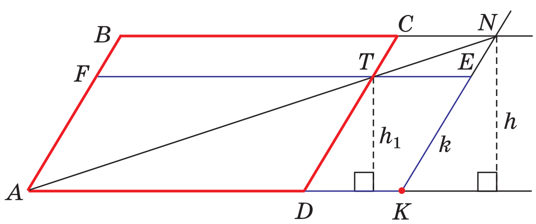


Рис. 10

Задача 8. Дан прямоугольник $ABCD$. Разделите его на четыре равновеликие части прямыми, выходящими из вершины A.

Решение. Находим точки T и Q — соответственно середины BC и CD. Построить эти точки нам поможет *лемма о трапеции*: точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений ее боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой. Остается после этого соединить точку A с точками T, C и Q (рис. 11), в результате чего прямоугольник $ABCD$ будет разделен на четыре равновеликие части (покажите!).

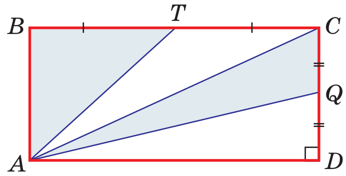


Рис. 11

Задача 9. В трапеции $ABCD$, где $BC \parallel AD$, проведена диагональ BD и указана точка K — ее середина. Через вершину B проведите прямую, делящую трапецию на две равновеликие части.

Решение. Через K проводим прямую EF параллельно основаниям (лемма 1). EF является средней линией трапеции $ABCD$ (рис. 12). Пусть прямые BF и AD пересекаются в точке N. Очевидно, треугольник ABN равновелик трапеции $ABCD$ ($\Delta\ BCF = \Delta\ NDF$). Остается в треугольнике ABN провести медиану BM (факт 1), что нетрудно сделать, воспользовавшись *леммой о трапеции* ($AEFD$ — трапеция).

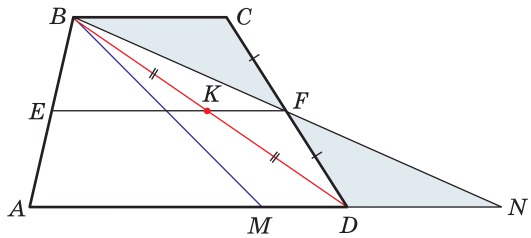


Рис. 12

Задача 10. Дана трапеция $ABCD$, где $BC \parallel AD$, и точка T — середина стороны CD. На диагонали AC найдите точку Q такую, чтобы треугольники ABC и CDQ были равновелики.

Решение. Через вершину B проводим прямую q, параллельную стороне CD (лемма 2). Эта прямая пересекает AC в искомой точке Q (рис. 13). Действительно, для трапеции $ABCD$ $S_{AOB} = S_{COD}$ (факт 2). А для трапеции $BCDQ$ $S_{BOC} = S_{QOD}$ (вновь согласно факту 2). Вот и получается, что $S_{CQD} = S_{ABC}$.

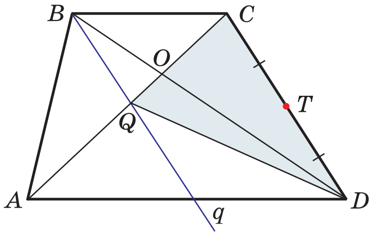


Рис. 13

Группа 3. Четырехугольник и другие фигуры

Задача 11. Дан четырехугольник $ABCD$ и прямая l, параллельная диагонали AC. Разделите четырехугольник $ABCD$ на две равновеликие части.

Решение. Имея прямую l, параллельную AC, находим середину AC — точку Q, воспользовавшись леммой о трапеции. Ломаная BQD (рис. 14) будет искомой, так как BQ и DQ — медианы в треугольниках ABC и ACD соответственно.

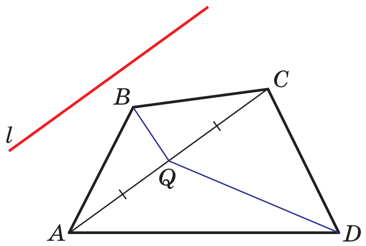


Рис. 14

Задача 12. В окружность ω с центром O вписан четырехугольник $ABCD$, сторона AD которого является диаметром окружности (рис. 15). Впишите в окружность треугольник, равновеликий $ABCD$.

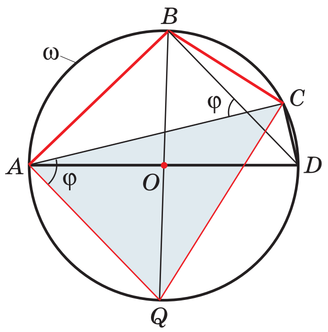


Рис. 15

Решение. Проведем диаметр BQ. Треугольник ACQ является искомым. И вот почему: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\varphi$. Поскольку $ABDQ$ — прямоугольник, то $AQ = BD$ и $AQ \parallel BD$. Тогда $\angle CAQ = \varphi$,

$$S_{ACQ} = \frac{1}{2} AC \cdot AQ \cdot \sin\varphi = S_{ABCD}.$$

Задача 13. В окружность ω с центром O вписан четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями AC и BD. Проведя не более двух линий, разделите $ABCD$ на две равновеликие части.

Решение. Покажем, что отрезки AO и CO разделят площадь четырехугольника $ABCD$ пополам (рис. 16). Если провести $OQ \perp BD$, то, очевидно, $BQ = QD$. Тогда $S_{ABCQ} = S_{ADCQ}$ (AQ и CQ — медианы в треугольниках ABD и BCD соответственно). Но $AOQC$ — трапеция, и $S_1 = S_2$ (факт 2). Следовательно, $S_{ABCO} = S_{ADCO}$.

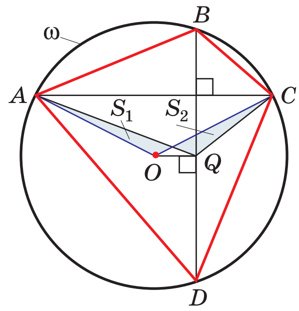


Рис. 16

Задача 14. Из двух прямоугольников составили некоторую фигуру $ABCDEF$ (рис. 17). Разделите ее на две равновеликие части.

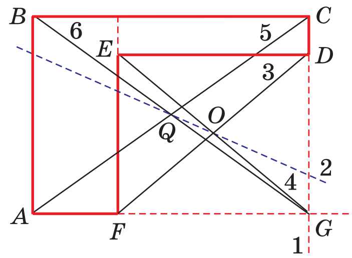


Рис. 17

Решение. Сначала построим точку G — четвертую вершину «пустого» прямоугольника $FEDG$. Затем найдем точки O и Q пересечения диагоналей $FEDG$ и $ABCG$ соответственно. Прямая OQ будем искомой (покажите!).

Задача 15. Противоположные стороны шестиугольника $ABCDEF$ равны и параллельны. Впишите в него треугольник, равновеликий оставшейся части шестиугольника.

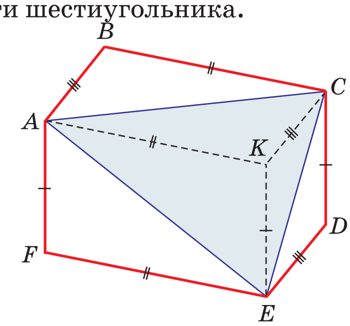


Рис. 18

Решение. Пусть $ABCDEF$ — шестиугольник, в котором равны и параллельны такие пары сторон: AB и DE; BC и EF; CD и AF (рис. 18). Покажем, что площадь треугольника ACE составляет как раз половину площади данного шестиугольника $ABCDEF$. Построим мысленно точку K такую, что $AK \parallel EF$ и $AK = EF$. Тогда мы получим три параллелограмма: $ABCK$, $KCDE$ и $AKEF$. Поскольку диагональ параллелограмма делит его площадь пополам, то, очевидно, треугольник ACE равновелик оставшейся части данного шестиугольника.

Задачи для самостоятельного решения

16. Дан треугольник ABC, его инцентр I, а также точка K — середина ломаной BAC. Разделите треугольник ABC на две равновеликие части.

17. Дан треугольник ABC, отрезок TM с его серединой — точкой N ($T \in AC$, M — середина BC). Через T проведите прямую, делящую треугольник ABC на две равновеликие части.

18. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка K вне параллелограмма. Проведите через K прямую, делящую $ABCD$ на две равновеликие части.

19. Дана трапеция $ABCD$. Наименьшим числом линий постройте три пары равновеликих треугольников.

20. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, в котором указана точка T — середина диагонали BD. На продолжении AB найдите точку Q такую, чтобы треугольник AQD был равновелик четырехугольнику $ABCD$.

21. В окружность ω с центром O вписан треугольник ABC. Постройте четырехугольник, вписанный в ω и равновеликий треугольнику ABC.

Литература

1. *Жуков А.В., Самовол П.И., Аппельбаум М.В.* Элегантная математика. — М.: КомКнига, 2005.
2. *Заславский А.А.* Олимпиады имени И.Ф. Шарыгина. — М.: Бюро Квантум, 2009.
3. *Зетель С.И.* Геометрия линейки и геометрия циркуля. — М.: ФПИ РСФСР, 1950.
4. *Кушнир И.* Возвращение утраченной геометрии. — К.: Факт, 2004.
5. *Кушнир И.* Геометрия на баррикадах. — К.: Факт, 2009.
6. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. Часть I. — М.: Наука, 1991.
7. *Скопец З.А., Жаров В.А.* Задачи и теоремы по геометрии. — М.: Учпедгиз, 1962.
8. *Филипповский Г.* Школьная геометрия в миниатюрах. — К.: Грот, 2002.
9. *Шарыгин И.Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия. — М.: Наука, 1986.
10. *Юзбашев А.В.* Свойства геометрических фигур — ключ к решению любых задач по планиметрии. — М.: Просвещение, 2009.

Я́КОБ ШТЕ́ЙНЕР (1796 г., Утценедорф, Швейцария — 1863 г., Берн) — швейцарский математик.

Штейнер получил образование в Ифертене у Песталоцци, в школе-интернате, созданном педагогом-просветителем для детей бедняков. Сотрудники интерната ездили по всей стране в поисках талантливых детей, уговаривая их родителей отдать детей учиться. Юного Якоба они встретили в горах, пасущим овец. Восемнадцатилетний пастух с трудом умел читать и писать, но его познания в математике, приобретенные интуитивным путем, потрясли их. Они убедили отца Якоба — бедного крестьянина — отдать сына в интернат.

В 1818 г. он поступил в Гейдельбергский университет. Окончив там образование, в 1821 г. Штейнер поступил в Берлине учителем в частный институт, а с 1825 по 1835 гг. был учителем математики в Берлинском городском промышленном училище. Но учителем он был неважным — его раздражали ученики, не интересовавшиеся математикой, а вот университетским преподавателем — выдающимся.

С 1835 г. он начал преподавание в Берлинском университете в качестве экстраординарного профессора математики. Студенты, интересовавшиеся геометрией, вдохновляли его. Его яркие по форме и темпераментные по исполнению лекции сразу стали пользоваться большим успехом. Нравилось студентам и решать задачи, которые ставил перед ними Штейнер.

В 1834 г. за создание основ синтетической геометрии кривых линий и поверхностей 2-го и высших порядков он был избран членом Берлинской академии наук. Умирая, он завещал часть своего состояния Берлинской академии наук для премии за сочинения по синтетической геометрии, а часть – родному кантону на премию за успехи в изучении математики ученикам начальной школы для детей бедняков.

Все его сочинения изданы Вейерштрассом в Берлине в 1881–1882 гг.

Книга Я. Штейнера «Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга» по справедливости считается классическим сочинением. В ней дается применение принципов синтетической геометрии, одним из создателей которой был автор, к решению вопросов элементарной геометрии. Книгу, представляющую собой переиздание перевода, выходившего в 1910 г. в Харькове в серии «Харьковская математическая библиотека», можно найти здесь: http://math.ru/lib/38.

http://kvant.mirror1.mccme.ru/1988/07/yakob_shtejner.htm
http://ru.wikipedia.org/wiki

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

$$a_n = a_1 + (n + 1)d,$$

$$n \geq 1$$

Немецкий математик Карл Фридрих Гаусс, еще будучи школьником, сумел за считанные секунды найти сумму всех натуральных чисел от 1 до 100:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100 = ?$$

Он заметил, что суммы равноотстоящих от концов чисел равны:

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \ldots = 50 + 51 = 101.$$

Всего получается 50 пар чисел, и сумма каждой пары равна 101, поэтому общая сумма: $50 \cdot 101 = 5050$.

Действительно, последовательность натуральных чисел является арифметической прогрессией. Здесь $a_1 = 1$ и $d = 1$.

Гаусс рассматривал четное число слагаемых, поэтому он смог разбить их на пары. Можно поступить иначе. Возьмем еще одну такую же сумму, но слагаемые запишем в обратном порядке:

$$100 + 99 + 98 + \ldots + 2 + 1.$$

Сложим ее почленно с исходной суммой, и слагаемые попарно сгруппируем:

$$(100 + 1) + (99 + 2) + (98 + 3) + \ldots + (2 + 99) + (1 + 100) = 2S.$$

Суммы в каждой из скобок равны между собой, значит,

$$2S = 100\,(1 + 100), \qquad S = 50 \cdot 101 = 5050.$$

В общем случае

$$S = \frac{n\left(a_1 + a_n\right)}{2}.$$

По материалам Энциклопедии для детей. Т. 11. Математика (М.: Аванта+, 2002)

Пауль Тальман.
Картина из шаров, черно-белая.
1970. Пластмасса, 120 × 120

mat.1september.ru | Индексы подписки: Почта России 79073 (инд.); 79583 (орг.); Роспечать 32030 (инд.); 32594 (орг.)