МАТЕМАТИКА

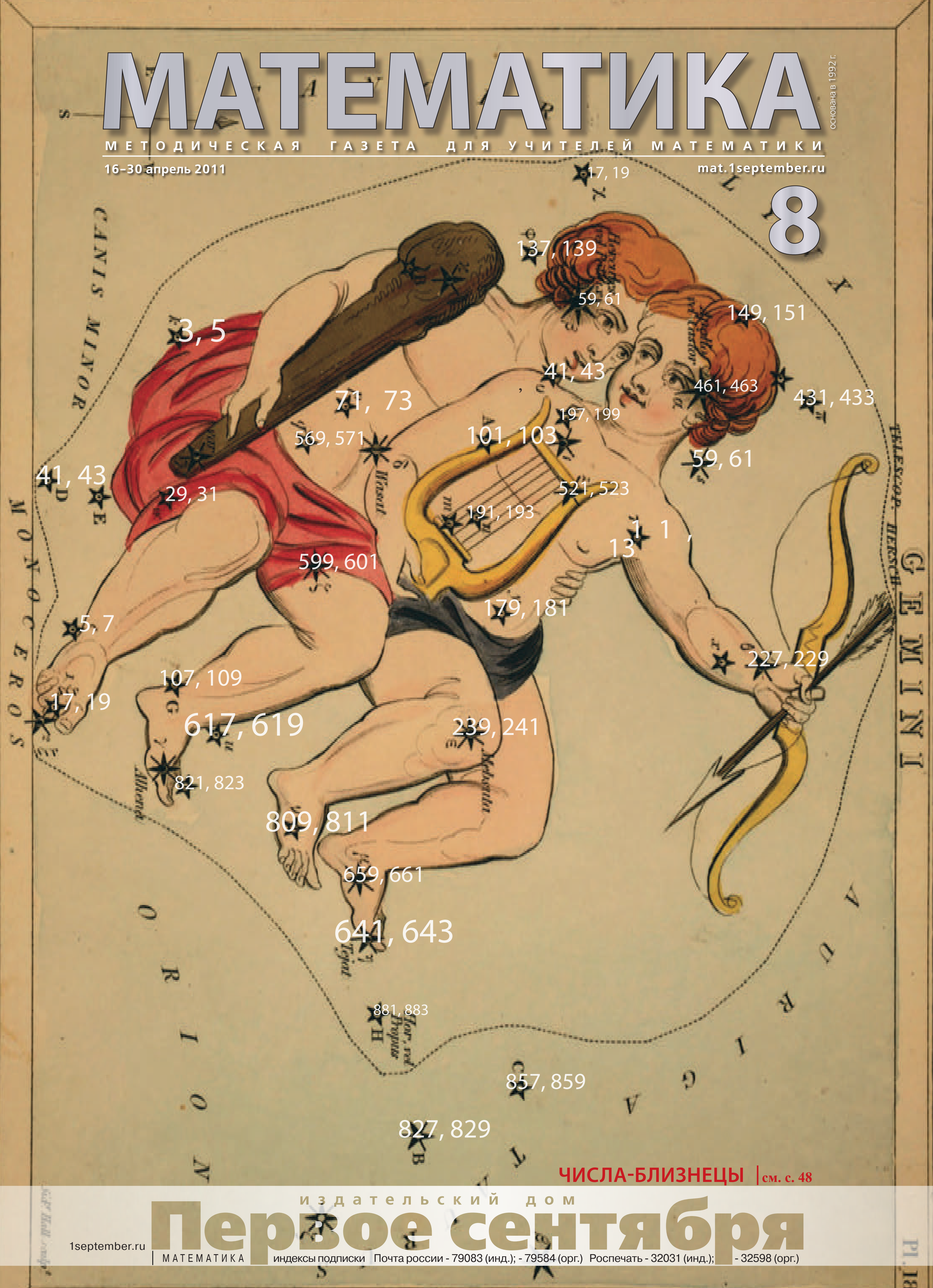
основана в 1992 г.

МЕТОДИЧЕСКАЯ ГАЗЕТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

16–30 апрель 2011

mat.1september.ru

8



ЧИСЛА-БЛИЗНЕЦЫ

см. с. 48

издательский дом

Первое сентября

1september.ru

МАТЕМАТИКА индексы подписки Почта россии - 79083 (инд.); - 79584 (орг.) Роспечать - 32031 (инд.); - 32598 (орг.)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Главный редактор: Артем Соловейчик (генеральный директор)
Коммерческая деятельность: Константин Шмарковский (финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов: Сергей Островский (исполнительный директор)
Реклама и продвижение: Марк Сартан
Мультимедиа, конференции и техническое обеспечение: Павел Кузнецов
Производство: Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение: Андрей Ушаков
Дизайн: Иван Лукьянов, Андрей Балдин
Педагогический университет: Валерия Арсланьян (ректор)

ГАЗЕТЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Первое сентября – Е. Бирюкова,
Английский язык – А. Громушкина,
Библиотека в школе – О. Громова,
Биология – Н. Иванова,
География – О. Коротова,
Дошкольное образование – М. Аромштам,
Здоровье детей – Н. Сёмина,
Информатика – С. Островский,
Искусство – М. Сартан,
История – А. Савельев,
Классное руководство и воспитание школьников – О. Леонтьева,
Литература – С. Волков,
Математика – Л. Рослова,
Начальная школа – М. Соловейчик,
Немецкий язык – М. Бузоева,
Русский язык – Л. Гончар,
Спорт в школе – О. Леонтьева,
Управление школой – Я. Сартан,
Физика – Н. Козлова,
Французский язык – Г. Чесновицкая,
Химия – О. Блохина,
Школьный психолог – И. Вачков

УЧРЕДИТЕЛЬ: ООО «ЧИСТЫЕ ПРУДЫ»
Зарегистрировано ПИ № 77-7241 от 12.04.01
в Министерстве РФ по делам печати
Подписано в печать: по графику 16.03.11, фактически 16.03.11 Заказ №
Отпечатано в ОАО «Чеховский полиграфический комбинат»
ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: (499) 249-3138
Отдел рекламы: (499) 249-9870
Сайт: 1september.ru

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: (499) 249-4758
E-mail: podpiska@1september.ru

В НОМЕРЕ:

ТЕМА НОМЕРА: СТОХАСТИКА. ОТ УРОКА К ЭКЗАМЕНУ

Содержание диска

К материалам, обозначенным этим символом, есть приложение на CD-диске, вложенном в № 8.

МАТЕМАТИКА
Методическая газета для учителей математики
Основана в 1992 г.
Выходит два раза в месяц

Газета распространяется по подписке
Цена свободная Тираж 10 000 экз.
Тел. редакции: (499) 249-3460
E-mail: mat@1september.ru
Сайт: mat.1september.ru

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, И. Бокова, О. Макарова
Дизайн макета и обложки: И. Лукьянов
Корректор: Л. Громова
Верстка: Д. Кардановская

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Роспечать: инд.–**32030**; орг.–**32594**
Почта России: инд.–**79073**; орг.–**79583**

НОВЫЕ СТАНДАРТЫ ПАТРИОТИЗМА

Л. РОСЛОВА

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/ru/1/1a/Россия,_Украина,_Белоруссия.png

Продолжается обсуждение стандартов образования для старшей школы. Они отправлены на доработку. Хочется понять, в каком направлении. Вот одно из интересных мнений: «Наш партийный клуб активно отстаивает приоритет и качество образования по таким предметам, как русский язык, литература и история Отечества. Поэтому нас очень интересует, как эти дисциплины будут представлены в новых образовательных стандартах». Это мнение координатора государственно-патриотического клуба «Единой России», сопредседателя совета по качеству образования при президиуме Генсовета «Единой России» Ирины Яровой.

Вы удивлены, что не видите в этом списке математики? Что, по мнению партийного функционера, математика не имеет отношения к патриотизму? Как не вспомнить здесь крылатую фразу о том, что история учит тому, что ничему не учит. Возникают странные чувства, когда начинаешь проводить параллели между нашими малограмотными руководителями XX века и современными, получившими университетское образование. Почему недоучившийся семинарист Сталин понимал значение науки для обороноспособности страны и ценил математиков за их вклад в развитие самолетостроения, создание атомной бомбы, решение проблем криптографии, а непонятно где и чему учившийся Хрущев – за космос? А сейчас наших математиков в иностранных университетах больше, чем в наших собственных. Почему? На фоне трагедии Японии возникает вопрос о том, кто рассчитывает, существует ли угроза радиоактивного заражения нашего Дальнего Востока. Почему первые наукограды появились в нашей стране, а за советом по обустройству Сколково мы обращаемся к голливудским актерам? Неужели наши в Кремниевой долине перевелись?

Что есть патриотизм? По мнению толковых словарей – нравственный и политический принцип, социальное чувство, содержанием которого является любовь к Отечеству и готовность подчинить его интересам свои частные интересы, гордость достижениями и культурой своей Родины, стремление защищать ее интересы. Совпадает ли это с мнением партийных функционеров?

Древние майя предсказывали апокалипсис на грядущий 2012 год. Может, апокалипсис – это когда страна сидит на нефтяной трубе и не хочет развиваться? И если хочется, чтобы цены на нефть рухнули, что послужило бы толчком к развитию, – это патриотизм?

Н. ОСЕНОВА,
Москва

ПОУРОЧНАЯ РАЗРАБОТКА ТЕМЫ «ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ»

Работа предназначена для учителей математики, чтобы оказать практическую помощь при подготовке к урокам по курсу «Теория вероятностей и статистика». В работе предложены поурочные планы по главе VIII «Элементы комбинаторики» учебника «Теория вероятностей и статистика» Ю.Н. Тюрина, А.А. Макарова, И.Р. Высоцкого, И.В. Ященко.

Комбинаторика — раздел математики, который учит учащихся рассуждать, перебирая различные варианты решения задачи, нестандартно мыслить, развивает воображение и смекалку, что повышает их заинтересованность в изучении математики.

Урок № 1. Правило умножения

Цели урока:

• познакомить учащихся с новым разделом математики — «Комбинаторика»;

• познакомить учащихся с основными способами подсчета числа различных комбинаций элементов;

• показать учащимся правило умножения и закрепить его решением примеров.

Объяснение нового материала

В повседневной жизни часто приходится выбирать различные варианты принятия решения. Чтобы не упустить ни один из них, надо осуществить перебор всех возможных комбинаций или подсчитать их число. Такие задачи получили название *комбинаторных задач*, а раздел математики, в котором они рассматриваются, назвали *комбинаторикой*.

Начнем знакомство с новыми понятиями с простой задачи, но решим ее тремя различными способами.

Задача. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3 и 5?

Решение. Способ I (простой перебор). Будем выписывать числа в порядке возрастания, а чтобы не пропустить и не повторить ни одно из чисел, составим таблицу:

11	13	15
31	33	35
51	53	55

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 8.

Литература

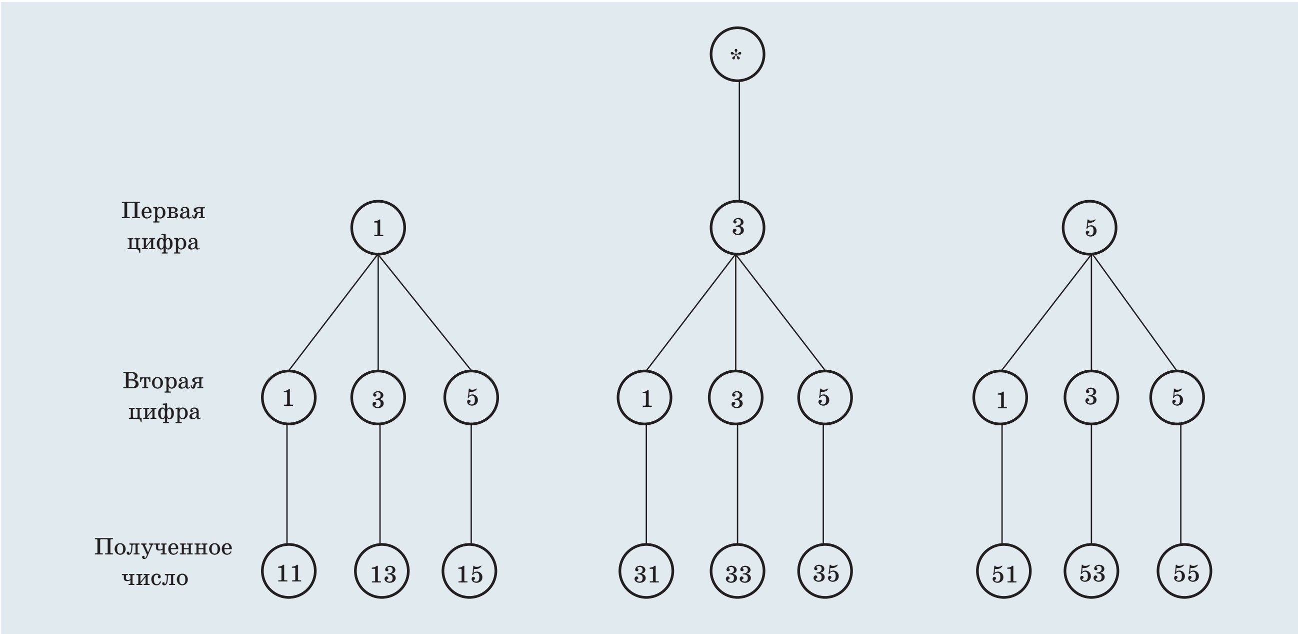
1. *Булычев В.А., Бунимович Е.А.* Основы статистики и вероятность. 5–9 кл.: Учебное пособие. — М.: Дрофа, 2004.

2. Газета «Математика». Издательский дом «Первое сентября», 2010, № 2–4.

3. *Макарычев Ю.Н. и др.* Алгебра. Элементы статистики и теории вероятностей. Учебное пособие. — М.: Просвещение, 2008.

4. *Мордкович А.Г., Семенов П.В.* События. Вероятности. Статистическая обработка данных. — М.: Мнемозина, 2004.

5. *Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоцкий И.Р., Ященко И.В.* Теория вероятностей и статистика. — М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2008.



Древо возможных вариантов

Первая цифра числа — номер строки, вторая цифра — номер столбца. Искомых чисел будет столько, сколько клеток в таблице, то есть $3 \cdot 3 = 9$.

Ответ: 9.

Способ II (использование дерева возможных вариантов).

Всего $3 \cdot 3 = 9$ различных двузначных чисел.

Ответ: 9.

Комментарий. Этот способ нагляден, как всякая картинка, и позволяет все учесть, ничего не пропустив.

Способ III. Ответ на вопрос, поставленный в задаче, можно получить, не выписывая сами числа. Будем рассуждать так.

Первую цифру можно выбрать тремя способами. Вторую цифру также можно выбрать тремя способами. Всего $3 \cdot 3 = 9$ различных двузначных чисел.

Ответ: 9.

Комментарий. Этот способ позволяет в один шаг решать самые разнообразные задачи.

Третий способ решения данной задачи называется ***комбинаторным правилом умножения***.

Если элемент x можно выбрать m способами, а элемент y можно выбрать n способами, то упорядоченную пару элементов $(x; y)$ можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Когда выбираются более двух элементов, тогда их упорядоченный набор можно выбрать, перемножая количества способов выбора каждого элемента.

У каждого из этих способов есть свои преимущества и свои недостатки.

Закрепление изученного материала

• П. 39, № 1 (а; б) (устно), № 2 (а; б), 3, 5 — на доске и в тетрадях.

• П. 39, № 7* — решение объясняет учитель.

Второй класс, в котором 23 ученика, но мальчиков меньше, чем девочек, отправился на экскурсию в музей. За время экскурсии каждый мальчик по одному разу дернул за косичку каждую девочку. Сколько мальчиков и сколько девочек в классе, если всего было произведено 132 дергания за косички?

Решение. 1. Пусть в классе m мальчиков и n девочек, тогда по комбинаторному правилу умножения число комбинаций равно $m \cdot n$.

2. В классе m мальчиков, тогда $(23 - m)$ девочек. Произведено $m \cdot (23 - m)$ дерганий за косички, что по условию задачи составляет 132.

3. Составим и решим уравнение:

$$m \cdot (23 - m) = 132.$$

4. Корнями уравнения являются числа 11 и 12.

5. По условию задачи мальчиков меньше, чем девочек. Следовательно, мальчиков 11, а девочек 12.

Ответ: 11 мальчиков и 12 девочек.

Самостоятельная работа по теме «Правило умножения»

Вариант 1

1. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова *конверт*?

2. У Насти 3 брюк, 5 блузок и 2 кепки, удачно сочетающихся по цвету. Сколько различных комбинаций одежды она может составить?

3. Из города A в город B ведут две дороги, из города B в город C — три дороги, из города C до пристани — две дороги. Туристы хотят проехать из города A через города B и C к пристани. Сколькими способами они могут выбрать маршрут?

Вариант 2

1. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 3 и 7?

2. В кафе предлагают 3 первых блюда, 5 вторых блюд и 2 третьих. Сколькими способами посетитель кафе может выбрать обед, состоящий из первого, второго и третьего блюд?

3. Из Петербурга в Москву можно добраться на поезде, самолете, автобусе или теплоходе, а из Москвы во Владимир — на автобусе или электричке. Сколькими способами можно осуществить путешествие Петербург – Москва – Владимир?

Проверка самостоятельной работы и обсуждение решения задач проводится сразу после проведения работы.

Итог урока

• Какими способами можно найти число различных комбинаций элементов?

• Сформулируйте комбинаторное правило умножения для подсчета способов выбора упорядоченных пар элементов.

• Сформулируйте правило умножения для подсчета способов выбора упорядоченных наборов элементов.

Задание на дом

1. Повторить п. 30.
2. П. 39, № 4, 6, 8*.

3*. Придумать задачу на комбинаторное правило умножения. Решить ее и оформить решение на альбомном листе (можно различными способами).

Урок № 2. Перестановки. Факториал

Цели урока:

• познакомить учащихся с понятием перестановки, числа перестановок;

• ввести понятие факториала.

Устно

1. Сформулируйте комбинаторное правило умножения.

2. В коридоре висит 3 лампочки, каждая из которых может гореть или не гореть независимо друг от друга. Сколько имеется способов освещения коридора? (Следует обратить внимание учащихся на случай, когда ни одна из лампочек не горит, это тоже способ освещения коридора.)

[8]

3. Одновременно бросают 3 монеты. Сколько равновозможных исходов у этого эксперимента?

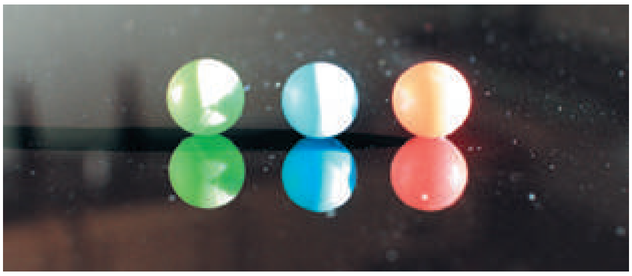
[8]

Объяснение нового материала

Займемся теперь подсчетом числа способов, которыми можно расположить в ряд несколько различных элементов. Такие расположения называются перестановками и играют важную роль в комбинаторике.

Сколькими способами можно выложить в ряд красный, синий и зеленый шарики?

Сначала можно выбрать любой из трех шариков, затем — любой из двух оставшихся, а в конце —



последний, оставшийся шарик. По правилу произведения получаем, что шарики можно выложить в ряд $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способами.

Если бы было восемь разноцветных шариков, то выложить их в ряд можно $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$ способами.

Рассуждая тем же способом, легко понять, что n различных элементов можно выложить в ряд $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ способами.

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n называется *факториалом натурального числа n*.

Обозначение: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$.

Таким образом, перестановкой из n элементов называется способ расположения их в ряд (способ их нумерации).

Число перестановок из n элементов равно $n!$. Договорились считать $0! = 1$.

Приведем таблицу факториалов от 0 до 10:

n	0	1	2	3	4	5
$n!$	1	1	2	6	24	120
n	6	7	8	9	10	
$n!$	720	5040	40 320	362 880	3 628 800	

Закрепление изученного материала

1. П. 40, № 1 (способом перебора).
2. П. 40, № 2 (использование дерева возможных вариантов).
3. П. 40, № 4 (а; б) (правило умножения).
4. П. 40, № 5 (а, в), 6 (б, г, е*) — самостоятельно.

Итог урока

- Дать определение перестановки.
- Чему равно число различных перестановок из n элементов?
- Что такое факториал натурального числа?
- Чему равен факториал нуля?

Задание на дом

1. Повторить п. 31, 39.
2. П. 40, № 3, 5 (б, г), 6 (а, в), 7*(а).
3*. Придумать задачи на данную тему

Урок № 3. Правило умножения и перестановки в задачах на вычисление вероятностей

Цели урока:
- способствовать выработке навыков решения задач на расчет вероятностей с помощью правила умножения и факториала;
- закрепить полученные навыки решением упражнений.

Устно

1. Повторить правило умножения, дать определение факториала.

2. Найти: а) $\frac{8!}{7!}$; б) $\frac{4!}{3!}$; в) $\frac{8!}{6!}$; г) $3! - 2!$

Выполнение упражнений

1. П. 41, № 1. Решение объясняет учитель.

Найдите вероятность того, что трехзначный номер случайно проезжающей машины состоит из цифр 0, 4, 5 в произвольном порядке.

Решение. Общее число равновозможных исходов $N = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$.

1. Событие A = {трехзначный номер случайно проезжавшей мимо машины состоит из цифр 0, 4, 5 в произвольном порядке}.

2. Число благоприятствующих событий, при которых событие A появляется $N(A) = 3! = 6$.

3. Вероятность события A: $P(A) = \frac{6}{1000} = 0,006$.

Ответ: $P(A) = 0,006$.

2. П. 41, № 3 (а) — на доске и в тетрадях, № 3 (б) — самостоятельно с проверкой решения.

Какова вероятность того, что среди последних четырех цифр случайного телефонного номера:

а) встретится цифра 7;

б) встретится цифра 2 или цифра 3.

Решение.

а) $N = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$.

Событие $\bar{A}$ = {не встретится цифра 7}.

$$N(\bar{A}) = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561.$$

$$P(\bar{A}) = \frac{6561}{10\,000} = 0,6561. \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}),$$

$$P(A) = 1 - 0,6561 = 0,3439.$$

Ответ: $P(A) = 0,3439$.

б) $N = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$.

Событие $\bar{A}$ = {не встретятся цифры 2 и 3}.

$N\left(\bar{A}\right)=8\cdot 8\cdot 8\cdot 8=4096.$

$P\left(\bar{A}\right)=\dfrac{4096}{10\ 000}=0,4096.$

$P(A)=1-P\left(\bar{A}\right),\ \ P(A)=1-0,4096=0{,}5904.$

Ответ: $P(A)=0,5904$.

3. П. 41, № 5 — самостоятельно, с проверкой.

На полке у Миши 6 видеокассет. На дне рождения Миша снял все кассеты с полки. Часть фильмов ребята посмотрели вместе, а когда гости ушли, Миша поставил все кассеты снова на полку в случайном порядке. Найдите вероятность того, что все кассеты оказались в том же порядке, что были прежде.

Решение.

1. $N = 6! = 720$.
2. A = {кассеты оказались в том же порядке, что были прежде}.
3. $N(A) = 1$.
4. $P(A)=\dfrac{1}{720}\approx 0{,}0014.$

Ответ: $P(A)\approx 0{,}0014$.

4. П. 41, № 9 — самостоятельно, с проверкой.

Слово *апельсин* написали на полоске картона и разрезали полоску на буквы. Девочка, играя, выложила их в ряд в случайном порядке. Найдите вероятность того, что это слово *спаниель*.

Решение.

1. $N = 8! = 40\ 320$.
2. A = {выложено слово *спаниель*}.
3. $N(A) = 1$.
4. $P(A)=\dfrac{1}{40\ 320}=0{,}000025.$

Ответ: $P(A)\approx 0{,}000025$.

Задание на дом

1. Повторить п. 32.
2. П. 41, № 2 (а; б), 4, 6 (а; б), 8, 11.

Самостоятельная работа

1. Домашнее задание по литературе состоит в том, чтобы выучить одно из трех стихотворений: «Анчар», «Буря» или «Вьюга». Миша, Никита и Олег решили распределить эти три стихотворения между собой по одному. Сколько существует способов это сделать?

2. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно составить из всех букв слова: а) *книга*, б) *шапка*?

3. Вычислите значение выражения:

а) $5!$; б) $\dfrac{12!}{10!}$; в) $\dfrac{8!}{3!\cdot 5!}$.

4. Найдите вероятность того, что три последние цифры случайно выбранного телефонного номера — это цифры 2, 3, 1 в произвольном порядке.

Проверку самостоятельной работы и коррекцию знаний провести сразу после проведения работы.

Урок № 4. Сочетания

Цели урока:

- ввести понятие числа сочетаний;
- познакомить учащихся с треугольником Паскаля;
- познакомить учащихся с формулой числа сочетаний и научить применять ее при решении простейших задач.

Объяснение нового материала

1. Работа по учебнику, п. 42, примеры 1 и 2. Выполнить способом простого перебора, составив все возможные комбинации игроков по два из трех и по два из четырех. Учащиеся должны сами найти повторяющиеся комбинации, которые отличаются лишь порядком записи игроков, и заметить, что общее число всех различных комбинаций сократилось в два раза.

Если есть n предметов, то число способов, которыми можно выбрать ровно k из них, называется ***числом сочетаний из n по k*** и обозначается C_n^k (читается «из n по k»).

В наших примерах $C_3^2=3$ и $C_4^2=6$.

2. Рассмотрим еще несколько типичных примеров.

а) 8 учеников из 30 десятиклассников можно выбрать C_{30}^{8} способами.

б) Наугад зачеркнуть 5 чисел из 49 можно C_{49}^{5} способами.

в) Одновременно вытащить две карты из колоды можно C_{36}^{2} способами.

3. Для нахождения C_n^k имеется очень красивый и удобный способ записи в виде треугольной таблицы, которая называется *треугольником Паскаля* — по имени французского ученого Блеза Паскаля, жившего в XVII веке.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Каждое число в треугольнике Паскаля равно сумме двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке.

Можно заметить, что числа каждой строки треугольника Паскаля, равноудаленные от концов, равны между собой:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_5^3 = C_5^2 = 10.$$

Для числа сочетаний из n элементов по k справедлива формула

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Формула дается без доказательства.

Существует более простой способ вычисления C_n^k:

$$C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k},$$

где в числителе и знаменателе k сомножителей.

Эта формула более удобна в использовании. Рассмотреть пример 3, п. 42.

Например:

$$C_9^4 = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 126.$$

Закрепление нового материала

1. П. 42, решить № 1 (б, г), 2 (б, г), используя треугольник Паскаля на форзаце учебника.

2. П. 42, решить № 3 (г–е) по формуле.

3. П. 42, решить № 7, 10 самостоятельно, с проверкой решения.

Итог урока

- Что такое число сочетаний?
- Как обозначить число сочетаний из 20 по 3?
- По каким формулам можно найти число сочетаний?

Задание на дом

1. Повторить п. 31, 40.

2. Выучить наизусть строки треугольника Паскаля до 5-й строки включительно.

3. П. 42, № 1 (а, в), 2 (а, в), 3 (а, в), 6 (а, б), 9, 11 (к заданию № 11 дан неверный ответ).

Урок № 5. Сочетания в задачах на вычисление вероятностей

Цели урока:

закрепить навыки решения задач на вычисление вероятности с применением сочетаний.

Актуализация опорных знаний учащихся

1. Повторить теоретический материал по теме «Сочетания».

2. Выписать первые 5 строк треугольника Паскаля.

3. Найти: а) C_{17}^2; б) C_{100}^2; в) C_5^3; г) C_8^4.

Выполнение упражнений

1. Работа с учебником. Рассмотреть решение примеров 1–3 по учебнику на странице 157.

2. П. 43, решить № 1 на доске и в тетрадях.

Для участия в телевикторине случайным образом выбирают 3 игроков из 8 претендентов. Какова вероятность того, что будут выбраны 1-й, 4-й и 8-й игроки?

Решение. 1. Общее число элементарных событий равно: $C_8^3 = \frac{8!}{3!\cdot 5!}$, $N = 56$.

2. Событие A = {выбраны 1-й, 4-й и 8-й игроки}, $N(A) = 1$.

3. $P(A) = \frac{1}{56} \approx 0{,}018$.

Ответ: $P(A) \approx 0{,}018$.

3. П. 43, решить № 3, 6 (б, г), 8 — самостоятельно с проверкой решения.

4. П. 43, решение № 10* объясняет учитель.

В магазин привезли 10 синих и 10 коричневых костюмов. Продавщица случайным образом выбирает 8 из них, чтобы выставить в витрине. Найдите вероятность того, что будет отобрано 3 синих и 5 коричневых костюмов.

Решение.

1. Общее число элементарных событий

$$N = C_{20}^8 = \frac{20!}{8!\cdot 12!} = 125\,970.$$

2. Отобрать 3 синих костюма из 10 можно одним из C_{10}^3 способов, а 5 коричневых из 10 — одним из C_{10}^5 способов.

3. Событие A = {3 синих и 5 коричневых костюмов}. Число исходов, благоприятствующих событию A, равно $N(A) = C_{10}^3 \cdot C_{10}^5 = 30\ 240$.

4. $P(A) = \dfrac{30\ 240}{125\ 970} \approx 0,24$.

Ответ: $P(A) \approx 0,24$

Самостоятельная работа

1. В полуфинальном турнире участвуют восемь команд. В финал попадают только три команды. Сколько существует различных вариантов выхода команд в финал?

2. В шахматном турнире приняли участие 15 шахматистов, каждый из которых сыграл только одну партию с каждым из остальных игроков. Сколько всего сыграно партий?

3. В ящике лежит 6 красных шаров и 4 зеленых. Наугад вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что два шара из них окажутся красными, а один – зеленым?

Проверку самостоятельной работы и анализ ошибок провести сразу после проведения работы.

Итог урока

Рассказать алгоритм вычисления вероятности с применением сочетаний.

Задание на дом

1. Повторить п. 40–43.
2. П. 43, № 2, 4, 6 (а, в), 7, 12*.

Урок № 6. Сочетания в задачах на вычисление вероятностей (продолжение)

Цели урока:

• повторить и обобщить изученный материал по данной теме;

• проверить степень усвоения учащимися изученного материала в ходе выполнения самостоятельной работы.

Актуализация опорных знаний учащихся

1. Повторить теоретический материал по теме «Сочетания».

2. Решить задачи.

а) В классе 5 человек успешно занимаются физикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в физической олимпиаде?

б) Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?

Выполнение упражнений

П. 43, решить № 5, 13 на доске и в тетрадях.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Вычислите:
а) C_7^2; б) C_{12}^9.

2. В классе 20 учеников. Учитель решил проверить домашнюю работу у шести из них. Сколько существует способов выбрать учеников для проверки?

3. Найдите вероятность того, что все буквы *а* окажутся на своих местах, если случайным образом перемешать и выстроить в ряд все буквы слова *карандаш*.

4. На книжной полке 6 учебников и 3 сборника стихов. Найдите вероятность того, что среди случайно выбранных 5 книг окажется 3 учебника и 2 сборника.

Вариант 2

1. Вычислите:
а) C_8^3; б) C_{15}^{12}.

2. В классе 28 учеников. Для уборки территории требуется выделить 7 человек. Сколькими способами это можно сделать?

3. Найдите вероятность того, что все буквы *и* окажутся на своих местах, если случайным образом перемешать и выстроить в ряд все буквы слова *интуиция*.

4. В библиотеке читателю предложили на выбор из новых поступлений 10 книг и 4 журнала. Найдите вероятность того, что среди случайно выбранных 5 новинок окажется 3 книги и 2 журнала.

Проверку самостоятельной работы и анализ ошибок провести сразу после проведения работы.

Задание на дом

Выполнить противоположный вариант самостоятельной работы

Э. ЛИПКИНА,
Москва

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКЕ

Предлагаемые самостоятельные работы предназначены для текущего контроля знаний и умений школьников восьмого и девятого классов, изучающих курс теории вероятностей и статистики по учебному пособию Ю.Н. Тюрина, А.А. Макарова, И.Р. Высоцкого, И.В. Ященко «Теория вероятностей и статистика». Они составлены в соответствии с вариантом 1 планирования на три года для 7–9-х классов [2]. Они могут быть использованы и в качестве обучающих работ и для выборочной проверки знаний учащихся. Задания представлены в двух вариантах и являются дополнением к разделу «Самостоятельные и контрольные работы» указанного выше учебного пособия.

$A \cap B$

$A \cup B$

$\overline{A \cap B}.$

$A = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4$

8 класс

Самостоятельная работа № 1
«Элементарные события. Вероятности событий. Независимые события»

Вариант 1

1. Бросают две игральные кости. Событие A — на первой кости выпало меньше 3 очков. Событие B — на второй кости выпало больше 4 очков.

а) Выпишите элементарные события, благоприятствующие событиям $A \cap B$ и $A \cup B$.

б) Опишите словами эти события.

в) Найдите вероятность событий $A \cap B$, $A \cup B$ и $\overline{A \cap B}$.

г) Являются ли события A и B независимыми?

2. В коробке 7 желтых и 8 зеленых колпаков. Клоун, не глядя, вынимает один за другим 4 колпака. Найдите вероятность того, что:

а) все 4 колпака окажутся желтыми;

б) первые два колпака желтые, а следующие два — зеленые.

Вариант 2

1. Бросают две игральные кости. Событие A — на первой кости выпало больше 4 очков. Событие B — на второй кости выпало меньше 3 очков.

а) Выпишите элементарные события, благоприятствующие событиям $A \cap B$ и $A \cup B$.

б) Опишите словами эти события.

в) Найдите вероятность событий $A \cap B$, $A \cup B$ и $\overline{A \cap B}$.

г) Являются ли события A и B независимыми?

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 8.

2. В коробке 6 желтых и 9 зеленых колпаков. Клоун, не глядя, вынимает один за другим 4 колпака. Найдите вероятность того, что:

а) все 4 колпака окажутся зелеными;

б) первые три колпака зеленые, а четвертый — желтый.

Самостоятельная работа № 2 «Перестановки и факториал числа»

Вариант 1

1. Для участия в спектакле Грише, Жене, Денису и Андрею предложили распределить роли Винни-Пуха, Пятачка, ослика Иа-Иа и Совы между собой. Сколькими способами они могут это осуществить?

2. Слово СТАТИСТИКА написали на полоске картона и разрезали полоску на буквы. Какова вероятность того, что, поставив все эти буквы случайным образом в ряд, мы снова получим слово СТАТИСТИКА?

3. Найдите значение выражения:

а) $7!$; б) $\dfrac{12!}{9!\cdot 3!}$.

4. Найдите вероятность того, что три последние цифры наугад выбранного телефонного номера — это цифры 9, 7, 8 в произвольном порядке.

Вариант 2

1. Чтобы поздравить девочек Таню, Галю, Машу, Лену и Зину с 8 Марта, мальчики Петя, Коля, Витя, Дима и Федя купили по открытке, причем все разные. Сколько существует способов распределить эти открытки между девочками?

2. Слово БИССЕКТРИСА написали на полоске картона и разрезали полоску на буквы. Какова вероятность того, что, поставив все эти буквы случайным образом в ряд, мы снова получим слово БИССЕКТРИСА?

3. Найдите значение выражения:

а) $6!$; б) $\dfrac{15!}{3!\cdot 12!}$.

4. Найдите вероятность того, что три последние цифры наугад выбранного телефонного номера — это цифры 3, 5, 4 в произвольном порядке.

Самостоятельная работа № 3 «Сочетания»

Вариант 1

1. Вычислите:

а) C_{12}^{4}; б) C_{13}^{9}.

2. «Проказница Мартышка, Осел, Козел и косолапый Мишка затеяли сыграть квартет». Осла попросили принести 4 инструмента из 11, имеющихся на складе. Сколько у него есть способов для выбора?

3. Название магазина «ПОДАРКИ» подсвечивается, причем каждая буква отдельной лампочкой. Ровно 4 лампочки перегорели. Найдите вероятность того, что будет подсвечиваться слово «ДАР».

4. В сундуке 9 золотых и 6 серебряных монет, одинаковых по форме и размеру. Пират, не видя содержимого сундука, вытащил 5 монет. Какова вероятность того, что в его руках окажутся 3 золотые и 2 серебряные монеты?

Вариант 2

1. Вычислите:

а) C_{13}^{3}; б) C_{11}^{8}.

2. «Проказница Мартышка, Осел, Козел и косолапый Мишка затеяли сыграть квартет». Мишке поручили принести со склада 8 каких-нибудь попавшихся под лапы музыкальных инструментов из имеющихся 13 инструментов. Сколько существует способов у Мишки для выбора?

3. Учитель отметил на доске точки K, L, M, N, O, P, R, T, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Вызванный к доске ученик должен построить треугольник, используя любые из этих точек. Найдите вероятность того, что на доске появится треугольник KOT.

4. На класс, в котором 15 мальчиков и 12 девочек, выделили четыре билета на бал школьников Москвы. Билеты разыгрывают по жребию. Какова вероятность того, что билеты достанутся двум девочкам и двум мальчикам?

Самостоятельная работа № 4 «Испытания Бернулли»

Вариант 1

1. Проводится серия из 7 независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p=\dfrac{1}{3}$. Найдите вероятность элементарного события, в котором успех наступает только в последних четырех испытаниях.

2. Сколько элементарных событий с ровно тремя успехами возможно в серии из 12 испытаний Бернулли?

3. Симметричную монету подбрасывают 9 раз. Найдите вероятность появления ровно пяти орлов.

4. Вероятность того, что кот Василий, выходя на охоту, поймает мышь, равна $\dfrac{3}{5}$. Какова вероятность того, что за пять выходов на охоту он поймает не менее трех мышей?

Вариант 2

1. В серии из 6 независимых испытаний Бернулли вероятность успеха p равна $\dfrac{1}{4}$. Найдите вероятность элементарного события, в котором успех наступает только в первых четырех испытаниях.

2. Найдите число возможных элементарных событий с ровно четырьмя успехами в серии из 11 испытаний Бернулли?

3. Какова вероятность того, что при 8 бросаниях игрального кубика наибольшее число очков выпадет ровно пять раз?

4. Саженец яблони приживается с вероятностью $\frac{4}{5}$. Найдите вероятность того, что из пяти высаженных саженцев яблонь приживется не менее четырех.

9 класс

Самостоятельная работа № 1
«Геометрическая вероятность»

Вариант 1

1. Известно, что точка D делит отрезок MN в отношении 1 : 3, считая от точки M. Точка K — середина отрезка MD. На отрезке MN случайным образом выбирается точка A. С какой вероятностью эта точка может принадлежать отрезку KD?

2. На отрезок $[-2; 2]$ случайным образом бросают две точки, K и D. Какова вероятность того, что координата точки D будет меньше 1, а координата точки K будет положительной?

3. Внутри равнобедренного треугольника с основанием 16 см и боковой стороной 17 см нарисован квадрат. В треугольнике случайным образом отмечается точка. Вероятность того, что эта точка не окажется внутри квадрата, равна 0,925. Какова длина стороны квадрата?

Вариант 2

1. На отрезке DB случайным образом выбирается точка H. Найдите вероятность того, что эта точка не принадлежит отрезку KC, если известно, что $DC : CB = 3 : 2$, а точка K — середина отрезка BC.

2. На отрезок $[-3; 3]$ случайным образом бросают две точки, A и B. Какова вероятность того, что координата точки A будет больше -1, а координата точки K будет меньше 2?

3. В квадрате со стороной 20 см случайным образом отмечается точка. Вероятность того, что эта точка попадет в равнобедренный треугольник с основанием 10 см, нарисованный внутри этого квадрата, равна 0,15. Найдите длину боковой стороны треугольника.

Самостоятельная работа № 2
«Распределение случайной величины»

Вариант 1

1. Случайная величина принимает все четные значения от -8 до 4 с равными вероятностями. Постройте таблицу распределения вероятностей этой случайной величины.

2. «Мы везем с собой кота, чижика, собаку, петьку-забияку, обезьяну, попугая — вот компания какая!» В дороге эта компания случайным образом выстроилась в очередь за водой. Постройте распределение вероятностей случайной величины «число попутчиков из этой компании, стоящих в очереди перед обезьяной».

3. В таблице дано распределение вероятностей некоторой случайной величины X. Найдите пропущенную вероятность.

–4,5	–3	–1,5	0	1,5	3	4,5
0,09	0,15	0,2	0,3		0,1	0,09

4. Случайная величина Z принимает все натуральные значения от 1 до 8 с вероятностями $P(Z=n)=\frac{n+1}{b}$. Найдите b.

Вариант 2

1. Случайная величина принимает все значения, кратные трем, из отрезка $[-7; 7]$ с равными вероятностями. Постройте таблицу распределения вероятностей этой случайной величины.

2. «Вороне где-то Бог послал кусочек сыра», колбасы, огурца, шоколада, яблока. «На ель Ворона взгромоздясь, позавтракать совсем уж было собралась, да призадумалась»: интересно, какое распределение случайной величины «число кусочков, съеденных по очереди в произвольном порядке перед шоколадом» получится? Постройте это распределение.

3. В таблице дано распределение вероятностей некоторой случайной величины Y. Одна из вероятностей неизвестна. Найдите ее.

1	3	5	7	9	11
0,07	0,18		0,35	0,12	0,03

4. Случайная величина X принимает все натуральные значения от 1 до 7 с вероятностями $P(X=m)=\frac{2m-1}{c}$. Найдите c.

Самостоятельная работа № 3
«Математическое ожидание и дисперсия»

Вариант 1

1. Случайная величина принимает все нечетные значения от -3 до 7 с равными вероятностями. Найдите ее математическое ожидание.

2. В таблице представлено распределение вероятностей случайной величины X. Чему равно $\mathrm{E}(X)$?

Значение	2	4	6	8
Вероятность	0,18	0,31	0,35	0,16

3. Игральный кубик бросили 36 раз. Найдите математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение случайной величины X, равной числу выпадения граней с числом очков, большим четырех.

4*. Дважды проводят серию из n выстрелов по мишени. В первый раз вероятность попадания была равна $\frac{2}{3}$, а во второй раз вероятность попадания равнялась $\frac{3}{4}$. В обоих случаях случайная величина S — число наступивших успехов. В каком из случаев ожидаемый разброс величины S меньше?

Вариант 2

1. Случайная величина принимает все четные значения от -2 до 7 с равными вероятностями. Найдите ее математическое ожидание.

2. В таблице представлено распределение вероятностей случайной величины Y. Чему равно $\mathrm{E}(Y)$?

Значение	3	5	7	9
Вероятность	0,19	0,32	0,27	0,22

3. Игральный кубик бросили 16 раз. Найдите математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение случайной величины Y, равной числу выпадения граней с числом очков, меньшим трех.

4*. Серию из n выстрелов по мишени проводят дважды. В первый раз вероятность промаха равнялась $\frac{3}{5}$, а во второй раз вероятность промаха была равна $\frac{2}{3}$. В обоих случаях случайная величина S — число наступивших успехов. В каком из случаев ожидаемый разброс величины S больше?

Контрольная работа

Вариант 1

1. После наводнения на участке между 110-м и 160-м километрами шоссе произошел разрыв в линии электропередачи. Ближайший отряд МЧС находится на 130-м километре. В какую сторону ему лучше выезжать? С какой вероятностью ваш совет окажется правильным?

2. В таблице дано распределение вероятностей случайной величины X. Найдите пропущенную вероятность.

Значение	− 5	−3	−1	1	3
Вероятность	0,13	0,19		0,23	0,07

3. Игральную кость бросают один раз. Найдите математическое ожидание случайной величины «куб выпавших очков».

4. Игральную кость бросили 240 раз. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины «число выпадений тройки».

5*. Около круга радиуса r описан квадрат. Внутри квадрата случайным образом выбираются две точки. Найдите вероятность того, что одна точка принадлежат кругу, а другая не принадлежит ему.

Вариант 2

1. После бури на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошел обрыв провода. Ремонтная бригада, обслуживающая этот участок, располагается на 50-м километре. В какую сторону ей лучше выезжать? С какой вероятностью ваш совет окажется правильным?

2. В таблице дано распределение вероятностей случайной величины X. Найдите пропущенную вероятность.

Значение	− 3	−1	1	3	5
Вероятность	0,14	0,32	0,17		0,09

3. Игральную кость бросают один раз. Найдите математическое ожидание случайной величины «квадрат выпавших очков».

4. Игральную кость бросили 300 раз. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины «число выпадений четверки».

5*. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Внутри круга случайным образом выбираются две точки. Какова вероятность того, что обе точки принадлежат треугольнику?

Решение задач варианта 1

8 класс

С-1

1.

(1; 1)	(2; 1)	(3; 1)	(4; 1)	(5; 1)	(6; 1)
(1; 2)	(2; 2)	(3; 2)	(4; 2)	(5; 2)	(6; 2)
(1; 3)	(2; 3)	(3; 3)	(4; 3)	(5; 3)	(6; 3)
(1; 4)	(2; 4)	(3; 4)	(4; 4)	(5; 4)	(6; 4)
(1; 5)	(2% 5)	(3; 5)	(4; 5)	(5; 5)	(6; 5)
(1; 6)	(2: 6)	(3; 6)	(4; 6)	(5; 6)	(6; 6)

Событие A = {на 1-й кости меньше 3 очков}.
Событие B = {на 2-й кости больше 4 очков}.

а) $A \cap B = \{(1;5), (1;6), (2;5), (2;6)\}$;

$A \cup B = \{(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (1;6), (2;1), (2;2), (2;3), (2;4), (2;5), (2;6), (3;5), (3;6), (4;5), (4;6), (5;5), (5;6), (6;5), (6;6)\}$.

б) Событие $A \cap B$ = {на 1-й кости 1 или 2 очка, на 2-й — 5 или 6 очков}.

Событие $A \cup B$ = {на 1-й кости меньше 3 очков или на 2-й кости больше 4 очков}.

в) $P(A \cap B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. $P(A \cup B) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

$$P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

г) $P(A) = P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$;

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} = P(A \cap B).$$

События A и B — независимые.

2. а) $\frac{1}{39}$.

Событие A = {вынули 4 желтых колпака}, событие B_1 = {1-й вынутый колпак желтый}, событие B_2 = {2-й вынутый колпак желтый}, событие B_3 = {3-й вынутый колпак желтый}, событие B_4 = {4-й вынутый колпак желтый}.

$$A = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4;$$

$$P(B_1) = \frac{7}{15},\; P(B_2) = \frac{6}{14},\; P(B_3) = \frac{5}{13},\; P(B_4) = \frac{4}{12};$$

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) \cdot P(B_4) = \frac{7}{15} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} = \frac{1}{39}.$$

б) $\frac{14}{195}$.

Событие A = {1-й и 2-й вынутые колпаки желтые, 3-й и 4-й вынутые колпаки зеленые}, событие B_1 = {1-й вынутый колпак желтый}, событие B_2 = {2-й вынутый колпак желтый}, событие B_3 = {3-й вынутый колпак зеленый}, событие B_4 = {4-й вынутый колпак зеленый }.

$$P(B_1) = \frac{7}{15},\; P(B_2) = \frac{6}{14},\; P(B_3) = \frac{8}{13},\; P(B_4) = \frac{7}{12};$$

$$P(A) = \frac{7}{15} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} = \frac{14}{195}.$$

С-2

1. 24.

Ребят четверо, и ролей тоже четыре. Роль Винни-Пуха можно распределить четырьмя способами. Тогда роль Пятачка можно распределить между тремя детьми тремя способами, роль Ослика — двумя способами между двумя детьми, а роль Совы дать последнему оставшемуся. Всего получается 4 · 3 · 2 · 1 = 24 способа.

2. $\frac{1}{75\,600}$.

Событие A = {получилось слово СТАТИСТИКА}. Если бы все 10 букв слова были различны, то можно было бы составить 10! различных слов, но буква Т встречается 3 раза, а буквы И, А, С — по 2 раза, поэтому число различных слов в 3! · 2! · 2! · 2! раза меньше. Итак, общее число равновозможных элементарных событий

$$N = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}.$$

Событию A благоприятствует $N(A) = 1$ событие.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{1}{\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}} = \frac{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}{10!} = \frac{1}{75\,600}.$$

3. а) 5040; б) 220.

4. 0,006.

Событие A = {последние три цифры телефонного номера 9, 7, 8 в любом порядке}. Всего 10 цифр, каждая из них могла бы стоять на последних трех местах, поэтому общее число равновозможных элементарных событий $N = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$. Событию A благоприятствуют $N(A) = 3!$ событий.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{3!}{10^3} = 0,006.$$

С-3

1. а) 495; б) 715.

2. Так как порядок выбора четырех инструментов из 11 любой, число способов равно $C_{11}^4 = 330$.

3. $\frac{1}{35}$.

Событие A = {подсвечивается слово «ДАР»}. Общее число равновозможных элементарных событий $N = C_7^3 = 35$. Событию A благоприятствует $N(A) = 1$ событие.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{1}{35}.$$

4. $\frac{60}{143}$.

Событие A = {в руках пирата 3 золотые и 2 серебряные монеты}. Общее число равновозможных элементарных событий $N = C_{15}^5 = 3003$. Событию A благоприятствуют $N(A) = C_9^3 \cdot C_6^2 = 1260$ событий.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{60}{143}.$$

С-4

1. $\frac{8}{2187}$.

Элементарное событие «успех наступает только в последних четырех из семи испытаний

Бернулли» $A = \{ННHУУУУ\}$, где У — успех, Н — неудача.

$$P(У) = p = \frac{1}{3}, \quad P(Н) = q = 1 - p = \frac{2}{3}.$$

$$P(A) = p^4 \cdot q^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{2187}.$$

2. 220.

Событие A = {наступило ровно 3 успеха из 12 испытаний Бернулли}. Число элементарных событий, благоприятствующих событию A: $C_{12}^3 = 220$.

3. $\frac{63}{256}$.

Событие A = {появятся ровно 5 орлов при 9 подбрасываниях монеты}.

1) Одно подбрасывание — одно испытание, в котором успех — выпадение орла, неудача — выпадение решки.

2) Результат каждого следующего испытания не зависит от результатов предыдущих. Следовательно, проводится серия из 9 независимых испытаний Бернулли с числом успехов 5.

$$P(A) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

$$n = 9,\ k = 5,\ p = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{2}, \quad P(A) = \frac{63}{256}.$$

4. $\frac{2133}{3125}$.

Событие A = {кот поймает не менее трех мышей за пять выходов}.

1) Один выход — одно испытание, в котором успех — «поймана мышь», неудача — «промах».

2) Результат каждого следующего испытания не зависит от предыдущих результатов. Следовательно, проводится серия из 5 независимых испытаний Бернулли с числом успехов 3, 4 или 5;

$$p = \frac{3}{5}, \quad q = \frac{2}{5}.$$

Событие A — объединение событий B, C и D, где

событие B = {ровно 3 успеха из 5 испытаний},
событие C = {ровно 4 успеха из 5 испытаний},
событие D = {ровно 5 успехов из 5 испытаний}.

$$P(A) = P(B) + P(C) + P(D),$$

так как события B, C и D попарно несовместны.

$$P(A) = C_5^3 p^3 q^2 + C_5^4 p^4 q^1 + C_5^5 p^5 q^0 = \frac{2133}{3125}.$$

9 класс

С-1

1. $\frac{1}{8}$.

Событие B = {точка A принадлежит отрезку KD}.

$$P(B) = \frac{KD}{MN} = \frac{1}{8}.$$

2. $\frac{3}{8}$.

Пусть точки K и D имеют координаты x и y соответственно. Независимые события

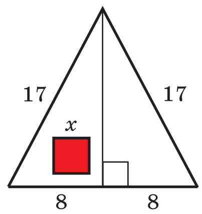
$$\begin{cases} y < 1, \\ x > 0, \\ -2 \le x \le 2, \\ -2 \le y \le 2. \end{cases}$$

Тогда

$$P(y < 1,\ x > 0) = P(-2 \le y < 1) \cdot P(0 < x \le 2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{8}.$$

3. 3 см.

Событие A = {точка окажется вне квадрата}, событие $\bar{A}$ = {точка окажется внутри квадрата}.



Высота треугольника, проведенная к основанию, равна 15 см, а его площадь $S = 120$ см², площадь квадрата со стороной x см $S_1 = x^2$ см².

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,925 = 0,075.$$

$$P(\bar{A}) = \frac{S_1}{S}; \quad \frac{x^2}{120} = 0,075; \quad x = 3.$$

С-2

1. Случайная величина X — все четные числа от -8 до 4.

Значение X	-8	-6	-4	-2	0	2	4
Вероятность	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

2. Рассмотрим случайный опыт — выбор номера места перед обезьяной. Всего в этом опыте 6! элементарных событий. Перед обезьяной могут стоять от нуля до пяти попутчиков. Поэтому случайная величина X — «число попутчиков, стоящих в очереди перед обезьяной», — может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5. Каждому из этих событий благоприятствуют 5! элементарных событий. Поэтому вероятность каждого такого события равна $\frac{5!}{6!}=\frac{1}{6}$.

Значение X	0	1	2	3	4	5
Вероятность	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3. 0,07.

Пусть x — пропущенная вероятность случайной величины X. Сумма вероятностей распределения равна 1. Поэтому

$0{,}09 \cdot 2 + 0{,}15 + 0{,}2 + 0{,}3 + x + 0{,}1 = 1$, $x = 0{,}07$.

4. 44.

Построим распределение вероятностей случайной величины Z:

Значение Z	1	2	3	4	5	6	7	8
Вероятность	$\frac{2}{b}$	$\frac{3}{b}$	$\frac{4}{b}$	$\frac{5}{b}$	$\frac{6}{b}$	$\frac{7}{b}$	$\frac{8}{b}$	$\frac{9}{b}$

$$\frac{2}{b}+\frac{3}{b}+\ldots+\frac{9}{b}=1,\ \ b=44.$$

С-3

1. 2.

Случайная величина X принимает 6 значений

$$-3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,$$

вероятность каждого из которых $\frac{1}{6}$.

$$E(X)=\frac{1}{6}\cdot(-3-1+1+3+5+7)=2.$$

2. 4,98.

3. 12; 8; 2,8.

Событие A = {выпадение грани с числом очков «пять» или «шесть»}. В одном бросании кубика событие A либо наступает, либо нет. Вероятность появления события A $p=\frac{1}{3}$, вероятность выпадения любой другой грани $q=\frac{2}{3}$. Все бросания кубика независимы и представляют собой серию из 36 испытаний Бернулли.

$$E(X)=np=36\cdot\frac{1}{3}=12;$$

$$D(X)=npq=36\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=8;$$

$$\sigma=\sqrt{D(X)}=\sqrt{8}\approx 2{,}8.$$

4. Во втором случае.

Считая исходы каждого выстрела независимыми, будем рассматривать две серии испытаний Бернулли. Пусть S_1 и S_2 — число успехов, p_1 и p_2 — вероятности успеха, q_1 и q_2 — вероятности неудачи в первой и второй сериях соответственно.

$$p_1=\frac{2}{3},\quad p_2=\frac{3}{4},\quad q_1=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3},\quad q_2=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

$$D(S_1)=np_1q_1=\frac{2}{9}n;\quad D(S_2)=np_2q_2=\frac{3}{16}n.$$

$$\frac{3}{16}n<\frac{2}{9}n,\quad D(S_2)<D(S_1).$$

КР

1. Вероятность того, что авария между 110-м и 130-м километрами

$$p_1=\frac{130-110}{160-110}=\frac{2}{5}.$$

Вероятность того, что авария между 130-м и 160-м километрами

$$p_2=\frac{160-130}{160-110}=\frac{3}{5}.$$

Вероятность больше во втором случае, поэтому выезжать лучше в сторону 160-го километра.

2. 0,38.

3. 73,5.

Распределение вероятностей случайной величины X:

Значение X	1	8	27	64	125	216
Вероятность	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X)=\frac{1}{6}(1+8+27+64+125+216)=73{,}5.$$

4. 40; $33\frac{1}{3}$.

Отдельные бросания игральной кости независимы, поэтому имеем серию из 240 испытаний Бернулли с числом успехов S. В каждом испытании успех — выпадение тройки, неудача — выпадение любой другой грани. Вероятность успеха $p=\frac{1}{6}$, вероятность неудачи $q=\frac{5}{6}$.

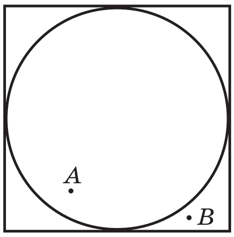
$$E(S)=np=240\cdot\frac{1}{6}=40,$$

$$D(S)=npq=240\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=33\frac{1}{3}.$$

5. $\frac{\pi(4-\pi)}{16}$.

Событие C = {точка A принадлежит кругу, а точка B принадлежит квадрату, но не принадлежит кругу}. Обозначим:

S — площадь круга радиуса r,
S_1 — площадь квадрата,
S_2 — площадь той части квадрата, которая вне круга,
$P(A)$ – вероятность того, что точка A принадлежит кругу,
$P(B)$ — вероятность того, что точка B принадлежит квадрату, но не принадлежит кругу,
$P(C)$ — вероятность события C.



$$S = \pi r^2,\ S_1 = 4r^2,\ S_2 = (4 - \pi)r^2,$$

$$P(A) = \frac{S}{S_1} = \frac{\pi}{4},\quad P(B) = \frac{4-\pi}{4},$$

$$P(C) = P(A)\cdot P(B) = \frac{\pi(4-\pi)}{16}.$$

Ответы к варианту 2

8 класс

С-1. **1.** а) $A \cap B = \{(5;\ 1), (5;\ 2), (6;\ 1), (6;\ 2)\}$, $A \cup B = \{(1;\ 1), (2;\ 1), (3;\ 1), (4;\ 1), (5;\ 1), (6;\ 1), (1;\ 2), (2;\ 2), (3;\ 2), (4;\ 2), (5;\ 2), (6;\ 2), (5;\ 3), (6;\ 3), (5;\ 4), (6;\ 4), (5;\ 5), (6;\ 5), (5;\ 6), (6;\ 6)\}$; б) событие $A \cap B$ = {на 1-й кости больше 4 очков и на 2-й кости меньше 3 очков}, событие $A \cup B$ = = {на 1-й кости больше 4 очков или на 2-й кости меньше 3 очков}; в) $P(A \cap B) = \frac{1}{9}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{9}$, $P\left(\overline{A \cap B}\right) = \frac{8}{9}$; г) являются. **2.** а) $\frac{6}{65}$; б) $\frac{6}{65}$. **С-2.** **1.** 120. **2.** $\frac{1}{3\,326\,400}$. **3.** а) 720; б) 455. **4.** 0,006. **С-3.** **1.** а) 286; б) 165. **2.** 1287. **3.** $\frac{1}{56}$. **4.** $\frac{77}{195}$. **С-4.** **1.** $\frac{9}{4096}$. **2.** 330. **3.** $\frac{875}{209\,952}$. **4.** $\frac{2304}{3125}$.

9 класс

С-1. **1.** 0,8. **2.** $\frac{5}{9}$. **3.** 13 см. **С-2.** **1.** Значения случайной величины: −6, −3, 0, 3, 6. Вероятность каждого значения 0,2. 2. Случайная величина принимает все целые значения от 0 до 4, вероятность каждого значения 0,2. **3.** 0,25. **4.** 49. **С-3.** **1.** 2. **2.** 6,04. **3.** $5\frac{1}{3}$, $3\frac{5}{9}$, 1,88. **4.** В первом случае. **КР.** **1.** В сторону 70-го километра. **2.** 0,28. **3.** $15\frac{1}{6}$. **4.** $\frac{27}{16\pi^2}$.

Литература

1. *Бунимович Е.А., Булычев В.А.* Основы статистики и вероятность, 5–9 классы: Пособие для общеобразовательных учреждений. — М.: Дрофа, 2004.
2. *Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В.* Ленинградские математические кружки. — Киров: АСА, 1994.
3. *Кузнецова Л.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А., Колесникова Т.В., Рослова Л.О.* Алгебра: сборник заданий для подготовки к государственной итоговой аттестации в 9 классе. — М.: Просвещение, 2009.
4. *Мордкович А.Г., Семенов П.В.* События. Вероятности. Статистическая обработка данных: Дополнительные параграфы к курсу алгебры 7–9 классов общеобразовательных учреждений. — М.: Мнемозина, 2004.
5. *Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоцкий И.Р., Ященко И.В.* Теория вероятностей и статистика. — М.: МЦНМО, 2008.
6. *Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоцкий И.Р., Ященко И.В.* Теория вероятностей и статистика: Методическое пособие для учителя. — М.: МЦНМО; МИОО, 2008.

ФОТО НА КОНКУРС

Алгебра, 7–8, пройдена!
Может, я уже и к ГИА готов?

Автор: О.Г. Николаева, учитель математики средней школы № 15, пос. Березайка, Тверская обл.

С. ЩЕРБАТЫХ,
г. Елец,
Е. ЛЕБЕДЕВА,
г. Липецк

ЭЛЕМЕНТЫ СТОХАСТИКИ

ОПЫТ ЛИПЕЦКОЙ ОБЛАСТИ

Фото О. Шмелевой

В конце 80-х – начале 90-х годов XX века проводилось международное исследование по сравнительной оценке математической подготовки учащихся. В нем принимали участие представители двадцати стран, среди которых и бывший Советский Союз. По теме «Анализ данных, статистика, вероятность» все страны, кроме двух (Словения и Португалия), показали результаты лучшие, чем у нас. Аналогичные результаты были получены и в 2003 году, когда проводилось международное исследование уровня математической грамотности 15-летних учащихся. Включение вероятностно-статистических вопросов в тест свидетельствует о той важности, которую придают этому материалу в других странах, а полученные по некоторым странам достаточно высокие результаты показывают, что его изучению уделяется значительное внимание. Например, по сравнению с требованиями по математике, предъявляемыми к абитуриентам российских вузов, тест на поступление в Оксфордский университет предполагает наличие у поступающих знаний по комбинаторике и элементарной теории вероятностей.

Однако дело не только в том, что европейские или американские школьники знакомятся с элементами статистики и одним из направлений модернизации российского образования является интеграция в международную систему, а скорее в том, что вероятностно-статистические методы уже сегодня широко используются самыми различными областями знаний. Таким образом, знакомство с элементами данной науки открывает широкие возможности для применения математики к решению прикладных задач. В результате изучения теории вероятностей и статистики школьники получают знания и умения, которые помогают воспринимать и анализировать статистические сведения, встречающиеся в современных средствах массовой информации, дают возможность на их основе делать выводы и принимать решения в различных ситуациях.

Согласно федеральному компоненту государственного стандарта среднего (полного) общего образования по математике, утвержденному в 2004 году, нововведением для курса математики отечественной школы являлось включение в программы содержательной линии «Элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики».

Липецкая область — в числе немногих областей, в которых проходил продолжительный эксперимент по внедрению статистической линии в школьный курс математики (с 2002 г.). Данный опыт дал как положительные результаты, так и вскрыл ряд негативных моментов (например, неготовность учителей к реализации содержательной линии и др.). Преподавание нового раздела требует переориентации взглядов на обучение математике, перестройки самого этого процесса. За это время были проведены: массовое анкетирование

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 8.

учителей математики, срезы знаний учащихся, курсы повышения квалификации учителей по программе «Теория и методика обучения статистике в общеобразовательной школе», а также осуществлена подготовка учащихся основной школы к сдаче государственной (итоговой) аттестации, содержащей задачи новой линии.

Остановимся подробнее на анализе некоторых результатов.

В течение 2009/2010 учебного года на базе ряда общеобразовательных учреждений Липецкой области функционировали экспериментальные площадки, основной целью организации которых являлась отработка методики обучения содержательной линии «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей» школьного курса математики в условиях внедрения контрольно-измерительных материалов для проведения государственной (итоговой) аттестации за курс основной школы, включающих задания по указанному разделу содержания.

В экспериментальной работе принимало участие 28 классов с общей численностью 585 учащихся. В ходе проведения эксперимента проверке и последующему анализу подвергались умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни в рамках изучения раздела «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей» выпускников 9-х классов общеобразовательных учреждений.

Основой для указанной проверки являлось проведение диагностической работы, содержащей задания базового и повышенного уровней.

Приведем в качестве примера один из вариантов контрольной работы для 9-го класса, ответы и указания к решению, а также краткий анализ выполнения заданий.

Структура и содержание работы

На работу учащимся отводится 40–45 минут. В работу включены пять заданий базового уровня и одно задание повышенного уровня. Все расчеты проводятся **без калькулятора**.

Задание 1 (на соотнесение) предназначается для проверки умения вычислять средние значения результатов измерений (медиана, среднее арифметическое, мода, размах).

Задание 2 (с кратким ответом) — простейшая комбинаторная задача, решаемая путем систематического перебора возможных вариантов либо с использованием правила умножения.

Задание 3 (с кратким ответом) предназначается для проверки умения соотносить данные столбиковой диаграммы со словесной формулировкой.

Задание 4 (с выбором ответа) проверяет умение применять правило умножения.

Задание 5 (с кратким ответом) проверяет умение вычислять простейшие вероятности событий, составленных из равновозможных исходов эксперимента.

Задание 6 (с развернутым ответом) повышенный уровень.

Критерии оценивания выполнения работы

Отметка «отлично» выставляется за верно выполненные пять заданий, причем одно из них — повышенного уровня; отметка «хорошо» — за выполнение четырех любых заданий; отметка «удовлетворительно» — за выполнение трех любых заданий.

Вариант диагностической работы

Базовый уровень

1. Выборка 132; 141; 151; 142; 129; 144; 129; 147; 145; 150 содержит сведения о росте (в сантиметрах) каждого из 10 обследованных школьников. Для каждой статистической характеристики (среднее арифметическое, размах, медиана) укажите ее значение. В ответе запишите номер соответствующего значения.

1) 141 2) 22 3) 143 4) 129

Ответ:

Размах – ______________ .

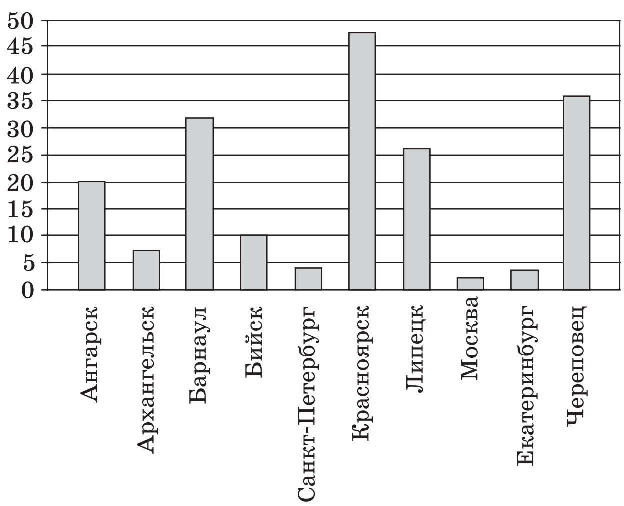
Медиана – ______________ .

Среднее арифметическое – ______________ .

2. В конференции участвовало 10 человек. Каждый участник с каждым обменялся визитной карточкой. Сколько всего понадобилось карточек?

Ответ:___________ .

3. На диаграмме представлены данные Госкомстата России за 2005 г. по выбросам вредных веществ, загрязняющих атмосферу (в усл. ед.), в ряде городов.



С помощью диаграммы ответьте на вопрос: «В каком городе, по отношению к г. Липецку, наблюдалось наиболее резкое отличие в количестве выбросов в атмосферу вредных веществ и на сколько усл. ед.?»

Ответ:__________ .

4. Сколько трехзначных чисел, оканчивающихся на 4, можно составить из цифр 0, 2, 4, 6?

А. 16 **Б.** 9 **В.** 12 **Г.** 48

5. Эксперимент состоит в последовательном бросании двух игральных костей. Пусть событие A={на одной из костей выпала двойка}, событие B={сумма очков на костях больше 8}. Используя таблицу элементарных событий, определите, какое из двух событий более вероятно: событие A или событие B?

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Ответ:__________ .

Повышенный уровень

6. Мила складывала в шкатулку только двухрублевые монеты. Однажды Даша взяла из шкатулки 7 двухрублевых монет и взамен положила туда 14 монет по одному рублю. После этого вероятность наудачу вынуть из шкатулки двухрублевую монету стала равна $\frac{31}{45}$. Сколько монет было в шкатулке?

Ответы и указания к решению

1.
Размах – 2.
Медиана – 3.
Среднее арифметическое – 1.

2. 90.

Каждый из 10 участников конференции раздал 9 визитных карточек. Значит, всего было роздано $10 \cdot 9 = 90$ визитных карточек.

3. Москва; приблизительно 24 усл. ед.

Следует принять как правильный любой ответ, согласующийся с данными, представленными на диаграмме, например, 23 или 25 усл. ед.

4. В.

Выбор первой цифры может быть осуществлен 3 способами, второй — четырьмя способами, третьей — единственно возможным способом. Тогда, по правилу умножения, получим: $3 \cdot 4 \cdot 1 = 12$.

5. Событие A.

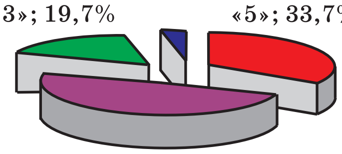
Всего элементарных событий 36, из них событию A благоприятствуют 11, а событию B — 10. Тогда вероятность события A равна $\frac{11}{36}$, события B — $\frac{10}{36}$, следовательно, вероятнее событие A.

6. 38 монет.

Пусть двухрублевых монет было x. Тогда, после того как Даша взяла из шкатулки 7 двухрублевых монет и взамен положила туда 14 монет по одному рублю, монет в шкатулке стало $x - 7 + 14 = x + 7$, из них двухрублевых $x - 7$. По условию, $x + 7$ равно или кратно 45, а $x - 7$ равно или кратно 31. Так как в шкатулке 14 монет по одному рублю, а вероятность вынуть из шкатулки наудачу монету по рублю стала равна $\frac{14}{45}$, очевидно, что $x - 7 = 31$, откуда $x = 38$. Значит, в шкатулке было 38 монет.

Анализ результатов выполнения контрольной работы

На диаграмме наглядно представлены результаты выполнения контрольной работы.



Задание 1

Не приступали к решению – 1%.

Неверно выполнили (хотя бы одно соотношение неверно или не указано) – 7,7%.

Верно выполнили (все три соотношения верные) – 91,3%.

Для верного выполнения этого задания необходимо было исходить из определений статистических характеристик. При анализе результатов выполнения работ была выявлена следующая особенность: большая часть учащихся, не выполнивших данное задание, верно определяли размах и среднее арифметическое, а значение, соответствующее медиане, не указывали вовсе. Подобное обстоятельство говорит о несформированности понятийного аппарата, в данном случае понятия «медиана».

Задание 2

Не приступали к решению – 0,2%.
Неверно выполнили – 5,3%.
Верно выполнили – 94,5%.

Самый высокий процент верного выполнения. Следует отметить, что в задаче не требовалось знание определенных понятий или правил. Достаточно было представить себе данную ситуацию в повседневной жизни.

Задание 3

Не приступали к решению – 3%.
Верно ответили на обе части вопроса – 73,8%.
Неверно ответили на обе части вопроса – 11,1%.
Верно ответили только на первую часть вопроса – 12,1%.

От учащихся требовалось не только умение работать со столбиковой диаграммой, но и корректно воспринимать условие задачи. Так наиболее резкое различие наблюдалось как в сторону увеличения выбросов по отношению к рассматриваемому объекту, так и в сторону уменьшения. Необходимо было определить разницу в обоих случаях, наибольшая из них и была ответом на вопрос. Почти каждый пятый учащийся смог верно определить город, с которым наблюдалось наиболее резкое отличие, что требовало лишь умения визуально сравнивать элементы диаграммы. А отсутствие ответа на второй вопрос говорит о неумении считывать и анализировать численные показатели.

Задание 4

Выбрали вариант А – 3%.
Выбрали вариант Б – 3,8%.
Выбрали вариант В – 89,4%.
Выбрали вариант Г – 3,8%.

Учащиеся, выбравшие вариант ответа А, не учли, что число не может начинаться с нуля. В вариант Б была заложена типичная ошибка: учащиеся не учли, что цифры в числе могут повторяться. А учащиеся, выбравшие в качестве правильного вариант Г, нашли количество всех трехзначных чисел, которые могут быть составлены из предложенных цифр. Вероятнее всего, это говорит об их невнимательности и поспешности при чтении условия задачи.

Задание 5

Не приступали к решению – 9,6%.
Неверно выполнили – 17,9%.
Верно выполнили – 72,5%.

По данному заданию (среди заданий базового уровня) наблюдается самый большой процент учащихся, не приступивших к решению. Возможно, это явилось следствием того, что в тексте отсутствовал стандартный вопрос: «Найдите вероятность события». Учащиеся, приступившие, но не выполнившие это задание, неверно определили число событий, благоприятствующих событиям A и B, а значит, неверно подсчитали вероятности наступления каждого из этих событий.

Задание 6

Не приступали к решению – 53,3%.
Неверно выполнили – 3,8%.
Верно выполнили – 33,7%.
Фрагмент решения – 9,2%.

Очевидно, что для большинства учащихся данная задача представляла значительные трудности, поэтому более половины из них даже не приступили к ее решению.

Выводы

1. Вслед за интересом к комбинаторике, статистике и теории вероятностей у школьников начал повышаться интерес к математике в целом. Теперь математика — это «живая» наука, которая существует не только сама по себе и ради себя, но и для описания процессов реальной действительности.

2. Результаты диагностической работы позволяют судить о степени готовности девятиклассников к государственной (итоговой) аттестации по математике, содержащей статистические задачи. Задания по темам «Элементы комбинаторики» и «Элементы статистики» наиболее успешно решаются учащимися. Большинство приступают к решению, и весьма незначительная часть допускает в них ошибки. Можно говорить о сформированности соответствующих умений и навыков.

Менее успешно выполняются задания на вероятность и работу с диаграммами. Можно говорить об отсутствии у значительной части учащихся навыков вычисления вероятностей в простейших случаях. Чтение диаграмм вызывает значительные трудности у почти трети учащихся.

3. Основные показатели по качеству усвоения учащимися статистической линии будут «отставать» от других линий школьного курса математики до тех пор, пока не будет решена основная проблема, связанная с методической подготовкой и переподготовкой учителя математики. Поэтому обучение учащихся элементам комбинаторики, статистики и теории вероятностей нужно начинать только тогда, когда будет готов к этому учитель, что по существу является делом нетрудным.

годовая подшивка газеты «МАТЕМАТИКА» на компакт-диске

ПОЛНАЯ ПОДБОРКА МАТЕРИАЛОВ ЗА 2010 ГОД

ПОВТОРНЫЙ ТИРАЖ ПОДШИВКИ ЗА 2009 ГОД

А ТАКЖЕ ТЕМАТИЧЕСКИЕ СБОРНИКИ И ПОДШИВКИ ДРУГИХ ГАЗЕТ ИД «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»

Удобная система навигации и поиска: материалы можно выбрать по тематике, рубрике или по номеру газеты.

Для пользователей любого уровня: включи и работай — не требуются инсталляция и место на винчестере.

Компакт-диск пригоден для работы на компьютерах даже устаревшей конфигурации (Windows-95 и выше).

Стоимость диска включает доставку. Рассылка производится только на территории РФ.

КУПОН

ЗАПОЛНЯЕТСЯ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ!

ФАМИЛИЯ

ИМЯ

ОТЧЕСТВО

ИНДЕКС

АДРЕС

Цена за один диск с доставкой	2003 г. 299 руб.	2004 г. 299 руб.	2005 г. 299 руб.	2006 г. 299 руб.	2007 г. 399 руб.	2008 г. 399 руб.	2009 г. 499 руб.	2010 г. 699 руб.
Английский язык	x	x	x	x	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.
Библиотека в школе	x	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.
Биология	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.
География	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.
Дошкольное образование	x	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.
Здоровье детей	x	x	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.
Информатика	x	x	x	x	x	x	x	__ шт.
Искусство	x	x	x	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.
История	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.
Классное руководство и воспитание школьников	x	x	x	x	x	__ шт.	__ шт.	__ шт.
Литература	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.
Математика	x	x	x	x	x	x	__ шт.	__ шт.
Начальная школа	x	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.
Немецкий язык	x	x	x	x	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.
Русский язык	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.
Спорт в школе	x	x	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.
Управление школой	x	x	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.
Химия	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.
Физика	x	x	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.
Французский язык	x	x	x	x	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.
Школьный психолог	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.	__ шт.

ЭТИ ДИСКИ МОЖНО ПРИОБРЕСТИ:

- заполнив купон и отправив его в конверте с пометкой «Книга — почтой» по адресу: **ИД «Первое сентября», ул. Киевская, д. 24, г. Москва, 121165**
- заказав по телефону: **(499) 249-47-58**
- заказав по электронной почте: **podpiska@1september.ru**
- заказав на сайте: **www.1september.ru**

ТЕМАТИЧЕСКИЕ СБОРНИКИ

Цена за один диск с доставкой – 399 руб.

Газета «Начальная школа»
«50 лет системе Л.В. Занкова» __ шт.

«1001 ёлка на Новый год» __ шт.

Газета «Школьный психолог»
«Тренинг в теории и на практике» __ шт.

Газета «Школьный психолог»
«Тест со всех сторон» __ шт.

Газета «Литература»
«Консультации по темам экзаменационных сочинений» __ шт.

Цены действительны до 31 августа 2011 года

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

ЗАДАЧИ В3, В7 — ТРИГОНОМЕТРИЯ

С. ДВОРЯНИНОВ

Напоминаем!
Каждая задача части 1 оценивается 1 первичным баллом (из 30 возможных).

В задачах В3 и В7 могут встретиться тригонометрические выражения и уравнения. Приведем основные **формулы** тригонометрии.

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,\ \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x},\ \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x},$

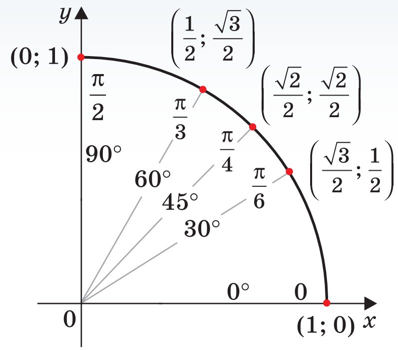
$1+\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ 1+\operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x},$

$\sin 2x = 2\cos x \sin x,\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$

$\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x},$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x,$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$

Значения тригонометрических функций для некоторых углов



Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = a,\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\ |a| \le 1;$
$\cos x = a,\ x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ |a| \le 1;$
$\operatorname{tg} x = a,\ \ x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ a \in \boldsymbol{R}.$

Основная идея решения любого тригонометрического уравнения заключается в том, чтобы свести его к одному или нескольким простейшим с помощью равносильных преобразований, перехода к уравнению-следствию, замены переменной или применения свойств функций.

В3

Пример 1. Решите уравнение

$$\cos\frac{\pi(x+7)}{3} = \frac{1}{2}.$$

Решение. Если обозначить $\dfrac{\pi(x+7)}{3} = t$, то получим простейшее тригонометрическое уравнение $\cos t = \dfrac{1}{2}$, и тогда $t = \pm\arccos\dfrac{1}{2} + 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, $\dfrac{\pi(x+7)}{3} = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n.$

Умножив обе части уравнения на 3 и разделив на π, получим: $x + 7 = \pm1 + 6n$.

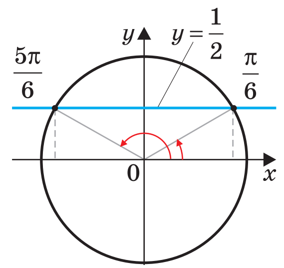
Ответ: $x_n = \pm1 - 7 + 6n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Заметим, что в этой сравнительно простой задаче ответ записывается громоздко. Такой ответ трудно записать в бланк ответов и тем более трудно «прочитать» компьютеру. Поэтому стараются так формулировать вопрос задачи, чтобы запись ответа на него была *графически* проста — чтобы её легко распознал компьютер при машинной проверке работы. Вот соответствующий пример.

Пример 2. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

пересечения прямой $y = 0{,}5$ с единичной окружностью:

$$\frac{\pi x}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z};\ \ \frac{\pi x}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in \boldsymbol{Z}.$$



Отсюда получаем, $x = \dfrac{1}{2} + 6n,\ \ x = \dfrac{5}{2} + 6k.$ Изо-

В тригонометрическом уравнении ответ можно записать разными способами. Здесь возможны такие варианты: $x_n = \pm1 - 1 + 6n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, или двумя сериями:

$$x_n = 6n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ x_k = -2 + 6k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

$$\sin\frac{\pi x}{3} = 0{,}5.$$

Решение. Корни этого уравнения запишем двумя сериями, эти серии можно получить по общей формуле или рассмотрев точки бразив несколько корней (при n, $k = 0; \pm1$) точками на числовой прямой, найдем, что наибольший отрицательный корень получается при $k = -1$, и он равен $\frac{5}{2} - 6 = -3{,}5$.

Ответ: $-3{,}5$.

B7

Пример 1. Вычислите значение выражения

$$\frac{8}{\sin\left(-\frac{27\pi}{4}\right)\cos\frac{31\pi}{4}}.$$

Решение. Преобразуем знаменатель дроби. Синус — нечетная функция, поэтому знаменатель равен

$$-\sin\frac{27\pi}{4}\cos\frac{27\pi+4\pi}{4} = -\sin\frac{27\pi}{4}\cos\left(\frac{27\pi}{4}+\pi\right) =$$

$$= \sin\frac{27\pi}{4}\cos\frac{27\pi}{4} = \frac{1}{2}\sin\frac{27\pi}{2} = \frac{1}{2}\sin\left(2\pi\cdot 6 + \frac{3\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: -16.

Совет. На экзамене не следует особенно беспокоиться, каким путем вы придете к ответу. Практически любой способ преобразований данного в условии уравнения или выражения приводит к ответу. Времени на экзамене вполне достаточно для того, чтобы получить ответ именно разными способами. Тем самым вы обеспечите проверку своего решения и исключите потерю баллов.

Вычислим в предыдущем примере отдельно и синус, и косинус. Получим:

$$\sin\left(-\frac{27\pi}{4}\right) = -\sin\left(2\pi\cdot 3 + \frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos\frac{31\pi}{4} = \cos\frac{32\pi-\pi}{4} = \cos\left(8\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Мы снова получаем, что знаменатель дроби равен

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Вычислите значение выражения

$$\frac{14\sin 13\cos 13}{\sin 26}.$$

Решение. По формуле синуса двойного угла знаменатель дроби равен $2\sin 13\cos 13$. Следовательно, данная дробь равна 7.

Ответ: 7.

Пример 3. Найдите значение выражения

$$9\cos 2a,$$

если $\cos a = \frac{1}{3}$.

Решение. Из условия следует, что

$$\cos^2 a = \frac{1}{9}.$$

Тогда, согласно основному тригонометрическому тождеству,

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Следовательно,

$$9\cos 2a = 9\left(\cos^2 a - \sin^2 a\right) =$$

$$= 9\left(\frac{1}{9} - \frac{8}{9}\right) = 1 - 8 = -7.$$

Ответ: -7.

Пример 4. Найдите значение выражения $\mathrm{tg}^2\,a$, если $5\sin^2 a + 13\cos^2 a = 6$.

Решение. Так как $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$, то

$$5(1 - \cos^2 a) + 13\cos^2 a = 6,$$

или $8\cos^2 a = 1$. Отсюда $\cos^2 a = \frac{1}{8}$ и, следовательно, $\sin^2 a = \frac{7}{8}$. Тогда $\mathrm{tg}^2\,x = \frac{7}{8} : \frac{1}{8} = 7$.

Ответ: 7.

Пример 5. Найдите наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенствам $\sin x < 0$, $\cos x < 0$.

Решение. Будем двигаться по единичной тригонометрической окружности из точки (1; 0) в положительном направлении, то есть против часовой стрелки. В первой четверти синус и косину положительны, во второй четверти синус положителен, в третьей четверти значения обеих функций отрицательны. Следовательно, требуется найти наименьшее натуральное число из интервала $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Это число 4.

Ответ: 4.

Задачу можно решить, нарисовав в одной системе координат графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ и последовательно рассматривая значения функций в точках 1, 2, 3, 4.

ИНДЕКСЫ ПОДПИСКИ | Почта России - 79083 (инд.); - 79584 (орг.) | Роспечать - 32031 (инд.); - 32598 (орг.)

АКАДЕМИЯ НАУК
ОБЩЕСТВЕННАЯ МАЛАЯ «ИНТЕЛЛЕКТ БУДУЩЕГО»
ОБНИНСК

ОБЩЕРОССИЙСКАЯ МАЛАЯ АКАДЕМИЯ НАУК «ИНТЕЛЛЕКТ БУДУЩЕГО»

Тел.: (48439) 97295 ■ express@future.org.ru ■ http://www.future4you.ru

НАЦИОНАЛЬНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА
«ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНО-ТВОРЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ РОССИИ»

■ МАН «ИНТЕЛЛЕКТ БУДУЩЕГО», ■ НП «ОБНИНСКИЙ ПОЛИС» ■ НОЦ «РОСИНТАЛ»■

РОССИЙСКИЙ КОНКУРС «ТАЙНЫ МАТЕМАТИКИ»

Конкурс для учащихся 6 – 8 классов

Конкурс **«Интеллект-экспресс»** дарит всем школьникам замечательную возможность участвовать в Российском заочном конкурсе, не выходя из класса или своего дома!!!

Актив Общероссийской Малой академии наук «Интеллект будущего» вот уже 25 лет реализует различные образовательные проекты. Зайдите на сайт **http://www.future4you.ru**, и вы удивитесь тому, какие разнообразные конкурсы для школьников предлагаются в течение всего года. Конкурс проводится совместно с научно-образовательным **Центром «Росинтал»**.

ЧТО ОЖИДАЕТ КОНКУРСАНТОВ

Возможность стать лауреатом конкурса! Это звание присуждается участникам, которые набрали не менее 60% от максимального количества баллов.

Документы для портфолио. По итогам конкурса школьнику высылается документ, подтверждающий участие в олимпиаде, – **диплом призера, лауреата или свидетельство участника конкурса**.

Престиж. Участник конкурса попадает в Общероссийский интеллект-рейтинг.

Известность. В сборнике «Ими гордится Россия» будут опубликованы имена 100 учеников 5 – 11 классов, набравших за год максимальное количество рейтинговых баллов.

Заслуженная награда! Учащиеся, набравшие в общероссийском рейтинге по всем номинациям максимальное количество баллов, награждаются премией в размере 30000 рублей.

ДЛЯ УЧАСТИЯ В КОНКУРСЕ необходимо с 5 по 20 мая 2011 г.:

1. Выполнить работу.

2. Оплатить целевой взнос за участие в конкурсе в размере 195 рублей.

Банковские реквизиты:

Получатель: ООО НОЦ «Росинтал», Обнинское отделение №7786 СБ РФ,
ИНН 4025418534 / КПП 402501001. Р/с: 40702810222230101653.
Банк получателя: Калужское ОСБ №8608, г. Калуга, БИК 042908612,
кор. счет 30101810100000000612.

Назначение платежа: *оргвзнос за участие в конкурсе «Интеллект-экспресс».*

3. Отправить в оргкомитет материалы (выполненную работу, регистрационную карту, копию квитанции об оплате) одним из способов:

а) почтой по адресу: **249035, г. Обнинск Калужской обл., а/я 5103, Ляшко Л.Ю.**

На отдельном листе укажите название конкурса, а также:

– фамилию, имя, класс, дату рождения, телефон, e-mail;

– название образовательного учреждения, почтовый адрес этого учреждения и телефон, e-mail, фамилию, имя, отчество педагога-куратора;

б) по электронной почте: **express@future.org.ru**;

в) зарегистрироваться на сайте **http://www.future4you.ru** и прикрепить свою работу.

КАК ОФОРМИТЬ РАБОТУ

Записывается номер задания – напротив ответ. Таблицу для записи ответов можно скачать на сайте **http://www.future4you.ru** в разделе «**Интеллект-экспресс**», здесь же будут размещены фамилии конкурсантов и количество набранных ими баллов.

Вопросы можно задать по телефону: **8 (48439) 97-295.**

Результаты конкурса будут размещены на сайте и высланы участникам до конца июня.

«Интеллект будущего» - для всех!

РЕКЛАМА

ЗАДАНИЕ 1. «Путешествие»

Автобус проехал из пункта A в пункт F по прямолинейной дороге длиной 38 км. На всем пути автобус останавливался в пунктах B, C, D и E. Известно, что AC=12 км, BD=11 км, CE=12 км, DF=16 км. Найдите расстояние между пунктами C и D.

ЗАДАНИЕ 2. «Два следующих числа»

22 484 121 80 6400 1600 1559 ? ?

ЗАДАНИЕ 3. «Воскресный отдых»

Сторож работает 4 дня и 5-й отдыхает. Он начал работать в понедельник после отдыха в воскресенье. Через сколько дней он снова будет отдыхать в воскресенье?

а) 37; б) 36; в) 33; г) 32; д) 34.

ЗАДАНИЕ 4. «Овалы»

Сколько раз в записи всех чисел от 1 до 200 встречается овал. (Круг считать овалом)

ЗАДАНИЕ 5. «Праздничный пирог»

Мама испекла праздничный пирог. Первым пришёл Миша. Он съел треть пирога и ушёл. Потом пришёл Андрей, съел треть оставшегося пирога и ушёл. Затем пришёл Вова и тоже съел треть от оставшегося после Андрея пирога. На сколько кусков разделила пирог мама, если Вова съел 4 куска?

ЗАДАНИЕ 6. «Огромное число»

Какой цифрой заканчивается число, являющееся ответом в данном выражении: $(122^8+123^9)*124^{10}$.

ЗАДАНИЕ 7. «Морская логика»

Попробуйте разобраться в логике трёх нижеследующих строчек. Вставьте вместо вопросительного знака полученное число.

148539 ?

58

аэростат **ТРОС**

ЗАДАНИЕ 8. «Ученики»

В классе число отсутствующих учеников составляет 1/6 часть от числа присутствующих. После того как из класса вышел один ученик, число отсутствующих стало равно 1/5 числа присутствующих. Сколько учеников в классе?

ЗАДАНИЕ 9. «Покупка»

Вале не хватает 2 руб., а Тане 7руб., чтобы купить по шоколадке. Если они сложат деньги, то им не хватит даже на одну шоколадку. Сколько стоит шоколадка? Ответ запишите в таблицу.

ЗАДАНИЕ 10. «Квадрат числа»

Квадрат числа состоит из цифр 2, 0, 5, 9. Какое число возвели в квадрат?

ЗАДАНИЕ 11. «Буквенные ребусы»

1. $АХ^А$=БАХ; 2. $АА^Н$=АННА; 3. КАК=$Б^К$.
Какую цифру надо поставить вместо буквы «А» в ребусах? В ответ напишите наибольшее трёхзначное число, которое можно составить из трёх отгаданных цифр.

ЗАДАНИЕ 12. «Три одинаковые цифры»

Сколько среди целых чисел от 100 до 10000 таких, в записи которых встречаются 3 одинаковые цифры?

ЗАДАНИЕ 13. «Возраст учащихся»

В классе 33 ученика, а сумма их возрастов составляет 430 лет. Найдутся ли в классе 20 учащихся, сумма возрастов которых больше 260?

ЗАДАНИЕ 14. «Номер машины»

Номер машины состоит из трёх цифр и может начинаться с нуля. Какова вероятность того, что в данную секунду мимо вас проезжает машина с номером, в котором цифры расположены по возрастанию?

ЗАДАНИЕ 15. «Задача о мальчике Джо»

Каково наибольшее число утверждений, которые одновременно могут быть истинны:
1) Джо ловкач; 2) Джо не везёт; 3) Джо везёт, но он не ловкач; 4) если Джо ловкач, то ему не везёт; 5) Джо является ловкачом тогда и только тогда, если ему везёт; 6) либо Джо ловкач, либо ему везёт, но не то и другое одновременно.

ЗАДАНИЕ. «Море-море»

Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько килограммов пресной воды нужно добавить к 40 кг морской, чтобы соли в смеси стало 2%? Ответ запишите в таблицу.

Спасибо за работу! *Оргкомитет*

ЛЕТНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ, ОКОНЧИВШИХ 7 КЛАСС

ИЮНЬ

1 | Среда

Сегодня первый день лета, и мы начинаем отсчет летних дней по математическому календарю. Не забывай заглядывать в календарь каждый день, потому что тебя там ждут математические сюрпризы и математические открытия. Заведи для математического календаря отдельную тетрадь, в которую ты будешь записывать теорию с примерами и решения предложенных заданий. Не забудь про поля в тетради для замечаний и комментариев.

2 | Четверг

Тема: «Текстовые задачи»

1. Андрей старше Павла на 4 года, а Павел старше Бориса в 1,5 раза. Вместе им 36 лет. Сколько лет каждому из них?

2. Смесь сухофруктов состоит из яблок, изюма и чернослива. Чернослива в 1,6 раза больше, чем яблок, а изюма на 200 г больше, чем яблок. Сколько яблок, чернослива и изюма в 2 кг смеси?

3 | Пятница

В бутылке, стакане, кувшине и банке находится молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В каком сосуде какая жидкость?

4 | Суббота

Готовься к экзамену

1. Реши уравнение $5 - 2(x - 4) = 3(5 - x) - 4x$.

2. Из предложенных чисел 0,33, 0,03, 0,(2), $\frac{1}{3}$ выбери наибольшее.

1) 0,33 2) 0,03 3) 0,0(9) 4) $\frac{1}{3}$

3. Вычисли: $4\frac{11}{15}\cdot 3+3,3\cdot 4$.

4. Соотнеси одночлены с их стандартным видом.

А) $5x^2y\cdot 0,3y^3$
Б) $0,1x\cdot 2xy^4$
В) $(0,5x^3y^2)^2$

1) $1,5x^2y^4$
2) $\frac{1}{4}x^6y^4$
3) $\frac{1}{5}x^2y^4$

5. Упрости выражение $\left(\frac{1}{a^2+2ab}-\frac{1}{a^2-2ab}\right):\frac{4b^2}{4b^2-a^2}$ и найди его значение при $a = -1$, $b = 1$.

Ответы к заданиям

1. ______________

2.

1	2	3	4

3.

4.

А	Б	В

5. Запиши решение.

5 | Воскресенье

Отдыхай, но не скучай!

Предлагаю вашему вниманию слова, обозначающие то, какими бывают числа. Выпишите из них те, которые вам знакомы, и приведите примеры этих чисел.

Виды чисел: натуральные, однозначные, многозначные, простые, составные, четные, нечетные, целые, дробные, дружественные, рациональные, иррациональные, положительные, отрицательные, совершенные, фигурные, взаимно обратные, противоположные, числа Фибоначчи, действительные, трансцендентные, числа-великаны, числа-лилипуты, числа-палиндромы.

Интересную информацию о видах чисел, которые вы не знаете, можно найти в Интернете.

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 8.

КАЛЕНДАРЬ

6 | Понедельник

Тема: «Свойства степени с натуральным показателем»

Упрости выражение.

1. $x^4 \cdot x^6 \cdot x^3$. **2.** $a^{10} : a^2$. **3.** $\dfrac{m^2 \cdot (m^3)^4 : m}{m \cdot m \cdot (m^2)^3}$.
4. $(y^5)^3$. **5.** $c^7 \cdot c : c^2$.

Для повторения

Основные свойства степени с натуральным показателем:

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $a^x : a^y = a^{x-y}$; $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.

7 | Вторник

Тема: «Измерение отрезков»

1. Точка M — середина отрезка AB. Найди длину отрезка MA, если $AB = 15$ см.

2. Точка E — середина отрезка KM. Найди длину отрезка KM, если $ME = 2{,}4$ см.

3. Точка A делит отрезок OE длиной 29 см, на две части. Найди длину каждой части, если одна из них на 8 см больше другой.

8 | Среда

Проверь себя

Тема: «Уравнения»

1. $-(3x + 2) + (8x - 1) = 17$.

2. $\dfrac{7x-3}{6} = \dfrac{5x+1}{4}$.

3. $7 + 3(-x - 3(x + 5)) = 6(5 - 2x) + 10$.

4. $-5 + 5(-x - 2(x - 4)) = 7(5 - 2x) - x$.

Для самоконтроля.

1. 4. **2.** –9. **3.** Нет решений. **4.** Любое число.

9 | Четверг

Тема: «Текстовые задачи»

1. На второй полке на 10 книг меньше, чем на первой. Если на первую поставить 20 книг, а со второй убрать 10 книг, то на первой полке книг станет в 2 раза больше, чем на второй. Сколько книг было на каждой полке первоначально?

2. У друзей 675 рублей на двоих. Если один из них отдаст другому 100 рублей, то у него останется в 1,5 раза меньше денег, чем станет у другого. Сколько денег у каждого?

10 | Пятница

Развивай мышление

Малыш может съесть банку варенья за 6 минут, а Карлсон в 2 раза быстрее. За какое время они съедят банку варенья вместе?

11 | Суббота

Готовься к экзамену

1. Разложите на множители выражение $16a^3 - a^7$.

2. Банк выдает кредит под 20% годовых. Какую сумму ты вернешь банку в течение года, если возьмешь в кредит 300 000 рублей?

3. Соотнеси выражение с его представлением в виде степени.

А) $x^4 \cdot x^2$ Б) $(x^4)^2$ В) $x^8 : x^4$

1) x^8 2) x^6 3) x^4

4. Какое из данных чисел не делится на 3?

1) 513
2) 735
3) 2116
4) 12 339

5. Реши систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}y = -3, \\ 3x - \dfrac{y}{3} = -5. \end{cases}$$

Ответы к заданиям

1. ____________

2.

3.

А	Б	В

4.

1	2	3	4

5. Запиши решение.

12 | Воскресенье

Десять полезных советов

В действительности существует совсем немного людей, наделенных математическими способностями от природы, все же остальные преуспевают в этой науке благодаря добросовестной и настойчивой учебе. «Без труда не выловишь рыбку из пруда» — эта мудрость не обходит стороной и математику. Может быть, полезные советы, приведенные далее, помогут тебе избежать проблем с математикой.

13 | Понедельник

Тема: «Формулы сокращенного умножения»

Установи стрелками соответствие между выражениями, находящимися в левой и правой колонках.

$(c+m)(m-c)$ ①	① $(c+m)^2$
$m^2+2mc+c^2$ ②	
$(c-m)(c-m)$ ③	② c^2-m^2
$c^2-2cm-m^2$ ④	
$(m+c)(m+c)$ ⑤	
c^2-cm+m^2 ⑥	③ $(c-m)^2$
$(m+c)(c-m)$ ⑦	
$m^2-2mc+c^2$ ⑧	④ c^2+m^2

14 | Вторник

Тема: «Измерение углов»

1. Луч OK является биссектрисой угла AOB. Найди величину угла KOB, если $\angle AOB = 70°$.

2. Луч AM является биссектрисой угла CAE. Найди величину угла CAE, если $\angle MAC = 70°$.

3. Луч MK делит угол AMB на два угла, причем $\angle AMK : \angle KMB = 3 : 4$. Найди величины углов AMK и KMB, если $\angle AMB = 70°$.

15 | Среда

Проверь себя

Тема: «Умножение одночленов»

Заполни пирамиду, если в верхней ячейке должно стоять произведение двух выражений из соседних ячеек, расположенных ниже.

$8a^2x$	$-\frac{3}{4}x^3$	$2a^4c$	$(a^3c^2x)^3$

Для самоконтроля.

Если ты получил в конце $-27a^{23}c^{9}x^{13}$, то ты покорил вершину!

16 | Четверг

Тема: «Задачи на движение»

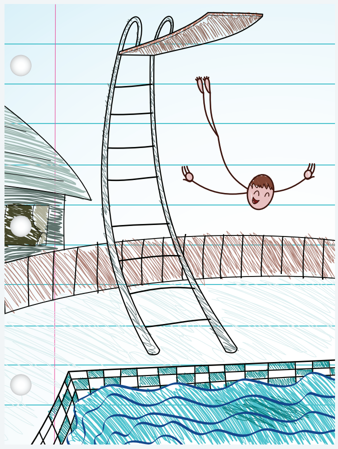
1. Пешеход дошел до почты и вернулся обратно, затратив на весь путь 1 ч. К почте он шел со скоростью 6 км/ч, а обратно — 4 км/ч. Чему равно расстояние до почты?

2. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из двух поселков и встретились через 3 часа. Расстояние между поселками 30 км. Найди скорость каждого пешехода, если у одного она на 2 км/ч меньше, чем у другого.

17 | Пятница

Развивай математическое мышление

Спортсмен прыгает с трамплина в воду: сначала трамплин подбрасывает его вверх на 1 метр, затем он летит вниз на 6 метров и, выныривая, поднимается на 2 метра до поверхности. На какой высоте над водой находится трамплин?



18 | Суббота

Готовься к экзамену

1. Соотнеси уравнение и его корни.

А) $5 - x = 0$ Б) $10x = 5$ В) $2x + 10 = 0$

1) $x = -5$ 2) $x = 5$ 3) $x = 0{,}5$

2. Упрости выражение

$$2abc \cdot 5a + 1\frac{5}{7}a^2 \cdot \frac{7}{12}bc - 2\frac{2}{3}ab \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)ac.$$

1) $10a^2bc$ 2) $12a^2bc$ 3) $12a^6b^3c^3$ 4) $10abc^2$

3. Сократи дробь $\frac{9-x^2}{2x-6}$.

4. Найди значение выражения $\frac{28^6}{7^5 \cdot 4^5}$.

5. Из корзины взяли 8 груш, затем — четверть остатка, а потом еще 20% оставшихся груш. После этого в корзине осталась половина первоначального числа груш. Сколько груш было в корзине?

Ответы к заданиям

1.

А	Б	В

2.

1	2	3	4

3. ____________

4.

5. Запиши решение.

19 | Воскресенье

Совет 1. Настройся на успех!

Если ты достаточно успешно справляешься с другими дисциплинами, ты просто не можешь не справиться с математикой — это только дело времени и твоего собственного труда. При изучении математики используются те же логические построения, что и в остальных науках.

20 | Понедельник

Тема: «Алгебраические выражения»

1. Найди значение выражения $\frac{x-y^2}{y-x}$, если $x = 0{,}5$ и $y = -0{,}2$.

2. Составь выражение:

а) 15% от разности чисел x и y;

б) удвоенное произведение чисел 45 и m;

в) сумма квадратов чисел x и $3a$.

Для повторения

Выражение, которое состоит из букв, чисел, знаков действий и скобок, называется алгебраическим.

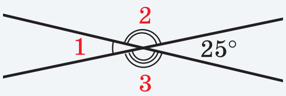
21 | Вторник

Тема: «Смежные и вертикальные углы»

1. Сформулируй определения и свойства смежных и вертикальных углов.

2. Один из смежных углов в 4 раза меньше другого. Найди величины этих углов.

3. По рисунку найди величины отмеченных углов.



22 | Среда

Проверь себя

Тема: «Линейная функция и ее график»

Построй графики всех функций в одной координатной системе:

а) $y = 4 - x$; б) $y = x$;

в) $y = \frac{x}{2} + 1$; г) $y = 3x - 4$.

Для самоконтроля. Графики функций проходят через точку с координатами (2; 2).

23 | Четверг

Тема: «Текстовые задачи»

1. Одна из сторон прямоугольника на 2 см больше другой, а периметр прямоугольника равен 32 см. Найди стороны прямоугольника.

2. Развернутый угол разделен лучом на два угла, один из которых в 3 раза больше другого. Найди величины образовавшихся углов.

24 | Пятница

Развивай мышление

Мальчик каждую букву своего имени заменил порядковым номером этой буквы в русском алфавите. Получилось число 510141. Как звали мальчика?

25 | Суббота

Готовься к экзамену

1. Определи, какая из данных точек **не** принадлежит графику функции $y = 4 - 5x$.

1) (1; –1) 2) (–25; 129)

3) (–1; 1) 4) (4; –16)

2. Запиши число 23 500 000 000 в стандартном виде.

3. Соотнеси выражение и его разложение на множители.

А) $x^2 - 16$ Б) $4x - x^2$ В) $x^2 + 4x$

1) $x(x + 4)$ 2) $(x + 4)(x - 4)$ 3) $x(4 - x)$

4. Вычисли:

$$2{,}5 + 3\frac{1}{3}\cdot 6.$$

5. Реши уравнение

$$\frac{4x}{3} - 17 + \frac{3x-17}{4} = \frac{x+5}{2}.$$

Ответы к заданиям

1.

1	2	3	4

2. ____________

3.

А	Б	В

4.

5. Запиши решение.

26 | Воскресенье

Совет 2. Постоянно тренируйся!

Мир полон чисел, которыми мы постоянно пользуемся. Используй их для тренировки своих математических способностей: складывай числа на номерах проезжающих мимо машин, считай количество шагов до школы, магазина и узнавай расстояние или скорость движения до этих пунктов.

27 | Понедельник

Тема: «Стандартный вид одночлена»

Приведи одночлены к стандартному виду.

1. $-2{,}5m(-2)m^3m^2$; **2.** $abc12b^2c^3$;

3. $-4xy(-3)x^2y(-2)xy^4$; **4.** $\frac{2}{3}ax^3 12ac^2x$.

Для повторения

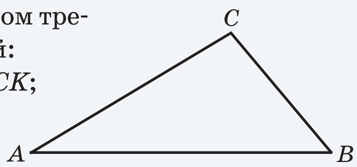
Одночлен стандартного вида — это одночлен, в котором числовой множитель один и стоит на первом месте, а произведение степеней с одинаковыми основаниями заменены степенями.

28 | Вторник

Тема: «Замечательные линии треугольника»

1. Сформулируй определение:
— биссектрисы треугольника;
— медианы треугольника;
— высоты треугольника.

2. В нарисованном треугольнике построй:
— биссектрису CK;
— медиану AE;
— высоту BM.



29 | Среда

Проверь себя

Тема: «Формулы сокращенного умножения»

Упрости выражения.

1. $8 - (y + 4)(y - 4)$.

2. $(3b + 5c)(5c - 3b) + 9b^2$.

3. $9x(2 - x) + (3x + 2)^2$.

4. $4(x^2 + 4) - (5x - 4)^2$.

5. $3(x + y)^2 - 6xy$.

6. $(x - 3)^2 - (x + 3)(3 - x)$.

Для самоконтроля: **1.** $24 - y^2$. **2.** $25c^2$. **3.** $30x + 4$. **4.** $40x - 21x^2$. **5.** $3x^2 + 3y^2$. **6.** $2x^2 - 6x$.

30 | Четверг

Тема: «Текстовые задачи»

1. Новое серебро (альпака) — сплав никеля, цинка и меди в отношении 3 : 4 : 13. Сколько каждого металла нужно взять, чтобы получить 4 кг нового серебра?

2. На пост председателя комитета городской думы претендовали кандидаты А и Б. В голосовании приняли участие 198 человек. Голоса между кандидатами распределились в отношении 8 : 3. На сколько больше голосов получил победитель?

■ Уважаемый читатель! Предлагаемый вашему вниманию летний математический календарь для учащихся, окончивших 7-й класс, является продолжением летнего математического календаря для учащихся, окончивших 5-й класс, который был опубликован в 2008 году, и летнего математического календаря для учащихся, окончивших 6-й класс, который был опубликован в 2009 году.

Уже в течение многих лет мои учащиеся получают на каникулы летнее задание в форме летнего математического календаря, поэтому хочу привести кое-какие доводы в пользу такой работы.

Летние каникулы в нашей стране являются самыми продолжительными по времени. Это хорошо, ребята имеют возможность полноценно отдохнуть после учебного года. Но каникулы, к сожалению, способствуют забыванию ранее изученного, а это плохо.

В начале каждого учебного года одна из важных задач учителя — за короткое время осуществить повторение пройденного материала, актуализировать знания учащихся. Решение этой проблемы видится мне во введении летнего домашнего задания. Чтобы привлечь учащихся к выполнению этого задания, я придумала для него форму летнего математического календаря. Летний математический календарь — это летнее задание, рассчитанное на ежедневное занятие математикой во время каникул. Он предназначен только для желающих учащихся, необязательность выполнения летних заданий не ведет к перегрузке.

Выполнение летнего задания способствует:

— актуализации знаний учащихся к началу нового учебного года, что достигается через обобщающее повторение большого объема материала;

— сокращению времени на повторение пройденного материала в начале учебного года;

— систематизации имеющихся знаний учащихся;

— осуществлению проверки учащимися прочности своих знаний через выполнение самостоятельных работ разных типов с элементами самоконтроля;

— развитию математического мышления учащихся через решение логических и нестандартных задач, в том числе повышенной сложности;

— сплочению ребят и родителей во время совместной работы над задачей;

— формированию таких качеств учащихся, как любознательность, целеустремленность, трудолюбие, дисциплинированность и др.

А главное, летний математический календарь позволяет держать в тонусе мышление и интеллект ученика во время каникул.

Летние математические календари можно составить для учащихся всех классов, структура их может быть различна. Уверяю вас, уважаемые коллеги, что желающие заниматься летом по календарю всегда найдутся. Пусть это будет 5–7 человек из класса (хотя по своему опыту знаю, что их бывает не менее 15, особенно если приучать к летнему заданию с 5-го класса), но ведь это самые любимые ученики, а для них не жаль потраченного времени и сил. Даже если кто-то из учащихся «решит» всего несколько недель календаря, или выберет только некоторые дни недели, или сядет и решит весь календарь только в конце лета — все будет хорошо. В любом случае в будущем, то есть в последующих классах, календарь будет являться справочным пособием, можно будет рекомендовать учащимся обращаться к нему для повторения забытого материала.

Если календарь хранить в памяти компьютера, то не составит большого труда каждый год вносить изменения по датам, перемещая некоторые темы. Это нужно будет делать, потому что 1 июня ежегодно смещается по дням недели.

Обсуждение решений заданий календаря с учащимися всех классов я провожу в сентябре нового учебного года. За «летнюю работу» учащиеся получают только хорошие отметки, которые я выставляю в журнал в первой четверти.

Структура летнего математического календаря

• **Понедельник** служит для повторения материала какой-то конкретной темы по алгебре.

• **Вторник** посвящен геометрии, причем здесь содержатся не только задания по повторению геометрического материала, но и задания по подготовке учащихся к изучению геометрии в новом учебном году.

• **Среда** — день контроля, каждую среду учащимся предлагается самостоятельная работа для проверки своих знаний. Типы самостоятельных работ повторяют те, с которыми учащиеся работали в течение учебного года на уроках математики, в некоторых работах предложены ответы для самоконтроля.

• **Четверг** — день текстовых задач. В 7-м классе изучается много новых типов текстовых задач – в плюс к тем типам, которые были изучены в 5–6-х классах, поэтому для их повторения выделен целый день недели.

• **Пятница** — день развития математического мышления. Каждую пятницу учащимся предлагается нестандартная задача.

• **Суббота** — день, посвященный подготовке к экзаменам. В этот день учащимся предлагается комбинированная работа, составленная по типу ГИА, скомбинированная из пяти основных типов заданий.

1-й тип. Если к заданию приводятся варианты ответа (из них верный только один), то надо обвести кружком цифру, соответствующую верному ответу.

Например:

1	2	3	4

2-й тип. Если к заданию не приводятся варианты ответа, то полученный результат надо вписать в отведенном для этого месте.

Например: $\underline{3x + 2a^2}$.

3-й тип. Если ответ на вопрос задания предлагается записать в ячейках, то имейте в виду, что в ответе заданий этого типа могут получаться целые числа или числа, которые можно представить в виде конечной десятичной дроби. При записи ответа каждую цифру, знак отрицательного числа и запятую для десятичной дроби нужно размещать в отдельных ячейках, начиная с первой левой. Наименование вписывать не нужно.

Например, полученный при вычислении ответ «–2,45» нужно записать так:

–	2	,	4	5	

а ответ «51 км» записывается так:

5	1				

4-й тип. Если требуется соотнести некоторые объекты, обозначенные буквами А, Б, В, с объектами, обозначенными цифрами 1, 2, 3, то надо вписать в приведенную в ответе таблицу под каждой буквой соответствующую цифру.

Например:

А	Б	В
2	3	1

5-й тип. Это задания, для которых нужно представить подробное письменное решение.

Порядок следования первых четырех типов может меняться, а на 5-м месте всегда находится задание, для которого нужно привести подробное письменное решение.

• **Воскресенье** — это день отдыха и размышлений.

Л. ГОРИНА,
г. Михайловск, Свердловская обл.

Победители и призеры олимпиады с вице-президентом Академии криптографии РФ В.Н. Сачковым и академиком РАН Ю.В. Прохоровым

Публикацию подготовили
А. ЗЯЗИН, А. ФРОЛОВ,
Москва

XX МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ

Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии включена в Перечень олимпиад школьников на 2010/2011 учебный год, что дает право предоставлять льготы победителям и призерам при поступлении в государственные и муниципальные учреждения высшего профессионального образования. Решение о льготах принимается вузами самостоятельно и должно быть объявлено к 1 июня 2011 года.

XX Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии проводилась в два тура. Первый тур прошел с 15 по 27 ноября 2010 года в дистанционной форме на интернет-сайте www.cryptolymp.ru.

Второй тур проводился в очной форме 28 ноября 2010 года в различных городах на базе вузов: ИКСИ Академии ФСБ России (Москва), АлтГТУ (г. Барнаул), БТИ (г. Бийск), ВятГУ (г. Киров), ДФГУ (г. Владивосток), ДГТУ (г. Ростов-на-Дону), МарГТУ (г. Йошкар-Ола), ННГУ (г. Нижний Новгород), НГУЭУ (г. Новосибирск), ИГУ (г. Иркутск), ОТИ (г. Озерск), ОмГУ (г. Омск), ОГАУ (г. Оренбург), ПГУ (г. Пенза), ПГТУ (г. Пермь), СамГУ (г. Самара), СарФТИ (г. Саров), СПбГПУ (г. Санкт-Петербург), СевКавГТУ (г. Ставрополь), СибГАУ (г. Красноярск), СибГУТИ (г. Новосибирск), СФУ (г. Красноярск), СыктГУ (г. Сыктывкар), ТГУ (г. Томск), ТУСУР (г. Томск), УрГУ (г. Екатеринбург).

Проверка работ проводилась централизованно по единым критериям. Всего дипломами I, II, III степени награжден 201 участник, а еще 23 школьника за успешное выступление отмечены поощрительными грамотами.

Задания олимпиады были подготовлены для каждой возрастной категории (8, 9, 10 и 11-е классы) в нескольких равноценных вариантах. В статье приводятся условия и решения одной из задач каждого типа.

Обращение вице-президента РАН академика В.В. Козлова к участникам

Дорогие друзья!

Вы участвуете в юбилейной, XX олимпиаде по математике и криптографии.

Криптография — ровесница письменности. Она возникла задолго до египетских пирамид и к нашему времени, пройдя через этапы «криптография как искусство» и «криптография как ремесло», превратилась *в самостоятельную бурно развивающуюся науку* со своими весьма специфическими, но во многом опирающимися на математику методами исследования. Математика и криптография всегда взаимно дополняли и обогащали друг друга. Поэтому не случайно в многовековую историю криптографии вписано много имен видных математиков: Джероламо Кардано, Франсуа Виет, Джон Валлис, Леонард Эйлер. В XX веке в становление криптографии, как точной математической науки, внесли вклад известные ученые: К. Шеннон, Н. Винер, А.Н. Колмогоров, В.А. Котельников, А.А. Марков и др.

На протяжении веков руководители государств, политические деятели и высокопоставленные военные активно использовали криптографию. Упомянем в связи с этим греческих полководца Энея и историка Полибия, римского императора Юлия Цезаря, общественного деятеля Цицерона, Френсиса Бэкона, кардинала Ришелье, Оливера Кромвеля, Петра I, Екатерину II, Дж. Вашингтона, Наполеона.

Нередко успехи и неудачи криптографов оказывали серьезное влияние на ход войн, революций, а также определяли внешнюю и внутреннюю политику государств. Характерным примером служит операция «Ультра», в результате которой английские криптографы во время Второй мировой войны смогли дешифровать переписку в сетях связи вооруженных сил Германии. Этот успех изменил ход боевых действий в Атлантическом океане, Средиземноморье и на Западном фронте в пользу антигитлеровской коалиции.

В этом году мы отметили 65 годовщину Великой Победы, немалый вклад в которую внесли наши криптографы. Они не только сумели вскрыть многие шифры нацистской Германии и предоставить руководству ценнейшую разведывательную информацию, но и не позволили противнику получить сведения о наших замыслах и действиях.

Развитие компьютерной техники способствовало созданию новых алгоритмов шифрования и методов криптоанализа. Так, в середине 1970-х годов возникло новое направление криптографии — криптография с открытым ключом, что, в свою очередь, инициировало глубокие математические исследования проблем факторизации и дискретного логарифмирования.

В настоящее время обеспечение информационной безопасности нашего государства является одной из ключевых задач. В эпоху развития информационных и телекоммуникационных технологий очень важно, чтобы каждый образованный молодой человек имел не только знания в этой области, но и ощущал меру ответственности за владение ими.

Участие в олимпиаде позволит вам окунуться в удивительный мир криптографии и попробовать свои силы в одной из наиболее бурно развивающихся областей человеческого знания.

Желаю успехов!

Условия и решения задач

Задача 1. *(8–9-е классы.)* В таблице приведена переписка двух абонентов (Godzillы и Фунтика) в чате.

Фунтик отвечает Godzille и для конспирации каждую букву заменяет на другую (причем разные буквы заменяются разными, а одинаковые — одинаковыми). Восстановите зашифрованное сообщение и пароль.

Решение. Отметим, что восстановить исходный текст короткого сообщения, зашифрованного с использованием такого шифра (шифра простой замены) не так-то просто. Помогает здесь то, что в сообщении сохранена разбивка на слова, оставлены знаки препинания и заглавные буквы. Если обратить внимание на слово **Яспар-Дюрюмгщмт** и содержащееся в ответе Godzillы упоминание города **Питера,** то можно предположить, что здесь говорится о городе, название которого **Санкт-Петербург**. Составим таблицу соответствий (табл. 1).

В соответствии с этой заменой некоторые буквы в шифрованном тексте можно восстановить:

Дата	Отправитель	Сообщение
10:11	Godzilla	**Привет. Как дела? Пришли пароль для почты**
10:14	Фунтик	**И УСЦРМС ЩЮУЬСЭ Ц ЯСПАР-ДЮРЮМГЩМТ ПС ВЦЮ ПЮВЮЧЖ. ДСМЫЧЗ: ГЩМТЩПВЖИ**
10:21	Godzilla	**Когда доберешься до Питера, позвони**

Таблица 1

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
К			Б	П									Р			Н	Т	А	Г						У						Е	С

*** *А*ТРА УЕ**А* * САНКТ-ПЕТЕРБУРГ НА **Е НЕ*Е** * ПАР***: БУРГУН...**

Далее подбираем некоторые слова по смыслу. Пусть ***А*ТРА** — это **ЗАВТРА**, **ПАР***** — это **ПАРОЛЬ**, тогда сообщение примет вид:

*** ЗАВТРА УЕЗ*А* В САНКТ-ПЕТЕРБУРГ НА *ВЕ НЕ*ЕЛ* * ПАРОЛЬ: БУРГУН*****

Затем по смыслу окончательно получаем искомое сообщение.

Ответ: Я ЗАВТРА УЕЗЖАЮ В САНКТ-ПЕТЕРБУРГ НА ДВЕ НЕДЕЛИ. *Пароль*: БУРГУНДИЯ.

Комментарий. В задаче используется шифр простой замены, который использовал еще Юлий Цезарь. В 1412 году появилась 14-томная энциклопедия с обзором важнейших областей человеческого знания, в которой, в частности, описывалась слабость такого шифра, заключающаяся в возможности применения частотного анализа. Дело в том, что одни буквы в произвольном осмысленном тексте встречаются чаще, а другие — реже. Так, например, в русских текстах чаще всего встречается буква **О**, а в английских и испанских — **Е**. Тогда самой частой букве зашифрованного текста скорее всего будет соответствовать одна из частых букв осмысленного текста. Все это позволяет определить используемую замену и найти осмысленное сообщение. Однако эта методика легко применима, если длина зашифрованного сообщения достаточно большая (не меньше, по крайней мере, количества букв в алфавите). Чем меньше букв в зашифрованном сообщении, тем сильнее нарушается эта соответствие. В данной задаче длина второго передаваемого сообщения — небольшая: 54 буквы. В этом сообщении буква **Ы**, которая соответствует букве **О** в осмысленном тексте, встречается всего один раз. Однако сама структурность передаваемого сообщения позволяет найти осмысленный текст.

Задача 2. (*8–10-е классы.*) На клавиатуре мобильного телефона одной кнопке сопоставлено по нескольку букв:

«2» — **ABC**, «6» — **MNO**,
«3» — **DEF**, «7» — **PQRS**,
«4» — **GHI**, «8» — **TUV**,
«5» — **JKL**, «9» — **WXYZ**.

Выбор нужной буквы определяется числом нажатий на кнопку. Например, нажав на «4» один раз, получим букву **G**, а два нажатия на «4» дадут или букву **H** (если нажимать быстро) или две буквы **G** (если нажимать с паузой). Известно, что при наборе пароля из 10 букв были нажаты последовательно кнопки «7», «7», «7», «2», «5», «5», «8», «9», «9», «9», «9», «9». Определите число возможных вариантов паролей.

Решение. Обозначим через x число букв, получившихся при наборе цифры «7» (их может быть от 1 до 3), y — число букв при наборе цифры «5» (1 или 2) и z — число букв при наборе цифры «9» (от 2 до 5). Перечислим возможные варианты представления числа 10 в виде суммы $x + 1 + y + 1 + z$:

(1) $3 + 1 + 2 + 1 + 3$;
(2) $3 + 1 + 1 + 1 + 4$;
(3) $2 + 1 + 2 + 1 + 4$;
(4) $2 + 1 + 1 + 1 + 5$;
(5) $1 + 1 + 2 + 1 + 5$.

Для варианта (1) получить три буквы, нажимая «7», можно только одним способом; получить две буквы, нажимая «5», можно опять-таки только одним способом; а вот получить три буквы пяти нажатий цифры «9» можно 6 способами. В итоге, для варианта (1) имеем $1 \cdot 1 \cdot 6$ вариантов пароля, аналогично, для варианта «2» будет $1 \cdot 1 \cdot 4$ вариантов пароля и т.д. Всего получаем $6 + 4 + 2 \cdot 4 + 2 + 1 = 21$ вариант.

Ответ: 21.

Задача 3. (*8–10-е классы.*) Для открытия подземелья в волшебной стране надо правильно назвать три целых числа a, b, c, служащих коэффициентами квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Значения функции для четырех значений аргумента были переданы представителям четырех рас: троллям — значение $f(21)$, эльфам — $f(24)$, гномам — $f(25)$, оркам — $f(28)$. Когда представители рас встретились, чтобы совместно найти a, b, c и открыть подземелье, один из представителей, чтобы сорвать мероприятие, предъявил неверное значение. Выясните, кто это был, если известно, что тролли предъявили число 273, эльфы — 357, гномы — 391, орки — 497.

Решение. Разность значений квадратичной функции должна делиться на разность значений аргументов. Проверим выполнение этого факта для различных пар значений:

— для первого и второго: $357 - 273 = 84$ — делится на 3;

— для третьего и четвертого: $497 - 391 = 106$ — не делится на 3, следовательно, значение исказили или гномы, или орки;

— для первого и третьего: 391 – 273 = 118 — не делится на 4, следовательно, значение исказили тролли или гномы;

— для второго и четвертого: 497 – 357 = 140 — делится на 4.

Ответ: гномы сообщили неверное значение.

Комментарий. В задаче заложена идея, заключающаяся в разделении некоторого секрета между определенными участниками. Пусть, например, для того, чтобы открыть сейф, необходимо использовать t ключей, хранящихся у t различных лиц. То есть совершение действия по открытию сейфа подразумевает согласие группы лиц и их общую ответственность. Данный механизм, называемый «схемой разделения секрета», может быть реализован и при помощи математических средств. Например, для разделения секрета a_0 между t участниками может быть выбран многочлен степени $t - 1$ вида $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{t-1}x^{t-1}$, коэффициенты которого $a_0, a_1, \ldots, a_{t-1}$ хранятся в секрете в некотором центре доверия. Каждый участник выбирает свое число c_i, $c_i \neq 0$, предоставляет его в центр доверия, который возвращает ему значение многочлена от этого числа: $f(c_i)$. Таким образом, если участники обменяются своими числами c_i и соответствующими значениями многочлена $f(c_i)$, то, имея в распоряжении t значений многочлена в различных t точках (от различных чисел), возможно найти все его коэффициенты, в частности секрет a_0. Меньшее число участников однозначным образом сделать этого не сможет.

Здесь необходимо сказать о задаче нахождения секрета в случае, если какие-то m ($m < t$) несогласных участников предъявляют ложные значения. Можно ли в этом случае найти a_0? Оказывается, что да, но при условии, что будет известно еще $m + 1$ значение многочлена от других значений честных участников. При этом можно распознать и несогласных участников.

Задача 4. (*8–11-е классы.*) В концах диаметра окружности стоят числа 1 и 5, разбивающие окружность на две дуги. Совершим по окружности n оборотов по часовой стрелке, приняв за начало обхода один из концов диаметра. После прохождения каждой имеющейся на данный момент дуги делим ее пополам и в середине записываем число $\dfrac{3x+3y}{2}$, где x и y — числа, стоящие на концах пройденной дуги, взятые в порядке направления обхода. Найдите сумму всех записанных чисел после n оборотов.

Решение. Сначала заметим, что после первого оборота количество дуг равно 2^2, после второго — 2^3, после последнего — 2^{n+1}. Пусть после оборота с номером k, $1 \le k \le n$, в точках деления окружности на дуги стоят числа x_1, $x_2, \ldots, x_{2^{k+1}}$. Тогда в ходе оборота с номером $k + 1$ на окружности появятся следующие новые числа:

$$y_1 = \frac{3x_1+3x_2}{2}, \quad y_2 = \frac{3x_2+3x_3}{2}, \quad \ldots, \quad y_{2^{k+1}} = \frac{3x_{2^{k+1}}+3x_1}{2}.$$

Видно, что $\sum\limits_{i=1}^{2^{k+1}} y_i = 3 \cdot \sum\limits_{i=1}^{2^{k+1}} x_i$. Значит, после $k + 1$ оборота сумма всех чисел на окружности возрастет в 4 раза. Если учесть, что первоначальная сумма чисел на окружности равнялась 6, то получаем окончательный ответ.

Ответ: $6 \cdot 4^n$.

Задача 5. (*8–11-е классы.*) Для зашифрования натурального числа m используется граф, представляющий собой множество вершин, некоторые из которых соединены друг с другом прямой линией. Вершины графа, соединенные друг с другом, называют *соседними*. Зашифрование состоит в следующем. В вершины графа записываются натуральные числа так, чтобы их сумма была равна m. Затем к числу в каждой вершине прибавляются числа в соседних вершинах. В результате получается граф, в котором «зашифровано» число m. Пример: для зашифрования числа 8 будем использовать граф на рисунке 1. В его вершины поместим числа, сумма которых равна 8 (рис. 2). Затем к каждому числу прибавим числа в соседних вершинах. Результат зашифрования указан на рисунке 3. На рисунке 4 приведен результат зашифрования некоторого числа. Найдите его.

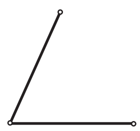


Рис. 1

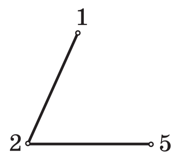


Рис. 2

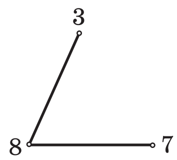


Рис. 3

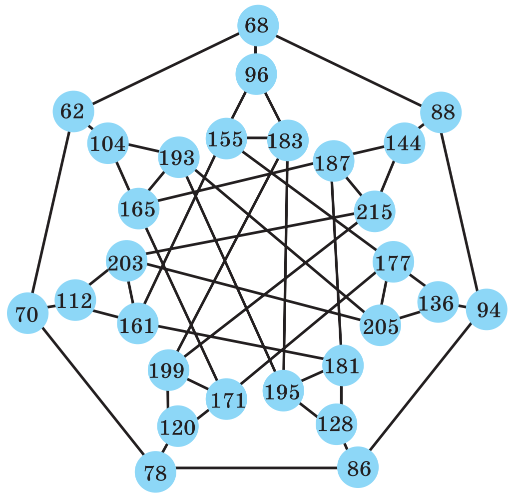


Рис. 4

Решение. Граф, используемый в задаче, обладает следующим свойством: из множества всех его вершин можно выделить такое подмножество $V = \{112 + 104 + 96 + 144 + 136 + 128 + 120 = 840\}$, что любая вершина графа лежит в окрестности ровно одной вершины из V. Окрестностью вершины графа называют множество соседних с ней вершин, включая ее саму. Очевидно, что искомое число равно сумме чисел, расположенных в вершинах из множества V:

$$112 + 104 + 96 + 144 + 136 + 128 + 120 = 840.$$

Ответ: 840.

Комментарий. Задача нахождения подмножества V имеет следующую интерпретацию в теории (помехоустойчивого) кодирования. Вершины графа соответствуют блокам информации, которые можно передавать по некоторому каналу связи. Отдельно взятая вершина соединяется с другими вершинами, соответствующим тем блокам информации, в которые может перейти исходный блок при искажении, возникающем в канале связи. Для того, чтобы на приемном конце можно было однозначно распознать передаваемое сообщение исходя из полученного искаженного, необходимо первоначально подобрать передаваемые блоки специальным образом, чтобы их окрестности не пересекались. Совокупность таких блоков и образует код. Сообщение перед передачей переводится в последовательность блоков из кода. Если любой блок, который можно передавать по каналу, можно получить из блока кода за счет искажений, то код называют совершенным. Заметим, что множество V из решения задачи как раз является совершенным кодом.

Нахождение самого множества V по заданному графу (если оно существует) относится к классу вычислительно сложных задач (NP-полных задач). Это означает, что время работы алгоритма при увеличении количества вершин в графе растет очень быстро. В то же время это обстоятельство не обеспечивает стойкости зашифрования описанном способом, так как по известным данным возможно составить систему линейных уравнений и решить ее (например, методом Гаусса). Известно, что этот метод позволяет сравнительно быстро решать эту задачу и при увеличении числа вершин. Для графа, приведенного в задании, в силу его небольшого размера, нахождение множества V оказывается более простой задачей, чем решение соответствующей системы линейных уравнений.

Задача 6. (*8–9-е классы.*) Для прохода в учреждение необходимо предъявить пятизначную комбинацию, состоящую из нулей и единиц. Устройство распознавания представляет собой упрощенную модель нейрона — клетки головного мозга (рис. 5).

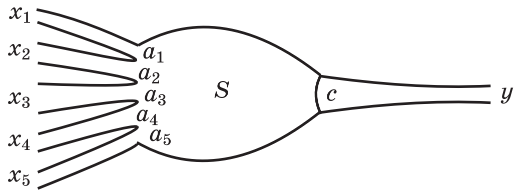


Рис. 5

Пятизначная комбинация x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 по пяти каналам поступает в клетку, где ее компоненты умножаются на фиксированные целые числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, и вычисляется сумма

$$S = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5.$$

Проход в учреждение открывается, только если $S \geq c$, где c — некоторое фиксированное целое число. В таблице 2 представлены те комбинации, при предъявлении которых проход открывается, а в таблице 3 — для которых проход закрыт.

Таблица 2

1, 0, 1, 1, 0	1, 1, 0, 1, 0	1, 1, 1, 1, 1

Таблица 3

1, 0, 1, 0, 0	0, 0, 1, 1, 0	1, 1, 0, 1, 1	1, 0, 1, 1, 1

Найдите еще одну комбинацию, открывающую проход в учреждение.

Решение. Для комбинации 1, 0, 1, 1, 0 — проход открыт, а для 0, 0, 1, 1, 0 — проход закрыт. То есть при изменении значения первой координаты с 1 на 0 значение суммы становится меньше c, поэтому очевидно, что $a_1 > 0$. Аналогично:

$$\left.\begin{array}{l}1, 1, 1, 1, 1 - \text{открыто},\\ 1, 0, 1, 1, 1 - \text{закрыто}\end{array}\right\} \Rightarrow a_2 > 0;$$

$$\left.\begin{array}{l}1, 1, 1, 1, 1 - \text{открыто},\\ 1, 1, 0, 1, 1 - \text{закрыто}\end{array}\right\} \Rightarrow a_3 > 0;$$

$$\left.\begin{array}{l}1, 0, 1, 1, 0 - \text{открыто},\\ 1, 0, 1, 0, 0 - \text{закрыто}\end{array}\right\} \Rightarrow a_4 > 0;$$

$$\left.\begin{array}{l}1, 0, 1, 1, 0 - \text{открыто},\\ 1, 0, 1, 1, 1 - \text{закрыто}\end{array}\right\} \Rightarrow a_5 < 0.$$

Поэтому заведомо пройдет комбинация, максимизирующая значение суммы S, а именно 1, 1, 1, 1, 0. Отметим, что задача составлена таким образом, что других решений нет.

Ответ: 1, 1, 1, 1, 0.

Задача 7. (*10–11-е классы.*) В нейрокомпьютере используется упрощенная модель нейрона — клетки головного мозга (рис. 6). По четырем каналам x_1, x_2, x_3, x_4 в клетку поступают нули и единицы, из которых внутри нее формируется сумма

$$S = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$$

(a_1, a_2, a_3, a_4 — целые). Затем S сравнивается с некоторым целым параметром c, и если $S \ge c$, то на выходе клетки формируется значение $y = 1$, иначе — $y = 0$. Найдите какие-либо целые параметры a_1, a_2, a_3, a_4, c такого нейрона, чтобы $y = 1$ на наборах (1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1) и $y = 0$ на остальных наборах.

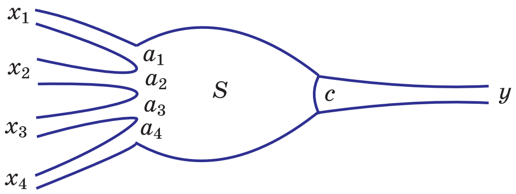


Рис. 6

Решение. Способ I. Составим исходя из условия задачи систему неравенств и запишем ее в виде двух подсистем:

$$\begin{cases} 0 < c, \\ a_4 < c, \\ a_3 \ge c, \\ a_3 + a_4 \ge c, \\ a_2 < c, \\ a_2 + a_4 < c, \\ a_2 + a_3 < c, \\ a_2 + a_3 + a_4 < c; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 < c, \\ a_1 + a_4 \ge c, \\ a_1 + a_3 \ge c, \\ a_1 + a_3 + a_4 \ge c, \\ a_1 + a_2 < c, \\ a_1 + a_2 + a_4 < c, \\ a_1 + a_2 + a_3 \ge c, \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \ge c. \end{cases}$$

Из первой подсистемы получаем:

$$\begin{cases} a_3 \ge c, \\ a_2 + a_3 + a_4 < c \end{cases} \Rightarrow a_2 + a_4 < 0.$$

Из второй подсистемы получаем:

$$\begin{cases} a_1 < c, \\ a_1 + a_4 \ge c \end{cases} \Rightarrow a_4 > 0;$$

$$\begin{cases} a_1 < c, \\ a_1 + a_2 + a_3 \ge c \end{cases} \Rightarrow a_2 + a_3 > 0.$$

Подбираем некоторые целые числа, удовлетворяющие полученным соотношениям, например: $a_4 = 1$, $a_2 = -2$, $a_3 = 3$. Подставляем их в первую подсистему, тогда $2 < c \le 3$. Полагаем $c = 3$ и подставляем во вторую подсистему, получаем $2 \le a_1 < 3$, тогда выбираем $a_1 = 2$.

Способ II. Необходимо определить меру влияния каждой переменной x_i, $i = \overline{1, 4}$, на значение линейной формы S, а именно — оценить, как влияет изменение значения x_i при переходе с 0 на 1 на изменение значения S при каждой фиксации остальных переменных. Нетрудно сообразить, что соответствующий коэффициент при x_i будет тем больше, чем будет больше таких знакоперемен. Подсчитаем сумму таких знакоперемен для каждой переменной, данные занесем в таблицу 4.

Таким образом, выберем в качестве параметров a_i, $i = \overline{1, 4}$, следующие: $a_1 = 3$, $a_2 = -3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 1$. Теперь необходимо найти c. Минимальное значение найденной линейной формы

$$S = 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4$$

на единичных наборах достигается на (1, 0, 0, 1) и равно 4. Максимальное значение линейной формы $S = 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4$ на нулевых наборах достигается на (0, 1, 1, 1) и равно 3. Поэтому в качестве c можно взять произвольное целое число: $3 < c \le 4$, например, $c = 4$.

Способ III. В задаче для 10-го класса, в которой рассматривалась клетка с тремя входами, было возможно решить задачу путем нахождения уравнения плоскости, отсекающей единичные вершины некоторого куба в трехмерном пространстве с длиной стороны, равной единице. Вершины этого куба либо белые, соответствующие тем наборам, на которых функция принимает значение 0, либо черные, соответствующие тем наборам, на которых функция принимает значение 1 (например, как это показано на рис. 7).

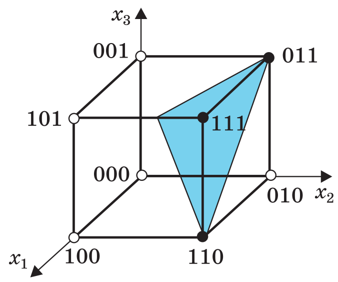


Рис. 7

Таблица 4

	0, 0, 0	0, 0, 1	0, 1, 0	0, 1, 1	1, 0, 0	1, 0, 1	1, 1, 0	1, 1, 1	Сумма знакоперемен
$x_1 : \begin{matrix}0\\1\end{matrix}$	0	1	0	0	0	0	1	1	3
$x_2 : \begin{matrix}0\\1\end{matrix}$	0	0	–1	–1	0	–1	0	0	–3
$x_3 : \begin{matrix}0\\1\end{matrix}$	1	1	0	0	1	0	1	1	5
$x_4 : \begin{matrix}0\\1\end{matrix}$	0	0	0	0	1	0	0	0	1

Ответ: $a_1 = 2$, $a_2 = -2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 1$, $c = 3$; $a_1 = 3$, $a_2 = -3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 1$, $c = 4$.

Комментарий. Многие важнейшие процессы в окружающем мире описываются с помощью пороговых соотношений, основанных на взвешенной оценке влияния различных параметров, в том числе противоборствующих. Пороговые явления наблюдаются как в микромире, например, при распаде ядерного ядра, так и в повседневной жизни: в технике, экономике, медицине, социологии и т.д. Особое место здесь занимает нейрофизиология — в связи с обнаружением учеными Уорреном Мак-Каллоком и Уолтером Питтсом в 1943 году пороговой природы работы нейронов живых организмов. Ими было показано, что суммарное возбуждение нервной клетки, возникающее в ее теле (соме), формируется из входных сигналов x_i, $i = \overline{1, n}$, поступающих в клетку по n входным нервным волокнам (дендритам). Это суммарное возбуждение представляет собой сумму $S = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, где $a_1, \ldots, a_n$ — параметры, хранящиеся в памяти клетки и которые могут корректироваться в течение ее жизни. Выходной сигнал y формируется на выходе клетки (в аксоне) в случае, если суммарное возбуждение S будет больше некоторого параметра c — порога, который, наряду с $a_1, \ldots, a_n$, также хранится в памяти клетки и, вообще говоря, может меняться. Вначале значения x_i, $i = \overline{1, n}$ и y считались двоичными, так как измерительные средства того времени могли улавливать только наличие сигнала или его отсутствие. Дальнейшие исследования в этой области привели к выводу, что сами сигналы могут принимать значения от 0 до $k - 1$; при $k = 16$ такая модель достаточно точно описывает функционирование нейрона.

Работа Мак-Каллока и Питтса легла в основу построения нейрокомпьютеров с пороговыми операциями. Дело в том, что, как показывает практика, такие нейрокомпьютеры на базе определенным образом сконструированных нейронных сетей позволяют решать некоторые типичные для живых организмов задачи (например, задачу распознавания образов) более эффективно по сравнению с другими алгоритмами. В частности, такие задачи могут возникнуть при построении системы, разрешающей или запрещающей допуск в учреждение на основании биологических параметров человека, таких, как отпечаток пальца или радужная оболочка глаза.

Задача 8. (*10–11-е классы.*) В осмысленном сообщении на русском языке, записанном без знаков препинания и пробелов, переставили буквы:

НКБАКМОРОЛААЕНТОИЕИБ.

Затем первую букву заменили на ту, которая следует за ней через некоторое число позиций в алфавите, выписанном по кругу (рис. 8), вторую букву — на ту, которая следует за ней через другое число позиций в алфавите, и так далее, при этом одинаковые буквы могут перейти в разные, а разные — в одинаковые.

Рис. 8

Получили:

ИКЛМНОИКЛМНОИКЛМНОСТ.

И наконец эти буквы выстроили в исходном порядке:

ИКООКМТИСОНИЛНЛКМЛМН

(то есть если, например, первую букву исходного сообщения поставили на третье место, то теперь третью букву поставили на первое). Восстановите исходное сообщение.

Решение. По двум последним текстам можно восстановить обратную перестановку и использовать ее для расшифрования первого сообщения. Из-за повторов букв в этих сообщениях сделать это однозначно удается не всегда. Таким образом, задача сводится к выбору букв из столбцов

Таблица 5

И	К	Л	М	Н	О	И	К	Л	М	Н	О	И	К	Л	М	Н	О	С	Т
И	К	О	О	К	М	Т	И	С	О	Н	И	Л	Н	Л	К	М	Л	М	Н
Варианты обратной перестановки																			
1	2	6	6	2	4	20	1	19	6	5	1	3	5	3	2	4	3	4	5
7	8	12	12	8	10	20	7	19	12	11	7	9	11	9	8	10	9	10	11
13	14	18	18	14	16	20	13	19	18	17	13	15	17	15	14	16	15	16	17
Варианты открытого текста																			
И	**К**	М	М	К	А	Б	**Н**	И	**М**	К	Н	Б	**К**	Б	К	**А**	**Б**	А	К
О	Р	А	**А**	Р	Л	**Б**	О	**И**	А	**А**	О	О	А	**О**	**Р**	Л	О	**Л**	А
Е	Н	**Е**	Е	**Н**	**О**	Б	Е	И	Е	И	**Е**	**Т**	И	Т	Н	О	Т	О	**И**

глубины не более трех, которые дают осмысленное сообщение (табл. 5). Жирным цветом выделены выбранные буквы, в серых клетках отмечены уже использованные буквы, не участвующие в выборе.

Ответ: **ОКЕАН ОБНИМАЕТ КОРАБЛИ.**

Комментарий. В задаче фактически описан вариант трехэтапного бесключевого криптографического протокола Шамира. Криптографический протокол — это заданная последовательность шагов между взаимодействующими сторонами для достижения определенных криптографических целей. В данном случае такой целью является передача некоторого сообщения x от абонента A к абоненту B по общедоступному каналу связи так, чтобы его смысл стал известен только адресату B. Но сложность достижения такой цели в данном случае заключается в том, что абоненты A и B не имеют общего секретного ключа, который можно было бы использовать для зашифрования сообщения x перед его передачей. Поэтому взаимодействующие стороны предпринимают описанную ниже цепочку действий.

1. Сначала абонент A выбирает некоторый ключ k_A и преобразование зашифрования E_{k_A} (в рассматриваемой задаче — это шифр перестановки), зашифровывает с помощью него сообщение x и передает зашифрованное сообщение $E_{k_A}(x)$ абоненту B.

2. Абонент B не может расшифровать полученное сообщение, так как не знает, какое преобразование и ключ выбрал A. Тогда абонент B шифрует полученное сообщение $E_{k_A}(x)$ с помощью своего выбранного преобразования E' и ключа k_B (в рассматриваемой задаче — это шифр гаммирования) и возвращает теперь уже дважды зашифрованное сообщение x абоненту A.

3. Абонент A получает сообщение $E'_{k_B}\left(E_{k_A}(x)\right)$. Если эти преобразования коммутируют, то есть выполняется равенство $E'_{k_B}\left(E_{k_A}(x)\right) = E_{k_A}\left(E'_{k_B}(x)\right)$, то абонент A применяет к полученному сообщению свое преобразование расшифрования и получает $E'_{k_B}(x)$, которое и отсылает B.

4. Абонент B расшифровывает это сообщение и получает переданное от абонента A сообщение x.

Заметим, что если отследить все шаги описанного протокола, то стороннему наблюдателю будут известны следующие передаваемые сообщения: $E_{k_A}(x)$, $E'_{k_B}\left(E_{k_A}(x)\right)$, $E'_{k_B}(x)$, при этом сообщение x не передавалось в открытом виде, было получено абонентом B, и цель протокола достигнута. Однако отметим, что стойкость такого протокола зависит от того, какие преобразования зашифрования были выбраны абонентами, причем сами эти преобразования могут быть стойкими, а протокол — нет, что отчасти и демонстрируется в задаче. Ради справедливости отметим, что выбранные абонентами преобразования в рассмотренной задаче не коммутируют.

Задача 9. (*11-й класс.*) Известно, что число 14197777 равно остатку от деления на 56887111 некоторого числа x, возведенного в куб. Числа x и 56887111 имеют общий делитель, отличный от 1, а число 56887111 является произведением двух простых чисел. Найдите хотя бы одно такое число x.

Решение. Обозначим

$$y = 14197777,\ N = p \cdot q = 56887111,$$

p, q — простые числа. По условию задачи наибольший общий делитель НОД(x; N) = $p > 1$, то есть $x = t \cdot p$, где t — натуральное число. Так как $y = r_N(x^3)$, где $r_N(x^3)$ — остаток от деления на N числа x^3, то НОД(y; N) = p. Вычисляя НОД(14197777; 56887111), находим, что $p = 10667$, тогда $y = 1331 \cdot p$, а $q = \dfrac{N}{p} = 5333$.

Делим обе части уравнения $1331 \cdot p = r_N((t \cdot p)^3)$ на p, получаем:

$$1331 = r_q(t^3 \cdot p^2) = r_{5333}(t^3 \cdot 10667^2) = r_{5333}(t^3).$$

Поэтому

$$t = \sqrt[3]{1331} = 11,\ x = t \cdot p = 11 \cdot 10667 = 117337.$$

Ответ: $x = 117337$.

Комментарий. Задача относится к направлению криптографии, называемому криптографией с открытым ключом, которое зародилось в 1976 году с появлением работы Уитфилда Диффи и Мартина Хеллмана. Если быть более точным, приведенная в условии задача связана с широко известной криптосистемой RSA (Рональд Линн Ривест, Ади Шамир, Леонард Адлеман, 1979 год). В такой системе ключ зашифрования e и ключ расшифрования d — различны, хотя и взаимосвязаны между собой. Ключ расшифрования при этом хранится в секрете. Для зашифрования сообщения $x \in \{0; ...; N - 1\}$ его необходимо возвести в степень e и взять остаток от деления на N, где N — произведение двух простых чисел p, q, а для расшифрования — получившееся число возвести в степень d и также взять остаток от деления на N. Стойкость криптосистемы RSA базируется на сложной задаче дискретной математики: разложении некоторого числа N на простые множители p, q (эти числа также необходимо хранить в секрете).

В приведенной задаче демонстрируется то обстоятельство, что если сообщение x, подлежащее шифрованию, имеет с N общий делитель (то есть делится на p или q), то это приводит к разложению N на простые множители (факторизации) и нахождению сообщения, которое было зашифровано. Поэтому при использовании такой системы шифрования необходимо следить за тем, чтобы сообщение x было взаимнопростым с числом N. Заметим, что практически для всех x это условие выполняется.

Задача 10. (*11-й класс.*) Крокодил Гена и Чебурашка могут связываться по двум каналам: радиоканалу и оптическому каналу. Используя эти каналы, они хотят договориться о кодовой комбинации сейфа, составляемой из 20 букв **К, З, С** или **Ч**. Для этого Гена по оптическому каналу передает случайную комбинацию из 20 вспышек, причем каждая вспышка может быть красного **(К)**, синего **(С)** или зеленого **(З)** цвета. Для каждой вспышки Чебурашка наугад выбирает светофильтр. Если его цвет совпадает с переданным цветом, то срабатывает датчик, а если не совпадает, то цвет вспышки остается для Чебурашки неизвестным. После замера всех вспышек Чебурашка по радиоканалу сообщает, какие светофильтры он выбрал. В результате Гена узнает номера вспышек, цвет которых Чебурашка определил. Гена устанавливает комбинацию на сейфе так: если цвет очередной вспышки Чебурашке определить удалось, то выбирается буква, соответствующая цвету вспышки **(К, З** либо **С)**, если нет — выбирается **Ч**.

Шапокляк прослушивает радиоканал и «встроилась» в оптический канал. На пути передаваемых вспышек она выставляла свои светофильтры:

ККЗЗЗСКСКСЗЗСКСКСКЗК,

и одновременно передавала вспышки соответствующих цветов Чебурашке. Срабатывания датчика у нее пришлись на **6**, **10**, **11**, **14**, **17** и **19** вспышки. Чебурашка, не зная о вмешательстве, сообщил по радиоканалу свои цвета:

СКЗККККЗЗККССККЗСЗСК.

С учетом собранной Шапокляк информации, определите число кодовых комбинаций, которые гарантированно не откроют сейф.

Решение. Сравним посимвольно последовательности цветов, приведенные в условии, и сформируем таблицу.

На каждой позиции возможны четыре варианта: совпали или нет цвета светофильтров Чебурашки и Шапокляк, сработал или нет у Шапокляк датчик. Рассмотрим эти варианты (табл. 6):

— цвета не совпали, датчик не сработал, тогда в этой позиции кодовой комбинации Гена выставит черный цвет или цвет, выбранный Чебурашкой (всего 2 варианта);

— цвета совпали, датчик сработал, тогда Гена выставит тот же цвет (1 вариант);

— цвета совпали, датчик не сработал или цвета не совпали, но датчик сработал, тогда Гена выставит черный цвет (1 вариант).

В связи с этим, ответом будет число $4^{20} - 2^k$, где k — число позиций, где цвета не совпали и датчик не сработал, в данном случае $k = 9$.

Ответ: $4^{20} - 2^9$.

Комментарий. Возникает вопрос: как безопасно передать ключи по общедоступному каналу связи, чтобы этот ключ стал известным только тому, кому он предназначался? Одним из подходов к решению такой задачи является использование специальных криптографических протоколов открытого распределения ключей — правил обмена некоторыми сообщениями между участниками по сети связи. В приведенной задаче иллюстрируется идея использования одного типа такого протокола: квантового протокола.

В основе квантового протокола лежит передача по каналу связи некоторых физических объектов — фотонов с различными параметрами (поляризациями). Достоинство такого протокола состоит в следующем. Пусть злоумышленник «встроился» в канал связи и пытается определить поляризацию передаваемых фотонов. Оказывается, правильно измерить поляризацию фотона можно лишь с некоторой долей вероятности, а после самой попытки такого измерения информация о поляризации фотона теряется. Таким образом, попытка перехватить передаваемое сообщение приводит к его искажению, и на приемной стороне этот факт вторжения будет обнаружен.

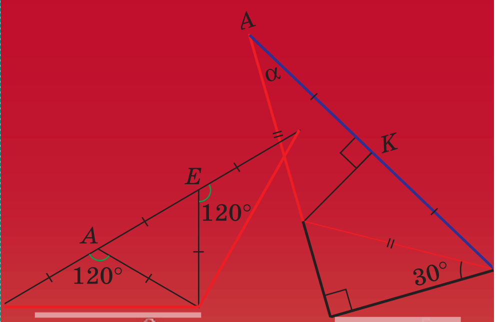
Данное свойство неопределенного изменения состояния фотона после измерения его параметров было обнаружено в 1927 году и известно как принцип неопределенности Гейзенберга. Спустя десятилетия это наблюдение привело к зарождению сравнительно нового направления – квантовой криптографии.

Таблица 6

С	К	З	К	К	К	К	З	З	К	К	С	С	К	К	З	С	З	С	К	Светофильтры Чебурашки
К	К	З	З	З	С	К	С	К	С	З	З	С	К	С	К	С	К	З	К	Светофильтры Шапокляк
					*				*	*			*			*		*		Сработка датчика
	Ч	Ч			Ч	Ч			Ч	Ч		Ч	К			С		Ч	Ч	Комбинация Гены

А. БЛИНКОВ,
Д. ПРОКОПЕНКО,
А. СГИБНЕВ,
П. ЧУЛКОВ,
Москва


Джеймс Эдвард Баттерсворт
Американская регата VIGILANT 1893 г



7 класс

ТУРНИР АРХИМЕДА

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РЕГАТА

17 апреля 2010 года состоялась математическая регата для учащихся 7-х классов, в которой приняли участие 68 команд. В этой регате приняло участие рекордное количество немосковских команд: 8 команд из Подмосковья (г. Долгопрудный, г. Нахабино, г. Раменское, г. Черноголовка, г. Электросталь) и еще 9 команд представляли г. Кострому, г. Санкт-Петербург, г. Переславль и г. Чебоксары.

Дипломами турнира Архимеда и призами (математической литературой) были награждены 15 команд, показавших лучшие результаты, и еще 7 команд получили поощрительные призы. Дипломов первой степени удостоились: одна из команд гимназии 1514 (Москва) и одна из команд кружка «Фрактал» (г. Санкт-Петербург). Полные итоги регаты опубликованы на сервере МЦНМО (http://www.mccme.ru/olympiads).

Каждый участник и руководитель команды по окончании регаты получил небольшую брошюру с условиями и решениями задач только что прошедшей регаты. Как обычно, часть заданий создавались специально для этой регаты, а остальные являются математическим фольклором или взяты из популярной математической литературы. Тексты решений опубликованы в том виде, в котором они были подготовлены для работы жюри.

Подробно о том, как проводятся математические регаты, и материалы всех прошедших регат можно найти в книге «Московские математические регаты» (составители: А.Д. Блинков, В.М. Гуровиц, Е.С. Горская, издательство МЦНМО, 2007).

Условия задач

Первый тур

(*10 минут; каждая задача — 6 баллов*)

1.1. Существуют ли такие натуральные числа a и b, что число b является натуральной степенью числа a, и число b в 16 раз больше числа a?

1.2. Одно из измерений прямоугольника увеличили на 99 см, а другое — уменьшили на 1 см, и получили новый прямоугольник. Можно ли утверждать, что площадь прямоугольника увеличилась? Ответ обоснуйте.

1.3. Незнайка лжет по понедельникам, вторникам и пятницам, а в остальные дни недели говорит правду. В какие дни недели Незнайка может сказать: «Я лгал позавчера и буду лгать послезавтра»? Ответ обоснуйте.

Второй тур

(*15 минут; каждая задача — 7 баллов*)

2.1. В доме двое механических часов: одни отстают на 15 минут в сутки, а другие на 10 минут в сутки спешат. Сегодня в полдень и те, и другие часы показывали правильное время. Когда в следующий раз они одновременно покажут правильное время?

2.2. Можно ли так изобразить два четырехугольника, чтобы их общая часть (*пересечение*) оказалась десятиугольником?

2.3. В поезде Москва – Тьмутаракань ввели сплошную нумерацию мест в вагонах. Во всех вагонах одинаковое количество мест. Известно, что места 385 и 416 находятся в одном вагоне, а места 544 и 577 находятся в разных вагонах, причем эти вагоны не соседние. Сколько мест в одном вагоне? Ответ обоснуйте.

Третий тур

(*15 минут; каждая задача — 7 баллов*)

3.1. При каких значениях k прямые $y = kx$ и $y = x + 1$ пересекаются в первой координатной четверти?

3.2. В прямоугольном треугольнике ABC точка K – середина гипотенузы AB, а точка M делит катет AC в отношении $2 : 1$ (считая от вершины A). Найдите острые углы треугольника ABC, если отрезок MK перпендикулярен AB.

3.3. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым по одной партии. Победитель выиграл у всех и набрал в 5 раз меньше очков, чем все остальные вместе. Сколько было участников? (Победа —1 очко, ничья — 0,5 очка, поражение — 0 очков.)

Четвертый тур

(*20 минут; каждая задача — 8 баллов*)

4.1. Существуют ли такие три различных числа a, b и c, что $a(b - c) = b(c - a) = c(a - b)$?

4.2. Треугольник ABC – равнобедренный, $\angle BAC = 120°$. На продолжении стороны AC за вершину A взята точка D так, что $AD = 2AB$. Докажите, что треугольник BDC также равнобедренный.

4.3. На экране компьютера было записано число 123456789. Вася так вставил пробелы между некоторыми цифрами этого числа, что оно разбилось на несколько кусков, причем числа, записанные на любых двух кусках, оказались взаимно простыми. Какое наибольшее количество кусков могло при этом получиться? (Напомним, что взаимно простыми называются натуральные числа, у которых есть ровно один общий делитель — единица.)

Решения задач

1.1. Да, существуют.

Возможные примеры: $a = 2$, $b = 32$, или $a = 4$, $b = 64$, или $a = 16$, $b = 256$.

Комментарий. Можно доказать, что других пар значений a и b, удовлетворяющих условию задачи, не существует. Действительно, из условия следует, что $b = a^n$ и $b = 16a$, значит, $a^n = 16a$. Разделив обе части этого равенства на a (a — натуральное число), получим: $a^{n-1} = 16$. Так как n также натуральное число, то a может принимать только три значения: 2, 4 или 16.

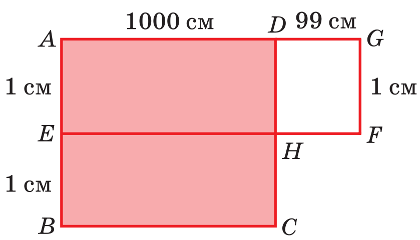


Рис. 1

1.2. Нет, это утверждать нельзя.

Рассмотрим, например, прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 2$ см, $AD = 1000$ см (рис. 1). После уменьшения стороны AB на 1 см площадь прямоугольника уменьшилась на 1000 см^2. Увеличив теперь сторону AD на 99 см, мы добавим к площади прямоугольника только 99 см^2. Следовательно, площадь исходного прямоугольника уменьшилась.

Комментарий. Отметим, что возможен и более общий подход, а именно, если измерения исходного прямоугольника a см и b см, то измерения нового прямоугольника $(a + 99)$ см и $(b - 1)$ см. Тогда разность площадей нового и исходного прямоугольников равна

$$(a + 99)(b - 1) - ab = 99b - a - 99.$$

Таким образом, площадь исходного прямоугольника увеличится, если выполняется неравенство $99b - a - 99 > 0$, то есть $a < 99(b - 1)$. Любые положительные значения a и b, не удовлетворяющие полученному неравенству, также могут служить в качестве контрпримера.

1.3. По понедельникам, вторникам, средам, пятницам и воскресеньям.

Незнайка может сказать фразу, приведенную в условии, в двух случаях:

1) в те дни, когда он говорит правду, если за два дня до этого **и** через два дня после этого он лжет;

2) в те дни, когда он лжет, если за два дня до этого **или** через два дня после этого он говорит правду.

Последовательной проверкой всех семи дней недели можно убедиться, что этим условиям удовлетворяют все дни недели, кроме четверга и субботы.

2.1. Через 144 суток.

Первые часы отстают на 15 минут в сутки. Следовательно, через четверо суток они будут отставать на час, а через 48 суток отстанут на 12 часов, то есть впервые покажут правильное время. Вторые часы будут спешить на час через 6 суток, а правильное время впервые покажут, когда будут спешить на 12 часов, то есть по прошествии 72 суток.

Так как НОК(48; 72) = 144, то и те, и другие часы впервые покажут правильное время через 144 суток.

2.2. Да, можно.

Например, см. рис. 2. Общая часть четырехугольников $ABCD$ и $KLMN$ является десятиугольником.

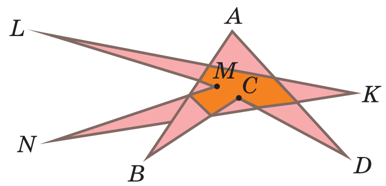


Рис. 2

Комментарий. Отметим, что искомые четырехугольники должны быть невыпуклыми. Также отметим, что больше чем десять вершин в пересечении двух четырехугольников получить нельзя. Действительно, каждая сторона любого из исходных четырехугольников может «порождать» либо одну сторону многоугольника – пересечения, либо две (если она пересекает две стороны другого четырехугольника, образующие плоский угол, который больше развернутого). Поскольку таких углов не больше двух, то количество сторон в пересечении не больше чем $2 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 10$.

2.3. 32 места.

Поскольку места 385 и 416 находятся в одном вагоне, то мест в вагоне не меньше чем 416 – 384 = 32. С другой стороны, между местами 544 и 577 находится 576 – 544 = 32 места. Это означает, что в одном вагоне не больше чем 32 места. Таким образом, в вагоне ровно 32 места.

3.1. При $k > 1$.

Пусть $M(x_0; y_0)$ — точка пересечения данных прямых, тогда справедливы равенства $y_0 = kx_0$ и $y_0 = x_0 + 1$. Точка M располагается в первой координатной четверти тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два неравенства:

$$x_0 > 0 \text{ и } y_0 > 0.$$

Выразим сначала x_0, приравняв правые части записанных равенств: $kx_0 = x_0 + 1$; $(k - 1)x_0 = 1$. При $k = 1$ это уравнение решений не имеет, поэтому $x_0 = \dfrac{1}{k-1}$, где $k \neq 1$. Следовательно, $x_0 > 0$, если $k > 1$.

Выразим теперь y_0, используя, например, что $y_0 = kx_0$. Получим, что $y_0 = \dfrac{k}{k-1}$. При $k > 1$ неравенство $y_0 > 0$ заведомо выполняется. Таким образом, точка M находится в первой координатной четверти при $k > 1$.

Комментарий. Отметим, что при $k = 1$ данные прямые параллельны, а при $k < 1$ — пересекаются, но не в первой четверти. Совпадать эти прямые не могут ни при каких значениях k.

3.2. 30° и 60°.

Проведем отрезок MB, тогда MK — медиана и высота треугольника AMB (рис. 3). Следовательно, треугольник AMB — равнобедренный: $MB = MA$. Тогда в прямоугольном треугольнике CBM катет CM в два раза меньше гипотенузы MB, следовательно, угол CBM равен 30°.

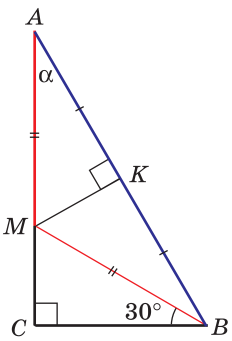


Рис. 3

Пусть $\angle CAB = \alpha$, тогда $\angle ABM = \angle CAB = \alpha$ (по свойству равнобедренного треугольника). В прямоугольном треугольнике ABC сумма острых углов равна 90°, поэтому $2\alpha + 30° = 90°$, то есть $\alpha = 30°$. Следовательно,

$$\angle CAB = 30°, \angle CBA = 60°.$$

Комментарий. В заключительной части решения можно было действовать иначе: в треугольнике CMB один из острых углов равен 30°, поэтому другой острый угол равен 60°. Этот угол CMB — внешний угол при вершине равнобедренного треугольника AMB, поэтому он равен 2α, значит, $\alpha = 30°$.

3.3. 12 участников.

Пусть в турнире участвовало n человек, тогда каждый из них сыграл $n - 1$ партию. Всего в турнире было сыграно $\frac{n(n-1)}{2}$ партий, при этом без участия победителя было сыграно

$$\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

партий.

Заметим, что в каждой партии между участниками распределяется 1 очко. Поэтому победитель набрал $n - 1$ очко, а все остальные вместе набрали $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ очков. Учитывая условие задачи, составляем уравнение:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}=5(n-1).$$

Так как $n > 1$, то решением уравнения является только $n = 12$.

4.1. Нет, не существуют.

Способ I. Пусть

$$a(b - c) = b(c - a) = c(a - b) = x,$$

тогда

$$3x = a(b - c) + b(c - a) + c(a - b) =$$
$$= ab - ac + bc - ba + ca - cb = 0,$$

то есть $x = 0$.

Если $a(b - c) = 0$ и $b \neq c$ (по условию), то $a = 0$. Аналогично, если $b(c - a) = 0$ и $c \neq a$, то $b = 0$. Таким образом, $a = b$, что противоречит условию.

Способ II. Преобразуем равенство $a(b - c) = b(c - a)$:

$$ab - ac = bc - ab,$$

то есть

$$ab=\frac{ac+bc}{2}.$$

Аналогично, из равенства $b(c - a) = c(a - b)$ получим, что

$$bc=\frac{ab+ac}{2},$$

а из равенства $a(b - c) = c(a - b)$ получим, что

$$ac=\frac{ab+bc}{2}.$$

Следовательно, каждое из трех чисел ab, bc и ac является средним арифметическим двух других. Если эти числа различны, то такое невозможно, поскольку среднее арифметическое любых двух различных чисел больше одного из них и меньше другого. Таким образом, $ab = bc = ac$. Но из равенства $ab = bc$ и условия $a \neq c$ следует, что $b = 0$. Аналогично, из равенства $bc = ac$ и условия $a \neq b$ следует, что $c = 0$. Значит, $b = c$, что противоречит условию задачи.

4.2. Пусть E — середина отрезка AD, тогда $AE=\frac{1}{2}AD=AB$ (рис. 4). Так как $\angle BAC = 120°$, то смежный с ним угол BAE равен 60°. Таким образом, треугольник BAE — равнобедренный с углом 60° при вершине, значит, треугольник BAE — равносторонний.

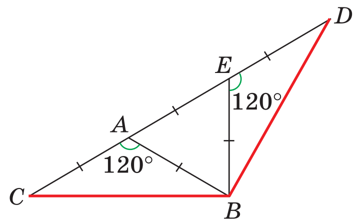


Рис. 4

Кроме того,

$$\angle BED = 180° - \angle AEB = 120°.$$

Значит, треугольники BAC и BED равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $BD = BC$, то есть треугольник BDC — равнобедренный.

Комментарий. Последнюю часть рассуждений можно провести иначе: так как медиана BE треугольника ABD равна половине стороны AD, к которой она проведена, то треугольник ABD — прямоугольный, $\angle ABD = 90°$.

Поскольку

$$\angle ACB = \angle ABC = 30°,$$

то $\angle DBC = 120°$. Тогда из треугольника CBD получим, что

$$\angle CDB = 180° - (\angle CBD + \angle BCD) =$$
$$= 30° = \angle BCD.$$

Таким образом, в этом треугольнике равны два угла, следовательно, треугольник BDC — равнобедренный.

4.3. Шесть.

Заметим, что из четырех четных цифр: 2, 4, 6 и 8, целый кусок может составить не более чем одна. Остальные три обязаны войти в куски, состоящие из двух или более цифр (причём войти не в качестве последней цифры). Это значит, что кусков не может быть больше шести (три куска по две цифры и три куска по одной цифре).

Приведем один из возможных вариантов разбиения данного числа на шесть кусков:

1 23 4 5 67 89.

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА-БЛИЗНЕЦЫ

(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73), (101, 103), (107, 109), (137, 139), (149, 151), (179, 181), (191, 193), (197, 199), (227, 229), (239, 241), (269, 271), (281, 283), (311, 313), (347, 349), (419, 421), (431, 433), (461, 463), (521, 523), (569, 571), (599, 601), (617, 619), (641, 643), (659, 661), (809, 811), (821, 823), (827, 829), (857, 859), (881, 883), ...

Простые числа-близнецы — пары простых чисел, отличающихся на 2.

Что мы знаем о простых числах-близнецах?

• Все пары простых чисел-близнецов, кроме пары (3, 5), имеют вид $6n \pm 1$.

• По модулю 30 все пары близнецов, кроме первых двух, имеют вид (11, 13), (17, 19) или (29, 31).

• Предполагается, что таких пар бесконечно много, но это не доказано.

• Но если простых чисел-близнецов и бесконечно много, то они расположены в натуральном ряду довольно редко.

• На данный момент наибольшими известными простыми близнецами являются числа $65516468355 \cdot 2^{333333} \pm 1$. В этом числе 100 355 цифр.

Вот еще несколько чисел из самых больших известных простых-близнецов:

$2003663613 \cdot 2^{195000} \pm 1$ — 58 711 цифр;

$194772106074315 \cdot 2^{171960} \pm 1$ — 51 780 цифр;

$100314512544015 \cdot 2^{171960} \pm 1$ — 51 780 цифр;

$16869987339975 \cdot 2^{171960} \pm 1$ — 51 779 цифр.

По материалам Википедии