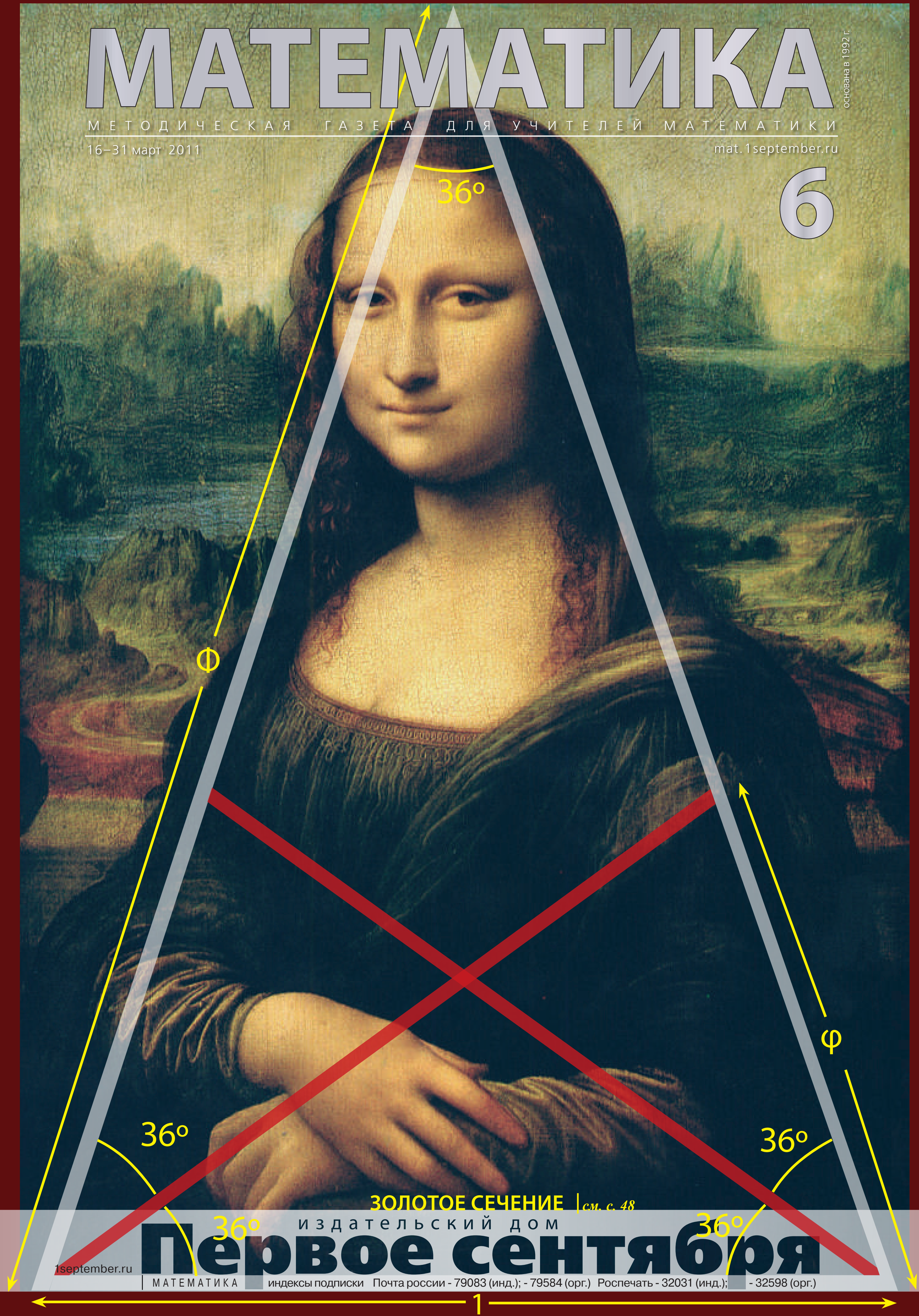
МАТЕМАТИКА

основана в 1992 г.
МЕТОДИЧЕСКАЯ ГАЗЕТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
16–31 март 2011
mat.1september.ru
6



ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ | *см. с. 48*

издательский дом
Первое сентября
1september.ru
МАТЕМАТИКА индексы подписки Почта россии - 79083 (инд.); - 79584 (орг.) Роспечать - 32031 (инд.); - 32598 (орг.)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Главный редактор: Артем Соловейчик (генеральный директор)
Коммерческая деятельность: Константин Шмарковский (финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов: Сергей Островский (исполнительный директор)
Реклама и продвижение: Марк Сартан
Мультимедиа, конференции и техническое обеспечение: Павел Кузнецов
Производство: Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение: Андрей Ушаков
Дизайн: Иван Лукьянов, Андрей Балдин
Педагогический университет: Валерия Арсланьян (ректор)

ГАЗЕТЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Первое сентября – Е. Бирюкова,
Английский язык – А. Громушкина,
Библиотека в школе – О. Громова,
Биология – Н. Иванова,
География – О. Коротова,
Дошкольное образование – М. Аромштам,
Здоровье детей – Н. Сёмина,
Информатика – С. Островский,
Искусство – М. Сартан,
История – А. Савельев,
Классное руководство и воспитание школьников – О. Леонтьева,
Литература – С. Волков,
Математика – Л. Рослова,
Начальная школа – М. Соловейчик,
Немецкий язык – М. Бузоева,
Русский язык – Л. Гончар,
Спорт в школе – О. Леонтьева,
Управление школой – Я. Сартан,
Физика – Н. Козлова,
Французский язык – Г. Чесновицкая,
Химия – О. Блохина,
Школьный психолог – И. Вачков

УЧРЕДИТЕЛЬ: ООО «ЧИСТЫЕ ПРУДЫ»
Зарегистрировано ПИ № 77-7241 от 12.04.01 в Министерстве РФ по делам печати
Подписано в печать: по графику 16.02.11, фактически 16.02.11 Заказ №
Отпечатано в ОАО «Чеховский полиграфический комбинат»
ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: (499) 249-3138
Отдел рекламы: (499) 249-9870
Сайт: 1september.ru

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: (499) 249-4758
E-mail: podpiska@1september.ru

В НОМЕРЕ:

ТЕМА НОМЕРА: ДЕНЬ КОСМОНАВТИКИ

К материалам, обозначенным этим символом, есть приложение на CD-диске, вложенном в № 8.

МАТЕМАТИКА
Методическая газета для учителей математики
Основана в 1992 г.
Выходит два раза в месяц
Газета распространяется по подписке
Цена свободная Тираж 10 000 экз.
Тел. редакции: (499) 249-3460
E-mail: mat@1september.ru
Сайт: mat.1september.ru

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, И. Бокова, О. Макарова
Дизайн макета и обложки: И. Лукьянов
Корректор: Л. Громова
Верстка: Л. Кукушкина, Д. Кардановская

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Роспечать: инд.–**32030**; орг.–**32594**
Почта России: инд.–**79073**; орг.–**79583**

Н. Андреев выступает перед учителями, День учителя математики, 2007 г.

УСПЕХИ В ПОПУЛЯРИЗАЦИИ МАТЕМАТИКИ

Л. РОСЛОВА

Сколько славных дат в истории нашей страны! Одна из них — первый полет человека в космос. С того дня прошло ровно 50 лет. Детство многих из учителей проходило в эпоху начала космической эры, когда каждый запуск космического корабля был событием, за которым следил весь мир. Для современных детей – это уже «дела давно минувших дней», а запуски ракет – будни дня сегодняшнего. Забываются факты, забываются люди. А так хочется, чтобы помнили.

50-летие — информационный повод напомнить о великих вехах. И мы делаем такую попытку. Хотя, честно говоря, содержательного материала для этого нет — математика космических полетов находится вне пределов галактики под названием «школьная математика». И жаль, что не нашлось пока математика, который взял бы на себя труд и смелость рассказать школьникам о том, как математика работала и работает сегодня на освоение просторов Вселенной. Последний, кто делал такие попытки, — Я.И. Перельман, но жил он еще в докосмическую эру.

Однако шанс, как мне кажется, появился. Математики снова обратились к популяризации, причем не безуспешно. В начале февраля этого года сотрудник Математического института им. Стеклова РАН Николай Андреев стал лауреатом премии Президента РФ в области науки и инноваций. «Успехи в создании инновационных образовательных технологий, популяризации и распространении научных знаний» — это хорошо известные учителям математики математические этюды. Мы не раз рассказывали о материалах сайта в газете, неоднократно выступал Николай Николаевич и на наших марафонах.

Он мечтает о создании в России музея математики. Думаю, что в нем найдется место и для экспонатов, имеющих отношение к космической тематике. А со временем учителя смогут к очередным юбилейным датам, зайдя на сайт «Математических этюдов», «скачивать» для урока подходящие сюжеты. А еще он хочет организовать автопробег Москва – Владивосток. Так что, если однажды дверь вашего класса откроется, и вы увидите на пороге автора математических мультиков — не удивляйтесь, попросите рассказать о математике.

Мы поздравляем Н.Н. Андреева с высокой наградой, желаем успехов в решении поставленных задач и ждем новых мультфильмов, игр, книг.

Е. ЯГОДКИНА,
Москва

КО ДНЮ КОСМОНАВТИКИ

Последние годы астрономия в школе практически не изучается, и большинство современных школьников не знают былых заслуг космонавтики. А если и знают, то только то, что выстроилась очередь на межпланетные экскурсии и что Луну распродали на дачные участки. Но День космонавтики никто не отменял, ведь именно 12 апреля 1961 года Юрий Алексеевич Гагарин на космическом корабле «Восток» совершил полет, о котором столетиями мечтало человечество.

С чего все началось?

Может быть, все началось с Николая Коперника (1473–1543), который «остановил Солнце и сдвинул Землю», открыв тем самым людям глаза на их истинное место во Вселенной.

А может быть, все началось с наблюдений Галилео Галилея (1564–1642), который с помощью самодельного телескопа подтвердил доводы Коперника о том, что Земля и планеты вращаются вокруг Солнца, и сделал много замечательных открытий о планетах Солнечной системы.

Или с его современника Джордано Бруно (1548–1600), утверждавшего, что Вселенная бесконечна и в ней бесконечное множество миров. За свои труды он был осуждён католической церковью как еретик и приговорен властями Рима к смертной казни через сожжение.

Следующий в ряду великих людей — сэр Исаак Ньютон (1643–1727), открывший закон всемирного тяготения и подтвердивший законы Кеплера. Полеты искусственных спутников подчиняются законам физики, впервые изложенным Ньютоном в его труде «Математические начала натуральной философии», опубликованном в 1687 г.

О полетах с Земли в другие миры мечтали многие мыслители и писатели. Но только русский изобретатель К.Э. Циолковский (1857–1935) разработал теорию реального способа преодоления земного притяжения — теорию реактивного движения, заложив тем самым основы космонавтики. Мечты и проекты Циолковского осуществились в нашей стране, на родине ученого.

Мстислав Всеволодович Келдыш (1911–1978) был человеком, хорошо известным всему миру и в тоже время абсолютно «закрытым». Многие годы в репортажах с Байконура и публикациях о наших успехах в освоении космоса упоминались две загадочные личности: Главный конструктор и Теоретик космонавтики. Но если Сергея Павловича Королёва до самой его смерти в 1966 г. мало кто знал как конструктора космической техники, то М.В. Келдыш был более популярен: талантливый математик, академик, а с 1961 г. – президент Академии наук СССР. Правда, мало кто догадывался, что этот человек и есть тот самый строго засекреченный «теоретик».

Благодаря его расчетам человечество имеет сегодня возможность преодолевать звуковой барьер, с его именем связано решение

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 8.

На фото (в центре): М.В. Келдыш, С.П. Королёв, 1959 г.

многих задач механики и прикладной физики, создание ракетно-ядерного щита нашего государства. «Особенность таланта академика М. Келдыша заключалась в умении предвидеть дальнейший ход развития науки», — говорил о нем академик Ю.Б. Харитон.

Сергей Павлович Королёв (1907–1966) — основоположник практической космонавтики. С его именем связана эпоха первых достижений в этой области. Талант выдающегося ученого и организатора позволил ему на протяжении многих лет направлять работу многих НИИ и КБ на решение больших комплексных задач, а научные и технические идеи Королёва нашли широкое применение в ракетной и космической технике. Под его руководством созданы: баллистические и геофизические ракеты; первый космический комплекс; первые в мире межконтинентальная баллистическая ракета и ракета-носитель «Восток»; запущен искусственный спутник Земли; осуществлены полеты космических кораблей «Восток» и «Восход», на которых впервые в истории человечества были осуществлены орбитальный космический полет человека и выход человека в космическое пространство. Для исследования космического пространства были созданы космические аппараты серий «Луна», «Венера», «Марс», «Зонд»; искусственные спутники Земли серий «Электрон», «Молния-1» и «Космос»; разработан космический корабль «Союз».

К.Э. Циолковский и С.П. Королев стали отцами новой науки – космонавтики, а термин «**космонавтика**» впервые появился в 1933 году в названии научного труда А.А. Штернфельда «Введение в космонавтику», посвящённого вопросам межпланетных путешествий.

Первые шаги космонавтики

04.10.1957 — запущен с космодрома Байконур осуществлен запуск ракеты-носителя «Спутник», которая вывела на околоземную орбиту первый в мире искусственный спутник Земли.

03.11.1957 — первый в мире искусственный спутник Земли с живым существом, на его борту находилась собака Лайка.

15.05.1958 — третий советский спутник был предназначен для проведения научных исследований.

02.01.1959 — с космодрома Байконур стартовала ракета-носитель «Восток», которая вывела на траекторию полета к Луне советскую автоматическую межпланетную станцию «Луна-1». «Луна-1» прошла на расстоянии 6000 километров от поверхности Луны и вышла на гелиоцентрическую орбиту, она стала первым в мире искусственным спутником Солнца.

12.09.1959 — к Луне стартовала «Луна-2», на следующий день она достигла поверхности Луны, доставив на Луну вымпел с изображением герба СССР.

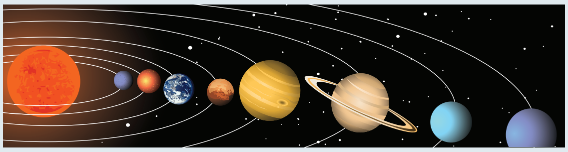
07.10.1959 — «Луна-3» передала на Землю первые снимки обратной (невидимой) стороны Луны.

15.05.1960 — ракета-носитель «Восток» вывела на орбиту первый корабль-спутник.

09.08.1960 — запущен второй корабль с собаками (Белка и Стрелка) на борту, которые благополучно возвратились на Землю.

12.04.1961 — впервые в мире космический корабль с человеком на борту вырвался в просторы Вселенной. Ракета-носитель «Восток» вывела на околоземную орбиту космический корабль «Восток» с космонавтом Юрием Гагариным.

06.08.1961 — полет космического корабля «Восток-2» с космонавтом Г. Титовым. Он длился



1 сутки 1 час 18 минут. Во время этого полета была выполнена первая киносъемка Земли из космоса.

12.02.1961 — запуск ракеты-носителя «Молния», которая впервые вывела на траекторию полета к Венере советскую автоматическую межпланетную станцию «Венера-1». В ходе этого полета осуществлена двусторонняя связь со станцией, удаленной от Земли на 1 400 000 км.

01.11.1962 — первый успешный запуск в сторону Марса. Автоматическая межпланетная станция «Марс-1» провела исследования межпланетного пространства, проверила дальнюю космическую связь (10 000 000 км), а 19.07.1963 г. она совершила облет Марса.

12.10.1964 — первый полет многоместного космического корабля. Космонавты В. Комаров, К. Феоктистов, Б. Егоров совершали полет без скафандров.

18.03.1965 — космонавт А. Леонов («Восход-2») впервые вышел в открытый космос.

16.07.1965 — осуществлен запуск ракеты-носителя «УР-500» («Протон»), которая вывела на околоземную орбиту советский спутник для изучения космических лучей и взаимодействия с веществом сверхвысоких энергий «Протон-1».

02.11.1965 — «УР-500» вывела на орбиту советский спутник «Протон-2».

12.11.1965 — станция «Венера-2» пролетела на расстоянии 24 000 км от Венеры.

03.02.1966 — советская автоматическая станция «Луна-9» совершила мягкую посадку на поверхности Луны, после чего передала ее панорамное изображение.

01.03.1966 — станция «Венера-3» достигла поверхности Венеры. Это был первый перелет космического аппарата с Земли на другую планету.

03.04.1966 — станция «Луна-10» стала первым в мире искусственным спутником Луны.

18.10.1967 — автоматическая межпланетная станция «Венера-4» достигла Венеры, спускаемый аппарат совершил плавный спуск в атмосфере Венеры и достиг ее поверхности. Сигнал со станции во время спуска принимался до высоты 24,96 км от уровня планеты.

02.03.1968 — ракета-носитель «Протон-К» вывела на траекторию полета к Луне советский беспилотный космический корабль «Зонд-4», который совершил облет Луны и перешел на траекторию возвращения к Земле.

14.09.1968 — «Протон-К» вывел на траекторию полета к Луне беспилотный космический корабль «Зонд-5». На его борту находились живые существа: черепахи, плодовые мушки, черви, растения, бактерии. С расстояния 90 000 км была произведена съемка Земли с высоким разрешением. 21.09. спускаемый аппарат «Зонд-5» приводнился в Индийском океане. Впервые в мире станция, облетев Луну, успешно возвратилась на Землю со второй космической скоростью.

16 и 17.05.1969 — «Венера-5» и «Венера-6» совершили плавный спуск в атмосфере Венеры, передавая научную информацию до высоты 10 километров от поверхности.

15.12.1970 — спускаемый аппарат АМС «Венера-7» достиг поверхности Венеры, после чего сигналы с аппарата принимались еще в течение 23 минут.

20.09.1970 — автоматическая межпланетная станция «Луна-16» совершила мягкую посадку на Луну. 01.09. возвращаемый аппарат АМС «Луна-16» стартовал с поверхности Луны. Перед стартом был произведен забор образцов лунного грунта, которые 24.09. были доставлены на Землю.

10.11.1970 — ракета-носитель «Протон-К» вывела на траекторию полета к Луне автоматическую межпланетную станцию «Луна-17» с самоходным аппаратом «Луноход-1» на борту. 17.11.70 «Луна-17» совершила посадку на Луну. Через два с половиной часа «Луноход-1» по трапу сошел с посадочной платформы, приступив к выполнению программы.

02.12.1971 —пускаемый аппарат автоматической межпланетной станции «Марс-3» совершил мягкую посадку на поверхность Марса. Через 1,5 минуты после посадки станция была приведена в рабочее состояние и начала передавать на Землю видеосигнал.

22.07.1972 — АМС «Венера-8» осуществила посадку на освещенную сторону планеты Венера.

Только факты

- Первый американский астронавт.
  Алан Шепард, 5 мая 1961 г., «Меркурий-3».
- Первая женщина-космонавт.
  Валентина Терешкова, 16 июня 1963 г., «Восток-6».
- Первый космонавт — гражданин азиатского государства.
  Фам Туан (Вьетнам), 23 июля 1980 г., «Союз-37».
- Первый космонавт — гражданин африканского государства.
  Марк Шаттлуорт (ЮАР), 25 апреля 2002 г., «Союз ТМ-34».
- Первый китайский космонавт.
  (Ян Ливэй, 15 октября 2003 г., «Шэньчжоу-5».
- Самый молодой космонавт.
  Герман Титов, 25 лет, «Восток-2».
- Самый пожилой космонавт.
  Джон Гленн, 77 лет, «Дискавери STS-95».
- Дольше других работал в космосе в рамках одного полёта.
  Валерий Поляков — 438 суток.
- Наибольшее расстояние от Земли, которое преодолел космический корабль
  401 056 км — экипаж «Аполлон-13».
- Первый космический турист.
  Деннис Тито, 2001 г., «Союз ТМ-32».
- Первый частный космонавт.
  Майк Мелвилл, 2004 г., «SpaceShipOne».
- Первый человек, ступивший на поверхность Луны.
  Нил Олден Армстронг, 1979 г., «Аполлон-11».
- Самой большой высоты достиг экипаж «Аполлона-13».
  400 187 км — 15 апреля 1970 г.

Задачи на космические сюжеты

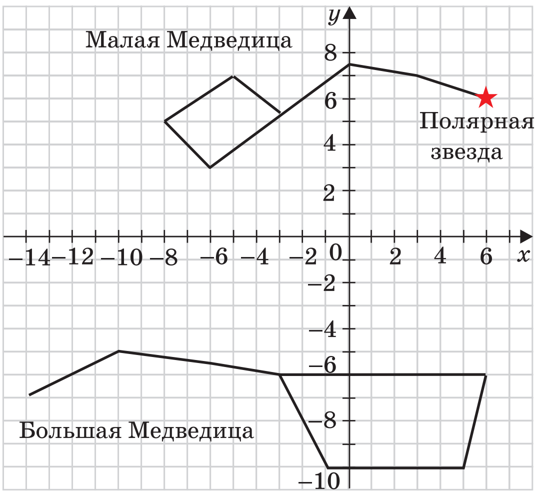
Учащимся ***5-го класса*** можно прочитать отрывок из книги А.Я. Котова «Вечера занимательной математики». В книге описываются занятия математического кружка. Книга выпущена в 1967 г., поэтому интересно сравнить данные, приведенные в ней, с тем, что мы знаем о космонавтике сегодня.

Для домашнего чтения можно предложить детям прочитать главы из книг Владимира Левшина. В книге «Путешествие по Карликании и аль-Джебре» в главе «Космос в комнате» автор рассказывает, как француз Ж. Леверье вычислил восьмую планету, которую ученые назвали Нептуном. А в книге «Нулик – мореход», в главе 30 «От конического до космического — один шаг!», герои совершают полет в космос и узнают много интересного о невесомости, свободном падении и об орбитах небесных тел.

Космические сюжеты, например — различные созвездия, вполне могут быть использованы при построениях на координатной плоскости в ***6-м классе***.

Вот как выглядят на координатной плоскости Большая и Малая Медведицы.

По данному чертежу требуется выписать координаты точек или начертить созвездия по заданным координатам.



Малая Медведица: (6; 6), (3; 7), (0; 7,5), (–3; 5,5), (–5; 7), (–6; 3), (–8; 5).

Большая Медведица: (–15; –7), (–10; –5), (–6; –5,5), (–3; –6), (–1; –10), (5; –10), (6; –6).

Учащимся ***7–9-х классов*** можно предложить задачи, часть из них приведена ниже, из книги Ю.Ф. Фоминых «Прикладные задачи по алгебре для 7–9 классов (М.: Просвещение, 1999).

Тема: «Степень с натуральным показателем»

1 (80). Радиус земного шара равен 6370 км. Вычислите объем Земли, площадь поверхности, площадь суши (примерно 29% площади поверхности). Найдите отношение массы каждой из планет Солнечной системы к массе Земли.

2 (81). Найдите расстояния от Солнца до планет Солнечной системы в астрономических единицах.

Справка. Астрономическая единица (а.е.) — среднее расстояние от Солнца до Земли (табл. 1).

3 (82). Немецкий астроном Иоганн Кеплер прославился тем, что открыл законы движения планет. Один из них связывает расстояния от Солнца до планет с их периодами обращения вокруг Солнца: $(T_1)^2 : (T_2)^2 = (R_1)^2 : (R_2)^2$, где T_1 — период обращения вокруг Солнца, R_1 — расстояние от Солнца до планеты. Убедитесь в правильности закона Кеплера, сравнивая T_2 и R_2 всех планет с T_1 и R_1 для Земли.

4 (83). В астрономии одной из единиц длины является световой год, то есть расстояние, которое проходит за год луч света. Скорость света c = 300 000 км/с. Вычислите:

а) за какое время луч света проходит от Земли до Луны, от Солнца до Земли;

б) величину светового года в километрах;

в) расстояние от Земли до звезды Сириус в световых годах.

Справка. Среднее расстояние от Земли до Луны 384 000 км, от Земли до звезды Сириус $8{,}2 \cdot 10^{13}$ км.

Тема: «Квадратный корень»

1 (164). Как далеко может видеть человек среднего роста (170 см)? Как далеко можно увидеть с возвышения в 100 м; с самолета, летящего на высоте 10 км; со спутника, который летает на высоте 400 км?

Справка. Расстояние от наблюдателя до наиболее далекой видимой точки называют дальностью горизонта. Его легко вычислить, используя теорему Пифагора (рис. 24):

$$a^2 = (R + H)^2 - R^2 = 2RH + H^2 = H(2R + H).$$

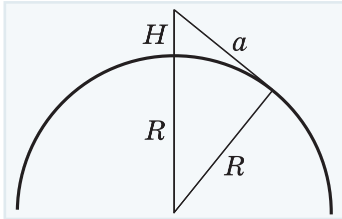


Рис. 24

Во втором сомножителе величиной H можно пренебречь по сравнению с диаметром Земли $2R$ = 12 740 000 м. Тогда получим приближенную формулу $a = \sqrt{2RH} \approx 3570\sqrt{H}$ м. Луч света в атмосфере искривляется, и практически мы видим чуть дальше: $a = 3860\sqrt{H}$.

Тема: «Степень с целым показателем»

2 (242). Пользуясь таблицей масс планет Солнечной системы (см. задачу № 80), выразите массы планет в единицах массы Солнца ($2 \cdot 10^{30}$ кг), то есть найдите, какую часть массы Солнца составляет масса планеты.

3 (243). Пользуясь таблицей среднего расстояния от Солнца до планет Солнечной системы (см. задачу № 81), выразите данные в ней расстояния в световых годах.

Справка. 1 св. год = $9{,}46 \cdot 10^{12}$ км — это расстояние, которое луч света проходит за год.

Тема: «Системы уравнений»

1 (290). Уравнение орбиты Земли $y^2 = 0{,}9997 \times \times (1 - (x - 0{,}017)^2)$, а уравнение траектории кометы Галлея $y^2 = 0{,}06466(322{,}2 - (x - 17{,}36)^2)$. Может ли Земля столкнуться с кометой Галлея?

Замечание. Размеры даны в астрономических единицах. 1 а.е. = 149 597 892 км — это среднее расстояние от Земли до Солнца.

Таблица 1

Планета	**Масса,** кг	**Среднее расстояние от Солнца,** млн км	**Период обращения вокруг Солнца,** земн. год
Меркурий	$3{,}4 \cdot 10^{23}$	58	0,24
Венера	$4{,}9 \cdot 10^{24}$	108	0,62
Земля	$6 \cdot 10^{24}$	150	1
Марс	$6{,}4 \cdot 10^{23}$	228	1,9
Юпитер	$1{,}9 \cdot 10^{27}$	778	12
Сатурн	$5{,}7 \cdot 10^{26}$	1430	29,5
Уран	$8{,}8 \cdot 10^{25}$	2870	84
Нептун	$1{,}0 \cdot 10^{26}$	4500	165
Плутон	$1{,}1 \cdot 10^{21}$	5900	248

Решение. Чтобы найти точки пересечения траекторий этих двух небесных тел, надо решить систему уравнений

$$y^2 = 0{,}9997(1 - (x - 0{,}017)^2),$$
$$y^2 = 0{,}06466(322{,}2 - (x - 17{,}36)^2).$$

Левые части уравнений равны. Приравнивая правые части уравнений, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим:

$$0{,}9353x^2 - 2{,}211x + 0{,}3493 = 0,$$
$$x^2 - 2{,}364x + 0{,}3734 = 0.$$

Чтобы ответить на вопросы задачи, достаточно найти дискриминант: $\frac{D}{4} = 1{,}182^2 - 0{,}3734 > 0$, уравнение имеет вещественные корни и есть вероятность столкновения Земли с кометой.

2 (291). Приводим уравнения орбит следующих планет Солнечной системы — Земли, Марса, Нептуна, Плутона:

Планета	Уравнение орбиты
Земля	$y^2 = 0{,}9997(1 - (x - 0{,}017)^2)$
Марс	$y^2 = 0{,}9914(2{,}3226 - (x - 0{,}1417)^2)$
Нептун	$y^2 = 0{,}9999(903{,}6 - (x - 0{,}2705)^2)$
Плутон	$y^2 = 0{,}9375(1555{,}5 - (x - 9{,}86)^2)$

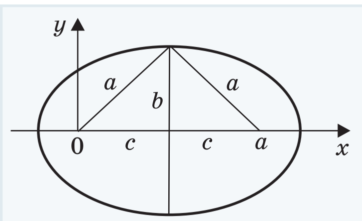
Расстояния даны в астрономических единицах. Проверьте, имеют ли общие точки орбиты Земли и Марса, а также Нептуна и Плутона.

3 (292). Даны уравнения орбит двух планет:

$$A^2y^2 = B^2(A^2 - (x - C)^2; a^2b^2 = b^2(a^2 - (x - c)^2).$$

Найдите условие их пересечения, если планеты движутся в одной плоскости.

Замечание. Геометрический смысл параметров приведенных уравнений: a, b — большая и малая полуоси эллипса, c — расстояние от центра до фокусов (в одном из которых находится Солнце).



Указание. Приравнивая y^2 и приводя подобные, получим уравнение

$$x^2(B^2 : A^2 - b^2 : a^2) - 2x\,(CB^2 : A^2 - cb^2 : a^2) +$$
$$+ B^2C^2 : A^2 - B^2 - b^2c^2 : a^2 + b^2 = 0.$$

Необходимо, чтобы его дискриминант был неотрицательным.

4 (293). Сколько точек пересечения имеет орбита Земли (см. задачу 290) с небесным телом, которое движется по параболической траектории $4y^2 = 0{,}9997(x + 2)$?

Задачи из книги Е.И. Игнатьева «В царстве смекалки» (М., «Наука», 1979) можно предложить учащимся ***9-х классов*** при изучении темы «Запись числа в стандартном виде».

1. а) Масса Земли — $5{,}976 \cdot 10^{27}$ г, масса Солнца — $1{,}99 \cdot 10^{33}$ г. Запишите эти числа обычным способом (в килограммах, тоннах).

б) Наибольшее расстояние от Земли:

- до Плутона (самой далекой известной планеты нашей системы) — 7 527 000 000 км,
- до звезды Сириус — 81 900 000 000 000 км,
- до звезды Вега — 249 500 000 000 000 км,
- до самых удаленных туманностей, едва видимых в современные телескопы, —

2 000 000 000 000 000 000 000 км.

Запишите эти числа в стандартной форме.

2. а) Земля при своем движении вокруг Солнца проходит путь в 936 250 000 км в год. Какое расстояние проходит Земля за 1 сутки? (Считайте год в среднем равным 365,25 суток.)

б) Скорость света в вакууме — $3{,}00 \cdot 10^5$ км/с. Какое расстояние проходит свет в течение года?

в) Расстояние от Земли до ближайшей звезды Центавра свет проходит за 4 года. Сколько километров до этой звезды?

г) В астрономии для выражения расстояний в солнечной системе применяется астрономическая единица, равная $1{,}496 \cdot 10^{13}$ см (приближенное значение расстояния от Земли до Солнца). Сколько это километров?

д) В астрономии для выражения расстояний во вселенной используются единицы:

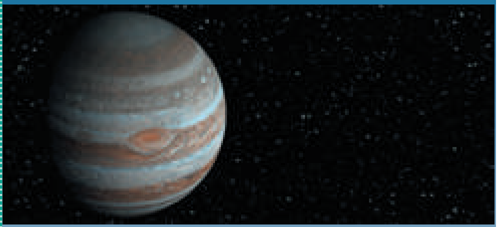
парсек = 3,26 световых лет,

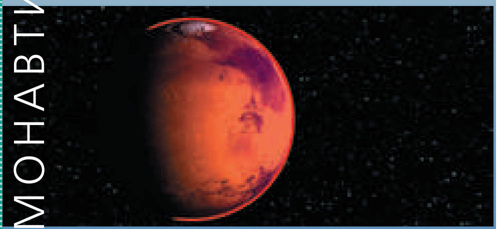
мегапарсек = 1 000 000 парсеков.

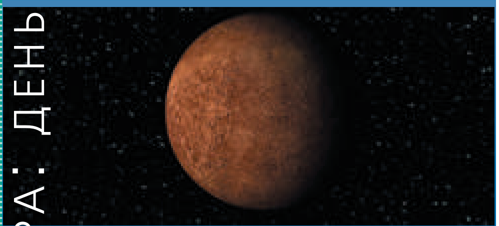
Выразите эти единицы в километрах.

е) Тончайшая паутиновая нить, если бы ее протянуть по земному экватору, длина которого 40 060 км, имела бы массу 660 г. Какую массу имела бы такая нить, протянутая на расстояние в один мегапарсек?

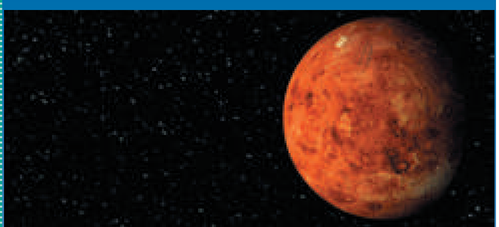
В книге Я.И. Перельмана «Занимательная алгебра» я нашла еще две статьи для разговора со старшеклассниками: «Алгебра лунного перелета» и «Звезды, шум и логарифмы». А еще есть интересные его книги «Занимательная астрономия» и «Занимательный космос. Межпланетные путешествия». О последней из них К.Э. Циолковский отозвался так: «Это сочинение явилось первой в мире серьезной, хотя и вполне общепонятной книгой, рассматривающей проблему межпланетных перелетов и распространяющей правильные сведения о космической ракете...»


Юпитер


Марс


Меркурий


Сатурн


Венера

5–6 классы

ЗАДАЧИ С КОСМИЧЕСКИМ СЮЖЕТОМ

Г. БЕКНЕВА,
Москва

Устный счет

1. Выполните действия:

а) $23 \cdot 24 + 23 \cdot 6 - 689$;
б) $2\frac{3}{4} \cdot 8 - 40 \cdot \frac{1}{2}$;
в) $1,5 \cdot 4 + 8 \cdot 0,5 - 100 \cdot 0,1$;
г) $10 : 0,1 - 3,2 \cdot 30$;
д) $1,25 \cdot 40 - 0,7 \cdot 70$;
е) $2\frac{1}{4} \cdot 4$;
ж) $15\frac{2}{3} \cdot 3 - 41$;
з) $\frac{25 \cdot 29 + 25}{5 \cdot 151 - 5}$.

Полученные числа образуют дату полета Ю.А. Гагарина в космос.

[12.04.1961]

2. Решите уравнение:

а) $0,2x + 0,5 = 2,9$;
б) $0,03x = 0,18$;
в) $x : 0,5 = 10$;
г) $7,2 : x = 4 \cdot 0,1$.

Корни уравнений — номера букв русского алфавита, найдя их, вы получите позывной Ю.А. Гагарина.

[«Кедр».]

А. КОРОТКОВА,
г. Владимир

Шифровка из космоса

2011 год — юбилейный. А вот какому юбилею он посвящен, поможет узнать слово, которое у вас получится, если вы верно найдете значения выражений и расположите полученные отрицательные числа в порядке возрастания.

$-12 + 11$	А	$0 - (-5)$	Д
$11 - 15$	И	$-(-1) - 9$	А
$2 - (-10)$	З	$-7 - (-4)$	К
$-(-3) + 9$	Я	$3 \cdot (-5)$	С
$-3 + 8$	Р	$-19 \cdot 2$	К
$3 + (-16)$	М	$-5 \cdot 0$	Л
$-5 + (-14)$	О	$-7 \cdot (-2)$	Б
$0 - 5$	Т	$-11 \cdot 1$	О
$0 + (-7)$	В	$18 : (-2)$	Н
$-2 + 2$	Е	$-27 : (-3)$	У

[Космонавтика.]

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 8.

В. ПИМКИНА,
пос. Новый Быт, Владимирская обл.

Подставьте буквы, данные в скобках около каждого задания в клетку таблицы, соответствующую полученному ответу.

0,06 : 0,1;	(к)	7,1 : 0,1;	(а)
76,31 : 10;	(с)	32,13 : 0,1;	(т)
0,6 : 0,3;	(о)	7,8 : 0,001;	(м)
0,175 : 0,01;	(н)	0,16 : 0,2;	(в)
15 : 10.	(и)		

0,006	2	7,631	7800	2	17,5
71	0,8	321,3	1,5	0,006	71

[Космонавтика.]

И. СИВАЦКАЯ,
г. Санкт-Петербург

1. Как звали древнегреческого ученого, который в 150 году до н.э. составил первый звездный каталог? Чтобы ответить на вопрос, выполните задания, расположите ответы в порядке возрастания и замените числа соответствующими буквами.

№	Задание	Буква	Ответ
1	Вычислите: 7,8 + 3,5	А	
2	Вычислите: 8 – 2,3	П	
3	Вычислите: 0,4 · 2,5	И	
4	Вычислите: 9,7 · 2	Р	
5	Решите уравнение $4x = 2$	Г	
6	Решите уравнение $x + 0,4x = 28$	Х	
7	Решите уравнение $0,9x - 0,5x = 2$	П	

[Гиппарх.]

2. Результат каждого действия — натуральное число, соответствующее номеру буквы в русском алфавите. Разгадав шифровку, вы узнаете название звезды, являющейся «красным гигантом», диаметр которой больше, чем диаметр орбиты вращения Земли вокруг Солнца.

$0,2 + 1,8 \to 12 \cdot 0,5 \to 4 : 0,2 \to 9,7 - 3,7 \to$
$\to 3,9 : 0,3 \to 1,4 \cdot 20 \to 1 : 0,25 \to 3,4 + 2,6 \to$
$\to 0,77 : 0,7 \to 0,03 \cdot 300 \to 4,8 : 0,8.$

[Бетельгейзе.]

Л. ИЕВЛЕВА,
Москва

Мы отправляемся в космический полет. Чтобы узнать название нашего звездолета, устно решите следующие примеры:

а) $8,4 : (-0,7)$; б) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{15}{22}\right)$;

в) $-2,7 + 6,5$; г) $-1,7 - (-8)$;

д) $-\frac{5}{6} : \frac{5}{12}$; е) $3,8 \cdot (-10)$;

ж) $-1\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$; з) $-\frac{16}{17} : (-4)$; к) $\frac{1}{4} - 1$.

Ключ к расшифровке названия звездолета дан в таблице.

–2	$\frac{5}{11}$	$\frac{4}{17}$	–38	–12	6,3	$-2\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	3,8
О	Н	Д	М	А	Р	А	Е	Д

Отгаданные буквы запишите последовательно в иллюминаторы космического корабля.

[Андромеда.]

Вычисления с большими числами

1. Расстояние от Земли до Солнца 150 млн км. Световой луч движется со скоростью 300 000 км/с. Сколько минут идет луч до Земли?

2. Расстояние от Земли до Марса 78 млн км. За сколько минут пройдет световой луч от Земли до Марса?

3. Расстояние от Солнца до Земли 150 млн км, а до Сатурна на 1278 млн км больше. Во сколько раз расстояние от Солнца до Сатурна больше расстояния от Солнца до Земли?

4. Скорость полета ракеты, на которой Гагарин совершил первый полет в космос, 28 260 км/ч. Он облетел Землю за 108 минут. Какое расстояние пролетела ракета?

5. Радиус Земли равен 6371 км. Первая ракета с человеком на борту удалилась от Земли на 327 км. Найдите длину окружности, по которой пролетела ракета. Сравните результат с результатом задачи 4.

6. Знаете ли вы, что вес тела на разных планетах разный? Человек, вес которого на Земле равен 60 кг, на Меркурии будет весить 22,6 кг, на Венере — 54,4 кг, на Луне — 9,9 кг, на Марсе — 22,6 кг, на Юпитере — 141,8 кг, на Сатурне — 54,9 кг, на Уране — 53,3 кг, на Нептуне — 67,5 кг, на Плутоне — 4 кг. Сколько весил бы на каждой планете космический корабль «Восток-1», если его вес на Земле 4,73 т?

И. СИВАЦКАЯ,
г. Санкт-Петербург

Космос в цифрах

Ребята, перед вами несколько интересных фактов, но в них пропущены числа. Чтобы восстановить их, вам надо решить задачи и получившиеся ответы вставить вместо пропусков.

1. Каждый год в нашей Галактике появляется около ... новых звезд.

Выполните действия: $(18 - 16{,}9) \cdot 3{,}3 + 36{,}37$.

[40]

2. Самая большая гора на Земле — Джомолунгма — имеет высоту более 8 км. А высота вулкана Никс Олимпик на Марсе составляет почти ... км!

Найдите значение выражения $a + b : 0{,}75$ при $a = 12$, $b = 6$.

[20]

3. В Солнце сконцентрировано ... процентов массы всей Солнечной системы.

Решите уравнение $(23{,}5 + x) : 5 = 24{,}5$.

[99]

4. Чтобы заглянуть в прошлое, достаточно посмотреть на самую дальнюю из видимых нам звезд. Свет от нее доходит до нас спустя ... миллиарда лет.

Вычислите: $0{,}04 \cdot 75{,}27 + 24{,}73 \cdot 0{,}04$.

[4]

5. Чтобы долететь до ближайшей к нам звезды (не считая Солнца), которая называется Проксима Центавра, нужно ... световых лет.

Если в некоторой десятичной дроби перенести запятую вправо на один знак, то она увеличится на 38,16. Найдите эту дробь.

[4,24]

Н. ЩЕРБАКОВА,
Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ ПО ПЛОЩАДИ ГАГАРИНА

Площадь эта возникла в Москве в середине XVIII века, когда вокруг города строили Камер-коллежский вал. Называлась она Площадь Калужской заставы. Долгое время здесь была лишь загородная слобода.

Еще это место нередко вспоминают в связи с войной 1812 года: через Калужскую заставу отступала армия Наполеона.

Свое нынешнее название площадь получила в честь Ю.А. Гагарина и в связи с тем, что на этой площади 14 апреля 1961 года жители Москвы встречали первого космонавта.

Скульптурная композиция состоит из постамента, памятника и копии спускаемого аппарата корабля «Восток», на котором сделана надпись о том, что первым человеком, проникшим в космос, был гражданин СССР Юрий Алексеевич Гагарин. Фигура космонавта, отлитая из титана, венчает ребристый постамент. Художественный замысел всей композиции — старт космической ракеты. Скульптор памятника — П. Бондаренко, архитекторы — Я. Белопольский, Ф. Гажевский, конструктор — А. Судаков.

А теперь давайте узнаем некоторые интересные данные о памятнике, произведя несложные расчеты.

1. В каком году эта площадь стала носить имя Гагарина? Известно, что:

1) разность цифр, стоящих в разряде сотен и разряде единиц, равна 1;

2) сумма цифр тысяч и десятков равна разности цифр единиц и тысяч и равна 7?

[1968]

2. Высота всей скульптурной композиции, состоящей из постамента и скульптуры космонавта, составляет 46 метров, высота космонавта относится к высоте постамента как 7 : 16. Определите высоту постамента и высоту скульптуры космонавта.

[14 м; 32 м]

3. Можно ли утверждать, что памятник может служить примером золотого сечения? Свой ответ объясните.

[Нет.]

4. Общий вес памятника — неизвестное трехзначное число. Если из него вычесть сумму его цифр, то получится число 270. Сколько весит памятник?

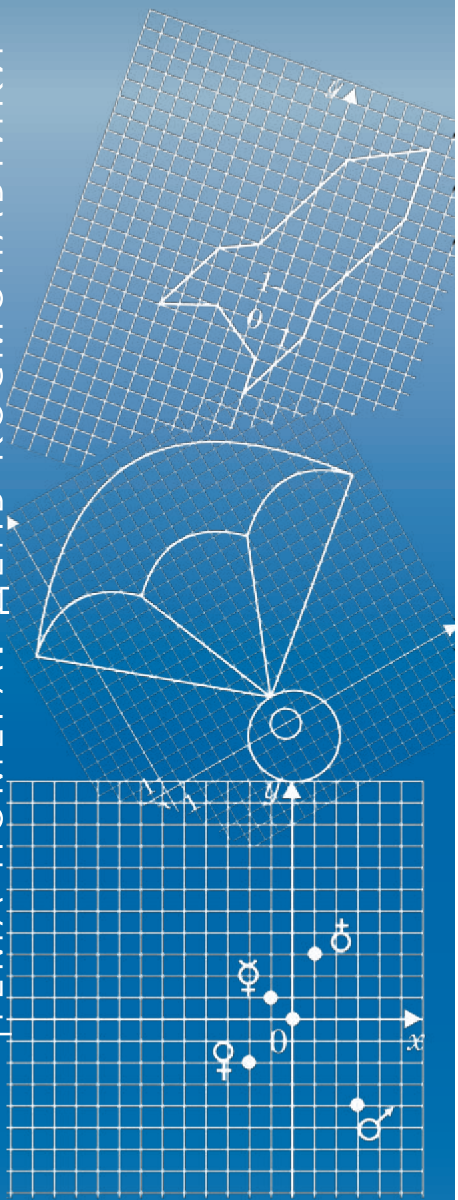
[280 т]

5. Памятник был открыт в том же веке, когда и был совершен полет. Если в этом числе поменять местами цифры, обозначающие сотни и десятки, то число уменьшится на 90.

[1980]

Для составления заданий использованы числовые данные сайта «Аргументы и факты»: moskva.aif.ru/issues/

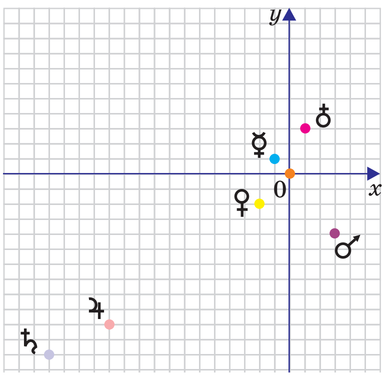
Памятник Ю.А. Гагарину, Москва



ЗАДАЧИ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

Г. БЕКНЕВА,
Москва

Схема Солнечной системы

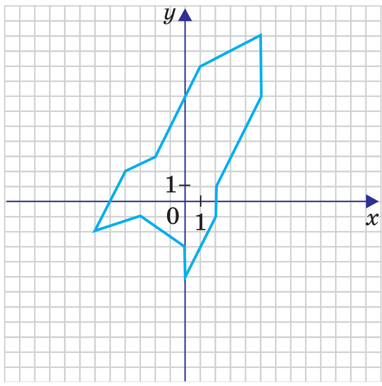


1. Невооруженным глазом видны только 5 планет Солнечной системы. Нарисуйте схему этой части Солнечной системы, если солнце и планеты имеют координаты:

Солнце (0; 0), Меркурий (–1; 1), Венера (–2; –2), Земля (1; 3), Марс (3; –4), Юпитер (–12; – 10), Сатурн (–16; –12).

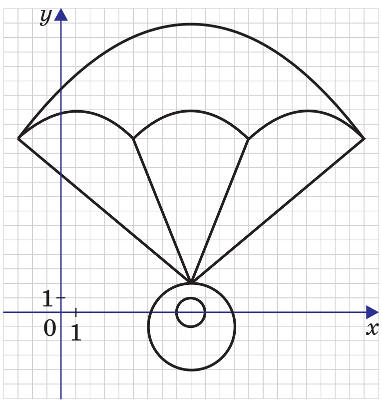
Ракета-носитель

2. Начертите фигуру по точкам:
$A(0; -5)$, $B(2; -1)$, $C(2; 1)$,
$D(5; 7)$, $E(5; 11)$, $F(1; 9)$,
$G(-2; 3)$, $H(-4; 2)$, $I(-6, -2)$,
$J(-4; -1)$, $K(0; -3)$;
последнюю точку соедините с первой.



А. САЛАМАТОВА,
с. Цепочкино, Кировская обл.

Возвращение на Землю



1. $(x^2 - 9)^2 + (y + 1)^2 = 9.$

2. $(x - 9)^2 + y^2 = 1.$

3. $y = -\frac{1}{8}(x-9)^2 + 20, \quad x \in [-3; -21].$

4. $y = -\frac{1}{8}(x-1)^2 + 14, \quad x \in [-3; 5].$

5. $y = -\frac{1}{8}(x-9)^2 + 14, \quad x \in [5; 13].$

6. $y = -\frac{1}{8}(x-17)^2 + 14, \quad x \in [13; 21].$

7. $y = -\frac{5}{6}x + 9,5, \quad x \in [-3; 9].$

8. $y = -2,5x + 24,5, x \in [5; 9].$

9. $y = 2,5x - 20,5, x \in [9; 13].$

10. $\frac{5}{6}x - 5,5, \quad x \in [9; 21].$

И. ДЕНИСОВА,
г. Киржач,
Владимирская обл.

6 класс

МЫ И КОСМОС

Я верю, друзья: караваны ракет,
Помчат нас вперед от звезды до звезды,
На пыльных тропинках далеких планет
Останутся наши следы…
В. Войнович

Цели урока:
— повторение и закрепление материала, изученного в курсе математики 6-го класса;
— формирование у учащихся умения применять знания по математике;
— воспитание чувства патриотизма и гордости за свою Родину, первой преодолевшей силу земного притяжения.
Приложение: презентация к уроку «Мы и космос».

Ход урока

Организационный момент

Учитель. Дорогие ребята! Вы уже знаете, что 12 апреля наша страна и весь мир отмечают День космонавтики. Для вас привычно, что с Земли стартуют космические корабли и в небесных далях происходят стыковки космических аппаратов. Месяцами на космических станциях живут и трудятся космонавты, летят к другим планетам автоматические станции. Вы можете сказать: «Что тут особенного?» А то, что еще 50 лет назад космические полеты были из области фантастики. 4 октября 1957 г. произошло событие, которое потрясло весь мир, — был запущен первый искусственный спутник Земли. Это было первое, созданное человеком тело, которое не упало на Землю, а стало вращаться вокруг нее. 19 августа 1960 г. стартовал космический корабль «Восток» с двумя четвероногими космонавтами на борту — Белкой и Стрелкой. Они провели в космосе 22 часа и благополучно вернулись на Землю. А 12 апреля 1961 г. в космос впервые в мире на космическом корабле «Восток» поднялся человек. Им был наш соотечественник Юрий Алексеевич Гагарин. Полет длился всего 108 минут, но значение его было огромным. Он ответил на главный вопрос: полеты возможны. Сегодня я предлагаю вам отправиться в космическое путешествие. Вселенная наполнена бесчисленным множеством звезд, планет, комет и других небесных тел. Я прошу вас, юные земляне, занять свои места в межпланетном корабле, который понесет нас по просторам космоса.

Актуализация опорных знаний

Учитель. Мы отправимся в путешествие на космическом корабле, а чтобы узнать, как он называется, выполните следующее задание.

Решите устно примеры. Используя ключ к расшифровке, определите название нашего корабля, последовательно написав на его изображении девять соответствующих букв.

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 8.

1) $\frac{2}{3}+\frac{1}{9}$; 2) $\frac{3}{7}+\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{8}+\frac{5}{12}$;
4) $\frac{11}{20}+\frac{1}{5}$; 5) $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$; 6) $\frac{2}{5}+\frac{1}{6}$;
7) $\frac{3}{6}+\frac{3}{8}$; 8) $\frac{5}{12}+\frac{1}{20}$; 9) $\frac{2}{9}+\frac{1}{18}$.

$\frac{4}{7}$	$\frac{13}{24}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{8}$
а	с	к	е	и	с	я	о	п

Учитель. С заданием мы справились. Прошу занять свои места, мы отправляемся в путешествие на космическом корабле «Кассиопея».

Решение задач

1. Космическая скорость

Учитель. Для преодоления земного тяготения и вывода объекта в космос требуется огромная энергия. Для вывода на орбиту космических кораблей используют ракеты — единственные движители, способные развить нужную нам первую космическую скорость. Определите, чему равна первая космическая скорость (в км/ч), решив уравнение $x : 270 = 450 : 4{,}05$.

[Первая космическая скорость, необходимая для выхода на орбиту, составляет 30 000 км/ч. А для возвращения на Землю, благодаря тяготению, ракетные двигатели не нужны.]

2. Тест на совместимость

Учитель. Преодолев земное притяжение, наш корабль вышел в открытый космос. Проверим экипаж на совместимость. Для этого ответьте на вопросы.

а) На корабле двое часов: одни стоят, другие спешат. Какие часы лучше (с точки зрения математики)?

[Те, что стоят; они дважды в сутки показывают правильное время.]

б) Когда велосипедист проехал $\frac{2}{3}$ пути, лопнула шина. На остальной путь пешком он затратил вдвое больше времени, чем на велосипедную езду. Найдите отношение скоростей велосипедиста и пешехода.

[4 : 1]

в) Куб размером 1 м^3 распилили на кубики размером 1 см^3 и выложили их в цепочку. Какова длина этой цепочки?

[10 км]

3. Сообщение на Землю

Учитель. Экипаж у нас дружный. Необходимо послать сообщение на Землю. Разгадайте анаграмму, и вы узнаете текст послания, которое отправил наш бортинженер.

Солнечная система

ТОПЕЛ ТИХОПРОД МАЛЬРОННО.

[Полет проходит нормально.]

4. Путь к звездам

Учитель. В темную безоблачную ночь можно увидеть тысячи звезд. Если посмотреть внимательно, то можно заметить, что некоторые – ярче других. Звезды кажутся нам крохотными огоньками, но на самом деле они совсем не маленькие. Они представляют собой огромные раскаленные газовые шары. Группы ярких звезд, образующие определенную композицию, хорошо узнаваемы. Мы называем их созвездиями, каждое из которых имеет свое название. А придумали их еще в Древней Греции. Греки, прекрасные мореплаватели, по небесным созвездиям определяли путь, когда плыли на корабле. Названия у созвездий очень красивые: Цефей, Кассиопея, Персей, Андромеда, Пегас, Орион, Кит, Дракон и другие.

Постройте на звездной карте созвездие Кассиопеи, одноименное нашему космическому кораблю, если координаты звезд-точек таковы:

$(-5; 0)$, $(-3; 2)$, $(-1; 0)$, $(1; 0)$, $(3; -2)$.

5. Планеты Солнечной системы

(*Учитель предлагает рассмотреть иллюстрации с изображением планет.*)

Учитель. Каждый день Солнце проходит по небу с востока на запад. Кажется, что Солнце обращается вокруг Земли, однако в действительности это Земля вращается вокруг своей оси и одновременно обращается вокруг Солнца. Солнце образует центр нашей системы – это раскаленный газовый шар. Четыре небольшие планеты, расположенные ближе всех к Солнцу, — Меркурий, Венера, Земля и Марс — называются внутренними, они имеют твердую поверхность. Остальные пять планет называются внешними: четыре газовых гиганта — Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун, а также маленькая твердая планета из камня и льда —

Плутон. Земля — это единственная известная нам обитаемая планета. Выполнив следующие задания, вы сможете узнать некоторые известные факты, связанные с этими планетами.

Задание 1. Солнечная система огромна. Для того чтобы узнать, чему равно расстояние от Земли до Солнца в миллионах километров, решите уравнение $\frac{x+3}{x}=1,02.$

[≈150 млн км]

Задание 2. Диаметр земного шара приближенно равен 12,7 тыс. км. Скольким тысячам километров равен радиус и длина экватора Земли? (Результат округлите до десятых.)

[R = 6,4 тыс. км, длина экватора 39,9 тыс. км.]

Задание 3. Сатурн совершает полный оборот вокруг своей оси в течение 36 960 с, а Юпитер — в течение 35 729 с. Выразите это время в мерах высших наименований.

[Сатурн — 10 ч 16 мин., Юпитер — 9 ч 55 мин. 29 с.]

Задание 4. Диаметр планеты Меркурий приближенно равен 5 тыс. км. Диаметр планеты Венера в 2,48 раза больше, а диаметр планеты Марс составляет $\frac{17}{31}$ диаметра Венеры. Найдите диаметр Венеры и Марса.

[Диаметр Венеры равен 12,4 тыс. км, диаметр Марса — 6,8 тыс. км.]

Задание 5. Луна совершает полный оборот вокруг Земли за 27 суток 7 ч 43 мин. 11 с. Сколько это секунд?

[2 360 591 с]

Задание 6. Длина экватора Луны приближенно равна 10,9 тыс. км. Чему равен диаметр Луны? (Число тысяч округлите до десятых.)

[≈3,5 тыс. км]

6. Самое «гиблое» место в космосе

Учитель. Нет в космосе более загадочного и пугающего объекта, чем черная дыра. Одно словосочетание уже наводит безотчетный страх: оно рисует образ все поглощающей бездны. Перед нею робеют не только обыватели, но трепещут и астрофизики. Дыра в пространстве, с вполне конкретными краями, в которую может провалиться все что угодно и из которой ничто не в силах выбраться. Дыра, в которой гравитационная сила столь велика, что даже свет захватывается и удерживается в этой ловушке. Дыра, которая искривляет пространство и искажает течение времени.

Для того чтобы избежать в своем полете подобной ловушки и благополучно вернуться на Землю, продолжите последовательность чисел:

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; ...

[34, 55, 89...; каждое новое число последовательности является суммой двух предыдущих. Члены этой последовательности — числа Фибоначчи.]

7. Открой свою звезду

Учитель. Замените звездочки цифрами.

$$\begin{array}{r} _{-}1*3*7 \\ \underline{756*} \\ 4*85 \end{array} \qquad \begin{array}{r} _{-}12347 \\ \underline{7562} \\ 4785 \end{array}$$

Подведение итогов

Учитель. Из 40 000 профессий, существующих на Земле, профессия космонавта одна из самых опасных и ответственных. С момента первого полета человека к звездам на околоземных орбитах побывали уже сотни человек из разных государств. Люди долетели до Луны и даже путешествовали по ее поверхности. Следующим шагом будут полеты к звездам. Возможно, что кто-нибудь из вас тоже совершит полет к звездам. Для этого нужно не бояться мечтать и уметь идти к поставленной цели, преодолевая все препятствия.

Литература

1. 300 вопросов и ответов о Земле и Вселенной. — М.: Академия развития, 2004.

2. Большая книга знаний. — М.: Махаон, 2008. — 480 с.

3. Большая энциклопедия знаний. — М.: Эксмо, 2009. — 344 с.

4. *Виленкин Н.Я.* Математика, 6. — М.: Мнемозина, 2008.

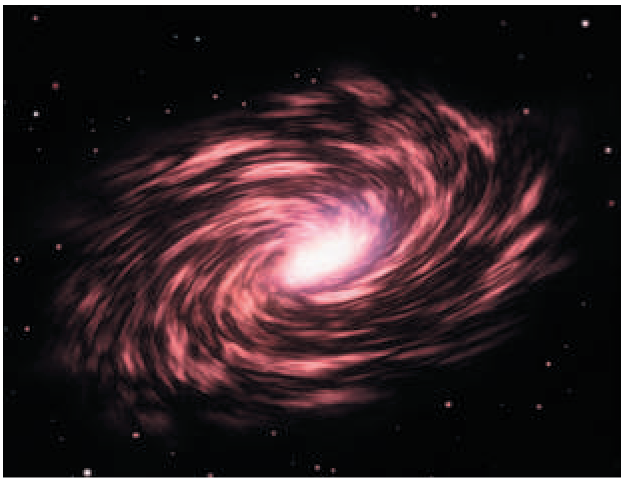
5. *Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г.* Математика, 5. — М.: Мнемозина, 2008.

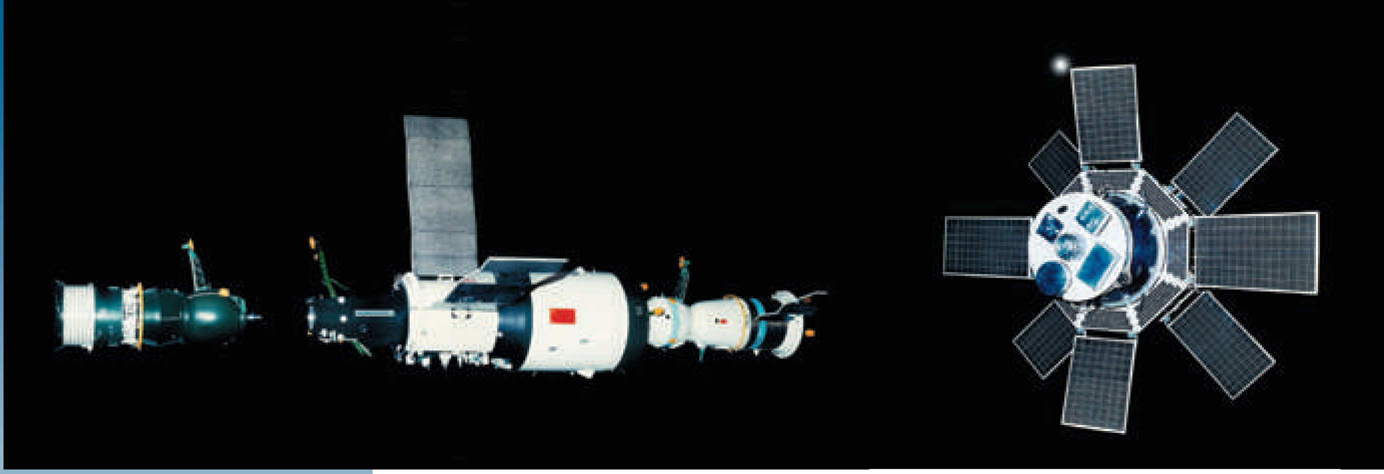
6. *Жохов В.И.* Преподавание математики в 5–6 классах. — М: Вербум-М, 2000.

7. Математика. 5–11 классы: Уроки учительского мастерства. — Волгоград: Учитель, 2009. — 299 с.

8. *Шатилова А.С.* Занимательная математика. КВНы, викторины. — М.:Айрис-пресс, 2006. — 128 с.

Черная дыра





Советские космические аппараты

5–6 классы

М. ПАВЛОВА,
г. Санкт-Петербург

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИГРА «НЕОБЫКНОВЕННЫЙ ПОЛЕТ»

Полет — это математика.
В. Чкалов

Цели игры:

образовательная — обобщить знания учащихся по теме «Действия с обыкновенными дробями»;

развивающая — формировать знания о первых полетах в космос;

воспитательная — формировать товарищеские отношения, чувство ответственности, умение работать командой. Способствовать нравственно-патриотическому воспитанию школьников.

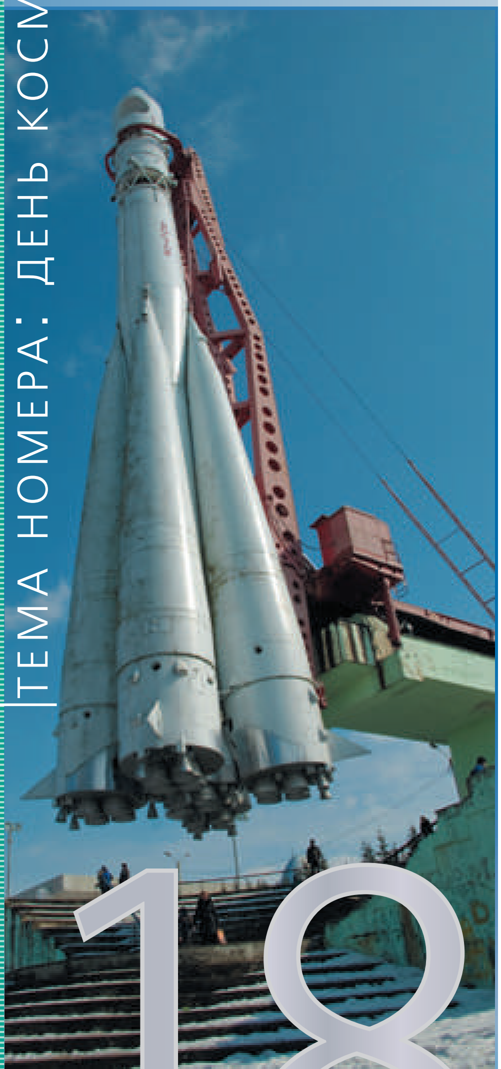
Форма проведения. Если игра проводится в одном классе во время урока, то ученики делятся на три команды. Если игра проводится для параллели, то классы представлены командами по 9–10 человек. Каждый этап проходит в отдельном кабинете.

Ход урока

Вступительное слово учителя

12 апреля весь мир отмечает День авиации и космонавтики. Это особенный день — в этот день в 1961 году Ю.А. Гагарин первым в мире совершил орбитальный полет, открыв тем самым эпоху пилотируемых космических полетов. В этом большая заслуга многих ученых-математиков — покорение космоса невозможно без математических расчетов.

Сегодня и мы совершим космическое путешествие прямо из кабинета математики. Каждая команда — это экипаж ракеты, которому предстоит совершить полет. Победит тот экипаж, который наберет больше очков.



Ракета-носитель «Восток», музей истории космонавтики, г. Калуга

Каждый этап полета, в зависимости от количества верно решенных примеров, оценивается звездами разного цвета:

коричневая — 1 балл;
желтая — 2 балла;
зеленая — 3 балла;
синяя — 4 балла;
красная — 5 баллов.

Предполетная подготовка

Беседа об истории космонавтики. А знаете ли вы...

1. Как звали первого космонавта?

[Ю.А. Гагарин.]

2. Кого называют отцом космонавтики?

[К.Э. Циолковский.]

3. Когда был запущен первый искусственный спутник Земли?

[4 октября 1957 г.]

4. Как назывался космический корабль, на котором Ю. Гагарин совершил путешествие по орбите?

[«Восток».]

5. В 1971 г. была выведена на орбиту первая орбитальная станция. Это был настоящий летающий дом, состоящий из нескольких комнат-отсеков, в которых свободно разместился экипаж из трех человек, проработавший в космосе почти месяц. Как называлась эта первая орбитальная станция?

[«Салют».]

Название корабля, на котором полетит ваш экипаж, вы узнаете, выполнив предстартовую подготовку (оценивается скорость и правильность ответов). Каждая дробь написана на отдельной карточке, на обороте которой стоит буква, приведенная в скобках. Расположив дроби в указанном порядке, учащиеся переворачивают карточки и узнают название экипажа.

Расположите дроби в порядке возрастания:

1) $\frac{13}{18}$ (Ю), $\frac{14}{36}$ (А), $\frac{5}{18}$ (С), $\frac{2}{3}$ (Л), $\frac{19}{15}$ (Т);

2) $\frac{16}{40}$ (С), $\frac{3}{4}$ (Т), $\frac{3}{20}$ (В), $\frac{7}{20}$ (О), $\frac{17}{20}$ (О), $\frac{21}{20}$ (К).

Расположите дроби в порядке убывания:

$\frac{1}{8}$ (Н), $\frac{17}{24}$ (У), $\frac{29}{24}$ (Б), $\frac{7}{24}$ (А), $\frac{30}{48}$ (Р).

Учитель. Итак, в полет отправляются экипажи «Восток», «Салют», «Буран».

Если мероприятие проводится в виде игры по станциям, капитанам вручаются маршрутные листы, в которых указывается порядок прохождения этапов.

Звучит команда: «ПОЕХАЛИ!» (*слова Ю.А. Гагарина*).

Орбитальный научный эксперимент

Экипаж делится на три группы. Каждая группа получает карточку с тремя примерами и перечень ответов к ним. Решив примеры и записав номер выбранного ответа, группы сдают задания судьям.

1-я группы	Номер ответа	2-я группа	Номер ответа	3-я группа	Номер ответа
$\frac{1}{4}+\frac{2}{9}$		$\frac{3}{7}+\frac{5}{6}$		$\frac{4}{9}+\frac{2}{3}$	
$\frac{3}{8}-\frac{1}{4}$		$\frac{4}{5}-\frac{2}{9}$		$\frac{7}{8}-\frac{1}{2}$	
$6-\frac{1}{10}$		$7-\frac{3}{13}$		$5-\frac{2}{3}$	

Ответы: **1.** $4\frac{1}{3}$. **2.** $1\frac{11}{42}$. **3.** $\frac{34}{35}$. **4.** $1\frac{1}{9}$. **5.** $\frac{17}{36}$. **6.** $1\frac{10}{33}$. **7.** $\frac{7}{10}$. **8.** $5\frac{9}{10}$. **9.** $\frac{1}{2}$. **10.** $\frac{3}{8}$. **11.** $\frac{5}{14}$. **12.** $6\frac{10}{13}$. **13.** $\frac{26}{45}$. **14.** $\frac{3}{4}$. **15.** $\frac{1}{8}$.

Номера верных ответов:
1-я группа — 5, 15, 8;
2-я группа — 2, 13, 12;
3-я группа — 4, 10, 1.

Пока судьи проверяют решения — рассказ о первом спутнике.

Освоение космического пространства началось 4 октября 1957 года, когда бы запущен первый искусственный спутник Земли. Спутник вращался вокруг Земли и подавал сигналы: «Я здесь, я лечу!». Он представлял собой шар из алюминиевых сплавов диаметром 58 см и весом 83,6 кг. Аппарат имел двухметровые усы-антенны, а внутри размещались два радиопередатчика. Скорость спутника составляла 28 800 км/ч. За полтора часа спутник облетал весь земной шар, а за сутки полета совершал 16 оборотов.

Сейчас на земной орбите находится множество спутников. Одни используются для телерадиосвязи, другие являются научными лабораториями.

На оборотной стороне Земли

Экипаж делится на две команды. Члены команды по очереди решают по одному примеру. Ответ записывают в пустую клетку. Ответ предыдущего примера является первым числом в следующем примере. Цель: правильно и быстро выполнить это задание. Время ограничено.

Критерии оценивания: 5 правильных — красная звезда, 4 — синяя, 3 — зеленая, 2 — желтая, 1 —коричневая.

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=\square\ ,\ \square+1\frac{3}{8}=\square\ ,\ \square-1\frac{5}{12}=\square\ ,$$

$$\square+3\frac{3}{8}=\square\ ,\ \square-2\frac{5}{12}=\square$$

Пока судьи проверяют решения — рассказ о первых живых существах на орбите.

После удачно осуществленного полета первого искусственного спутника Земли перед учеными встала задача — вывести на орбиту живое существо. Дорогу в космос для человека проложили собаки и мыши. В космос слетали 21 серая и 19 белых мышей. Собаки прошли все виды испытаний. Они длительно находились в кабине без движения, переносили большие перегрузки, вибрации. Ученые записывали биотоки сердца, мышц, мозга, артериальное давление, характер дыхания и т.д., изучая воздействие на организм невесомости. В честь животных, отдавших жизнь во имя науки, перед Парижским обществом защиты собак воздвигли гранитную колонну. Ее вершину венчает устремленный ввысь спутник, из которого выглядывает Лайка — собака-космонавт.

Внештатная ситуация — метеоритный дождь

Необходимо устранить неисправность ракеты.

Экипаж делится на две команды. Каждой команде выдается карточка, в которой приведены решения четырех примеров, но в них допущены ошибки. Нужно найти эти ошибки и исправить решение. Выполненные задания сдаются судьям. Время ограничено.

Критерии оценивания: 4 правильно записанных решения — красная звезда, 3 — синяя, 2 — зеленая, 1 — желтая.

1-я команда	2-я команда
$2-1\frac{3}{4}=1\frac{3}{4}$	$2\frac{5}{6}-1\frac{2}{3}=1\frac{3}{3}=2$
$\frac{2}{5}+\frac{4}{6}=\frac{6}{11}$	$6-2\frac{4}{9}=4\frac{4}{9}$
$2\frac{4}{15}-1\frac{2}{6}=1\frac{2}{9}$	$3\frac{2}{9}+1\frac{5}{8}=4\frac{2+5}{72}=4\frac{7}{72}$
$3\frac{1}{3}+2\frac{1}{9}=5\frac{1+1}{9}=5\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}+\frac{4}{15}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$

Пока судьи проверяют решения — рассказ об основателях космонавтики.

Константин Эдуардович Циолковский — гордость России, один из отцов космонавтики. Ему принадлежат слова: «Земля — колыбель человечества, но нельзя вечно жить в колыбели». Он указал человечеству путь к иным мирам и звездам, заложив основы реактивного движения. Идеи Циолковского были развиты Фридрихом Артуровичем Цандером и Юрием Васильевичем Кондратюком. А заветные мечты основоположников космонавтики воплотил в жизнь Сергей Павлович Королев — Главный Конструктор.

Космический обед

Во время обеда космонавты вспоминают о Земле. Перед ними — панно из цветов, на каждом лепестке — задание на действия с дробями. Экипаж делится на две группы. Каждый решает свой пример. Номера примеров указаны в сердцевине цветка. Решения выполняются на листах бумаги.

Критерии оценивания: за 5 правильных ответов — красная звезда, 4 — синяя, 3 — зеленая, 2 — желтая, 1 — коричневая.

Для 1-й группы первое число $2\frac{4}{7}$.

Для 2-й группы первое число $1\frac{8}{15}$.

Пока судьи проверяют решения — рассказ о Ю.А. Гагарине.

Юрий Алексеевич Гагарин родился 9 марта 1934 года в Смоленской области. Пошел в школу в 1941 году, затем продолжил учебу в ремесленном училище. В 1951 году стал посещать аэроклуб, а уже через год совершил свой первый полет на самолете «Як-18». В марте 1960-го

стал одним из кандидатов в космонавты. 12 апреля 1961 года корабль «Восток» с Гагариным на борту вышел в космос и сделал один оборот вокруг Земли.

После космического полета Ю.А. Гагарин вернулся к своей профессии летчика-испытателя. Погиб 27 марта 1968 года, осуществляя тренировочный полет на самолете «МиГ-15».

Мягкая посадка

Чтобы успешно завершить полет, проведем конкурс капитанов.

Конкурс капитанов

1. Попрыгунья Стрекоза половину времени каждых суток красного лета спала, третью часть каждых суток танцевала, шестую часть пела. Остальное время она решила посвятить подготовке к зиме. Сколько часов в сутки Стрекоза готовилась к зиме?

[0 ч]

2. Малыш может съесть 600 г варенья за 6 минут, а Карлсон в 2 раза быстрее. За какое время они съедят это варенье вместе?

[2 мин]

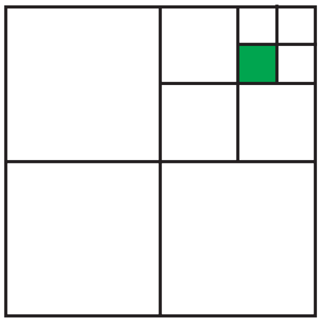
3. Дана дробь $\frac{13}{19}$. Какое число нужно прибавить к обоим числам этой дроби, чтобы она обратилась в $\frac{5}{7}$?

[2]

4. Имеется верная запись: 5*683 < 506*1 (звездочкой отмечены пропущенные цифры). Какие это цифры?

[0, 9]

5. Какая часть квадрата закрашена?



$\left[\frac{1}{64}\right]$

Литература

1. *Бунимович Е.А., Дорофеев Г.В., Суворова С.Б.* и др. Математика. 5 класс. — М.: Просвещение: Сферы, 2010.
2. *Виленкин Н.Я.* Математика. 6 класс. — М.: Мнемозина, 2008.
3. *Кордемский Б.А.* Математическая смекалка. — М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1955.
4. http://repetitors.info/library.php?b=200
5. http://rcio.pnzgu.ru/personal/26/1/6/Page2.htm

Фото на конкурс

Я уже решил!

Автор: Л.Г. Егорова, учитель математики и физики Емёткинской средней школы, Республика Чувашия

Информационное письмо
и примерная программа

Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, г. Елец, Липецкая обл., 7–8 октября 2011 года

ВСЕРОССИЙСКАЯ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В ШКОЛЕ БУДУЩЕГО: ТРАДИЦИИ И ИННОВАЦИИ»

Цель: интеграция усилий ученых, преподавателей, методистов, учителей, общественных деятелей для решения актуальных проблем школьного математического образования XXI века в контексте **национальной образовательной инициативы «Наша новая школа».**

Планируется работа следующих секций:

1. История и методология математического образования (акад. РАО, проф. Ю.М. Колягин, проф. О.А. Саввина). **2.** ФГОС 2-го поколения по математике для общеобразовательных школ (проф. И.В. Дробышева, доц. С.Н. Дворяткина). **3.** Педагогика математики в школе XXI века (проф. Э.Г. Гельфман, проф. О.В. Тарасова). **4.** Методики обучения математике в школе будущего (проф. М.В. Шабанова, доц. Н.В. Черноусова). **5.** Обучение математически одаренных детей в школе XXI века (проф. Т.Ф. Сергеева, доц. С.В. Щербатых). **6.** Психологические основы обучения математике в школе будущего (проф. Н.Г. Подаева, проф. Г.Е. Сенькина). **7.** Дополнительное математическое образование в школе XXI века (проф. Н.И. Мерлина, проф. В.А. Тестов). **8.** Здоровьесберегающие технологии в обучении математике (проф. А.В. Боровских, доц. Т.Е. Рыманова). **9.** Образовательные электронные и телекоммуникационные ресурсы в обучении математике (проф. В.В. Корниенко, проф. Е.И. Трофимова). **10.** Подготовка учителя математики к работе в школе XXI века (член-корр. РАО, проф. Н.Х. Розов, доц. Г.А. Симоновская).

Участие в работе возможно: с публикацией тезисов и с устным докладом; с публикацией тезисов, но без устного доклада; без доклада.

Формат конференции: пленарные доклады — 30 минут; секционные доклады — 10–15 минут.

Для участия в работе конференции необходимо прислать заявку и тезисы (с устным докладом или без устного доклада) до **27 июня 2011 года** по электронному адресу.

Участникам конференции может быть предоставлена возможность бесплатного проживания. Решение о предоставлении бесплатного проживания и публикации тезисов будет приниматься оргкомитетом конференции на основании заявки участника.

Кроме того, участники имеют возможность поселиться за счет направляющей стороны или за свой счет в гостиницах Ельца.

Публикации

Сборник тезисов будет издан к началу конференции.

1. Текст тезисов не более 2 страниц формата А4; в редакторе Word MS Office 2003, 2007. 2. Титульная страница: фамилии и инициалы каждого автора, название тезисов, аннотация (на русском и английском языках). 3. Междустрочный интервал: одинарный (1,0). 4. Ширина всех полей: по 2,5 см. Красная строка 1 см. 5. Шрифт: Times New Roman. Размер символа 14. 6. Страницы должны быть пронумерованы последовательно. 7. Список литературы (библиография) в конце статьи оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ. Источники литературы, приведенные в списке, нумеруются в алфавитном порядке. Ссылки на цитируемые литературные источники оформляются по ходу текста в квадратных скобках с указанием страниц цитирования.

Заявка на участие

1. Фамилия, имя, отчество.
2. Ученая степень, звание.
3. Должность.
4. Место работы (кафедра, вуз, город).
5. Тема доклада.
6. Секция.
7. Адрес для переписки (с индексом).
8. Телефон (с кодом города).
9. Номер мобильного телефона.
10. E-mail.
11. Желательная для Вас форма участия.
12. Нуждаетесь ли Вы в гостинице?

Приглашение на конференцию будет выслано до 29 августа 2011 года.

Контакты

Электронный адрес (e-mail): shch-erserg@mail.ru (Щербатых Сергей Викторович).
Почтовый адрес: 399770, Липецкая обл., г. Елец, ул. Ленина, д. 91, физико-математический факультет Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина, кафедра математического анализа и элементарной математики, оргкомитет конференции «Математическое образование в школе будущего: традиции и инновации».
Телефоны: (8-474-67) 2-85-22 (каф.), 8-915-559-29-67 (С.В. Щербатых).

Г. БРАЙЧЕВ,
декан математического
факультета МПГУ

МПГУ ОБЪЯВЛЯЕТ НАБОР

О математическом факультете можно узнать на сайте МПГУ (mpgu.edu), по телефону центральной приемной комиссии (495) 438-18-47, по телефону деканата математического факультета (499) 264-25-56 или приехав 1 апреля 2011 г. на день открытых дверей математического факультета по адресу: Краснопрудная ул., д. 14 (станция метро «Комсомольская»).

В 2011 году математический факультет Московского педагогического государственного университета объявляет набор на первый курс по направлению подготовки «Педагогическое образование» (квалификация «бакалавр») по профилю «Математика и информатика» с пятилетним сроком обучения.

Обучение студентов включает в себя изучение гуманитарного цикла (история, философия, иностранный язык и др.); психолого-педагогического цикла (психология, педагогика, методика преподавания математики и информатики и др.); математических дисциплин (математический анализ, алгебра, геометрия, элементарная математика и др.); информатики и информационных технологий; дисциплин по выбору.

Обучение ориентировано на подготовку учителя математики для общеобразовательной школы, который:

— имеет современное образование по математике, информатике, психологии и педагогике;

— обладает развитым логическим мышлением, умеет рассуждать, анализировать, аргументировать, доказывать;

— понимает научные основы школьного курса математики, знаком с имеющимися учебниками по математике, учебными пособиями, сборниками задач, научно-популярной и занимательной литературой по математике;

— умеет решать задачи основного и повышенного уровней трудности;

— владеет информационно-коммуникационными технологиями;

— готов проводить не только уроки, но и кружки, курсы по выбору по математике и информатике, вести индивидуальную работу с учащимися, готовить их к участию в турнирах, конкурсах и олимпиадах.

Среди преподавателей математического факультета доктора физико-математических и педагогических наук, заслуженные учителя, авторы современных школьных учебников по математике и информатике, пособий для подготовки к олимпиадам и ЕГЭ.

Приглашаем всех выпускников 11-х классов, интересующихся математикой и информатикой, поступать в бакалавриат математического факультета МПГУ на направление «Педагогическое образование» по профилю «Математика и информатика».

Сочетание в подготовке бакалавров этого направления психологии, педагогики, математики и информатики имеется только на математическом факультете МПГУ. Оно отвечает современным общественным потребностям, открывает для выпускников бакалавриата широкие возможности трудоустройства.

В связи с важностью вопроса повышения качества подготовки учителей математики, большая просьба довести эту информацию до школьников и их родителей.

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

ЗАДАЧИ В3, В7 И С1 — ЛОГАРИФМЫ

С. ДВОРЯНИНОВ

Напоминаем!
Каждая задача части 1 оценивается 1 первичным баллом (из 30 возможных). Задание С1 оценивается в 2 первичных балла. Два балла начисляется за полное, обоснованное решение, один балл — если решение приведено, но не произведен отбор корней или допущены ошибки в отборе.

В задачах В3, В7 и С1 могут встретиться логарифмы. Напомним их основные **свойства.**

Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$, $p \in \boldsymbol{R}$, то

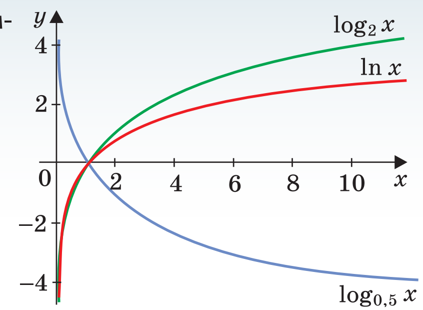
$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$,

$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$,

$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$,

$\log_{a^p} x = \dfrac{1}{p} \log_a x$.

$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.



Функция $y = \log_a x$ определена при $x > 0$; если $a > 1$, то она возрастает; если $0 < a < 1$, то она убывает. Свойство монотонности логарифмической функции используется при решении неравенств.
Основная идея решения любого логарифмического уравнения заключается в том, чтобы свести его к одному или нескольким простейшим с помощью равносильных преобразований, перехода к уравнению-следствию, замены переменной или применения свойств функций.

В3

Пример 1. Найдите корень уравнения

$$\log_{16} (5x - 3) = 0{,}5.$$

Решение. По определению логарифма

$$5x - 3 = 16^{0{,}5},\ 5x - 3 = 4,\ x = \frac{7}{5}.$$

Ответ: 1,4.

Пример 2. Найдите наибольше целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\log_{0{,}25} (x - 3) > -2.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$\log_{0{,}25} (x - 3) > \log_{0{,}25} 0{,}25^{-2}.$$

По определению логарифмической функции $x - 3 > 0$, и так как функция $y = \log_{0{,}25} t$ убывает $(0 < 0{,}25 < 1)$, то $x - 3 < 0{,}25^{-2}$.

уравнения. Все корни уравнения находятся из уравнения $4 - x^2 = 1$, а их сумма равна нулю.

Ответ: 0.

Совет. На экзамене не следует особенно беспокоиться, каким путем вы придете к ответу. Практически любой способ преобразований данного в условии выражения приводит к ответу. Времени на экзамене вполне достаточно для того, чтобы получить ответ разными способами. Тем самым вы обеспечите проверку своего решения и исключите потерю баллов.

В7

С1

Пример 7. Решите уравнение

$$\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0.$$

Решение. Приведем логарифмы к основанию 2 и запишем равносильное уравнение:

$$\frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{7}{6} = 0.$$

Сделаем замену переменной: $\log_2 x = t$. Получим уравнение:

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{2}t + \frac{7}{6} = 0, \text{ или } 3t^2 - 7t - 6 = 0.$$

Его корни: $t = -\dfrac{2}{3}$ и $t = 3$.

Вернемся к исходной переменной:

Неравенство равносильно системе
$$\begin{cases} x-3>0, \\ x-3<0,25^{-2}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x>3, \\ x-3<16, \end{cases} \text{ или } 3 < x < 19.$$

Ответ: 18.

Пример 3. Найдите сумму корней уравнения
$$2\log_4^2(x-5)-\log_4(x-5)-1=0.$$

Решение. Обозначим $\log_4(x-5)=t$.

Решая квадратное уравнение $2t^2-t-1=0$, находим $t_1=1$, $t_2=-0,5$.

Соответственно, $x_1-5=4$, $x_2-5=-0,5$.

Уравнение имеет два корня:
$$x_1=9,\ x_2=4,5.$$

Ответ: 13,5.

Пример 4. Найдите решение системы уравнений
$$\begin{cases} \log_2\left(x^2+3x+4\right)=3, \\ |x+3|=1. \end{cases}$$

Решение. Второе уравнение системы равносильно совокупности:
$$\left[\begin{array}{l} x+3=1 \\ x+3=-1, \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-4. \end{array}\right.$$

Первому уравнению системы удовлетворяет только число -4.

Ответ: -4.

Пример 5. Найдите сумму корней уравнения
$$(x-3)\log_5(4-x^2)=0.$$

Решение. Первый сомножитель обращается в ноль при $x=3$, но при этом значении аргумента не определен второй сомножитель. Следовательно, число 3 не является корнем

Пример 6. Найдите значение выражения
$$V=\log_3 99+\log_3\frac{1}{11}.$$

Решение. Преобразовывать это выражение можно по-разному. Можно воспользоваться формулой для суммы логарифмов:
$$V=\log_3\left(99\cdot\frac{1}{11}\right)=\log_3 9=\log_3 3^2=2\log_3 3=2.$$

А можно преобразовать каждое слагаемое:
$$V=\log_3(11\cdot 9)+\log_3 11^{-1}=$$
$$=\log_3 11+\log_3 9-\log_3 11=\log_3 9=2.$$

Ответ: 2.

1) $\log_2 x=-\frac{2}{3}$, $x=2^{-\frac{2}{3}}$; 2) $\log_2 x=3$, $x=8$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; 8.

Пример 8. Решите уравнение
$$\log_{x-1} x^2=\log_{x-1}(5x-6).$$

Решение. Запишем систему, учитывая ОДЗ:
$$\begin{cases} x^2=5x-6, \\ x^2>0, \\ x-1>0, \\ x-1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x-6=0, \\ x\neq 0, \\ x>1, \\ x\neq 2. \end{cases}$$

Корни первого уравнения: $x=2$ и $x=3$. Всем трем условиям удовлетворяет лишь число 3.

Ответ: 3.

Пример 9. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \log_2\left(x^2+y^2\right)=5, \\ 2\log_4 x+\log_2 y=4. \end{cases}$$

Решение. Левая часть второго уравнения системы определена на множестве, которое задается неравенствами: $x>0$, $y>0$.

Первое уравнение системы дает такое уравнение: $x^2+y^2=32$. Во втором уравнении приведем логарифмы к основанию 2 и выполним преобразования:
$$\log_2 x+\log_2 y=4,\ \log_2 xy=4,$$
откуда $xy=16$. Получаем новую систему относительно x и y:
$$\begin{cases} x^2+y^2=32, \\ xy=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2xy=0, \\ x^2+y^2+2xy=64 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2=0, \\ (x+y)^2=64. \end{cases}$$

Поскольку $x>0$, $y>0$,
$$\begin{cases} x=y, \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=4. \end{cases}$$

Ответ: (4; 4).

ИНДЕКСЫ ПОДПИСКИ | Почта России - 79083 (инд.); - 79584 (орг.) | Роспечать - 32031 (инд.); - 32598 (орг.)

И. ШАНИНА,
р.п. Базарный Карабулак,
Саратовская обл.

8 класс

ПЕРВЫЕ В КОСМОСЕ

Цели урока:
— повторение и обобщение знаний учащихся по разделам: «Статистические характеристики», «Статистические исследования»;
— формирование у обучающихся умения получать, воспринимать, анализировать и обрабатывать информацию, представленную в различных формах;
— развитие познавательного интереса учащихся;
— воспитание чувства патриотизма.
Формы организации учебной деятельности: работа в парах, групповая, коллективная.
Оборудование: интерактивный комплекс.

Ход урока

Учитель. Возможно, вы встречали в литературе термин «прикладная математика» и наверняка задавались вопросом «Что же это за наука?» Прикладная математика — область математики, рассматривающая применение математических методов, алгоритмов в других областях науки и практики. Одной из областей, где математика сыграла и продолжает играть огромную роль, является космонавтика. Кроме теоретического исследования и расчёта конструкции ракеты, математика необходима в течение всего космического полёта. Так, например, *траектория* движения корабля описывается математическими формулами, в основе этого описания лежит такое математическое понятие, как система координат, а в основе обработки данных о траектории лежат понятия математической статистики. Однозначное определение и прогнозирование положения тела в пространстве, необходимые для управления полетом, можно свести к точным математическим алгоритмам.

Создание современной технологии производства и запуска космических кораблей – итог труда многих ученых и инженеров, но тем не менее одну из ведущих ролей здесь играют специалисты, занимающиеся прикладной математикой.

Задачи прикладной математики очень сложны и не изучаются в школе. Но с одним из разделов прикладной математики мы уже знакомы. Это – статистика. На предыдущих уроках мы познакомились со статистическими характеристиками и методами статистических исследований. И сегодня с помощью этих знаний и умений мы попытаемся прикоснуться к славной истории российской космонавтики и узнать много нового и интересного об освоении космоса.

Повторим основные понятия, которые будут необходимы нам для решения задач.

Теоретический тест

(Проводится с помощью интерактивной доски с использованием функции «шторка».)

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 8.

1. Число, наиболее часто встречающееся в данном ряду, называется...

[Модой.]

2. Разность между наибольшим и наименьшим из чисел ряда называется...

[Размахом.]

3. Упорядоченный ряд чисел – это ряд, в котором каждое последующее число .... предыдущего.

[Не меньше.]

4. Число, записанное посередине упорядоченного ряда чисел с нечетным числом членов, называется...

[Медианой.]

5. Частное от деления суммы чисел ряда на число слагаемых называется...

[Средним арифметическим.]

6. Виды диаграмм...

[Столбчатая, круговая.]

7. Динамику изменения статистических данных во времени иллюстрируют с помощью...

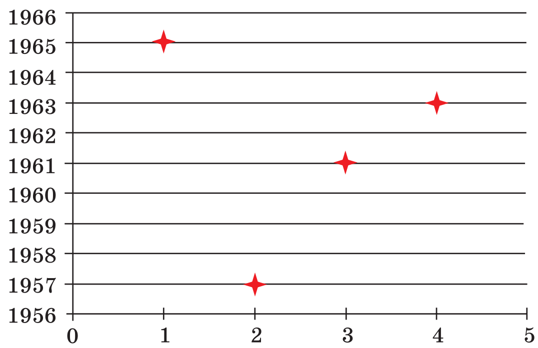
[Полигона.]

8. Интервальные ряды данных изображают с помощью...

[Гистограммы.]

Устные упражнения

Задание 1. С помощью графика поставьте в соответствие каждому событию, отмеченному по оси Ox, год, в котором оно произошло. Занесите ответы в таблицу.



Событие	Дата
Первый выход в открытый космос [Космонавт А.А. Леонов]	
Запуск первого искусственного спутника Земли	
Первый пилотируемый полет в космос [Космонавт Ю.А. Гагарин]	
Первый полет женщины-космонавта [Космонавт В.В. Терешкова]	

Задание 2. Понятие моды относится не только к числовым рядам. Следующий ряд составлен из кличек животных: Шарик, Тузик, Полкан, Белка, Жучка, Стрелка, Стрелка, Шарик, Белка, Мухтар, Белка, Стрелка. Определите моду (моды) ряда.

[Белка, Стрелка.]

Задание 3. На орбитальной станции «Мир» совершено 78 выходов в открытый космос. В выходах участвовали: 29 российских космонавтов; 3 астронавта США; 2 астронавта Франции; 1 астронавт Европейского космического агентства (гражданин Германии). Суммарную длительность пребывания в открытом космосе каждого из космонавтов можно представить в виде ряда:

77 ч 46 мин., 41 ч 59 мин., 31 ч 48 мин.,
44 ч 00 мин., 41 ч 18 мин., 38 ч 33 мин.,
36 ч 29 мин., 34 ч 32 мин., 32 ч 17 мин.,
30 ч 30 мин., 30 ч 30 мин., 21 ч 54 мин.,
19 ч 39 мин., 19 ч 11 мин.

Найдите разницу между наибольшим и наименьшим числами ряда. Как называется эта статистическая характеристика?

[Размах; для данного ряда он составляет 58 ч 35 мин. Кстати, рекорд продолжительности пребывания в открытом космосе принадлежит российскому космонавту Анатолию Саловьеву.]

Коллективное выполнение заданий

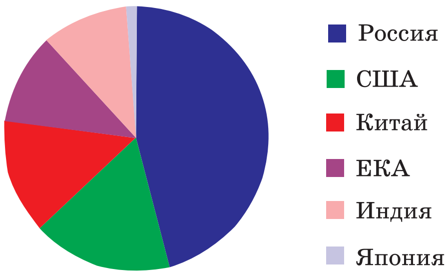
(*Один ученик выполняет построение диаграммы на компьютере или доске, остальные — в тетради.*)

Задание 4. Всего в мире в 2008 г. выведено на орбиту 100 спутника. Россия осуществила запуск 46 космических аппаратов, США — 17, Китай — 14. Европейское космическое агентство (ЕКА) в прошедшем году запустило в космос 11 космических аппаратов. Такое же количество спутников вывела на земную орбиту Индия. Япония осуществила один запуск, выведя на орбиту один космический аппарат. Постройте круговую диаграмму, иллюстрирующую распределение запусков по странам, составив предварительно таблицу относительных частот.

Решение.

Страна	Россия	США	Китай	ЕКА	Индия	Япония
Количество запусков	46	17	14	11	11	1
Относительная частота, %	46	17	14	11	11	1

Одному проценту на диаграмме соответствует угол, равный 3,6°. Учитывая это, определим для каждой группы соответствующий центральный угол и, разбив круг на секторы, получим круговую диаграмму.



Задание 5. 12 апреля 1961 года первый космический полет совершил Юрий Гагарин, его дублером был Герман Титов, резервным космонавтом был Григорий Нелюбов. Для первого полета в космос отобрали трех кандидатов: Гагарин, Титов, Нелюбов. Сколько возможных вариантов распределения между ними обязанностей пилота, дублера и резервного космонавта. Проиллюстрируйте решение с помощью дерева вариантов.

Решение. Введем обозначения: Гагарин — Г, Титов — Т, Нелюбов — Н.

*

Г Г Н *Пилот*

Т Н Г Н Г Т *Дублер*

Н Т Н Г Т Г *Резерв*

Ответ: 6 вариантов.

Работа в группах

Задание 6. Вы провели небольшой социологический опрос, в результате которого каждая из групп выясняла возраст (первая группа), рост (вторая) и вес (третья) своих одноклассников. Представьте эти данные в виде ряда и найдите среднее арифметическое своих рядов.

Сравните полученные данные с требованиями, которые предъявлялись к лучшим пилотам нашей страны для зачисления их в первый отряд космонавтов: возраст не должен превышать 30 лет, вес — 72 кг, а рост — 170 см.

Самостоятельная работа

Задание 7. К основным характеристикам ракетносителей относятся: внешние габариты (максимальные высота и диаметр), используемый тип топлива, число разгонных блоков и стартовых ускорителей, стартовая масса, тяга двигательных установок на уровне моря. В таблице приведены некоторые характеристики для четырех российских ракет-носителей (таблица 1).

По этим данным постройте столбчатые диаграммы, характеризующие: *вариант 1* — высоту; *вариант 2* — диаметр; *вариант 3* — стартовую массу; *вариант 4* — тягу.

Рефлексия

Учащимся предлагается создать синквэйн, то есть составить небольшую схему из пяти строчек. Первая строчка — существительное, как правило, ключевое слово заданной темы или темы урока. Во второй строчке — два прилагательных, представляющих два наиболее характерных признака данного существительного. Третья строчка — три глагола, описывающих наиболее важные процессы, происходящие с данным существительным. Четвертая — ключевая фраза, наиболее важная идея. Пятая строчка — снова существительное, но уже резюме или синоним существительного из первой строчки, метафора.

существительное
прилагательное прилагательное
глагол глагол глагол
ключевая фраза
существительное

Например:

Россия
мощная первая
лидирует созидает создает
интеллектуально и экономически развитая страна
первооткрыватель

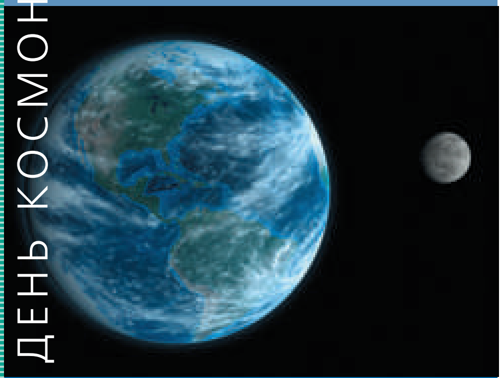
Литература

Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. Алгебра. Элементы статистики и теории вероятностей: Учебное пособие для учащихся 7–9 классов общеобразовательных учреждений. — 3-е изд. — М.: Просвещение, 2005.

Таблица 1

Ракета-носитель	**Высота**, м	**Диаметр**, м	**Стартовая масса**, т	**Тяга**, МН	**Полезные нагрузки**, т
«Союз-2»	50,7	10,3	308,6	3,8	до 9
«Днепр»	34,3	3,0	211	2,8	до 4
«Протон-М»	58,2	7,4	710	11,8	до 24
«Ангара»	63,9	10,6	790	12,2	28

Т. ЕВСТИФЕЕВА,
пос. Свободный,
Саратовская обл.



КОСМИЧЕСКИЙ УРОК ПО ТЕМЕ «ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ»

Тип урока: урок-практикум с элементами исследования и организации проектной деятельности учащихся
Цели урока:
обучающая: обучение решению задач практического содержания, формирование умения строить математические модели, совершенствование вычислительных навыков;
развивающая: развитие творческой самостоятельности, инициативы, реализация принципа связи теории и практики, формирование опыта работы в малых группах;
воспитательная: формирование положительной мотивации, развитие коммуникативных умений, демонстрация значимости математических знаний в практической деятельности.
Оборудование: мультимедийный проектор, компьютер, мультимедийная презентация к уроку.

Индивидуальное задание к данному уроку
Решите задачи:
1. Длина орбиты автоматической станции «Салют-2» равна 41 500 км. Считая орбиту станции круговой, вычислите радиус орбиты.
2. Наибольшее расстояние орбиты автоматической станции «Луна-19» от поверхности Луны равно 135 км, наименьшее —127 км. Считая орбиту станции круговой, найдите ее длину.
Подготовьте историческую справку по задачам.
Оформите решение задачи в виде презентации.

Ход урока

Постановка цели урока

Сегодня у нас урок-практикум по теме «Длина окружности». Мы посвятим его замечательной дате — 50-летию первого полета человека в космос, которая будет отмечаться 12 апреля 2011 года. Назовем урок «космическим», так как задачи, которые мы будем решать, тем или иным образом связаны с темой освоения космоса. Это будут задачи практического содержания, при решении их используются ваши знания по изученной теме.

Актуализация опорных знаний

Повторим основные понятия темы.
— Как вычислить длину окружности?
— Как вычислить длину дуги окружности?

К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 8.

Применим эти формулы для вычисления длины земного, лунного и солнечного экваторов.

(*Два ученика у доски решают задачи 1 и 2, остальные решают задачу 3 — самостоятельно.*)

Задача 1. Диаметр Луны приблизительно равен 3476 км. Найдите длину лунного экватора (с точностью до сотен километров).

Решение. $C = \pi d$, тогда

$$C = 3{,}14 \cdot 3476 \approx 10\,914{,}64 \approx 10\,900 \text{ км.}$$

Ответ: 10 900 км.

Задача 2. Диаметр Солнца равен 1 392 000 км. Найдите длину солнечного экватора (с точностью до тысяч километров).

Решение. $C = \pi d$, тогда

$$C = 3{,}14 \cdot 1\,392\,000 \approx 4\,370\,880 \approx 4\,371\,000 \text{ км.}$$

Ответ: 4371 тыс. км.

Задача 3. Длина земного экватора приблизительно 40 тыс. км. Найдите диаметр и радиус земного экватора (с точностью до сотен километров).

Решение. $C = \pi d$, отсюда

$$d = \frac{C}{\pi} = \frac{40\,000}{3{,}14} \approx 12\,738{,}85 \approx 12\,700 \text{ км.}$$

Ответ: 12 700 км и 6400 км.

Справка. Луна — это спутник Земли, ее ближайший сосед в космосе. Она представляет собой каменистый шар размером с четверть Земли и является самым большим небесным телом в нашем ночном небе. Солнце — центр нашей Солнечной системы, огромный массивный шар, представляющий собой сгусток раскаленного газа. Солнце — мощный источник излучения света и теплоты. Земля — это единственная известная нам обитаемая планета. Земной шар имеет послойное строение. Внешний слой — оболочку — представляет земная кора.

Защита решений домашних задач

К уроку некоторые из вас готовили решение задач на космическую тематику и подбирали к ним исторический материал.

(*Учащиеся представляют презентации своих задач.*)

1. Задача об орбитальной научной станции «Салют-2». Длина орбиты орбитальной станции «Салют-2» равна 41 500 км. Считая орбиту станции круговой, вычислите радиус орбиты.

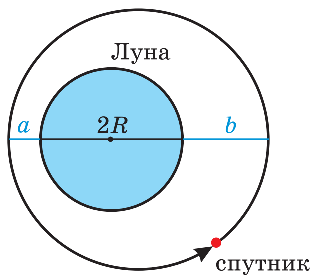
Справка. Третья орбитальная космическая станция (ОКС) «Салют-2» массой 18,5 т была выведена на орбиту ракетой-носителем «Протон-К» 4 апреля 1973 года с космодрома Байконур. Перигей (минимальное удаление от Земли) орбиты составлял 216 км, апогей (максимальное удаление от Земли) — 248 км, наклонение — 51,6°. На 13-е сутки произошла разгерметизация отсеков ОКС, а 25 апреля перестала поступать телеметрическая информация. Станция, пробыв на орбите 54 дня, закончила свою работу и 28 мая 1973 года в результате естественного торможения в верхних слоях атмосферы упала в океан около Австралии. ТАСС 28 мая сообщил, что «программа полета завершена» (не сказав «успешно»). Анализ причин аварии позволил предположить нештатную работу двигательной установки, что привело к прогоранию корпуса станции.

Решение. Если считать орбиту круговой, то ее длину можно вычислить по формуле $C = 2\pi R_{\text{орбиты}}$, откуда $R_{\text{орбиты}} = \frac{C}{2\pi} = \frac{41\,500}{6{,}28} \approx 6608$.

Ответ: 6608 км.

2. Задача об автоматической станции «Луна-19». Наибольшее расстояние орбиты автоматической станции «Луна-19» от поверхности Луны (в апогее) равно 135 км, наименьшее (в перигее) — 127 км. Считая орбиту станции круговой, найдите ее длину.

Справка. Космический аппарат «Луна-19» был предназначен для исследования Луны и межпланетного пространства. Станция была запущена с космодрома Байконур 28 сентября 1971 года с помощью четырехступенчатой ракеты-носителя «Протон-К». В процессе перелета к Луне 29 сентября и 1 октября были проведены коррекции траектории. В результате 3 октября 1971 года автоматическая станция «Луна-19» вышла на орбиту искусственного спутника Луны, близкую к расчетной. В конце срока активного существования (21 октября 1972 года) было проведено два пробных включения двигательной установки, которые показали ее работоспособность. Станция «Луна-19» проработала 13 месяцев вместо запланированных трех. Связь с ней прекратилась 1 ноября 1972 года.



Решение. $R_{\text{Луны}} \approx 1738$ км;

$$R_{\text{орбиты}} = \frac{1}{2}\left(a + b + 2R_{\text{Луны}}\right) = \frac{135+127}{2} + 1738 = 1869 \text{ км.}$$

Длина орбиты: $C = 2\pi R_{\text{орбиты}} \approx 11\,737$ км.

Ответ: 11 737 км.

Постановка проблемы

При решении практических задач самым важным и интересным является переход от текста задачи к так называемой математической модели задачи. Часто это сводится к построению чертежа по тексту задачи. Решив задачу, мы возвращаемся к практической стороне исходной задачи и даем ответ на поставленный вопрос. Для успешного решения домашних задач на космическую тематику как раз и требовалось составить математическую модель.

Научиться составлять математическую модель задачи — одна из целей нашего урока.

Решение «космических» задач

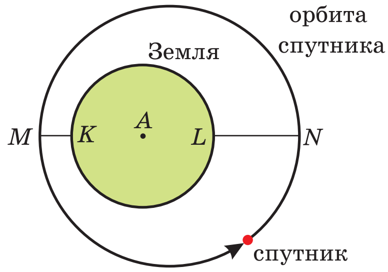
Задачи I уровня сложности

Задача 4. После проведения маневров космический корабль «Союз-12», продолжая полет по околоземной орбите, имел следующие параметры: наибольшее расстояние корабля от поверхности Земли (в апогее) — 347,9 км, наименьшее (в перигее) — 332,9 км. Найдите большую полуось орбиты корабля (радиус Земли считать равным 6400 км).

Справка. Космический корабль «Союз» начал разрабатываться в ОКБ С.П. Королева в 1962 году. На нем предполагалось отработать средства сближения и стыковки космических аппаратов на орбите искусственного спутника Земли, а также конструкцию и системы корабля, обеспечивающие облет Луны с возвращением на Землю.

Решение. Составим математическую модель по условию задачи.

(*Учащиеся анализируют условие задачи, выясняют, что такое полуось орбиты корабля, и делают рисунок к задаче.*)



Большая полуось орбиты корабля равна половине длины отрезка MN, поэтому

$$R_{\text{орбиты}} = \frac{1}{2}(MK + 2R_{\text{Земли}} + LN) =$$

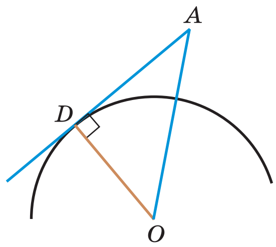
$$= \frac{1}{2}(347,9 + 2\cdot 6400 + 332,9) = 6740,4 \text{ км}.$$

Ответ: 6740,4 км.

Задача 5. 12 апреля 1961 года Ю.А. Гагарин на космическом корабле «Восток» был поднят над Землей на максимальную высоту 327 км. На каком расстоянии от корабля находились в это время наиболее удаленные от него и видимые космонавтом участки поверхности Земли?

Справка. 12 апреля 1961 года в 9 часов 06 минут 59,7 секунд с космодрома Байконур стартовал первый космический корабль «Восток-1» с человеком на борту. Корабль пилотировал летчик-космонавт Ю.А. Гагарин. За 108 минут корабль совершил один виток вокруг Земли, в 10 часов 55 минут спусковой аппарат приземлился недалеко от деревни Смеловка Терновского района Саратовской области.

Решение. Составим математическую модель (чертеж) по условию задачи.



(*Учащиеся анализируют условие задачи и выполняют рисунок.*)

$$DO = R_{\text{Земли}} = 6400 \text{км},$$
$$AO = 6400 + 327 = 6727 \text{ км}.$$

Искомое расстояние AD находим из прямоугольного треугольника ADO по теореме Пифагора:

$$AD = \sqrt{AO^2 - DO^2} \approx 2072 \text{ км}.$$

Ответ: 2072 км.

Замечание. В задачах на вычисление длины орбиты использовались данные о минимальном и максимальном удалении от поверхности Земли (Луны) спутников. Для этих понятий существуют специальные названия:

• апогей — наибольшее расстояние корабля от поверхности Земли;

• перигей — наименьшее расстояние корабля от поверхности Земли.

Также была получена формула для вычисления радиуса орбиты:

$$R_{\text{орбиты}} = \frac{a+b}{2} + R_{\text{Земли}},$$

где a — расстояние в апогее, b — расстояние в перигее.

Задачи II уровня сложности

Задача 6. Апогей орбиты искусственного спутника Земли «Интеркосмос-15» составлял 521 км, перигей — 481 км; период обращения — 94,6 мин. Найдите длину большей полуоси орбиты и скорость полета спутника (орбиту спутника считать круговой).

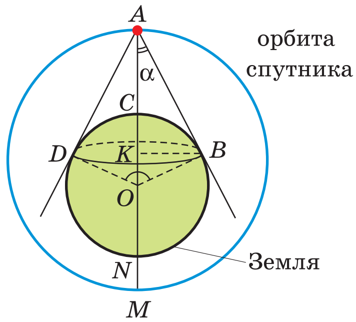
[6872 км, 7,6 км/с.]

Справка. В апреле 1967 года специалистами социалистических стран была принята программа по совместным работам в области исследования и использования космического пространства в мирных целях. Искусственные спутники Земли, созданные для совместных исследований, как и программа, получили название «Интеркосмос». На смену первому поколению ИСЗ пришли более совершенные комплексные лаборатории — автоматические универсальные орбитальные станции (АУОС), значительно отличающиеся от своих предшественников размерами и насыщенностью научной аппаратурой. Первым представителем этого нового поколения стал «Интеркосмос-15», запуск которого был произведен 19 июня 1976 г.

Задача 7. Апогей орбитальной научной станции «Салют-5» составлял 260 км, перигей — 219 км. Найдите величину угла, под которым наблюдается Земля со станции в тот момент, когда станция находится в апогее. Какова длина дуги земной поверхности в плоскости орбиты станции, наблюдаемой из этой же точки?

Справка. Седьмая орбитальная научная станция «Салют-5» была выведена на орбиту ракетой-носителем «Протон» 22 июня 1976 г. и закончила свою работу 8 августа 1977 года, пробыв на орбите 411 суток. Первый экипаж на станцию 7 июля 1976 года доставил космический корабль «Союз-21» (Б. Волынов и В. Жолобов). Стыковка была проведена вручную. 48 суток космонавты находились на станции. Полет был прерван из-за ухудшения здоровья Виталия Жолобова. Второй экипаж (В. Горбатко и Ю. Глазков) был доставлен на станцию 8 февраля 1977 г. «Союз-24». За 16 суток программа была выполнена полностью.

(В ходе коллективного обсуждения и анализа условия задач составляется математическая модель, строится рисунок, общий для обеих задач, затем учащиеся самостоятельно решают задачи по вариантам.)



Проверка решения задачи 7

$MN = 219$ км — расстояние в перигее;

$AC = 260$ км — расстояние в апогее.

Угол, под которым наблюдается Земля со станции в апогее — это угол BAD, искомая длина дуги земной поверхности — это длина дуги BCD.

$OB = R_{\text{Земли}} = 6371$ км,

$AO = R_{\text{Земли}} + AC = 6631$ км.

Из прямоугольного треугольника ABO находим

$$\sin\alpha = \frac{OB}{AO} = \frac{6371}{6631} = 0,9608,$$

тогда $\alpha \approx 73^\circ 54'$ и $\angle BAD \approx 2\alpha \approx 147^\circ 48'$.

Длина дуги BCD

$$L_{BCD} = \frac{\pi R \beta}{180^\circ},$$

где $\beta = 180^\circ - 147^\circ 48' = 32^\circ 12'$; $L_{BCD} \approx 3579$ км.

Ответ: $147^\circ 48'$, 3579 км.

Подведение итогов урока

• Насколько интересными были для вас задачи, связанные с освоением космоса?

• Помогли ли они увидеть практическое применение математики?

• Заинтересовала ли вас история освоения космоса?

Домашнее задание

1. Найти дополнительные сведения об освоении космоса (орбитальные станции «Алмаз», «Мир», «МКС» и др.) и составить свою задачу, используя найденные данные.

2. По материалу урока подготовить мини-проект «Математика и космос».

Литература

1. *Варданян С.С.* Задачи по планиметрии с практическим содержанием. — М.: Просвещение, 1989.

2. Я познаю мир: Детская энциклопедия: Космос. — М.: АСТ, 1989.

Из аналитического отчета ФИПИ по результатам ЕГЭ-2010

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЕГЭ 2011 г.

Определяющим фактором успешной сдачи ЕГЭ по математике является системное качественное изучение курса математики. Итоговое повторение и завершающий этап подготовки к экзамену способствуют выявлению и минимизации лакун в знаниях учащихся, закреплению имеющихся умений, навыков, способов познавательной деятельности. Соответственно, для успешной сдачи ЕГЭ необходимо систематически изучать математику, развивать логическое мышление, отрабатывать навыки решения задач различного уровня.

Контрольные измерительные материалы ЕГЭ 2010 г. ориентируют учителя и учащихся на полноценное изучение предметов математического цикла по действующим учебно-методическим комплектам.

Особое внимание в преподавании математики следует уделить регулярному выполнению упражнений, развивающих базовые компетенции (умение анализировать условие задачи, решать практические задачи, выполнять арифметические действия, простейшие алгебраические преобразования, действия с основными функциями и т.д.).

Для организации непосредственной подготовки выпускников к экзамену учителям рекомендуется выявлять целевые группы учащихся:

первая группа — учащиеся, которые поставили перед собой цель преодолеть порог минимального балла ЕГЭ;

вторая группа — учащиеся, которые поставили перед собой цель получить балл, достаточный для поступления в вуз, не предъявляющий высоких требований к уровню математической подготовки;

третья группа — учащиеся, которые поставили перед собой цель получить высокий балл, необходимый для поступления в вуз, предъявляющий высокие требования к уровню математической подготовки абитуриентов.

Для каждой целевой группы можно сформулировать несколько принципов организации подготовки к ЕГЭ.

Первая целевая группа

Выпускникам этой группы нужно уверенно выполнить 5–6 заданий части 1.

Рекомендуется провести диагностические работы, выявить сильные и слабые стороны математической подготовки каждого и закреплять то, что уже получается. В работе с учащимися первой группы следует широко применять специальную литературу, рассчитанную на подготовку учащихся к выполнению практико-ориентированных задач на проценты, чтение графиков, геометрические понятия и т.п. Уже отмечалось, что основную долю баллов, набранных на экзамене выпускниками этой группы, составляют баллы, полученные именно за практико-ориентированные задания.

Вторая целевая группа

Выпускникам этой группы необходимо уверенно выполнять 11–12 заданий части 1, а также стараться выполнить задания С1 и С2. Практика показывает, что учащиеся этой целевой группы чаще ошибаются в вычислениях при решении заданий практико-ориентированного характера, чем в применении алгебраических алгоритмов. Используя специальную литературу, учителя могут организовать самостоятельную работу учащихся, направленную на повторение и закрепление простейших вычислительных навыков и понятий, необходимых для решения практико-ориентированных заданий.

Следует сориентировать учащихся второй целевой группы на успешное выполнение заданий С1 и С2 второй части, определить исходя из целевых установок ученика, его возможностей и запаса времени ряд заданий из группы С3–С6, на которые целесообразно обратить внимание при организации систематического повторения.

Задача такой работы — сформировать навыки самопроверки и добиться устойчивого результата (на уровне ожидаемого) при выполнении заданий части 1, повторить темы, необходимые для решения определенных заданий части 2.

Третья целевая группа

Выпускникам этой группы необходимо отработать умение уверенно выполнять задания В1–С2. Выпускников этой группы нужно также ориентировать на успешное выполнение заданий С3–С6, скорректировав систему их подготовки в соответствии с затратами времени на решение заданий В1–С2, индивидуальными способностями и уровнем подготовки.

При изучении геометрии необходимо повышать наглядность преподавания, уделять больше внимания изображению геометрических фигур, формированию конструктивных умений и навыков, применению геометрических знаний для решения практических задач. В процессе преподавания геометрии в 10–11-х классах необходимо, прежде всего, уделять внимание освоению базовых знаний курса стереометрии (угол между прямыми в пространстве, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, многогранники и т.д.), а также повторять базовые знания курса планиметрии.

При изучении начал математического анализа следует устранять имеющийся перекос в сторону формальных манипуляций (зачастую не сопровождающихся пониманием смысла производимых действий), уделять больше внимания пониманию основных идей и базовых понятий анализа (геометрический смысл производной и др.).

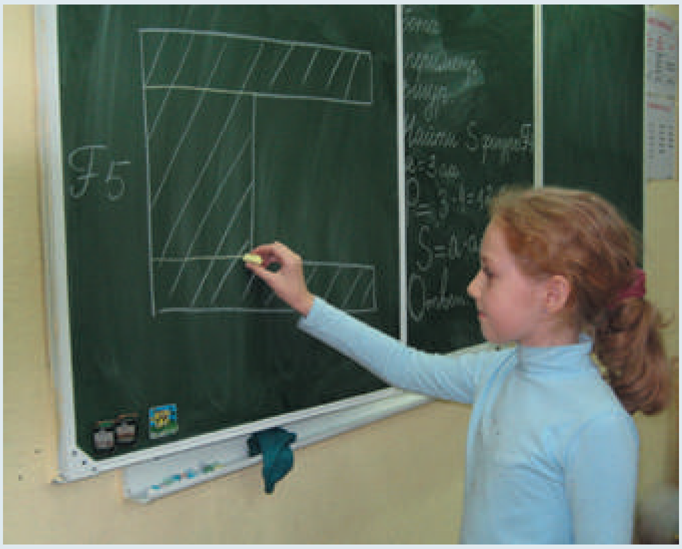
Наличие в Интернете открытого банка заданий первой части ЕГЭ позволяет учителям включать задания из открытого банка в текущий учебный процесс, а на завершающем этапе подготовки к экзамену эффективно проводить диагностику недостатков усвоения отдельных тем и их устранение путем решения конкретных серий задач, составленных учителем с использованием банка заданий.

Следует отметить, что открытый банк заданий является вспомогательным методическим материалом для методистов и учителей. Чрезмерное использование типовых задач из открытого банка может привести к ненужному доминированию банка заданий над содержанием действующих школьных учебников. При таком подходе процесс обучения математике в старшей школе может быть сведен лишь к «натаскиванию» на запоминание текстов решений (или даже ответов) задач из банка, что вредно с точки зрения образования и неэффективно в смысле подготовки к экзамену.

Фото на конкурс

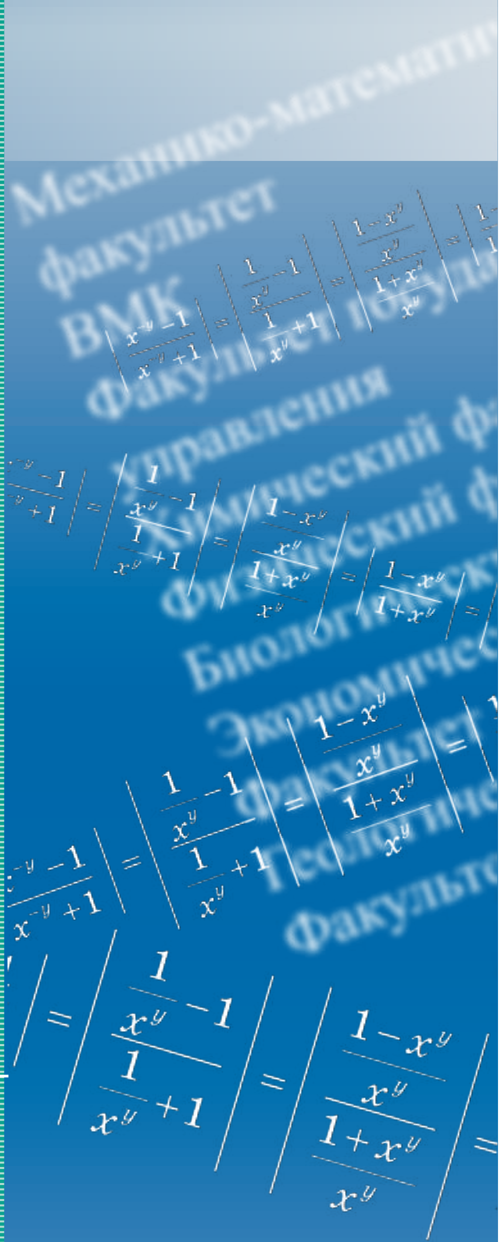
Как разделить сложную фигуру на простые. Подготовка к ЕГЭ? Рановато…

Автор: И.В. Абрамова, центр образования № 1048, Москва



Г. ФАЛИН, А. ФАЛИН,
Москва

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ПОМОЩИ СВОЙСТВ ИНВАРИАНТНОСТИ



Проект демонстрационного варианта ЕГЭ 2011 года[1] под номером С5 содержит следующую задачу.

Задача 1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a\left(x^4+1\right)=y+2-|x|, \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет единственное решение.

Ключевая идея авторского решения заключается в следующем. Неизвестная x входит в уравнения нашей системы через три четные функции: $f_1(x) = x^4$, $f_2(x) = |x|$, $f_3(x) = x^2$. Поэтому система не изменится, если x заменить на $(-x)$. Действительно, подстановка на место x выражения $(-x)$ приведет к системе

$$\begin{cases} a\left((-x)^4+1\right)=y+2-|-x|, \\ (-x)^2+y^2=4, \end{cases}$$

которая в силу тождеств $(-x)^4 = x^4$, $|-x| = |x|$, $(-x)^2 = x^2$ идентична исходной системе (1).

Это свойство «неизменности» (или, как говорят математики, *инвариантности*) системы (1) относительно преобразования $x \to (-x)$ (стрелка «$\to$» означает «заменить на») влечет, что если какая-то пара чисел $(x_0; y_0)$ является решением системы (1), то и пара $(-x_0; y_0)$ также будет решением. Если $x_0 \neq 0$, то пары $(x_0; y_0)$, $(-x_0; y_0)$ — различны. Поэтому система (1) имеет единственное решение только в случае, когда среди решений присутствует пара $(0; y_0)$. При этом не исключено наличие и других решений. Но важнее то, что если среди решений нет пары вида $(0; y_0)$, то множество решений системы не может быть одноэлементным.

Теперь найдем, при каких значениях параметра a система (1) имеет решение вида $(0; y_0)$. Для этого подставим число 0 на место неизвестной x:

$$\begin{cases} a=y_0+2, \\ y_0^2=4. \end{cases}$$

Полученная система содержит две переменных: a и y. Из второго уравнения мы найдем y_0: $y_0 = 2$ или $y_0 = -2$, а из первого — соответствующие значения a: $a = 4$ для $y_0 = 2$, $a = 0$ для $y_0 = -2$.

[1] См.: http:/www1.ege.edu.ru/images/stories/ege_2011/demo_2011/ma_demo_2011.pdf

Итак, система (1) может иметь единственное решение только в двух случаях: $a = 4$ или $a = 0$. В первом случае этим единственным решением может быть только пара (0; 2), а во втором — только пара (0; −2). Еще раз подчеркнем, что это не исключает наличие и других решений; важно лишь то, что для других значений параметра (отличных от 0 или 4) система (1) не может иметь единственного решения.

Для завершения решения задачи достаточно выяснить, сколько решений имеет система (1) для двух «подозрительных» значений параметра: $a_1 = 4$ и $a_2 = 0$.

1. Если $a = 4$, то система (1) примет вид:

$$\begin{cases} 4\left(x^4+1\right)=y+2-|x|, \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4x^4+|x|+2, \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$$

Вопрос о числе решений этой системы проще всего исследовать, решая ее графически[2].

Второе уравнение системы задает на координатной плоскости окружность с центром в начале координат и радиусом $R = 2$. Первое уравнение задает график функции $y = 4x^4 + |x| + 2$. Эта функция — четная, а при $x \ge 0$ она монотонно возрастает от $y = 2$ до $+\infty$, как сумма монотонно возрастающих (при $x \ge 0$) функций $g(x) = x^4$ и $g_2(x) = |x| + 2$. Фигуры, задаваемые системой, пересекаются в единственной точке с координатами $x = 0$, $y = 2$.

Иначе говоря, наша система имеет единственное решение (0; 2). Поэтому значение $a = 4$ нужно включить в ответ задачи.

2. Если $a = 0$, система (1) примет вид:

$$\begin{cases} 0=y+2-|x|, \\ x^2+y^2=4. \end{cases} \qquad (2)$$

Ее легко решить методом исключения[3]. Переписывая первое уравнение как $y = |x| - 2$, мы сведем второе уравнение к

$$x^2 + (|x| - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow |x|^2 - 2|x| = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x| = 0 \text{ или } |x| = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 0 \text{ или } x = \pm 2.$$

Соответственно, наша система имеет три решения: (0; −2), (−2; 0), (2; 0). Поэтому значение $a = 0$ не включается в ответ задачи.

Итак, *ответ* задачи есть: $a = 4$.

Замечание. Отметим, что в случае $a = 0$ нет необходимости решать систему (2). Достаточно любым способом показать, что пара (0; −2) (которая заведомо является решением для $a = 0$) не является единственным решением. Например, можно просто догадаться, что пара (2; 0) также решение, как и пара (−2; 0).

[2] В авторском решении эта система решается методом оценок.
[3] В авторском решении эта система решается графически.

Использовавшееся в приведенном решении понятие *инвариантности*, то есть неизменности математического объекта (числового множества, выражения, функции, уравнения и т.д.) относительно некоторых преобразований, играет чрезвычайно важную роль в современной математике. Некоторые определения и результаты школьной математики (как в алгебре, так и в геометрии) фактически связаны с этим понятием, хотя сам термин «инвариантность» не используется. Например, четная функция (заданная на всей числовой прямой) может быть определена как функция, которая инвариантна относительно замены x на $(-x)$.

Наличие того или иного свойства инвариантности у математического объекта позволяет установить некоторые общие качественные свойства этого объекта, что можно использовать при решении многих задач, связанных с этим объектом.

Разобранная выше задача является типичным примером такого рода. Чтобы помочь читателям лучше усвоить этот метод и понять особенности задач, решаемых с его помощью, мы разберем еще несколько задач (они в разные годы предлагались на вступительных экзаменах в МГУ).

Задача 2. (*Механико-математический факультет, 1966, № 5.*) Найти все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x^y-1}{x^y+1}\right|=a, \\ x^2+y^2=b \end{cases} \qquad (3)$$

имеет только одно решение.

Решение. Относительно неизвестных x и y мы знаем только то, что они — действительные числа. В этой ситуации выражение x^y определено только для $x > 0$ и произвольном y. Значит мы можем поставить вопрос о четности выражений в левых частях уравнений системы относительно переменной y.

Выражение в левой части второго уравнения, очевидно, является четной функцией y.

Левая часть первого уравнения при замене y на $-y$ примет вид:

$$\left|\frac{x^{-y}-1}{x^{-y}+1}\right| = \left|\frac{\frac{1}{x^y}-1}{\frac{1}{x^y}+1}\right| = \left|\frac{\frac{1-x^y}{x^y}}{\frac{1+x^y}{x^y}}\right| = \left|\frac{1-x^y}{1+x^y}\right| = \left|\frac{x^y-1}{x^y+1}\right|,$$

то есть не изменится.

Поэтому если какая-то пара чисел $(x_0; y_0)$ является решением системы (3), то и пара $(x_0; -y_0)$ также будет решением. Если $y_0 \ne 0$, то пары $(x_0; y_0)$, $(x_0; -y_0)$ — различны. Поэтому система (3) имеет единственное решение только в случае, когда среди решений присутствует пара $(x_0; 0)$.

Теперь найдем, при каких значениях параметров a и b система (3) имеет решение вида

$(x_0; 0)$. Подставляя число 0 на место неизвестной y, мы получим: $a = 0$, $b = x_0^2$. Отсюда следует, что параметр b — неотрицателен, а так как выражение x^y в случае действительного показателя y определено лишь для положительных x, можно гарантировать, что $b > 0$, — на этом этапе решения мы не можем сказать ничего более определенного.

Для «подозрительных» значений параметров (то есть для $a = 0$, $b > 0$) система (3) примет вид:

$$\begin{cases} \left| \dfrac{x^y - 1}{x^y + 1} \right| = 0, \\ x^2 + y^2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^y = 1, \\ x^2 + y^2 = b, \end{cases}$$

так что она распадется на две системы:

$$\begin{cases} x > 0, \\ y = 0, \\ x^2 = b \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y^2 = b - 1. \end{cases}$$

Первая система имеет единственное решение: $x = \sqrt{b}$, $y = 0$.

Если $b - 1 < 0$, то вторая система не имеет решений. Поэтому система (3) имеет единственное решение, так что все пары $(a; b)$ вида $(0; b)$, где $0 < b < 1$, удовлетворяют условию задачи.

Если $b - 1 = 0$, то вторая система имеет единственное решение $x = 1$, $y = 0$. Это решение совпадает с единственным решением $x = \sqrt{b}$, $y = 0$ первой системы (мы рассматриваем случай $b - 1 = 0$, то есть $b = 1$). Поэтому система (3) имеет единственное решение, так что пара $(a; b)$ вида $(0; 1)$ удовлетворяет условию задачи.

Если $b - 1 > 0$, то вторая система имеет два решения: $x = 1$, $y = \sqrt{b-1}$ и $x = 1$, $y = -\sqrt{b-1}$. Поэтому система (3) имеет по меньшей мере два решения, так что пары $(a; b)$ вида $(0; b)$, где $b > 1$, не удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $a = 0$, $0 < b \le 1$.

Замечание. Отметим еще раз, что выражение вида x^y, где показатель y является *действительным* числом, в элементарной математике рассматривается только в случае, когда основание x — положительно. Во многих учебниках при $y > 0$ определяется выражение 0^y: *по определению*, $0^y = 0$. Это определение абсолютно формально; в частности, все свойства степеней с действительными показателями формулируются только для положительных оснований, а свойства степеней с целыми показателями — только для ненулевых оснований. Оно оправдано только тем, что для $y > 0$ существует $\lim\limits_{x \to 0+} x^y = 0$.

Если принять это соглашение, то исходная система (3) будет определена не только на множестве $x > 0$, $y \in \boldsymbol{R}$, но и на множестве $x = 0$, $y > 0$. При $a = 1$, $b > 0$ эта система имеет вид:

$$\begin{cases} \left| \dfrac{x^y - 1}{x^y + 1} \right| = 1, \\ x^2 + y^2 = b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^y - 1| = |x^y + 1|, \\ x^2 + y^2 = b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^y = 0, \\ x^2 + y^2 = b > 0. \end{cases}$$

Если принять соглашение, что $0^y = 0$ при $y > 0$, то первое уравнение последней системы равносильно системе

$$\begin{cases} x = 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

Соответственно, исходная система имеет единственное решение $x = 0$, $y = \sqrt{b}$. Поэтому пару $a = 1$, $b > 0$ также следовало бы включить в ответ.

Однако, как принято в подобных случаях (именно так и понимала задачу экзаменационная комиссия механико-математического факультета МГУ), мы считаем, что исходная система имеет смысл только для $x > 0$, $y \in \boldsymbol{R}$. Подробнее по этому поводу см.: *Фалин Г., Фалин А.* Об области определения сложных показательных выражений // Математика, 2009, № 5, с. 33–35.

Задача 3. (*ВМК, устный экзамен, 1997.*) При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = a, \\ \cos(x - y) + xy \le 1 \end{cases} \tag{4}$$

имеет единственное решение?

Решение. Исходная система не меняется при *одновременной* перемене знаков у неизвестных x и y. Иначе говоря, она инвариантна относительно преобразования $(x; y) \to (-x; -y)$. Поэтому если пара чисел $(x_0; y_0)$ является решением системы (4), то и пара $(-x_0; -y_0)$ будет решением. Отсюда следует, что если $(x_0; y_0)$ — единственное решение системы, то $(x_0; y_0) = (-x_0; -y_0)$, откуда $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Пара $(0; 0)$ заведомо является решением неравенства системы (4) и удовлетворяет уравнению этой системы тогда и только тогда, когда $a = 0$. Таким образом, система (4) может иметь единственное решение только в случае $a = 0$.

Проверим, удовлетворяет ли это «подозрительное» значение параметра условию задачи.

Если $a = 0$, то система (4) примет вид:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 0, \\ \cos(x - y) + xy \le 1. \end{cases}$$

Уравнение системы имеет единственное решение $(0; 0)$, которое, как мы уже отмечали, является и решением неравенства системы. Поэтому в случае $a = 0$ исходная система (4) имеет единственное решение, так что проверяемое значение параметра должно быть включено в ответ задачи.

Ответ: $a = 0$.

В двух следующих задачах, в отличие от предыдущей, будет работать не только инвариантность относительно изменения знака у двух неизвестных (причем необязательно одновременной), но и симметричность системы относительно входящих в нее неизвестных (в наших терминах речь идет о инвариантности относительно преобразования $(x; y) \to (y; x)$). Однако как четность, так и симметрия «спрятаны» с помощью замены неизвестных.

Задача 4. (*Факультет государственного управления, 2008, № 7.*) Найти все значения параметра a из интервала $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left| x+\sqrt{3}\cdot y \right| + \left| y-\sqrt{3}\cdot x \right| = 2\cdot \sin a, \\ \left(\sqrt{3}\cdot x+y\right)^2 + \left(\sqrt{3}\cdot y-x\right)^2 = 4\cdot \cos a \end{cases} \qquad (5)$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение. Введем новые неизвестные:

$$u = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \text{ и } v = \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Рассматривая эти соотношения как уравнения относительно x, y, мы получим:

$$x = \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{2}v, \quad y = \frac{1}{2}v + \frac{\sqrt{3}}{2}u.$$

Таким образом, соответствие между парами $(x; y)$ и $(u; v)$ — взаимнооднозначное. Для новых неизвестных система (5) примет вид:

$$\begin{cases} |u| + |v| = \sin a, \\ u^2 + v^2 = \cos a. \end{cases} \qquad (6)$$

Поскольку между парами $(x; y)$ и $(u; v)$ имеется взаимнооднозначное соответствие, системы (5) и (6) имеют одно и то же число решений.

Система (6) не изменится, если изменить знак у одной или обеих переменных u, v, а также если их поменять местами. Поэтому если $(u_0; v_0)$ — решение системы (6), то решениями будут и пары $(-u_0; v_0)$, $(u_0; -v_0)$, $(-u_0; -v_0)$, $(v_0; u_0)$, $(-v_0; u_0)$, $(v_0; -u_0)$; $(-v_0; -u_0)$. Эти восемь пар различны, если одновременно выполнены три условия: $u_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0$, $u_0 \neq v_0$. Поэтому система (6) может иметь четыре решения только в трех случаях: 1) $u_0 = 0$; 2) $v_0 = 0$; 3) $u_0 = v_0$.

Пара $(0; v)$ будет решением тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} |v| = \sin a, \\ v^2 = \cos a, \end{cases}$$

откуда

$$\sin^2 a = \cos a \Leftrightarrow \cos^2 a + \cos a - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

На интервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ уравнение $\cos a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ имеет единственное решение: $a = \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Пара $(u; 0)$ будет решением тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} |u| = \sin a, \\ u^2 = \cos a, \end{cases}$$

что приводит к тому же выводу:

$$a = \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Пара $(u; v)$ будет решением тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 2|u| = \sin a, \\ 2u^2 = \cos a, \end{cases}$$

откуда

$$\sin^2 a = 2\cos a \Leftrightarrow \cos^2 a + 2\cos a - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos a = \sqrt{2}-1.$$

На интервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ уравнение $\cos a = \sqrt{2}-1$ имеет единственное решение: $a = \arccos\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Найдем теперь, сколько решений имеет система (6) для двух «подозрительных» значений параметра:

$$a_1 = \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad a_2 = \arccos\left(\sqrt{2}-1\right).$$

1. Если $a = \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (так что $\cos a = \sin^2 a$), то система (6) примет вид:

$$\begin{cases} |u| + |v| = \sin a, \\ u^2 + v^2 = \sin^2 a. \end{cases}$$

Решая ее методом исключения, мы получим, что она имеет четыре решения: $(0; \sin a)$, $(0; -\sin a)$, $(\sin a; 0)$, $(-\sin a; 0)$. Следовательно, проверяемое значение параметра должно быть включено в ответ задачи.

2. Если $a = \arccos\left(\sqrt{2}-1\right)$ (так что $\cos a = \frac{1}{2}\sin^2 a$), то система (6) примет вид:

$$\begin{cases} |u| + |v| = \sin a, \\ u^2 + v^2 = \frac{1}{2}\sin^2 a. \end{cases}$$

Решая ее методом исключения, мы получим, что она имеет четыре решения:

$$\left(\frac{1}{2}\sin a; \frac{1}{2}\sin a\right), \left(-\frac{1}{2}\sin a; \frac{1}{2}\sin a\right),$$
$$\left(\frac{1}{2}\sin a; -\frac{1}{2}\sin a\right), \left(-\frac{1}{2}\sin a; -\frac{1}{2}\sin a\right).$$

Следовательно, проверяемое значение параметра должно быть включено в ответ задачи.

Ответ: $a_1 = \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $a_2 = \arccos\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Задача 5. (*Химический факультет, 1986, № 5.*) Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{|x-1|} = \sqrt{7|y|}, \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases} \qquad (7)$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение. Введем новые неизвестные: $u = x - 1$ и $v = 7y$. Для них система (7) примет вид:

$$\begin{cases} \sqrt{|u|} + \sqrt{|v|} = 1, \\ u^2 + v^2 = -4a. \end{cases} \qquad (8)$$

Поскольку между парами $(x; y)$ и $(u; v)$ имеется взаимнооднозначное соответствие, системы (7) и (8) имеют одно и то же число решений.

Система (8) не изменится, если изменить знак у одной или обеих переменных u, v, а также если их поменять местами. Поэтому если $(u_0;\ v_0)$ — решение системы (8), то решениями будут и пары $(-u_0;\ v_0)$, $(u_0;\ -v_0)$, $(-u_0;\ -v_0)$, $(v_0;\ u_0)$, $(-v_0;\ u_0)$, $(v_0;\ -u_0)$, $(-v_0;\ -u_0)$. Эти восемь пар различны, если одновременно выполнены три условия: $u_0 \ne 0$, $v_0 \ne 0$, $u_0 \ne v_0$. Поэтому система (8) может иметь четыре решения только в трех случаях: 1) $u_0 = 0$; 2) $v_0 = 0$; 3) $u_0 = v_0$.

Пара $(0;\ v)$ будет решением тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \sqrt{|v|} = 1, \\ v^2 = -4a, \end{cases}$$

откуда $a = -\frac{1}{4}$.

Пара $(u;\ 0)$ будет решением тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \sqrt{|u|} = 1, \\ u^2 = -4a, \end{cases}$$

что приводит к тому же значению параметра:

$$a = -\frac{1}{4}.$$

Пара $(u;\ u)$ будет решением тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 2\sqrt{|u|} = 1, \\ 2u^2 = -4a, \end{cases}$$

что дает еще одно «подозрительное» значение параметра:

$$a = -\frac{1}{32}.$$

Найдем теперь, сколько решений имеет система (8) для этих двух «подозрительных» значений параметра.

1. Если $a = -\frac{1}{4}$, то система (8) примет вид:

$$\begin{cases} \sqrt{|u|} + \sqrt{|v|} = 1, \\ u^2 + v^2 = 1. \end{cases} \qquad (9)$$

Повторным возведением первого уравнения системы (9) в квадрат и некоторыми преобразованиями сведем его к виду

$$|u||v|(|u||v| - 4) = 0.$$

При $u = 0$ имеем два решения системы (9): (0; 1) и (0; –1). При $v = 0$ также имеем два решения: (1; 0), (–1; 0). Система $\begin{cases} |u||v| = 4, \\ u^2 + v^2 = 1, \end{cases}$ очевидно, несовместна. Следовательно, проверяемое значение параметра должно быть включено в ответ задачи. Однако возможно, читателю покажется более интересным другое решение этой системы, с помощью новых переменных $A = \sqrt{|u|} + \sqrt{|v|}$, $B = \sqrt{|u|} \cdot \sqrt{|v|}$:

$$\begin{cases} A = 1, \\ \left(A^2 - 2B\right)^2 - 2B^2 = 1. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения: $(A;\ B) = (1;\ 0)$ и $(A;\ B) = (1;\ 2)$. Первому решению соответствует четыре решения системы (9): (0; 1), (0; –1), (1; 0), (–1; 0). Решение $(A;\ B) = (1;\ 2)$ приводит к несовместной системе относительно неизвестных u и v. Следовательно, проверяемое значение параметра должно быть включено в ответ задачи.

1. Если $a = -\frac{1}{32}$, то система (8) примет вид:

$$\begin{cases} \sqrt{|u|} + \sqrt{|v|} = 1, \\ u^2 + v^2 = \frac{1}{8}. \end{cases} \qquad (10)$$

Как и систему (9), решим ее с помощью переменных $A = \sqrt{|u|} + \sqrt{|v|}$, $B = \sqrt{|u|} \cdot \sqrt{|v|}$:

$$\begin{cases} A = 1, \\ \left(A^2 - 2B\right)^2 - 2B^2 = \frac{1}{8}. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения: $(A;\ B) = \left(1;\ \frac{1}{4}\right)$ и $(A;\ B) = \left(1;\ \frac{7}{4}\right)$. Первому решению соответствует четыре решения системы (10): $\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4};\ -\frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{4};\ -\frac{1}{4}\right)$. Решение $(A;\ B) = \left(1;\ \frac{7}{4}\right)$ приводит к несовместной системе относительно неизвестных u и v. Следовательно, проверяемое значение параметра должно быть включено в ответ задачи.

Ответ: $a_1 = -\frac{1}{4}$, $a_2 = -\frac{1}{32}$.

Задача 6. (*Экономический факультет (отделение менеджмента), 2003, апрель, № 5.*) Найти все значения параметра b, при которых уравнение

$$b^2 \sin\left(\frac{\pi+2}{2} - x\right) + \sin^2\left(\frac{2x}{b+1} - \frac{2}{b+1}\right) - b\sqrt{4x^2 + 8 - 8x} =$$

$$= 3 + \arcsin\,(1 - x)$$

имеет единственное решение.

Решение. Выделяя полный квадрат в выражении $4x^2 + 8 - 8x$ под радикалом, мы получим: $4(x - 1)^2 + 4$. Кроме того, нетрудно заметить, что аргументы синусов в левой части также содержат повторяющийся блок $x - 1$:

$$\frac{\pi+2}{2} - x = \frac{\pi}{2} - (x - 1),$$

$$\frac{2x}{b+1} - \frac{2}{b+1} = \frac{2(x-1)}{b+1}.$$

Поэтому введем новую неизвестную $t = x - 1$. Для нее исходное уравнение примет вид:

$$b^2 \cos t + \sin^2 \frac{2t}{b+1} - 2b\sqrt{t^2 + 1} = 3 + \arcsin\,|t|. \qquad (11)$$

Поскольку между t и x существует взаимно однозначное соответствие, вопрос задачи останется неизменным: при каких значениях параметра b уравнение (11) имеет единственный корень?

Неизвестная t входит в это уравнение только через четные функции. Поэтому оно не изменится, если t заменить на $(-t)$, так что уравнение (11) имеет единственный корень только в случае, когда среди корней присутствует число $t_0 = 0$ (но при этом не исключено наличие и других корней).

Найдем, при каких значениях параметра b число 0 является корнем уравнения (11). Для этого подставим число 0 на место неизвестной. После несложных упрощений мы получим систему

$$\begin{cases} b^2 - 2b - 3 = 0, \\ b + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3; -1, \\ b \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow b = 3.$$

Обратим внимание читателя на условие $b + 1 \neq 0$ — оно обеспечивает существование члена $\sin^2 \dfrac{2t}{b+1}$ и тем самым гарантирует равносильность проделанных упрощений.

Для завершения решения задачи достаточно выяснить, сколько корней имеет наше уравнение для «подозрительного» значения параметра.

Если $b = 3$, то уравнение (11) примет вид:

$$9\cos t + \sin^2 \frac{t}{2} - 6\sqrt{t^2+1} = 3 + \arcsin|t|.$$

Понизим степень числа $\sin^2 \dfrac{t}{2}$:

$$17\cos t - 12\sqrt{t^2+1} = 5 + 2\arcsin|t|.$$

На множестве $-1 \le t \le 1$ (где определено это уравнение) функция $f(t) = 17\cos t - 12\sqrt{t^2+1}$ (левая часть уравнения) сначала возрастает от $f(-1) = 17\cos 1 - 12\sqrt{2}$ до $f(0) = 5$, а затем убывает до значения $f(1) = f(-1)$ (функция $f(t)$ — четная). Функция $g(t) = 5 + 2\arcsin|t|$ (правая часть уравнения), наоборот, сначала убывает от $g(-1) = 5 + \pi$ до $g(0) = 5$, а затем возрастает до значения $g(1) = g(-1)$ (функция $g(t)$ — четная). Поэтому уравнение $f(t) = g(t)$ имеет единственный корень $t = 0$.

Следовательно, проверяемое значение параметра b нужно включить в ответ задачи.

Ответ: 3.

Задача 7. (*Факультет психологии, 1995, июль, № 5.*) Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \le -\frac{x^2+9}{a+\cos x} - a \qquad (12)$$

имеет единственное решение.

Решение. Неравенство (12) инвариантно относительно преобразования $x \to (-x)$. Поэтому если оно имеет единственное решение x_0, то $x_0 = 0$.

Число x_0 является решением неравенства (12) тогда и только тогда, когда параметр a удовлетворяет неравенству

$$1 - 2\cdot 3 \le -\frac{9}{a+1} - a \Leftrightarrow \frac{(a-2)^2}{a+1} \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a < -1 \text{ или } a = 2.$$

Проверим «подозрительные» значения параметра.

1. Если $a = 2$, то неравенство (12) примет вид:

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \le -\frac{x^2+9}{2+\cos x} - 2.$$

Поскольку выражение $2 + \cos x$ положительно при всех x, это неравенство равносильно неравенству

$$(\cos x + 2)^2 - 2\sqrt{x^2+9}(\cos x + 2) + \left(x^2+9\right) \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\cos x + 2 - \sqrt{x^2+9}\right)^2 \le 0,$$

которое, в свою очередь, сводится к уравнению

$$\cos x + 2 = \sqrt{x^2+9}.$$

Левая часть этого уравнения принимает значения из отрезка $[1; 3]$, а правая — из промежутка $[3; +\infty)$. Поэтому равенство левой и правой частей возможно тогда тогда, когда они порознь равны 3:

$$\begin{cases} \cos x + 2 = 3, \\ \sqrt{x^2+9} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0,$$

так что проверяемое значение параметра нужно включить в ответ задачи.

2. Если $a < -1$, то выражение $\cos x + a < \cos x - 1$ и поэтому отрицательно при всех x. Значит, для $a < -1$ исходное неравенство (12) равносильно неравенству

$$(\cos x + a)^2 - 2\sqrt{x^2+9}(\cos x + a) + \left(x^2+9\right) \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\cos x + a - \sqrt{x^2+9}\right)^2 \ge 0.$$

Последнее неравенство справедливо всюду, где определено, то есть при всех $x \in \boldsymbol{R}$. Таким образом, при $a < -1$ множеством решений исходного неравенства (12) будет вся числовая прямая. Значит, ни одно из этих значений параметра не включается в ответ задачи.

Ответ: $a = 2$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8. (*Факультет почвоведения, 2001, июль, № 6.*) При каких значениях параметра b уравнение

$$\operatorname{tg}|b| = \log_2(\cos x - |x|)$$

имеет ровно один корень?

Задача 9. (*Механико-математический факультет, 1990, июль, № 4.*) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0 \qquad (13)$$

имеет единственное решение.

Задача 11. (*Экономический факультет, 2008, № 6.*) Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\frac{8}{\pi}\operatorname{arctg}\left(1+\frac{x}{4}\right)\log_{\sqrt{17}+4}\left(x+4+\sqrt{x^2+8x+17}\right) =$$
$$= a^2 - a\sin\left(\pi\cdot\frac{x^2+8x-64}{32}\right) - 2$$

имеет единственное решение, и определите это решение.

Задача 10. (*Геологический факультет, 2003, май, № 6.*) При каких значениях a уравнение
$$2\pi^2(x-1)^2 + 4a\cos(2\pi x) - 9a^3 = 0$$
имеет единственное решение?

Задача 12. (*Химический факультет, 1999, июль, № 6.*) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$\left|\frac{x\left(2^x-1\right)}{2^x+1}+2a\right|=a^2+1$$
имеет нечетное число решений.

Задача 13. (*ВМК, 1998, апрель, № 5.*) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$2^{\frac{2x}{1+x^2}}+a\cdot\cos\frac{x^2-1}{x}+a^2-\frac{5}{4}=0 \qquad (14)$$
имеет единственное решение.

Задача 14. (*Механико-математический факультет, 2000, март, № 5.*) При каких значениях параметра a уравнение
$$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x+\left(\frac{3}{2}\right)^{a-x}-\frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^a-\frac{8}{5}\right)\times$$
$$\times\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{2a-2x-3}-4\left(\frac{3}{2}\right)^{2a-5}+2\right)=0$$
имеет хотя бы одно решение и каждое его решение является целым числом?

Задача 15. (*Механико-математический факультет, 1966, № 5.*) Найдите все значения a, при которых система
$$\begin{cases}2^{|x|}+|x|=y+x^2+a,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$
имеет только одно решение (a, x, y — действительные числа).

Задача 16. (*Московская школа экономики, 2005, июль, № 7.*) Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений
$$\begin{cases}\left(x^2+1\right)b=y+\cos 2x,\\ 2^{|\sin x|}+|y|=2\end{cases}$$
имеет единственное решение.

Задача 17. (*Экономический факультет (отделение кибернетики), 1987, № 6.*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система
$$\begin{cases}3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a,\\ x^2+y^2=1\end{cases} \qquad (15)$$
имеет единственное решение.

Задача 18. (*Механико-математический факультет, устный экзамен, 2006.*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система
$$\begin{cases}3xy+3ax-ay-a^2-3=0,\\ 9x^2+9y^2-6ax+18ay+7a^2-2a-17=0\end{cases}$$
имеет ровно два различных решения.

Задача 19. (*Факультет почвоведения, 2007, июль, № 7.*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система
$$\begin{cases}\left(5-2\sqrt{6}\right)^x+\left(5+2\sqrt{6}\right)^x-5a=y-|y|-8,\\ x^2-(a-4)y=0\end{cases}$$
имеет единственное решение.

Задача 20. (*Механико-математический факультет, 1966, № 5.*) Найдите все значения a и b, при которых система
$$\begin{cases}xyz+z=a,\\ xyz^2+z=b,\\ x^2+y^2+z^2=4\end{cases}$$
имеет только одно решение (a, b, x, y, z — действительные числа).

Ответы

8. $b=\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение инвариантно относительно преобразования $x\to -x$.

9. $a_1=0$, $a_2=2\sin 1$. *Указание.* Уравнение инвариантно относительно преобразования $x\to -x$.

10. $a_1=0$, $a_2=-\frac{2}{3}$. *Указание.* Сделайте замену $t=x-1$ и проверьте, что уравнение инвариантно относительно преобразования $t\to -t$.

11. $a=1$, $x=-4$. *Указание.* Сделайте замену $t=x+4$ и проверьте, что уравнение инвариантно относительно преобразования $t\to -t$.

12. $a_1=1$, $a_2=-1$. *Указание.* Уравнение инвариантно относительно преобразования $x\to -x$.

13. $a=-\frac{3}{2}$. *Указание.* Уравнение инвариантно относительно преобразования $x\to\frac{1}{x}$.

14. 1; $\frac{5}{2}$. *Указание.* Уравнение инвариантно относительно преобразования $x\to a-x$.

15. 0. *Указание.* Система инвариантна относительно преобразования $(x; y)\to(-x; y)$.

16. 2. *Указание.* Система инвариантна относительно преобразования $(x; y)\to(-x; y)$.

17. $\frac{4}{3}$. *Указание.* Система инвариантна относительно преобразования $(x; y)\to(-x; y)$.

18. -1; $\frac{1}{3}$. *Указание.* Сделайте замену $u=x-a$, $v=y-\frac{a}{2}$ и проверьте, что система инвариантна относительно преобразований $(u; v)\to(-u; -v)$ и $(u; v)\to(v; u)$.

19. $a_1=2$, $a_2=4$. *Указание.* Система инвариантна относительно преобразования $(x; y)\to(-x; y)$.

20. $a=b=-2$. *Указание.* Система инвариантна относительно преобразования $(x; y; z)\to$ $\to(-x; -y; z)$.

В. АРНОЛЬД

Опубликовано в книге: Арнольд В.И. Математическое понимание природы: Очерки удивительных явлений и их понимания математиками (с рисунками автора). – М.: МЦНМО, 2009.

ДВА СЮЖЕТА НА ТЕМУ КОСМОСА

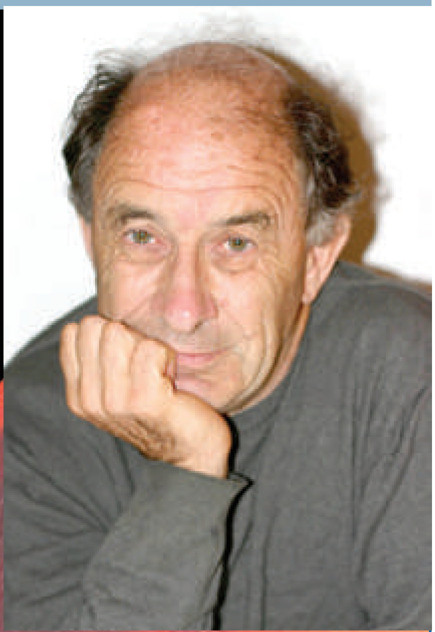


Фото с сайта http://ru.wikipedia.org

> Примеры учат не меньше, чем правила, а ошибки — больше, чем правильные, но непонятные доказательства.
> Б. Пастернак писал, что «вопрос о пользе поэзии возникает только при ее упадке, в то время как в периоды ее процветания никто не сомневается в полной ее бесполезности.
> Математика — не совсем поэзия, но я и в ней стремлюсь не допустить упадничества, проповедуемого врагами всех естественных наук.

Эксцентриситет кеплеровой орбиты Марса

Математическая модель следующих задач одинакова:

Гипотенуза прямоугольного треугольника имеет длину 1 м, а катет — 10 см. Найти длину второго катета.

Математическое «решение» — по теореме Пифагора

$$\sqrt{1-\left(\frac{1}{10}\right)^2}\ \text{м}$$

— неудовлетворительно. Дело в том, что, поскольку

$$(1-a)^2 = 1-2a+a^2 \approx 1-2a$$

(при малых a с весьма малой ошибкой a^2),

$$\sqrt{1-A} \approx 1-\frac{A}{2}.$$

В случае $A=\frac{1}{100}$ получается $1-\frac{1}{200}$ м, то есть 99,5 см: длинный катет на вид неотличим по длине от гипотенузы, разница в полпроцента незаметна, хотя малый угол треугольника не так уж мал (около 6°).

Эксцентриситет кеплерова эллипса Марса составляет примерно 0,1. Когда Кеплер нарисовал[1] орбиту Марса, он принял ее за окружность, со смещенным из центра Солнцем. Почему он так ошибся?

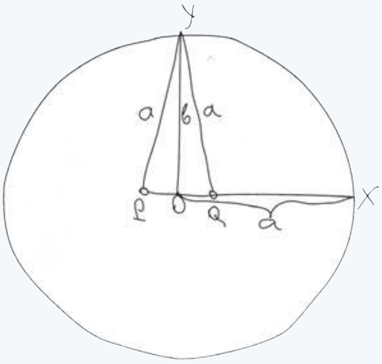
Решение. Эллипс — это геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых до двух фиксированных (называемых фокусами) точек P и Q постоянна. Обозначим эту сумму расстояний через $2a$. Тогда для эллипса с центром O (посредине между фокусами) и полуосями OX и OY мы находим:

$|OX| = a$ (поскольку $|PX| + |QX| = 2a$);

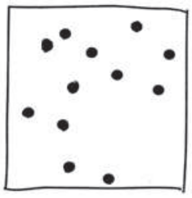
$|OY| = a$ (поскольку $|PY| = |QY|$, $|PY| + |YQ| = 2a$);

$|OQ| = ea$ (это — определение эксцентриситета e).

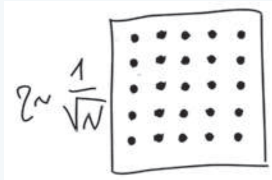
[1] На основании глазомерных наблюдений своего учителя Тихо Браге, сделанных за много десятков лет в обсерватории Ураниборг, на принадлежавшем Тихо Браге острове между Эльсинором и Копенгагеном: впоследствии Ньютон посылал в эту обсерваторию Галлея с телескопом, чтобы доказать, что и телескопические наблюдения могут давать столь же высокую точность, что и наблюдения Тихо Браге.



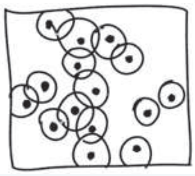
1



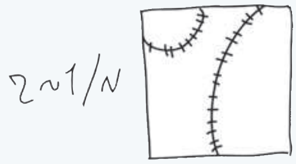
2



4



3



5

Из прямоугольного треугольника OYQ мы находим (1; здесь и далее нумерация ред.):

$$|OY| = \sqrt{|QY|^2 - |OQ|^2} = \sqrt{a^2 - a^2e^2} = a\sqrt{1-e^2} \approx a\left(1-\frac{e^2}{2}\right).$$

Для эксцентриситета $e = 0{,}1$ фокус сдвинут от центра на 10% длины большей полуоси, $|OX| = a$, а малая ось короче большой всего на полпроцента (какой разницы Кеплер вначале и не заметил).

Перколяция и гидродинамика Вселенной

Рассмотрим N точек в какой-то области евклидова пространства (например, в единичном кубе $I^n \subset \boldsymbol{R}^n$, скажем, в квадрате на евклидовой плоскости) (2).

Если число r достаточно мало, то шары радиуса r с центрами в этих точках не пересекаются.

Если же радиус r больше, то не только некоторые шары пересекаются, но некоторые пересекающиеся шары даже образуют цепи длины порядка 1, и по этим цепям можно добраться от одной стороны куба до противоположной.

В этом случае говорят, что произошла перколяция: если исходная область заполнена материалом сосуда, в котором имеется N зародышей пороков, и каждый порок вырос до шаровой дыры радиуса r, то, если наступила перколяция, сосуд начнет течь.

Радиусом первокляции системы точек называется наименьший радиус r шаров с центрами в этих точках, при котором происходит перколяция (3).

Радиус перколяции зависит не только от числа центров перколяции N, но и от геометрии их расположения.

Задача, которую мы сейчас обсудим, состоит в исследовании того, как убывает радиус перколяции r при росте числа точек для разных распределений этих центров перколяции в материале сосуда.

Для правильного решетчатого заполнения трехмерного куба N центрами расстояние между соседними центрами будет порядка $\frac{1}{\sqrt[3]{N}}$, так что радиус перколяции — порядка $N^{-\frac{1}{3}}$.

Этот вывод сохраняется и для менее регулярного распределения центров, даже случайным образом набросанных в куб: радиус перколяции системы N точек в I^n убывает при $N \to \infty$, как правило, как $\frac{C}{N^{\frac{1}{n}}}$. (4)

Если же N центров перколяции расположены в кубе I^3 не хаотически, а, например, вдоль некоторой гладкой кривой, то радиус перколяции будет гораздо меньше, а именно $\frac{C}{N}$.

Для расположения N центров перколяции вдоль гладкой поверхности, вложенной в куб I^3, радиус перколяции будет убывать при $N \to \infty$ промежуточным образом между двумя описанными: $r \sim \frac{C}{N^{\frac{1}{2}}}$ (для распределения N центров вдоль k-мерного подмногообразия в I^n то же рассуждение дает радиус перколяции порядка $\frac{1}{N^{\frac{1}{k}}}$). (5)

Строгие математические доказательства всех перечисленных результатов не просты, прежде всего потому, что нужно точно определить и что такое «случайное заполнение» подмногообразия N центрами перколяции, и какие подмногообразия допускаются.

Но физики, химики и астрономы смело используют подобную «стохастическую геометрию», не очень заботясь о строгих обоснованиях — и получаются впечатляющие нетривиальные выводы.

Например, в космологии важно понять, как распределены во Вселенной галактики: тяготеют ли они к расположению вдоль каких-либо поверхностей или линий, или образуют скопление галактик в отдельных точках — или же равномерно распределены повсюду, как случайно набросанные в куб N точек предыдущего примера?

Ответы на эти вопросы о структуре скоплений галактик могут пролить свет на труднейшие проблемы исследования их происхождения.

Первой особенностью распределения наблюденных астрономами галактик было наличие огромных пустых мест между ними, где галактик нет.

Эти дыры навели на мысль, что галактики почему-то предпочитают располагаться не наугад, в вдоль некоторых специальных двумерных поверхностей или одномерных кривых (которые, пересекаясь, могут также образовывать сети).

Астрономы и космологи вычислили радиус перколяции системы тысяч наблюденных галактик. Размерность многообразия, где они скапливаются, получилась из сравнения этого радиуса перколяции с числом N наблюденных галактик. Радиус перколяции оказался, по порядку величины, $\frac{C}{N^{\alpha}}$, где $\frac{1}{2}<\alpha<1$.

Это означает «многообразие размерности полтора» — по-видимому, это не очень гладкая поверхность, где плотность распределения галактик больше, чем в дополнительных «пустых» областях (dim = 2), но на этой поверхности выделяются еще отдельные линии (dim = 1), где плотность еще больше, чем на поверхности (не исключено еще и дополнительное повышение плотности около особых точек этих линий (dim = 0)).

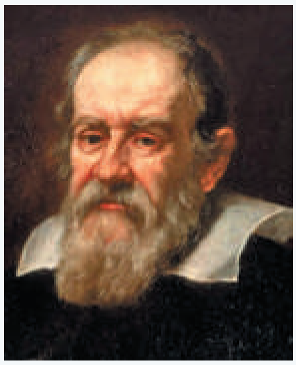
Все эти выводы из найденной величины радиуса перколяции подтверждены детальным анализом пространственного распределения галактик (да и «гидродинамикой Вселенной», объясняющей происхождение этих особенностей плотности случайными неоднородностями исходного поля скоростей разлетающихся после «большого взрыва» частей Вселенной).

Преимущество математического подхода, основанного на радиусе перколяции, перед непосредственным разглядыванием наблюденного пространственного распределения состоит в том, что человеку свойственно объединять случайно близкие объекты в более ему удобные структуры (разделяя, например, звездное небо на субъективно определяемые созвездия — в Китае 7 звезд ковша Большой Медведицы издавна распределены на два созвездия, состоящие из коней и кареты).

Перколяционный подход заменяет эти субъективно определенные структуры объективной характеристикой распределения изучаемых объектов, не зависящей от произвола исследователя.

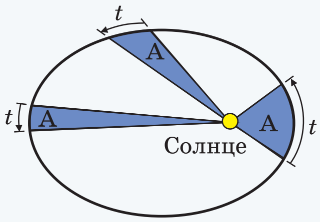
Ти́хо БРА́ГЕ (1546–1601) — датский астроном, астролог и алхимик эпохи Возрождения. Первым в Европе начал проводить систематические и высокоточные астрономические наблюдения, на основании которых Кеплер вывел законы движения планет.

Ио́ганн КЕПЛЕР (1571–1630) — немецкий математик, астроном, оптик и астролог. Открыл законы движения планет.

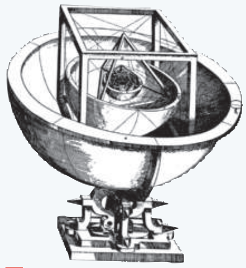


Галиле́о ГАЛИЛЕЙ (1564–1642) — итальянский физик, механик, астроном, философ и математик, оказавший значительное влияние на науку своего времени. Он первым использовал телескоп для наблюдения небесных тел и сделал ряд выдающихся астрономических открытий.

1



2



3

1. Система мира Тихо Браге

2. Второй закон Кеплера: закрашенные площади равны и проходятся за одинаковое время

3. «Кубок Кеплера»: модель Солнечной системы из пяти платоновых тел

Интерес к астрономии появился у Кеплера еще в детские годы. Поступив в университет, он впервые услышал об идеях Николая Коперника и сразу стал их приверженцем.

В 1596 г. вышла в свет его первая книга «Тайна мира». В ней Кеплер попытался найти тайную гармонию Вселенной, для чего сопоставил орбитам пяти известных тогда планет (сферу Земли он выделял особо) различные «платоновы тела» (правильные многогранники). Эта работа в дальнейшем, после открытий самого Кеплера, утратила свое первоначальное значение уже хотя бы потому, что орбиты планет оказались не круговыми. Книгу «Тайна мира» Кеплер послал Галилею и Тихо Браге.

Галилей одобрил гелиоцентрический подход Кеплера, хотя мистическую нумерологию не поддержал. В дальнейшем они вели оживленную переписку, и это общение с «еретиком»-протестантом на суде над Галилеем было признано как отягчающее вину Галилея.

Тихо Браге также высоко оценил знания Кеплера, оригинальность мысли и в 1600 г. пригласил его к себе. Тот принял приглашение и переехал в Прагу.

Но взгляды Коперника и Кеплера на астрономию Тихо Браге разделял только отчасти. Чтобы сохранить геоцентризм, Браге предложил компромиссную модель: все планеты, кроме Земли, вращаются вокруг Солнца, а Солнце вращается вокруг неподвижной Земли. Эта теория в течение нескольких десятилетий служила своеобразным прикрытием для тех астрономов, кто не решался открыто признать правоту Коперника.

Тихо Браге за много лет составил объемный труд по наблюдению планет и сотен звезд, причем точность его измерений была существенно выше, чем у всех предшественников. Для повышения точности Браге применял как технические усовершенствования, так и специальную методику нейтрализации погрешностей наблюдения. Особо ценной была систематичность измерений. Он разработал проект и построил первое в Европе здание, специально предназначенное для астрономических наблюдений – обсерваторию, названную им Ураниборг (замок Урании) в честь музы астрономии Урании.

После смерти Браге Кеплер становится его преемником. На протяжении нескольких лет он изучает данные Браге и в результате приходит к выводу, что траектория движения Марса представляет собой не круг, а эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце. Это положение известно сегодня как *первый закон Кеплера*.

Дальнейший анализ привел ко *второму закону*: радиус-вектор, соединяющий планету и Солнце, в равное время описывает равные площади. Это означало, что чем дальше планета от Солнца, тем медленнее она движется.

Оба закона были сформулированы Кеплером в 1609 г. в книге «Новая астрономия», причем, осторожности ради, он относил их только к Марсу. Новая модель движения вызвала огромный интерес среди ученых, хотя не все они ее приняли. Галилей Кеплеровы эллипсы решительно отверг.

В 1610 г. Галилей сообщает Кеплеру об открытии спутников Юпитера. Кеплер встречает это сообщение недоверчиво и в полемической работе «Разговор со Звездным вестником» приводит несколько юмористическое возражение: «непонятно, к чему быть [спутникам], если на этой планете нет никого, кто бы мог любоваться этим зрелищем». Но позже, получив возможность пользоваться телескопом, Кеплер изменил свое мнение.

В 1612 г. Кеплер переезжает в Линц, где продолжает астрономические исследования и в 1618 г. открывает *третий закон*: отношение куба среднего удаления планеты от Солнца к квадрату периода обращения ее вокруг Солнца есть величина постоянная для всех планет: $a^3/T^2 = \mathrm{const}$. Этот результат Кеплер публикует в завершающей книге «Гармония мира», причем применяет его уже не только к Марсу, но и ко всем прочим планетам (включая, естественно, и Землю), а также к Галилеевым спутникам.

В 1616 г. Римская церковь официально определяет гелиоцентризм как опасную ересь. В 1632 г. выходит в свет книг Галилея «Диалог о двух главнейших системах мира — птолемеевой и коперниковой», итог почти 30-летней работы. Книга вызвала негодование церкви, и 21 апреля 1633 г. он предстал перед судом инквизиции...

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ

$$b_n=b_1q^{n-1}$$

С древних времен художники предпринимали попытки создать идеализированную, эталонную модель гармонически развитого тела. И чаще других для его математического описания они использовали пропорции золотого сечения. Согласно французскому архитектору Ле Корбюзье, в рельефе из храма фараона Сети I в Абидосе и в рельефе, изображающем фараона Рамзеса, пропорции фигур соответствуют золотому сечению, эти же пропорции присутствуют в фасаде древнегреческого храма Парфенона, в циркуле из древнеримского города Помпеи и т. д.

Модулор — система пропорций, предложенная Ле Корбюзье в 1940-х годах. Основу Модулора составляют:

- размеры и пропорции человеческого тела — за исходные величины взят условный рост человека; его высота до солнечного сплетения и с поднятой рукой приняты равными 183, 113 и 226 см;
- золотое сечение;
- ряд чисел Фибоначчи.

Ле Корбюзье основывался на пропорциях человеческого тела, которые восходят к описаниям Витрувия, великого римского архитектора и теоретика архитектуры, жившего во второй половине I века до н. э., и на Витрувианском человеке — рисунке, сделанном Леонардо Да Винчи в 1490–92 годах.

Введение Модулора преследовало цель внести в современную архитектуру и художественное конструирование модуль, основанный на измерении человека и пропорциях красоты, заложенных в природе. Модулор использован в ряде построек самого Ле Корбюзье, и он оказал влияние на практику мировой современной архитектуры и особенно дизайна.