

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКАЯ ГАЗЕТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

1–15 март 2011

mat.1september.ru

основана в 1992 г.

5



$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510\dots$

ЧИСЛО π | см. с. 48

издательский до

Первое сентября

1september.ru

МАТЕМАТИКА

индексы подписки Почта россии - 79083 (инд.); - 79584 (орг.) Роспечать - 32031 (инд.); - 32598 (орг.)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ
«ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»

Главный редактор:

Артем Соловейчик
(генеральный директор)

Коммерческая деятельность:

Константин Шмарковский
(финансовый директор)

Развитие, IT и координация проектов:

Сергей Островский
(исполнительный директор)

Реклама и продвижение:

Марк Сартан

Мультимедиа, конференции

и техническое обеспечение:

Павел Кузнецов

Производство:

Станислав Савельев

Административно-хозяйственное

обеспечение: Андрей Ушаков

Дизайн:

Иван Лукьянов, Андрей Балдин

Педагогический университет:

Валерия Арсланьян
(ректор)

ГАЗЕТЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:

Первое сентября – Е. Бирюкова,

Английский язык – А. Громушкина,

Библиотека в школе – О. Громова,

Биология – Н. Иванова,

География – О. Коротова,

Дошкольное

образование – М. Аромштам,

Здоровье детей – Н. Сёмина,

Информатика – С. Островский,

Искусство – М. Сартан,

История – А. Савельев,

Классное руководство

и воспитание школьников – О. Леонтьева,

Литература – С. Волков,

Математика – Л. Рослова,

Начальная школа – М. Соловейчик,

Немецкий язык – М. Бузоева,

Русский язык – Л. Гончар,

Спорт в школе – О. Леонтьева,

Управление школой – Я. Сартан,

Физика – Н. Козлова,

Французский язык – Г. Чесновицкая,

Химия – О. Блохина,

Школьный психолог – И. Вачков

УЧРЕДИТЕЛЬ: ООО «ЧИСТЫЕ ПРУДЫ»

Зарегистрировано ПИ № 77-7241 от 12.04.01

в Министерстве РФ по делам печати

Подписано в печать: по графику 02.02.11,

фактически 02.02.11 Заказ №

Отпечатано в ОАО «Чеховский

полиграфический комбинат»

ул. Полиграфистов, д. 1,

Московская область,

г. Чехов, 142300

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:

ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165

Телефон/факс: (499) 249-3138

Отдел рекламы: (499) 249-9870

Сайт: 1september.ru

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:

Телефон: (499) 249-4758

E-mail: podpiska@1september.ru

Документооборот

Издательского дома «Первое сентября»
защищен антивирусной программой Dr.Web



В НОМЕРЕ:

ТЕМА НОМЕРА: ИДЕТ ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

4

МНЕНИЕ

ЕГЭ по математике: каким ему быть

С. Крупецкий, Е. Семенко

8

ПРЕДЛАГАЮ КОЛЛЕГАМ

Не клонировать, а конструировать

Г. Ковалева

11

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

Различные подходы

к решению задач С5 ЕГЭ

А. Корянов, А. Прокофьев

22

ВЫСТАВКА РАБОТА

Двузначное число можно устно

возвести в квадрат

А. Ильясова

24

НА СТЕНД

Готовимся к ЕГЭ

Задача В6 – действия с фигурами,
координатами и векторами

27

ЭКЗАМЕНЫ

Готовимся к ЕГЭ по физике:

межпредметные резервы

Г. Никифоров

31

Сколько решений нужно найти?

Т. Жаворонкова

33

ПРОВЕРЬ СЕБЯ

Творческий конкурс учителей

математики

А. Блинков, Е. Горская, И. Яценко

41

ВНЕКЛАССНАЯ РАБОТА

Малый мехмат МГУ

Ю. Андрианова, Ю. Межевова

43

ЛЕКТОРИЙ

Пять сюжетов о воде

В. Арнольд

48

Число π



К материалам, обозначенным этим символом, есть приложение на CD-диске,
вложенном в № 8.

МАТЕМАТИКА

Методическая газета
для учителей математики

Основана в 1992 г.

Выходит два раза в месяц

РЕДАКЦИЯ:

Главный редактор:

Л. Рослова

Отв. секретарь:

Т. Черкавская

Редакторы:

П. Камаев,

И. Бокова,

О. Макарова

Дизайн макета и

обложки:

И. Лукьянов

Корректор:

Л. Громова

Верстка:

Д. Кардановская

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:

Роспечать:

инд. – **32030;**

орг. – **32594**

Почта России:

инд. – **79073;**

орг. – **79583**

ХОЖДЕНИЕ ПО КРУГАМ ЕГЭ

Л. РОСЛОВА



■ На прошедшем еще осенью съезде учителей математики с высокой трибуны слетела фраза о том, что ЕГЭ должно быть двухуровневым: базовым и профильным. Сидящие в зале восторжесили, захотелось уточнения, раскрытия мысли, обсудить в конце концов. Но поймать эту фразу за хвост не удалось, как и синюю птицу счастья. Продолжения не последовало, случая не представилось ни на пленарных, ни на секционных собраниях. Так и осталось у собравшихся чувство недосказанности и недовыясненности. Легкое недоумение.

И вот уже весна подкралась, а ничего более внятного и определенного пока не последовало. Может, опять ждут горячей экзаменационной и предпусковой поры, когда учителю просто недосуг следить за новостями?

И совсем даже не понятно, зачем. Ведь это-то решение, похоже, удовлетворит и примирит многих противников как самого ЕГЭ, так и отдельно взятых КИМ по математике. А коли так – и обсуждать не страшно. Даже полезно. Пусть не для того, чтобы учить тех, кто наверху (чур, крольчатые мысли!). А для того, чтобы, обсуждая, проговаривая различные жизненные ситуации, которым несть числа, находили учителя адекватные решения, позволяющие реализовать, адаптировать решения сверху. Не зря же говорится, что законы-то у нас хорошие, а хромает их исполнение.

Будут перемены или нет, нам это не известно. Так же, как не известно науке, есть ли жизнь на Марсе. Ищут разгадку ученые, обсуждаем и мы то, что есть на сегодня, и готовимся к тому экзамену, который есть. Живем сегодняшним днем. Есть ощущение, что ходим по кругу, более того, что затянул водоворот и тянет в пучину. А так хочется, чтобы развитие шло поступательно, а значит, по другим линиям: если и не по прямой, то хотя бы по спирали.

С. КРУПЕЦКИЙ,
Е. СЕМЕНКО,
г. Краснодар

ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ: КАКИМ ЕМУ БЫТЬ

Номер задания	C1	C2	C3
Минимальный	0,282	0,017	0,011
Максимальный	0,531	0,177	0,132
Средний балл выполнения	0,412	0,110	0,055

	C1	C2	C3	C4	C5
Минимальный	0,282	0,017	0,011	0,000	0,000
Максимальный	0,531	0,177	0,132	0,035	0,007
Средний балл выполнения	0,412	0,110	0,055	0,007	0,010

Таблица 2



Фото Л. Рословой

■ Прочитав проект резолюции прошедшего осенью прошлого года съезда, мы увидели в ней приглашение к обсуждению проблем математического образования в России. Этой статьей мы предлагаем вернуться к дискуссии о структуре и содержании КИМ ЕГЭ по математике. Для начала проанализируем итоги ЕГЭ-2010. Многие помнят полемику прошлого года, когда было принято решение о кардинальной смене структуры и содержания КИМ по математике. Представляя точку зрения педагогического сообщества Краснодарского края, мы опубликовали тогда свой анализ демоверсии КИМ, в котором обратили внимание на ряд ее концептуальных недостатков и прогнозировали некоторые негативные риски от такой радикальной перемены, предложенной авторами проекта ЕГЭ. Это дает нам основания посмотреть на текущую ситуацию сквозь призму высказанных опасений и предостережений. Чтобы не затруднять читателей поиском того старого текста, позволим себе цитирование ключевых моментов, комментируя их с позиций сегодняшнего дня.

Заметим, что статистика показывает, что Краснодарский край с точки зрения результатов ЕГЭ репрезентативен: и по количеству сдающих экзамен выпускников, и по их социально-демографической структуре регион является достаточно точной моделью страны в целом.

1. Напомним, что ключевым отличием новой версии КИМ является отказ от заданий с выбором ответа. В свое время авторы версии 2010 г. мотивировали это тем, что такой подход «отвечает существующим традициям преподавания математики в российской школе и позволяет качественно проверить усвоение математических знаний, умений и навыков на базовом уровне». За этими словами по существу стоит тезис о том, что часть выпускников просто угадывает правильный ответ, даже не пытаясь решать задачу. Наши аргументы о том, что угадать один верный ответ из четырех представленных маловероятно, что российской «традиции преподавания математики» явно противоречит мировая тенденция тестирования самого широкого диапазона знаний, умений и навыков, что выбор правильного варианта из внешне правдоподобных альтернатив довольно точно моделирует механизм принятия решений в реальной жизни, остались не услышанными. При этом мы предлагали сократить их количество и сузить область применимости такого рода заданий, исключив задания, решаемые прямыми вычислениями.

Есть еще один немаловажный аспект. Все понимают, что ЕГЭ как государственный проект содержит и социально-политическую составляющую, которая накладывает жесткие ограничения на педагогически-профессиональный аспект. Скажем, с профессио-

нальной точки зрения нельзя выдавать аттестат о среднем образовании выпускнику, который не может решить задания В1 или В2 в нынешней версии КИМ. Но что делать, если доля таких выпускников зашкаливает за 15%? Невозможно политически не выдать аттестаты такому количеству выпускников. Когда инициаторы новой версии отстаивали свой проект (и в частности, выступали против заданий с выбором ответа), они настойчиво убеждали педагогическое сообщество в том, что их «практико-ориентированные задачи» решат 95% выпускников. Увы, несмотря на недопустимую с педагогической точки зрения уловку, когда задания ЕГЭ фактически были фасетными копиями демоверсии, реальность оказалась иной. Из таблицы видно, что только по одной из 12 базовых задач процент выполнения выше 90. Это убедительно доказывает, что решить социально-политическую проблему ЕГЭ (то есть поднять барьер проходимости до профессионально приемлемого уровня) не удалось. Его пришлось опустить до профессионально недопустимого уровня в три задания. Это в основном задания В2, В6 и В1, которые учащиеся могут выполнить, опираясь на знания, полученные в основной школе, даже не обучаясь в 10–11-х классах.

Вернемся к проблеме заданий с выбором ответа. Мы по-прежнему настаиваем на том, что экзаменационная психология подавляющего большинства выпускников выражается в попытках самостоятельного решения задач, а не в угадывании ответа. А теперь представим себе слабого выпускника, борющегося за спасительный проходной балл. Он попробовал решить задачу, в которой имеются варианты ответа. Если его ответ совпал с одним из предложенных, выпускник с радостью выбирает его и с чувством психологической уверенности начинает решать следующую задачу. Если же найденного ответа в списке нет, он возвращается к решению задачи и старается найти в нем ошибку. И только отчаявшись найти правильное решение, он выбирает ответ наугад, отдавая предпочтение, на его взгляд, наиболее правдоподобному.

Иная ситуация, когда вариантов ответа нет. Получив какой-то ответ, слабый ученик просто внесет его в бланк, безо всякого сомнения в его правильности. В вариантах КИМ нет одношаго-

вых заданий: любое из них предполагает проведение нескольких элементарных операций. Ученик может правильно выполнить всю последовательность шагов, но допустить нелепую ошибку (описку) на каком-то из них.

И еще один аргумент в пользу заданий с выбором ответа. Большой круг задач имеет символьную (а не числовую) форму ответа: неравенства, тригонометрические уравнения, вычисление производных и т.п. Конечно, эти ограничения легко обходятся (можно представлять решение неравенства не в виде объединения интервалов, а выбрать наименьшее целое решение и т. д.), но эти ухищрения являются искусственными: они нарушают традицию и вызваны только выбранной унифицированной формой представления ответа.

Завершая анализ этого аспекта КИМ, мы делаем вывод: отказ от заданий с выбором ответа не улучшил, а ухудшил «качество проверки знаний, умений, навыков на базовом уровне».

2. Второй аспект нашего прошлогоднего спора с авторами нынешних КИМ касался вопроса об общем числе заданий и заданий с полным решением. Вот цитата из нашего прошлогоднего анализа: «Произошло существенное сокращение задач невысокого уровня трудности (в предложенном варианте таких задач не более 8), что значительно сократит возможности слабой группы выпускников набрать спасительный минимум баллов. Результатом этого станет либо резкий скачок неудовлетворительных оценок, либо понижение до неприличного уровня пороговой границы». Статистика ЕГЭ-2010 в полной мере подтвердила наши опасения. Сравнительно легких задач (которые решили более 70% учащихся) в КИМ-2010 оказалось 5 из 18. Это значит, что слабым выпускникам просто не на чем было набрать пресловутый спасительный минимум.

Отметим, что с профессиональной точки зрения все задания группы В посылны «нормальному» выпускнику российской школы и требования уметь решать такие задания обоснованны. Но авторы нынешних КИМ не смогли правильно оценить инерционность образовательной системы, которая обладает «сверхмедленной проводимостью»: от замыслов до результатов, тем более в глубинке, проходят не месяцы, а годы. Именно поэтому в про-

Таблица 1

Номер задания	В1	В2	В3	В4	В5	В6	В7	В8	В9	В10	В11	В12
Минимальный	70	88	71	59	61	75	49	33	23	41	23	19
Максимальный	91	98	90	73	90	95	64	63	55	56	60	60
Средний процент выполнения	82	93	81	66	78	86	55	45	39	47	41	37

шлогоднем анализе мы предостерегали от резких шакааний в идеологии и структуре КИМ.

На привыкание педагогического сообщества к ЕГЭ как современному инструменту контроля качества образования ушли долгие семь лет. Резкий поворот в изменении идеологии КИМ просто не мог дать иного результата.

3. Что касается блока «практико-ориентированных» заданий (B1, B2, B5, B10 и B12), то можно подтвердить позитивную в целом оценку тенденции, которую привнесли в концепцию ЕГЭ авторы нынешней версии. И не страшно, что пока даже сравнительно легкие задачи этой группы решают около 80% выпускников. (Это вопрос упомянутой инерции образовательной системы: два-три года уйдет на то, чтобы эти задания в массе научились решать учителя, и лишь после этого достижения выпускников приблизятся к ожидаемым 90–95%.)

Несколько слов о задании B10. Это задание в течение года подготовки вызывало значительное сопротивление учителей математики. Основная претензия — задания требуют знаний (хотя бы на уровне понимания условия) смежных дисциплин (физики, отчасти экономики). Учителя математики не могут повлиять на пробелы школьников по этим дисциплинам, а результат сказывается на выполнении задания ЕГЭ по математике. Наши попытки убедить учителей, что специальной составляющей в этих задачах по существу нет, дали не слишком большой результат. Учителя обоснованно отвечали, что ученик, столкнувшись с физической по форме задачей, одно условие которой занимает 10–12 строк, часто просто не дочитывает его до конца: он психологически не готов к решению «физической» задачи на экзамене по математике.

Реальная проблема гораздо глубже внешнего восприятия задания. Идея включить в итоговый тест по математике задание с элементами математического моделирования не вызывает возражений, но ее реализация на примерах открытого банка базовых заданий представляется спорной. Создается впечатление, что идея моделирования в абсолютном большинстве предлагаемых задач сведена к абсолютному минимуму. Решение всегда ограничивается подстановкой известных из условия числовых значений многочисленных параметров и решением сравнительно несложного неравенства (уравнения). Сложность этого задания сводится лишь к «продиранию» сквозь многословную терминологию условия. Справедливости ради отметим, что в реальном варианте КИМ было предложено задание, лишенное большинства указанных недостатков.

4. Оценивать блок «абитуриентских» заданий КИМ (группу C) нет смысла, мы по-прежнему считаем, что он вызывает ощущение не очень органичного включения в итоговый тест обычного вступительного варианта советского времени. Оценка каждого отдельного задания будет отражать субъективные вкусы конкретного эксперта. Из общих впечатлений, которые нам кажутся вполне обоснованными и бесспорными, можно отметить расхождения в сравнительной трудности заданий разных вариантов одного региона (мы сознательно не сравниваем варианты КИМ разных часовых поясов). Экспертный анализ различных заданий убедительно подтверждается статистикой: минимальный средний балл, набранный по наиболее репрезентативному заданию C1 (табл. 2), отличается от максимального почти в два раза. По более трудным заданиям эти отличия еще значительнее.

Отдельно следует сказать о задании C6. Мы высказывали сомнения в целесообразности включения олимпиадных задач в итоговый экзамен. Очевидно, что задача C6 в реальной версии КИМ является олимпиадной задачей для школьников 7–8-х классов. Помимо очевидных трудностей с разработкой критериев ее проверки (например, нам кажется, что согласно утвержденным критериям получить 3 балла по этой задаче легче, чем 2), не вполне понятно, какие из необходимых для выпускника средней школы ЗУН проверяются этой задачей?

5. Особого внимания заслуживает «геометрический блок». Анализируя демоверсию, мы отмечали преимущества прежнего набора геометрических задач, и наша оценка этого блока в итоговой версии КИМ остается прежней.

Задания B4 и B6 — образцы легких геометрических задач, в демоверсии они представлялись адекватными примерами базовых ЗУН по геометрии, но (подчеркиваем!) именно примерами! Мы не могли представить себе, что авторы посчитают, что к умению решать такие задачи и сводится весь базовый уровень знания планиметрии. Однако по факту получилось именно так!.. И в демоверсии, и в открытом банке заданий (до осени 2010 года), и в вариантах ЕГЭ вся планиметрия была сведена к решению прямоугольных треугольников и нахождению площади фигур по кле-

Таблица 2

Номер задания	C1	C2	C3	C4	C5	C6
Минимальный	0,282	0,017	0,011	0,000	0,000	0,000
Максимальный	0,531	0,177	0,132	0,035	0,045	0,043
Средний балл выполнения	0,412	0,110	0,055	0,007	0,010	0,015

точкам. Тем самым авторы КИМ послали много-тысячному коллективу учителей очень опасный сигнал: не надо учить выпускников геометрии, учите их решать задания демоверсии. Надо знать массовую психологию учителей: если им заранее сообщить, какие конкретно типы заданий будут предложены в контрольном испытании (которое проверяет в том числе и их уровень квалификации!), то 90% педагогов будут готовить учеников к решению именно этих заданий.

Задача В9 является достаточно удачным примером базового задания по стереометрии. В этом случае можно приветствовать учет авторами критических замечаний в отношении аналогичной задачи из демоверсии.

Что касается сравнения геометрических задач группы С, то мы являемся сторонниками перемены их местами. Статистика показывает, что задача С4 оказалась самой трудной в варианте ЕГЭ (из трех возможных баллов средний балл по ней составил всего 0,007, что значительно ниже среднего балла по задачам С5 и С6 — см. табл. 2). А по традиции многих лет стереометрическая задача всегда была сложнее планиметрической. Нынешняя задача С2 в целом отвечает уровню сложности в 2 балла (хотя, разумеется, значительно сложнее задания С1), но относительно нее есть другое важное замечание. Весь ход подготовки к ЕГЭ (демоверсия, диагностические работы, итоговый вариант КИМ) содержал безусловный сигнал: школьная стереометрия сводится к взаимному расположению прямых и плоскостей. Другого (взаимного расположения тел) в ЕГЭ не будет, а значит, этому можно не учить!

Считаем целесообразным в качестве задания С2 предложить планиметрическую задачу стандартного уровня сложности (на 2 первичных балла), а в качестве задания С4 — стереометрическую задачу на взаимное расположение тел (на 3 или 4 первичных балла).

6. Еще один аспект, на который мы обращали внимание в прошлом году. Цитируем: «В основу любых изменений модели итогового варианта ЕГЭ необходимо положить принцип стабильности. Резкая встряска будет крайне негативно воспринята педагогическим сообществом, в течение нескольких лет привыкшим к идеологии и структуре ЕГЭ». Это опасение в значительной степени подтвердилось: и реакция многих преподавателей математики, и реальные результаты ЕГЭ-2010 показали, что столь радикальное изменение КИМ было ошибочным. Предлагаемый нами анализ различных аспектов нынешней версии и является, по нашему мнению, доказательством этого. Более сложен, на наш взгляд, вопрос о том, что делать дальше.

Мы считаем, что прежний подход (2009 г.) к структуре КИМ был более адекватен идеологии единого тестового испытания, при котором ЕГЭ решает двуединую задачу — оценивает уровень подготовки выпускника для получения им государственного документа о среднем образовании и выполняет роль вступительного экзамена в вуз.

Мы полагаем, что нынешняя версия КИМ большинством педагогического сообщества воспринимается как попытка радикального отклонения от основной линии развития проекта ЕГЭ. Полученные результаты этой попытки свидетельствуют о целесообразности возврата к прежнему направлению, скорректированному с учетом позитивных элементов нынешней версии.

Суммируя высказанные замечания, сформулируем свои *предложения* по структуре КИМ:

- целесообразно ввести в КИМ задания с выбором ответа (в частности, задания с традиционной символьной формой ответа);

- увеличить общее количество заданий хотя бы до 20–21, например, следующим образом: 5 заданий группы А, 10–11 заданий группы В, 5 заданий группы С;

- пересмотреть прототипы заданий В10 в открытом банке базовых заданий;

- поменять местами задания С2 и С4, то есть задачи по планиметрии и стереометрии, изменив соответственно и уровень их трудности;

- отказаться от включения в КИМ олимпиадных задач;

- демоверсию 2012 года опубликовать только после ее реального и содержательного обсуждения на представительном собрании экспертов, в том числе региональных. Взять за основу КИМ-2012 вариант 2009 года, изменив его с учетом позитивного опыта текущего года.

Основные тезисы данной статьи неоднократно обсуждались на официальных и полуофициальных встречах с представителями группы авторов нынешней модели КИМ. Нельзя сказать, что все наши доводы были восприняты в штыки. Наоборот, многие из них были поддержаны.

Но увы, опубликованная демоверсия КИМ-2011 этого не отразила. Трудно поверить, что уважаемые коллеги удовлетворены результатами предыдущего ЕГЭ и не видят необходимости в каких-либо ее изменениях. Невольно закрадывается мысль: может, это просто провинциальное брюзжание, не стоящее внимания истинных профессионалов. Поэтому отдаем свои тезисы на суд педагогической общественности. Заранее благодарны за любое, в том числе неллицеприятное, для нас обсуждение.

Г. КОВАЛЕВА,
г. Волгоград

НЕ КЛОНИРОВАТЬ, А КОНСТРУИРОВАТЬ

ПРЕДЛАГАЮ КОЛЛЕГАМ

ТЕМА НОМЕРА: ИДЕТ ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

$$(2\cos^2 x - \cos x)\sqrt{-\cos x} = 0$$

■ Статья «Клонируем задачи В10» вызвала следующие мысли. С одной стороны, хорошо, что учитель, зная, как, варьируя числовые значения, получить «новую» задачу, сможет растиражировать задания для пяти вариантов, например, контрольной работы. Но как работать, используя этот материал, с детьми? Если предлагать пять задач на «электричество», потом пять задач на «падение камня» и так далее, а на экзамене, не дай бог, попадется задача на «колодец»? Так ли важны числовые значения величин? Главное — зависимость между ними. Научить находить по тексту задачи известные и неизвестные величины, выражать неизвестные величины через известные, варьируя их.

Один из аргументов противников ЕГЭ состоит в том, что в процессе подготовки к экзамену происходит натаскивание на определенные типы заданий. Так давайте не будем натаскивать (решать по пять задач каждого типа), а будем учить. Причем учить на протяжении всего периода обучения математике, в процессе подготовки повторять, систематизировать знания, акцентировать внимание на особенностях заданий.

Например, в демоверсии 2011 года задание С1 представлено тригонометрическим уравнением $\frac{6\cos^2 x - \cos x - 2}{\sqrt{-\sin x}} = 0$, решение которого состоит из двух частей — решения тригонометрического уравнения и отбора корней с учетом ОДЗ уравнения. Если при прохождении соответствующей темы учащиеся не освоили форму записи корней простейших тригонометрических уравнений, не знают основных методов решения тригонометрических уравнений (разложение на множители, введение новой переменной), не владеют навыками отбора корней (с помощью окружности, перебором), то совершенно бесполезно при подготовке к ЕГЭ решать пять аналогичных уравнений. Любое отклонение от предложенного варианта грозит ученику провалом. Вывод — учить надо вовремя, а при повторении вспоминать. Основная цель подготовки к экзамену — не решение аналогичных задач, а показ спектра возможных задач. Поэтому задачи надо не клонировать, а конструировать, причем вместе с учащимися.

Алгоритм конструирования задач типа С1 очень прост:

- 1) составить квадратное уравнение $at^2 + bt + c = 0$ с корнями t_1 и t_2 , хотя бы один из которых по модулю меньше или равен единице;
- 2) ввести замену $t = \cos x$ или любую другую тригонометрическую функцию;
- 3) включить в структуру уравнения функцию, имеющую ограничения на область определения. Их всего пять — дробь, корень четной степени, логарифм, арксинус, арккосинус.

Например, пусть $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = -\frac{1}{3}$, тогда $\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t + \frac{1}{3}\right) = 0$, или $6t^2 - t - 1 = 0$. Заменим $t = \sin x$, получим: $6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$.



К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 8.

Зададим ограничение на ОДЗ уравнения в виде дроби так, чтобы сначала один корень был лишним, а потом второй, получим:

$$\frac{6 \sin^2 x - \sin x - 1}{2 \sin x - 1} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{6 \sin^2 x - \sin x - 1}{3 \sin x + 1} = 0.$$

Варируем компоненты уравнения. Зная, что если $\sin x = \frac{1}{2}$, то

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{или} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

заменим в первом уравнении знаменатель, получим:

$$\frac{6 \sin^2 x - \sin x - 1}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{6 \sin^2 x - \sin x - 1}{2 \cos x + \sqrt{3}} = 0.$$

Можно заменить знаменатель на

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} x \pm 1 \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg} x \pm \sqrt{3}.$$

То же самое можно сделать со знаменателем второго уравнения. Для этого, зная, что $\sin x = -\frac{1}{3}$, найдем

$$\cos x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \operatorname{tg} x = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \operatorname{ctg} x = \pm 2\sqrt{2}.$$

При предъявлении этих уравнений необходимо учесть, что последние вариации второго уравнения для учащихся более сложные, так как значения тригонометрических функций нетабличные.

Теперь введем в структуру уравнения арифметический квадратный корень. Сначала под корень поставим функцию, относительно которой составляли квадратное уравнение, получим

$$\frac{6 \sin^2 x - \sin x - 1}{\sqrt{\pm \sin x}} = 0$$

или

$$(6 \sin^2 x - \sin x - 1) \sqrt{\pm \sin x} = 0.$$

Затем в качестве подкоренного выражения можно использовать любую тригонометрическую функцию:

$$\frac{6 \sin^2 x - \sin x - 1}{\sqrt{\pm \cos x}} = 0$$

или

$$(6 \sin^2 x - \sin x - 1) \sqrt{\pm \operatorname{ctg} x} = 0.$$

Получим еще двенадцать уравнений данного типа. Арифметический квадратный корень можно представить так:

$$\sqrt{7 \sin^2 x - \sin x - 1} = \sin x.$$

В зависимости от уровня подготовки учащихся и дидактических целей урока можно использовать в качестве подкоренного некоторое выражение относительно любой из тригонометрических функций. Получим фейерверк уравнений разного уровня сложности.

Подкоренное выражение может быть алгебраическим — линейным, квадратным и т.д. Например, $(6 \sin^2 x - \sin x - 1) \sqrt{1 - x^2} = 0$.

Надоел арифметический квадратный корень — заменим его на логарифм. Например, $(6 \sin^2 x - \sin x - 1) \log_2 (\pm \sin x) = 0$,

или

$$\frac{6 \sin^2 x - \sin x - 1}{\log_2 \sin x + 1} = 0,$$

или

$$\log_2 (6 \sin^2 x - 2 \sin x - 1) = \log_2 (-\sin x),$$

или

$$\log_{\sin x} (6 \sin^2 x - 1) = 1.$$

Можно ввести в структуру уравнения арксинус, арккосинус. Например, $\arcsin (6 \sin^2 x - 1) = x$. И так далее.

Представляется, что такая система задач, более эффективна при повторении, так как охватывает уравнения различных типов. Более того, если на уроке показать, как конструируется эта система, и включить ученика в процесс мыслетворчества, то это не только улучшит уровень подготовки к экзамену, но и снимет страх перед «неизвестными» заданиями, так как составитель делает то же самое.

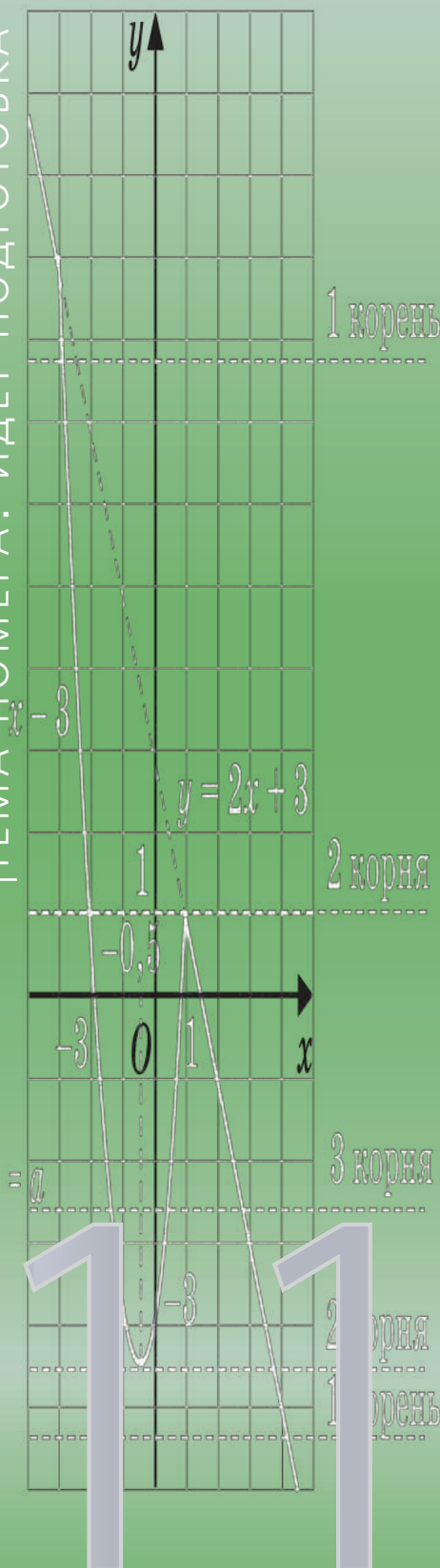
Приведем серию уравнений для $t_1 = 0$ и $t_2 = \frac{1}{2}$.

Уравнение	Ответ
$\frac{2 \sin^2 x - \sin x}{\cos x + 1} = 0$	$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
$\frac{2 \sin^2 x - \sin x}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0$	$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
$\frac{2 \sin^2 x - \sin x}{\operatorname{tg} x} = 0$	$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\frac{2 \sin^2 x - \sin x}{\operatorname{ctg} x} = 0$	$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$
$\frac{2 \sin^2 x - \sin x}{\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1} = 0$	$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Уравнение	Ответ
$\frac{2 \sin^2 x - \sin x}{\sqrt{3} - \operatorname{ctg} x} = 0$	$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{2 \cos^2 x - \cos x}{1 + \sin x} = 0$	$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\frac{2 \cos^2 x - \cos x}{1 - \sin^2 x} = 0$	$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{2 \cos^2 x - \cos x}{2 \sin x + \sqrt{3}} = 0$	$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\frac{2 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x}{\cos^2 x - 1} = 0$	$x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{2 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x}{\sqrt{5} \cos x - 2} = 0$	$x = \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\frac{2 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x}{\sqrt{5} \sin x + 1} = 0$	$x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$(2 \sin^2 x - \sin x) \operatorname{ctg} x = 0$	$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$(2 \sin^2 x - \sin x)(\operatorname{ctg} x \pm 2) = 0$	$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \operatorname{arctg}(\pm 2) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\frac{2 \sin^2 x - \sin x}{\sqrt{\sin x}} = 0$	$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{(5 \sin x - 1)(3 \sin x - 2)}{\sqrt{2 \sin^2 x - \sin x}} = 0$	$x = (-1)^k \arcsin \frac{2}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{2 \sin^2 x - \sin x}{\sqrt{-\cos x}} = 0$	$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\frac{2 \cos^2 x - \cos x}{\sqrt{2 \sin x - 1}} = 0$	$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\frac{2 \cos^2 x - \cos x}{\sqrt{1 - 2 \sin x}} = 0$	$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\frac{2 \sin^2 x - \sin x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0$	$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\frac{2 \sin^2 x - \sin x}{\sqrt{-\operatorname{ctg} x}} = 0$	$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
$(2 \cos^2 x - \cos x) \sqrt{-\cos x} = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\sqrt{3 \cos^2 x - \cos x} = -\cos x$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\sqrt{\cos^2 x - \cos x + 1} = \sin x$	$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$(2 \sin^2 x - \sin x) \lg \sin x = 0$	$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

И это далеко не полный перечень возможных уравнений. Желаю успехов при организации повторения и подготовке к экзамену.

А. КОРЯНОВ,
А. ПРОКОФЬЕВ,
Москва



РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С5 ЕГЭ

■ Задачи с параметрами мало представлены в школьном курсе математики. Между тем из года в год на ЕГЭ по математике появляются задачи с новыми формулировками, новыми идеями решения. Умение решать задачи различными способами позволяет учащимся уверенно справляться с экзаменационными задачами этого типа.

В данной статье предлагается не только подборка задач С5, но и различные подходы к их решению. Задачи взяты из вариантов тренировочных, диагностических и экзаменационных работ МИОО, которые проводились для текущего среза знаний и умений учащихся. Для удобства задачи разбиты на три блока (уравнения, неравенства, функции).

Уравнения

Пример 1. (ЕГЭ-2010.) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$36^x - (8a + 5) \cdot 6^x + 16a^2 + 20a - 14 = 0$$

имеет единственное решение.

Решение. Способ I. Пусть $6^x = t$, где $t > 0$. Тогда задачу можно переформулировать: при каких значениях a квадратное уравнение $t^2 - (8a + 5) \cdot t + 16a^2 + 20a - 14 = 0$ имеет один положительный корень? Значит, другой корень должен быть неположительным. Используя теорему Виета, имеем два случая (t_1 и t_2 — корни квадратного уравнения):

$$1) t_1 t_2 < 0 \Leftrightarrow 16a^2 + 20a - 14 < 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{4} < a < \frac{1}{2};$$

$$2) \begin{cases} t_1 t_2 = 0, \\ t_1 + t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2 + 20a - 14 = 0, \\ 8a + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Отсюда } -\frac{7}{4} < a \leq \frac{1}{2}.$$

Замечание. В рассмотренных случаях нет необходимости в исследовании дискриминанта на наличие действительных корней уравнения. В первом случае свободный член $c = t_1 t_2$ отрицательный, а значит, дискриминант положительный. Во втором случае свободный член равен нулю, а второй коэффициент отличен от нуля, поэтому уравнение имеет корни.

Способ II. Пусть $6^x = t$, где $t > 0$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$t^2 - (8a + 5) \cdot t + 16a^2 + 20a - 14 = 0.$$

Так как дискриминант D полученного уравнения положительный: $D = (8a + 5)^2 - 4(16a^2 + 20a - 14) = 81$, то уравнение имеет два различных корня: $t = 4a - 2$ или $t = 4a + 7$, причем при всех значениях a верно неравенство $4a - 2 < 4a + 7$.



К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 8.

Исходное уравнение будет иметь единственное решение, если одно из чисел, $4a - 2$ и $4a + 7$, будет положительным, а другое — неположительным. Отсюда следует

$$\begin{cases} 4a + 7 > 0, \\ 4a - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{4} < a \leq \frac{1}{2}.$$

Способ III. Пусть $6^x = t$, тогда исходное уравнение примет вид

$$t^2 - (8a + 5) \cdot t + 16a^2 + 20a - 14 = 0.$$

Вычислим дискриминант квадратного уравнения:

$$D = (8a + 5)^2 - 4(16a^2 + 20a - 14) = 81,$$

и найдем его корни: $t = 4a - 2$ или $t = 4a + 7$.

Возвратимся к переменной x :

$$6^x = 4a - 2 \text{ или } 6^x = 4a + 7.$$

Отсюда получаем:

$$a = \frac{6^x + 2}{4} \text{ и } a = \frac{6^x - 7}{4} \text{ или } a = \frac{6^x}{4} + \frac{1}{2} \text{ и } a = \frac{6^x}{4} - \frac{7}{4}.$$

Построим графики полученных функций (рис. 1). Рассмотрим прямые, параллельные оси x и пересекающие построенные графики. Единственная точка пересечения получается при условии $-\frac{7}{4} < a \leq \frac{1}{2}$.

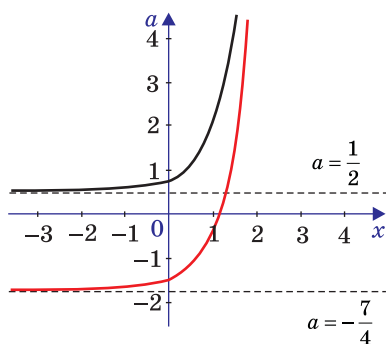


Рис. 1

Ответ: $-\frac{7}{4} < a \leq \frac{1}{2}$.

Пример 2. (2010 г., тренировочная работа МИОО.) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sin(x - 3a) + \sin \frac{x^2 - 6x + 7a}{2} = 4x - x^2 - a$$

не имеет действительных решений.

Решение. **Способ I** (предложенный в критериях). Обозначим $y = \frac{x^2 - 6x + 7a}{2}$. Тогда

$$x^2 = 2y + 6x - 7a.$$

В новых обозначениях уравнение примет вид

$$\sin(x - 3a) + \sin y = 4x - 2y - 6x + 6a,$$

откуда

$$2(x - 3a) + \sin(x - 3a) = -2y - \sin y.$$

Синус — функция нечетная, поэтому

$$2(x - 3a) + \sin(x - 3a) = -2y + \sin(-y).$$

Рассмотрим функцию $f(t) = 2t + \sin t$. В этом случае последнее уравнение примет вид

$$f(x - 3a) = f(-y).$$

Функция $f(t)$ определена при всех t и является возрастающей на всей числовой прямой, так как ее производная $f'(t) = 2 + \cos t$ положительна при всех t . Тогда уравнение $f(x - 3a) = f(-y)$ равносильно уравнению $x - 3a = -y$.

Выполнив обратную замену, получим:

$$x - 3a = -\frac{x^2 - 6x + 7a}{2}, \quad x^2 - 4x + a = 0.$$

Последнее уравнение, а значит и исходное уравнение, не имеет действительных решений, если его дискриминант отрицателен: $4^2 - 4a < 0$, то есть при $a > 4$.

Способ II. Запишем уравнение в следующем виде

$$2x + \sin(x - 3a) = -2\left(\frac{x^2 - 6x + a}{2}\right) - \sin\left(\frac{x^2 - 6x + a}{2} + 3a\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + \sin(x - 3a) =$$

$$= 2\left(-\frac{x^2 - 6x + a}{2}\right) + \sin\left(-\frac{x^2 - 6x + a}{2} - 3a\right). \quad (*)$$

Рассмотрим функцию $y(t) = 2t + \sin(t - 3a)$. Данная функция определена и дифференцируема при всех $t \in \mathbf{R}$. Ее производная $y'(t) = 2 + \cos(t - 3a)$ положительна при всех $t \in \mathbf{R}$. Следовательно, эта функция является возрастающей на всей числовой прямой и каждое свое значение из множества $E(y)$ принимает при единственном значении аргумента. Тогда уравнение (*) может быть представлено в виде

$$y(x) = y\left(-\frac{x^2 - 6x + a}{2}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{x^2 - 6x + a}{2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^2 - 4x + a = 0.$$

Последнее уравнение не имеет действительных решений, если его дискриминант $D = 4^2 - 4a$ отрицателен. Решая неравенство $4^2 - 4a < 0$, получаем $a > 4$.

Ответ: $a > 4$.

Пример 3. (2010 г., тренировочная работа МИОО.) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$64^{x+a} - 4^{x^2-5x+4a} = x^2 - 8x + a$$

не имеет действительных решений.

Решение. Обозначим $y = x^2 - 5x + 4a$. Тогда $x^2 = y + 5x - 4a$. В новых обозначениях уравнение примет вид

$$64^{x+a} = y + 5x - 4a - 8x + a + 4^y,$$

откуда

$$3x + 3a + 4^{3x+3a} = y + 4^y.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t + 4^t$. В этом случае последнее уравнение примет вид

$$f(3x + 3a) = f(y).$$

Функция $f(t) = t + 4^t$ определена при всех t и является возрастающей на всей числовой прямой. Тогда уравнение $f(3x + 3a) = f(y)$ равносильно уравнению $3x + 3a = y$.

Выполнив обратную замену, получим:

$$3x + 3a = x^2 - 5x + 4a, x^2 - 8x + a = 0.$$

Последнее уравнение, а значит и исходное уравнение, не имеет действительных решений, если его дискриминант отрицателен: $8^2 - 4a < 0$, то есть при $a > 16$.

Ответ: $a > 16$.

Пример 4. (ЕГЭ-2010, досрочный экзамен.)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a + 4)^2 = |x + a + 4| + |x - a - 4|$$

имеет единственный корень.

Решение. При каждом конкретном значении параметра a функции $f(x) = x^2 + (a + 4)^2$ и $g(x) = |x + a + 4| + |x - a - 4|$, входящие в левую и правую части уравнения, являются четными, поскольку выполняются следующие условия:

1) они определены на всей числовой прямой (области определения симметричны относительно начала координат);

$$\begin{aligned} 2) f(-x) &= (-x)^2 + (a + 4)^2 = x^2 + (a + 4)^2 = f(x), \\ g(-x) &= |-x + a + 4| + |-x - a - 4| = \\ &= |x - a - 4| + |x + a + 4| = g(x). \end{aligned}$$

Следовательно, если число x_0 — корень уравнения $f(x) = g(x)$, то число $-x_0$ также будет являться корнем этого уравнения. Условие единственности будет выполняться, если $x = 0$ — корень уравнения $f(x) = g(x)$ и других корней нет.

Подставив в исходное уравнение значение $x = 0$, получим уравнение относительно параметра a :

$$\begin{aligned} (a + 4)^2 &= |a + 4| + |-a - 4| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a + 4)^2 - 2|a + 4| &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |a + 4| = 0, \\ |a + 4| - 2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда получаем три значения параметра:

$$a = -6, a = -4 \text{ и } a = -2.$$

Пусть $a = -6$. Подставив $a = -6$ в исходное уравнение, получим:

$$x^2 + 4 = |x - 2| + |x + 2|.$$

Правая часть этого уравнения после раскрытия на промежутках модулей имеет вид

$$|x - 2| + |x + 2| = \begin{cases} -2x, & \text{если } x < -2, \\ 4, & \text{если } -2 \leq x < 2, \\ 2x, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

Уравнения $x^2 + 4 = -2x$ и $x^2 + 4 = 2x$ не имеют корней, а уравнение $x^2 + 4 = 4$ имеет единственный корень $x = 0$, удовлетворяющий условию $-2 \leq x < 2$.

Пусть $a = -2$. Подставив это значение параметра в исходное уравнение, получим

$$x^2 + 4 = |x + 2| + |x - 2|.$$

Как только что было получено, это уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

Пусть $a = -4$. Подставив это значение параметра в исходное уравнение, получим:

$$x^2 = 2|x| \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 0, \\ |x| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, x = -2, x = 2.$$

Значение $a = -4$ не соответствует условию задачи.

Ответ: $-6; -2$.

Пример 5. (ЕГЭ-2010, демоверсия.)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Способ I (предложенный в критериях). Запишем уравнение в виде

$$9|x - 1| - 4x + |3x - |x + a|| = 0.$$

Функция $f(x) = 9|x - 1| - 4x + |3x - |x + a||$ непрерывна и

1) неограниченно возрастает при $x \geq 1$, так как при любом раскрытии модулей имеем

$$f(x) = 9x - 9 - 4x \pm 3x \pm x \pm a = kx + m, \text{ где } k \geq 9 - 4 - 4 = 1 > 0;$$

2) убывает при $x \leq 1$, так как при любом раскрытии модулей имеем

$$f(x) = -9x + 9 - 4x \pm 3x \pm x \pm a = kx + m, \text{ где } k \leq -9 - 4 + 4 = -9 < 0.$$

Следовательно, наименьшее значение функция f принимает при $x = 1$, и уравнение $f(x) = 0$ будет иметь корень тогда и только тогда, когда $f(1) \leq 0$.

Решим это неравенство:

$$\begin{aligned} |3 - |1 + a|| &\leq 4, -4 \leq 3 - |1 + a| \leq 4, \\ |1 + a| &\leq 7, -7 \leq 1 + a \leq 7, -8 \leq a \leq 6. \end{aligned}$$

Решение. Способ II. Запишем уравнение следующим образом:

$$|3x - |x + a|| = 4x - 9|x - 1|.$$

Раскрывая модули в выражении, стоящем в правой части уравнения, получим:

$$g(x) = 4x - 9|x - 1| = \begin{cases} -5x + 9, & \text{если } x \geq 1, \\ 13x - 9, & \text{если } x < 1. \end{cases}$$

Для существования решения уравнения должно выполняться условие $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{9}{13} \leq x \leq \frac{9}{5}$.

На отрезке $\left[\frac{9}{13}; \frac{9}{5}\right]$ исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\begin{aligned} |3x - |x + a|| &= 4x - 9|x - 1| \\ |3x - |x + a|| &= -4x + 9|x - 1|, \\ |x + a| &= -x + 9|x - 1| \\ |x + a| &= 7x - 9|x - 1|. \end{aligned}$$

Раскрывая модули в правых частях уравнений совокупности, получим замкнутую ломану

ную, звенья которой — отрезки прямых, имеющих уравнения $y = -2x + 9$ (AD), $y = 8x - 9$ (CD), $y = 16x - 9$ (BA) и $y = -10x + 9$ (CB) (рис. 2).

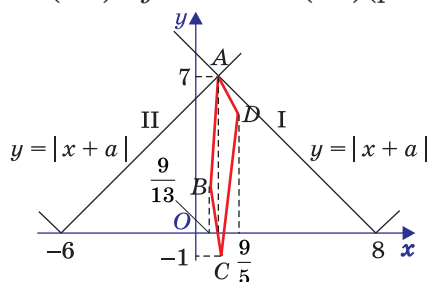


Рис. 2

При каждом фиксированном значении параметра a график функции $y_a(x) = |x + a|$ получается параллельным переносом графика функции $y = |x|$ вдоль оси Ox на $-a$ единиц.

Имеется два критических положения графика функции $y_a(x) = |x + a|$. В обоих случаях он проходит через точку $A(1; 7)$. Из условия $y_a(1) = 7$ получаем уравнение $|1 + a| = 7$. Отсюда $a_1 = -8$ и $a_2 = 6$.

Соответственно, исходное уравнение будет иметь решение при $-6 \leq -a \leq 8$ или $-8 \leq a \leq 6$. При других значениях параметра a график функции $y_a(x) = |x + a|$ не будет иметь общих точек с ломаной $ABCD$.

Ответ: $-8 \leq a \leq 6$.

Неравенства

Пример 6. (ЕГЭ-2010, тренировочная работа МИОО.) Найдите все значения a , при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{5-x} + |x+a| \leq 3$ является отрезок.

Решение. Преобразуем исходное неравенство к виду

$$|x+a| \leq 3 - \sqrt{5-x} \Leftrightarrow -3 + \sqrt{5-x} \leq x+a \leq 3 - \sqrt{5-x}.$$

Изобразим на плоскости Oxy графики функ-

ций $y = -3 + \sqrt{5-x}$ и $y = 3 - \sqrt{5-x}$ (рис. 3). При каждом фиксированном значении параметра a график функции $y_a(x) = |x+a|$ получается параллельным переносом графика функции $y = |x|$ вдоль оси Ox на $-a$ единиц.

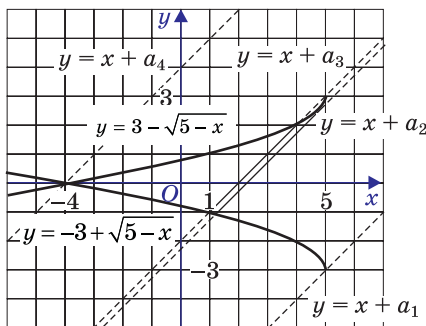


Рис. 3

Решению исходного неравенства соответствуют все такие значения x , при которых точки плоскости Oxy с координатами $(x; x+a)$ расположены не ниже точек $(x; -3 + \sqrt{5-x})$ и не выше точек $(x; 3 - \sqrt{5-x})$. Из рисунка 3 видно, что имеется четыре критических положения прямых $y = x + a$:

1) прямая проходит через точку $(5; -3)$, из равенства $5 + a = -3$ следует $a_1 = -8$;

2) прямая касается графика функции $y = 3 - \sqrt{5-x}$, из уравнения $(3 - \sqrt{5-x})' = 1$ находим абсциссу точки касания графиков, $x = \frac{19}{4}$, затем значения $y = \frac{5}{2}$ и $a_2 = -\frac{9}{4}$;

3) прямая проходит через точку $(5; 3)$, из равенства $5 + a = 3$ следует $a_3 = -2$;

4) прямая проходит через точку $(-4; 0)$, из равенства $-4 + a = 0$ следует $a_4 = 4$.

Отсюда получаем, что условию задачи удовлетворяют все a такие, что $-8 < a \leq -\frac{9}{4}$ или $-2 < a < 4$.

Ответ: $\left(-8; -\frac{9}{4}\right] \cup (-2; 4)$.

Пример 7. (ЕГЭ-2010, тренировочная работа МИОО.) Найдите все значения a , при каждом из которых решения неравенства

$$|2x - a| + 1 \leq |x + 3|$$

образуют отрезок длины 1.

Решение. Преобразуем исходное неравенство к виду $|2x - a| \leq |x + 3| - 1$. Раскрывая модули в выражении, стоящем в правой части неравенства, получим:

$$g(x) = |x + 3| - 1 = \begin{cases} x + 2, & \text{если } x \geq -3, \\ -x - 4, & \text{если } x \leq -3. \end{cases}$$

При каждом фиксированном значении параметра a график функции $y_a(x) = |2x - a|$ получается параллельным переносом графика функции $y = |2x|$ вдоль оси Ox на $\frac{a}{2}$ единиц.

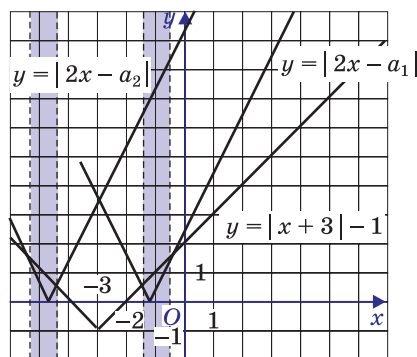


Рис. 4

Решению исходного неравенства соответствуют все такие значения x , при которых точки плоскости Oxy с координатами $(x; g(x))$ расположены не ниже точек с координатами $(x; y_a(x))$. Из

рисунка 4 видно, что решением исходного неравенства является отрезок, когда график функции $y_a(x)$ пересекает прямую $y = x + 2$ при $x \geq -3$ или прямую $y = -x - 4$ при $x \leq -3$.

В первом случае абсциссы точек пересечения графиков функций получаются из решения уравнений $x + 2 = 2x - a_1$ и $x + 2 = -2x + a_1$. Отсюда получаем $x = a_1 + 2$ и $x = \frac{a_1 - 2}{3}$. В этом случае длина отрезка равна $(a_1 + 2) - \frac{a_1 - 2}{3} = \frac{2a_1 + 8}{3}$. Соответственно, длина равна 1 при $a_1 = -2,5$.

Во втором случае абсциссы точек пересечения графиков функций получаются из решения уравнений $-x - 4 = 2x - a_2$ и $-x - 4 = -2x + a_2$. Отсюда получаем $x = \frac{a_2 - 4}{3}$ и $x = a_2 + 4$. В этом случае длина отрезка равна $\frac{a_2 - 4}{3} - (a_2 + 4) = \frac{-2a_2 - 16}{3}$.

Соответственно, длина равна 1 при $a_2 = -9,5$.

Ответ: $-2,5; -9,5$.

Пример 8. (ЕГЭ-2010, тренировочная работа МИОО.) Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} \frac{x - ax - a}{x - 2 + 2a} \geq 0, \\ x - 8 > ax \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. *Способ I.* Рассмотрим второе неравенство системы: $(1 - a)x > 8$. Если $a = 1$, то неравенство, а значит, и система не имеют решений; если $a < 1$, то решением неравенства являются все $x > \frac{8}{1 - a}$; если $a > 1$, то $x < \frac{8}{1 - a}$.

При $a \neq 1$ первое неравенство системы равносильно системе

$$\begin{cases} (1 - a)\left(x - \frac{a}{1 - a}\right)(x - 2(1 - a)) \geq 0, \\ x - 2(1 - a) \neq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Сравнивая числа $\frac{a}{1 - a}$ и $2(1 - a)$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{a}{1 - a} \geq 2(1 - a) &\Leftrightarrow \frac{2a^2 - 5a + 2}{a - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(a - 0,5)(a - 2)}{a - 1} \geq 0 \Leftrightarrow 0,5 \leq a < 1 \text{ или } a \geq 2; \\ \frac{a}{1 - a} \leq 2(1 - a) &\Leftrightarrow a \leq 0,5 \text{ или } 1 < a \leq 2. \end{aligned}$$

Запишем решение системы (1):

при $a \leq 0,5$ все $x \leq \frac{a}{1 - a}$ или $x > 2(1 - a)$;

при $0,5 < a < 1$ все $x < 2(1 - a)$ или $x \geq \frac{a}{1 - a}$;

при $1 < a < 2$ $\frac{a}{1 - a} \leq x < 2(1 - a)$;

при $a \geq 2$ $2(1 - a) < x \leq \frac{a}{1 - a}$.

Замечаем, что при $a < 1$ система неравенств, данная в условии, имеет решения.

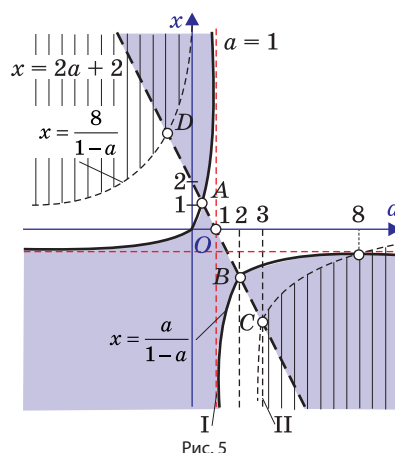
При $a > 1$ система не будет иметь решения, если множества решений первого и второго неравенства системы не пересекаются, то есть

$$\begin{cases} a > 1, \\ \frac{a}{1 - a} \geq \frac{8}{1 - a}, \\ 2(1 - a) \geq \frac{8}{1 - a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ 1 < a \leq 8, \\ (1 - a)^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < a \leq 3.$$

Учитывая, что при $a = 1$ система также не имеет решений, получаем ответ: $1 \leq a \leq 3$.

Способ II. Воспользуемся методом областей для решения данной задачи.

Рассмотрим второе неравенство системы: $(1 - a)x > 8$. Уравнение $(1 - a)x = 8$ задает на плоскости Oax гиперболу, которая разбивает ее на три области. Для определения знака значения выражения $f_1(x; a) = (1 - a)x - 8$ достаточно подставить координаты точки $O(0; 0)$ и затем воспользоваться правилом знаков чередования. Множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $f_1(x; a) \geq 0$, на рисунке 5 показано вертикальной штриховкой, гипербола отмечена пунктирной линией.



Для второго неравенства рассмотрим выражение $f_2(x; a) = \frac{x - ax - a}{x - 2 + 2a}$, которое определено при $x \neq 2(1 - a)$ и обращается в нуль при $x = \frac{a}{1 - a}$.

Прямая $x = 2(1 - a)$ и гипербола $x = \frac{a}{1 - a}$ разбивают координатную плоскость на шесть частей. С учетом того, что $\frac{a}{1 - a} = 2(1 - a)$ (графики функций, стоящих в левой и правой частях равенства пересекаются в точках A и B) при $a = 0,5$ и $a = 2$, на плоскости Oax множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $f_2(x; a) \geq 0$, выделено темным фоном.

Графики функций $x = -2a + 2$ и $x = \frac{8}{1-a}$ пере-

секаются в точках $D(-1; 4)$ и $C(3; -4)$.

Проводя прямые, параллельные оси x , видим (рис. 5), что существует два критических положения этих прямых I ($a = 1$) и II ($a = 3$), между которыми множества решений неравенств данной в условии системы не имеют общих точек.

Ответ: $1 \leq a \leq 3$.

Пример 9. (ЕГЭ-2010, досрочный.) Найдите все значения a , при каждом из которых ровно одно решение неравенства

$$x^2 + (5a + 3)x + 4a^2 \leq 4$$

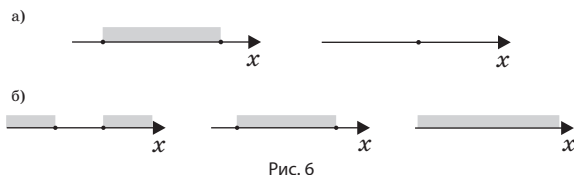
удовлетворяет неравенству $ax(x - 4 - a) \leq 0$.

Решение. Способ I (предложенный в критериях). Множество решений неравенства

$$x^2 + (5a + 3)x + 4a^2 \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - (-4a - 4))(x - (-a + 1)) \leq 0$$

образует отрезок (рис. 6, а) (возможно, вырожденный в точку) с концами $-4a - 4$ и $-a + 1$.



Множество решений неравенства $ax(x - 4 - a) \leq 0$ образует при $a < 0$ два луча (рис. 6, б), направленных в противоположные стороны и, возможно «склеенных» в одну прямую, с концами 0 и $4 + a$; при $a > 0$ — отрезок с этими же концами, а при $a = 0$ — всю прямую.

Ровно одна точка первого множества может принадлежать второму, только когда первое вырождается в точку или один из его концов совпадает с концом второго множества, то есть в следующих случаях:

а) $-4a - 4 = -a + 1$, следовательно, $a = -\frac{5}{3}$,

тогда только одно решение первого неравенства

$\left(x = \frac{8}{3}\right)$ удовлетворяет второму;

б) $-4a - 4 = 0$, следовательно, $a = -1$, тогда только одно решение первого неравенства ($x = 0$) удовлетворяет второму;

в) $-4a - 4 = 4 + a$, следовательно, $a = -\frac{8}{5}$,

тогда все числа отрезка $\left[\frac{12}{5}; \frac{13}{5}\right]$, состоящего из решений первого неравенства, удовлетворяют второму;

г) $-a + 1 = 0$, следовательно, $a = 1$, тогда только одно решение первого неравенства ($x = 0$) удовлетворяет второму;

д) $-a + 1 = 4 + a$, следовательно, $a = -\frac{3}{2}$, тогда

только одно решение первого неравенства $\left(x = \frac{5}{2}\right)$ удовлетворяет второму.

Ответ: $-\frac{5}{3}; -\frac{3}{2}; -1; 1$.

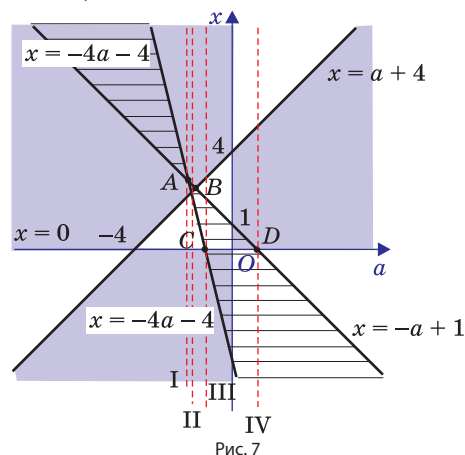
Способ II. Рассмотрим неравенство $ax(x - 4 - a) \leq 0$. Попарно пересекающиеся прямые $a = 0$, $x = 0$ и $x = a + 4$ разбивают плоскость Oax на семь частей. На рисунке 7 фоном выделено множество Φ точек плоскости, координаты которых удовлетворяют рассматриваемому неравенству.

Рассмотрим неравенство

$$x^2 + (5a + 3)x + 4a^2 \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (5a + 3)x + 4a^2 - 4 \leq 0.$$

Поскольку его дискриминант $D = (5a + 3)^2 - 4(4a^2 - 4) = (3a + 5)^2 \geq 0$ при всех значениях a и $x_1 = -a + 1$, $x_2 = -4a - 4$ — корни квадратного уравнения $x^2 + (5a + 3)x + 4a^2 - 4 = 0$, то исходное неравенство можно записать в виде $(x + a - 1) \times (x + 4a + 4) \leq 0$.



Пересекающиеся прямые $x = -a + 1$ и $x = -4a - 4$ разбивают плоскость Oax на четыре части. Горизонтальной штриховкой на рисунке 7 выделено множество Φ_1 точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(x + a - 1)(x + 4a + 4) \leq 0.$$

Проводим вертикальные прямые, параллельные оси x . Пересечение каждой прямой из этого множества с фигурой Φ дает множество M решений неравенства $ax(x - 4 - a) \leq 0$, а пересечение с фигурой Φ_1 — множество M_1 решений неравенства $(x + a - 1)(x + 4a + 4) \leq 0$. Условию задачи удовлетворяют все такие значения параметра a , при которых множества M_1 и M имеют только одну общую точку. Имеется четыре таких значения (см. рис. 7):

(I) прямая $a = a_1$ проходит через точку A пересечения прямых $x = -a + 1$ и $x = -4a - 4$, то есть $a_1 = -\frac{5}{3}$;

(II) прямая $a = a_2$ проходит через точку B пересечения прямых $x = a + 4$ и $x = -a + 1$, то есть $a_2 = -\frac{3}{2}$;

(III) прямая $a = a_3$ проходит через точку C — точку пересечения прямых $x = 0$ и $x = -4a - 4$, то есть $a_3 = -1$;

(IV) прямая $a = a_4$ проходит через точку D — точку пересечения прямых $x = 0$ и $x = -a + 1$, то есть $a_4 = 1$.

Ответ: $-\frac{5}{3}; -\frac{3}{2}; -1; 1$.

Пример 10. (ЕГЭ-2010.) Найдите все значения a , при каждом из которых все решения неравенства

$$x^2 - (4a + 4)x + 3a^2 + 12a \leq 0$$

удовлетворяют неравенству $x(x + a + 1) \geq 0$.

Решение. Рассмотрим неравенство

$$x(x + a + 1) \geq 0.$$

Пересекающиеся прямые $x = 0$ и $x = -a - 1$ разбивают плоскость Oax на четыре части. На рисунке 8 фоном выделено множество Φ точек плоскости, координаты которых удовлетворяют рассматриваемому неравенству.

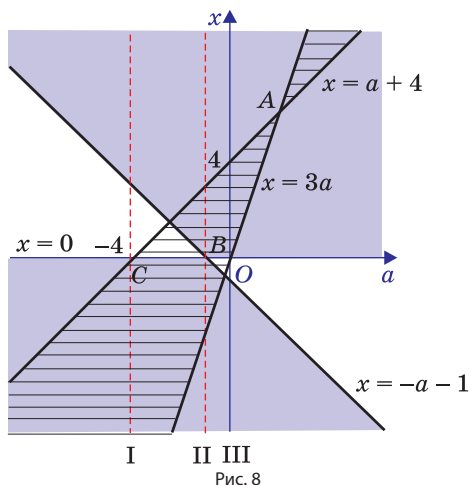


Рис. 8

Рассмотрим неравенство

$$x^2 - (4a + 4)x + 3a^2 + 12a \leq 0.$$

Поскольку дискриминант

$$D = (4a + 4)^2 - 4(3a^2 + 12a) = (a - 2)^2 \geq 0$$

при всех значениях a и $x_1 = 3a$, $x_2 = a + 4$ — корни квадратного уравнения $x^2 - (4a + 4)x + 3a^2 + 12a = 0$, то исходное неравенство можно записать в виде

$$(x - 3a)(x - a - 4) \leq 0.$$

Пересекающиеся прямые $x = 3a$ и $x = a + 4$ также разбивают плоскость Oax на четыре части. Горизонтальной штриховкой выделено множество Φ_1 точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$x^2 - (4a + 4)x + 3a^2 + 12a \leq 0.$$

Проводим вертикальные прямые, параллельные оси x . Пересечение каждой прямой из этого

множества с фигурой Φ дает множество M решений неравенства $x(x + a + 1) \geq 0$, а пересечение с фигурой Φ_1 дает множество M_1 решений неравенства $(x - 3a)(x - a - 4) \leq 0$.

Условию задачи удовлетворяют все такие значения параметра a , при которых множество M_1 содержится в M . Имеется три критических положения, I, II и III, при которых прямые, параллельные оси x , проходят через точки C , B и O , соответствующие значениям параметра $a_1 = -4$, $a_2 = -1$ и $a_3 = 0$. Используя рисунок, запишем ответ.

Ответ: $(-\infty; -4] \cup \{-1\} \cup [0; +\infty)$.

Функции

Пример 11. (ЕГЭ-2010, тренировочная работа МИОО.) Найдите все значения a , при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Решение. Данная задача может быть переформулирована следующим образом:

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^2 - |x^2 + 2x - 3| = a$ имеет более двух корней. Или по-другому: график функции $g(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3|$ имеет с прямой $y_a = a$ более двух общих точек.

Раскрывая модули в выражении, стоящем в левой части уравнения, получим:

$$g(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| = \begin{cases} -2x + 3, & \text{если } x \leq -3 \text{ или } x \geq 1, \\ 2(x + 0,5)^2 - 3,5, & \text{если } -3 < x < 1. \end{cases}$$

Построив на плоскости Oxy график функции $g(x)$ (рис. 9), замечаем, что уравнение $g(x) = a$ имеет более двух корней при выполнении условий $g(-0,5) < a < g(1)$ или $-3,5 < a < 1$.

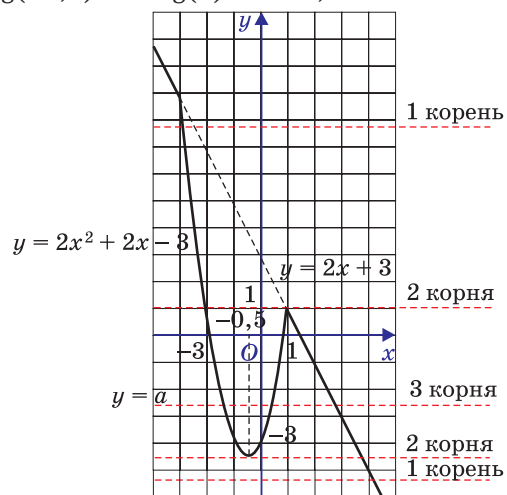


Рис. 9

Ответ: $-3,5 < a < 1$.

Пример 12. (ЕГЭ-2010, пересдача.) Найдите все значения a , при каждом из которых любая прямая, перпендикулярная оси ординат имеет нечетное число общих точек с графиком функции $f(x) = (2a - 3)x - (x + 3)|x - a|$.

Решение. Функция f определена и непрерывна на всей числовой прямой и имеет вид:

а) при $x \geq a$: $f(x) = -x^2 + 3(a - 2)x + 3a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз, и осью симметрии $x = \frac{3a}{2} - 3$;

б) при $x \leq a$: $f(x) = x^2 + ax - 3a$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = -\frac{a}{2}$.

Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a; f(a))$, где $f(a) = 2a^2 - 3a$.

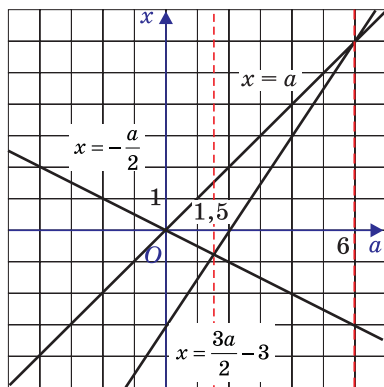


Рис. 10

На рисунке 10 представлено взаимное расположение прямых $-\frac{a}{2}$, a , $\frac{3a}{2} - 3$ на координатной оси Ox при каждом значении параметра a . Прямые $a = 0$, $a = 1,5$ и $a = 6$, соответствующие точкам пересечения изображенных прямых, разбивают ось параметров a на четыре промежутка. Отсюда следует, что необходимо рассмотреть четыре случая взаимного расположения парабол.

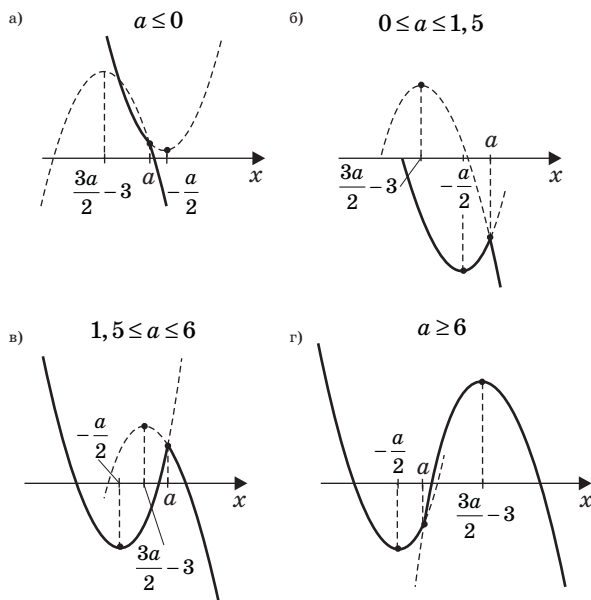


Рис. 11

На рисунке 11 представлены все возможные виды графика функции $f(x)$ (сплошная линия). Условие задачи удовлетворяет только случай, соответствующий значениям $a \leq 0$ (рис. 11, а). В этом случае прямая, перпендикулярная оси ординат, будет иметь одну общую точку с графиком функции $f(x)$. В остальных случаях найдутся значения параметра, при которых будет две общие точки с графиком функции, то есть четное число.

Ответ: $a \leq 0$.

Пример 13. (2010, тренировочная работа МИОО.) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых среди значений функции

$$y = \frac{x^2 - 2x + a}{6 + x^2}$$

есть ровно одно целое число.

Решение. Способ I. Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой.

Уравнение

$$\frac{x^2 - 2x + a}{6 + x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + a = 6 + x^2 \Leftrightarrow -2x + a = 6$$

при всех значениях параметра a имеет единственное решение $x = \frac{a - 6}{2}$. Следовательно, при любом a одно из значений данной функции равно 1.

Поскольку функция непрерывна, множество ее значений $E(y)$ образует промежуток, включающий число 1. Других целых значений функции нет, если для всех x

$$0 < \frac{x^2 - 2x + a}{6 + x^2} \text{ или } \begin{cases} x^2 - 2x + a > 0, \\ x^2 + 2x + 12 - a > 0. \end{cases}$$

Чтобы оба неравенства системы выполнялись при всех x , дискриминанты обоих трехчленов должны быть отрицательными:

$$\begin{cases} 4 - 4a < 0, \\ 4 - 4(12 - a) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a < 11. \end{cases}$$

Ответ: $1 < a < 11$.

Способ II. Данная функция определена на всей числовой прямой. Запишем функцию следующим образом:

$$y = \frac{x^2 - 2x + a}{6 + x^2} = 1 + \frac{-2x + a - 6}{6 + x^2}.$$

Замечаем, что при любом значении параметра a функция принимает значение 1 при $x = \frac{a - 6}{2}$. Следовательно, для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы при всех значениях x выполнялось двойное неравенство $-1 < \frac{-2x + a - 6}{6 + x^2} < 1$. Это неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} -6 - x^2 < -2x + a - 6, \\ -2x + a - 6 < 6 + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + a > 0, \\ x^2 + 2x - a + 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 > 1 - a, \\ (x - 1)^2 > a - 11. \end{cases}$$

Первое неравенство будет справедливо при всех $x \in \mathbf{R}$ для значений $a > 1$. Второе — для значений $a < 11$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют все значения параметра a такие, что $1 < a < 11$.

Ответ: $1 < a < 11$.

Пример 14. (ЕГЭ-2010.) Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 3|x - a^2| - 5x$$

имеет более двух точек экстремума.

Решение. *Способ I* (предложенный в критериях).

1. Функция f имеет вид:

а) при $x \geq a^2$: $f(x) = x^2 - 8x + 3a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 4$;

б) при $x \leq a^2$: $f(x) = x^2 - 2x - 3a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 1$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках (рис. 12):

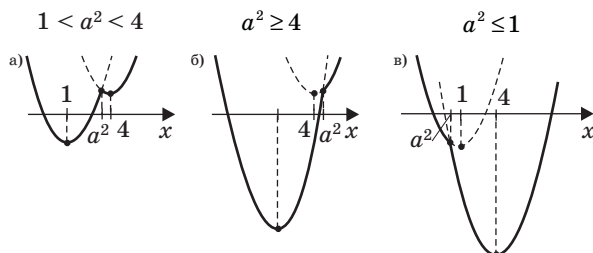


Рис. 12

2. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a^2; f(a^2))$, где $f(a^2) = a^4 - 5a^2$.

3. Функция $y = f(x)$ имеет три точки экстремума в единственном случае (рис. 12, а):

$$1 < a^2 < 4 \Leftrightarrow 1 < |a| < 2.$$

Способ II. 1. Функция f определена и непрерывна на всей числовой прямой. Раскрывая модуль при каждом фиксированном значении параметра a , получаем $f(x) = x^2 - 8x + 3a^2$ при $x \geq a^2$ и $f(x) = x^2 - 2x - 3a^2$ при $x \leq a^2$. Производная функции равна $f'(x) = 2x - 8$ при $x > a^2$ и $f'(x) = 2x - 2$ при $x < a^2$. В точке $x = a^2$ функция не имеет производной, так как равенство $2x - 8 = 2x - 2$ не выполняется ни при каком значении x . Используя достаточное условие существования экстремума, найдем все такие значения a , при которых найдется более двух точек, в которых производная равна нулю или не существует и при переходе через которые ее производная меняет знак.

Производная функции не существует в точке $x = a^2$ и может равняться нулю в точках $x = 1$ и $x = 4$ при соответствующем расположении их относительно $x = a^2$. Рассмотрим случаи взаимного расположения этих точек на числовой прямой (рис. 13).

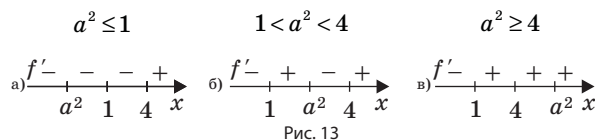


Рис. 13

Функция $y = f(x)$ имеет три точки экстремума в единственном случае (рис. 13, б):

$$1 < a^2 < 4 \Leftrightarrow 1 < |a| < 2.$$

Способ III. Данная функция имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 3a^2, & \text{если } x \leq a^2, \\ x^2 - 2x - 3a^2, & \text{если } x \geq a^2. \end{cases}$$

Функция $g(x) = x^2 - 8x + 3a^2$ задает семейство парабол с вершиной в точке $(4; -16 + 3a^2)$, а функция $h(x) = x^2 - 2x - 3a^2$ задает семейство парабол с вершиной в точке $(1; -1 - 3a^2)$. Условие задачи выполняется (см. рис. 12), если имеет решение система неравенств:

$$\begin{cases} g(1) > h_*, \\ h(4) > g_*, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 + 3a^2 > -1 - 3a^2, \\ 8 - 3a^2 > -16 + 3a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 > 1, \\ a^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < a < -1 \text{ или } 1 < a < 2.$$

Ответ: $-2 < a < -1, 1 < a < 2$.

Пример 15. (ЕГЭ-2010, первая волна.)

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 2ax + |x^2 - 6x + 8|$$

меньше 1.

Решение. *Способ I* (предложенный в критериях). 1. Функция f имеет вид:

а) при $x^2 - 6x + 8 \geq 0$: $f(x) = x^2 + (2a - 6)x + 8$, поэтому ее график есть две части параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 3 - a$;

б) при $x^2 - 6x + 8 < 0$: $f(x) = -x^2 + (2a + 6)x - 8$, а ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 3 + a$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках (рис. 14, а–г).

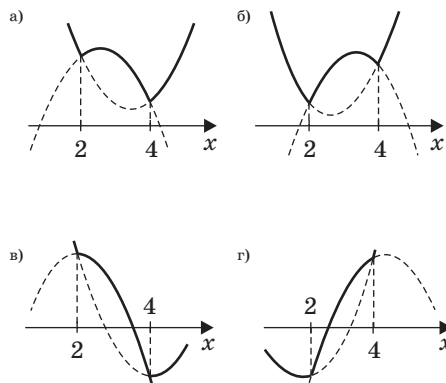


Рис. 14

2. Наименьшее значение функция $f(x)$ может принимать только в точках $x = 2$ или $x = 4$, а если $3 - a \notin [2; 4]$, то в точке $x = 3 - a$.

3. Наименьшее значение функция $f(x)$ меньше единицы тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(2) < 1 \\ f(4) < 1 \\ \begin{cases} 3-a < 2 \\ 3-a > 4, \\ f(3-a) < 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a < 1 \\ 8a < 1 \\ \begin{cases} a > 1 \\ a < -1, \\ |3-a| > \sqrt{7} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{1}{4} \\ a > 3 + \sqrt{7} \end{cases}$$

Способ II. При каждом фиксированном значении параметра a функция $y_a(x) = 2ax + |x^2 - 6x + 8|$ определена на всей числовой прямой и является непрерывной на всей области определения. Функция задается формулой

$y_a(x) = x^2 - (6 - 2a)x + 8$ при $x \leq 2$ и $x \geq 4$, а при $2 \leq x \leq 4$

$$y_a(x) = -x^2 + (6 + 2a)x - 8.$$

На каждом из промежутков $(-\infty; 2]$, $[2; 4]$ и $[4; +\infty)$ функция $y_a(x)$ является ограниченной снизу.

Следовательно, условию задачи будут удовлетворять все такие значения параметра a , при которых неравенство $y_a(x) < 1$, или

$2ax + |x^2 - 6x + 8| < 1 \Leftrightarrow 2ax < 1 - |x^2 - 6x + 8|$, имеет хотя бы одно решение, то есть график функции $g(x) = 1 - |x^2 - 6x + 8|$ расположен выше графика функции $y = 2ax$ хотя бы при одном значении x .

Построим на плоскости Oxy график функции $g(x)$ (рис. 15). Равенство $y = 2ax$ задает на плоскости Oxy семейство прямых с угловым коэффициентом $2a$, проходящих через начало координат. Имеется два критических положения этих прямых.

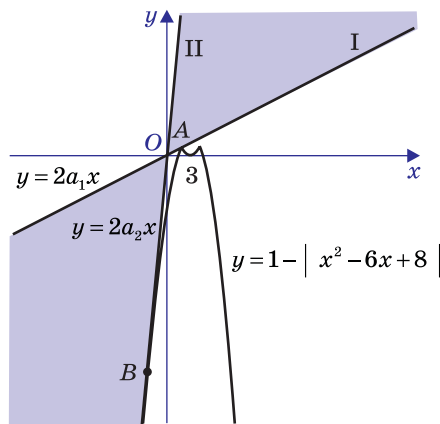


Рис. 15

(I) График функции $y = 2a_1x$ проходит через точку $A(2; 1)$, как указано на рисунке 15. Из уравнения $2a_1x = 1$ при $x = 2$ получаем угловой коэффициент первой прямой $k_1 = 2a_1 = 0,5$.

(II) График функции $y = 2a_2x$ касается графика функции $g(x) = -x^2 + 6x - 7$ на промежутке $(-\infty; 2]$, то есть проходит через точку B , как указано на рисунке 15. Из условия касания найдем угловой коэффициент второй прямой:

$$\begin{cases} g'(x_0) = y'(x_0), \\ g(x_0) = y(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_0 + 6 = 2a_2, \\ -x_0^2 + 6x_0 - 7 = 2a_2x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\sqrt{7}, \\ 2a_2 = 6 + 2\sqrt{7}. \end{cases}$$

Отсюда имеем угловой коэффициент второй прямой: $k_2 = 2a_2 = 2\sqrt{7} + 6$.

Рассматриваемое неравенство не будет иметь решений при $k_1 \leq k \leq k_2$, $0,5 \leq 2a \leq 2\sqrt{7} + 6$, $0,25 \leq a \leq \sqrt{7} + 3$, то есть прямые расположены в выделенной фоном области на рисунке 15.

Соответственно, решение будет существовать при $a \in (-\infty; 0,25) \cup (\sqrt{7} + 3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 0,25) \cup (\sqrt{7} + 3; +\infty)$.

Пример 16. (ЕГЭ-2010, пробный экзамен.) Найдите наименьшее значение параметра a , при котором функция

$$y = 9 + 7x - 3|ax + 2| + |ax + 5| + |x + 1|$$

является неубывающей на всей числовой прямой.

Решение. Функция $y = 9 + 7x - 3|ax + 2| + |ax + 5| + |x + 1|$ определена на всей числовой прямой. Пусть $a < 0$. Данная функция при каждом значении параметра a является кусочно-линейной. Точки -1 , $-\frac{2}{a}$, $-\frac{5}{a}$ разбивают числовую прямую на промежутки, на каждом из которых функция является линейной. В таблице представлены знаки подмодульных выражений на каждом из промежутков.

	$(-\infty; -1)$	$\left(-1; -\frac{2}{a}\right)$	$\left(-\frac{2}{a}; -\frac{5}{a}\right)$	$\left(-\frac{5}{a}; +\infty\right)$
$x + 1$	-	+	+	+
$ax + 2$	+	+	-	-
$ax + 5$	+	+	+	-

При раскрытии модулей получаем:

если $x < -1$, то y задается формулой

$$y = 9 + 7x - 3ax - 6 + ax + 5 - x - 1 = (6 - 2a)x + 7;$$

если $-1 \leq x < -\frac{2}{a}$, то

$$y = 9 + 7x - 3ax - 6 + ax + 5 + x + 1 = (8 - 2a)x + 9;$$

если $-\frac{2}{a} \leq x < -\frac{5}{a}$, то

$$y = 9 + 7x + 3ax + 6 + ax + 5 + x + 1 = (8 + 4a)x + 21;$$

если $x \geq -\frac{5}{a}$, то

$$y = 9 + 7x + 3ax + 6 - ax - 5 + x + 1 = (8 + 2a)x + 11.$$

Для того чтобы функция не убывала, необходимо и достаточно, чтобы все полученные значения угловых коэффициентов прямых были неотрицательными. Получаем систему

$$\begin{cases} a < 0, \\ 6 - 2a \geq 0, \\ 8 - 2a \geq 0, \Leftrightarrow -2 \leq a < 0. \\ 8 + 4a \geq 0, \\ 8 + 2a \geq 0 \end{cases}$$

Отсюда получаем наименьшее значение параметра, равное -2 . Так как по условию задачи нужно найти наименьшее значение a , то случай $a \geq 0$ рассматривать не нужно.

Ответ: -2 .

Пример 17. (ЕГЭ-2010, вторая волна.) Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее значение функции

$$f(x) = x^2 - 11|x - a| - x$$

на отрезке $[-8; 7]$ не принимается ни на одном из концов этого отрезка.

Решение. 1. Функция f определена и непрерывна на всей числовой прямой и имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 12x + 11a, & \text{если } x \geq a, \\ x^2 + 10x - 11a, & \text{если } x \leq a. \end{cases}$$

2. Производная функции равна $f'(x) = 2x - 12$ при $x > a$ и $f'(x) = 2x + 10$ при $x < a$. Отметим, что в точке $x = a$ функция не имеет производной, так как равенство $2x - 12 = 2x + 10$ не выполняется ни при каком значении x . Производная функции не существует в точке $x = a$ и может равняться нулю в точках $x = -5$ и $x = 6$ при соответствующем расположении их относительно $x = a$. Рассмотрим случаи взаимного расположения этих точек на числовой прямой (рис. 16) и характер поведения функции на каждом из промежутков числовой прямой, на которые точки $x = a$, $x = -5$ и $x = 6$ ее разбили.

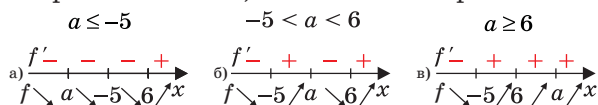


Рис. 16

3. Условию задачи удовлетворяет только случай $-5 < a < 6$, соответствующий рисунку 16,б, при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} f(-8) < f(a), \\ f(7) < f(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-8)^2 + 10 \cdot (-8) - 11a < a^2 - a, \\ 7^2 - 12 \cdot 7 + 11a < a^2 - a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 10a + 16 > 0, \\ a^2 - 12a + 35 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + 8)(a + 2) > 0, \\ (a - 5)(a - 7) > 0. \end{cases}$$

Отсюда с учетом $-5 < a < 6$ получаем: $-2 < a < 5$.

Ответ: $-2 < a < 5$.

Задачи для самостоятельного решения

1. При каких значениях b уравнение

$$x^2 - (4b - 2) \cdot |x| + 3b^2 - 2b = 0$$

имеет два различных решения?

2. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\cos \frac{10x - 2x^2 - a}{3} - \cos(2x + a) = x^2 - 8x - a$$

имеет единственное решение.

3. Найдите все значения a , при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{3 - x} + |x + a| \leq 2$ является отрезок.

4. Найдите все значения a , при каждом из которых решения неравенства

$$|3x - a| + 2 \leq |x - 4|$$

образуют отрезок длины 1.

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 15|$$

меньше 1.

6. Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции больше 1:

$$f(x) = 4ax + |x^2 - 8x + 7|.$$

7. Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - |x - a^2| - 9x$$

имеет более двух точек экстремума.

8. Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 10x$$

имеет хотя бы одну точку максимума.

9. Найдите все значения a , при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4| - a$$

пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

10. Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее значение функции

$$f(x) = x^2 - 7|x - a| - x$$

на отрезке $[-5; 6]$ не принимается ни на одном из концов этого отрезка.

11. Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = -x^2 + 8|x - a| + 2x$$

на отрезке $[-7; 7]$ не принимается ни на одном из концов этого отрезка.

12. Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее значение функции

$$f(x) = x^2 - 11|x - a| - x$$

на отрезке $[-6; 7]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

13. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых среди значений функции

$$y = \frac{x^2 + 2x - a}{6 + x^2}$$

есть ровно одно целое число.

Ответы: 1. $0 < b < \frac{2}{3}$, $b = 1$. 2. $a = -16$.

3. $(-1; 1) \cup \left[\frac{5}{4}; 5\right]$. 4. 2; 22. 5. $\left(-\infty; \frac{1}{6}\right) \cup (4 + \sqrt{14}; +\infty)$.

6. $\left[\frac{1}{4}; \frac{4 + \sqrt{6}}{2}\right]$. 7. $-\sqrt{5} < a < -2$, $2 < a < \sqrt{5}$.

8. $-\sqrt{6} < a < -2$, $2 < a < \sqrt{6}$. 9. $a \leq -2$, $a \geq 0$.

10. $-1 < a < 2$. 11. $1 < a < 3$. 12. $a \leq -5$, $a \geq -2$.

13. $-11 < a < -1$.

ДВУЗНАЧНОЕ ЧИСЛО МОЖНО УСТНО ВОЗВЕСТИ В КВАДРАТ



Фото Е. Чудаевой

■ Здравствуйте, уважаемые читатели! Меня зовут Ильясова Айнура, я учусь в 10-м классе в школе «Дарын» Карагандинской области. Я люблю математику, и мне нравится решать разные задачки и копаться в теории. Еще в 8-м классе я заметила закономерность при возведении двузначных чисел в квадрат. Затем я попыталась найти ей доказательство. И у меня это получилось, но я только сейчас решилась вам написать об этом. Итак, хочу представить еще один способ возведения в квадрат двузначных чисел. Назвать его новым нельзя, он основан на известных правилах. Давайте же рассмотрим его.

Пусть нам дано двузначное число ab .

1. Возведем в квадрат цифру b и запишем результат: $(ab)^2 = b^2$.

Если квадрат цифры b переходит через десяток, то мы запишем только последнюю цифру, а первую прибавим к результату следующего действия.

2. Найдем удвоенное произведение цифр a и b , то есть $2ab$.

Теперь вспомним про предыдущее действие. Если число b^2 — двузначное, то его первую цифру следует прибавить к удвоенному произведению. Результат запишем аналогично результату первого действия — слева от b^2 .

3. Теперь найдем квадрат числа a , прибавим к нему (если есть) первую цифру результата предыдущего действия. Результат запишем полностью перед двумя предыдущими цифрами.

Рассмотрим на конкретных примерах.

Пример 1. 27^2 .

- 1) $7^2 = 49$;
 - 2) $2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$; $28 + 4 = 32$;
 - 3) $2^2 = 4$; $4 + 3 = 7$.
- $27^2 = 729$.

Пример 2. 49^2 .

- 1) $9^2 = 81$;
 - 2) $2 \cdot 4 \cdot 9 = 72$; $72 + 8 = 80$;
 - 3) $4^2 = 16$; $16 + 4 = 24$.
- $49^2 = 2401$.

Вы, наверное, заметили, что процесс возведения в квадрат двузначных чисел похож на тождество «квадрат суммы двух выражений», то есть $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Это действительно так, и доказательство этого алгоритма основывается на этом тождестве. Представим число ab в виде $10a + b$ и возведем в квадрат данную сумму, получим:

$$(10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2.$$

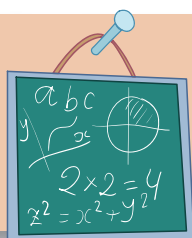
Число $20ab$ оканчивается на ноль, то есть $20ab$ — количество десятков, это дает нам право записать его перед квадратом числа b .

Число $100a^2$ оканчивается двумя нулями, то есть $100a^2$ — количество сотен, поэтому мы можем записать его перед двумя предыдущими разрядами.

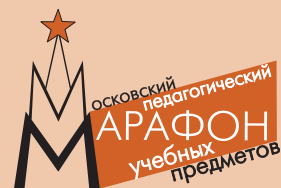
Если хорошо овладеть техникой данного алгоритма, то можно возводить в квадрат двузначные числа устно, это может быть полезно каждому.

$1^2 = 1$	$21^2 = 441$	$31^2 = 961$
$2^2 = 4$	$22^2 = 484$	$32^2 = 1024$
$3^2 = 9$	$23^2 = 529$	$33^2 = 1089$
$4^2 = 16$	$24^2 = 576$	$34^2 = 1156$
$5^2 = 25$	$25^2 = 625$	$35^2 = 1225$
$6^2 = 36$	$26^2 = 676$	$36^2 = 1296$
$7^2 = 49$	$27^2 = 729$	$37^2 = 1369$
$8^2 = 64$	$28^2 = 784$	$38^2 = 1444$
$9^2 = 81$	$29^2 = 841$	$39^2 = 1521$
$10^2 = 100$	$30^2 = 900$	$40^2 = 1600$

$41^2 = 1681$	$71^2 = 5041$	$81^2 = 6561$
$42^2 = 1764$	$72^2 = 5184$	$82^2 = 6724$
$43^2 = 1849$	$73^2 = 5329$	$83^2 = 6889$
$44^2 = 1936$	$74^2 = 5476$	$84^2 = 7056$
$45^2 = 2025$	$75^2 = 5625$	$85^2 = 7225$
$46^2 = 2116$	$76^2 = 5776$	$86^2 = 7396$
$47^2 = 2209$	$77^2 = 5929$	$87^2 = 7569$
$48^2 = 2304$	$78^2 = 6084$	$88^2 = 7744$
$49^2 = 2401$	$79^2 = 6241$	$89^2 = 7921$
$50^2 = 2500$	$80^2 = 6400$	$90^2 = 8100$



ПРОГРАММА ДНЯ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ



3 апреля		2011 года		В московском государственном лицее № 1535 по адресу: ул. Усачева, дом 52 (в 3 минутах ходьбы от станции метро «Спортивная»).		
9.00		НАЧАЛО РАБОТЫ				
9.30➤10.15		ОТКРЫТИЕ ДНЯ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ				
10.30 ▼ 11.45 регистрация 10.20–10.35		Круглый стол ГИА по математике за курс основной и за курс средней (полной) школы в 2012 году А.Л. Семенов, председатель НМС ФИПИ по математике, ректор МИОО, чл.-корр. РАН, акад. РАО; Л.В. Кузнецова, к.п.н., в.н.с. ИСМО РАО; И.В. Яценко, к.ф.-м.н., руководитель ФКР КИМ по математике, проректор МИОО	Творческая мастерская Калейдоскоп педагогических идей. Презентация опыта работы учителей математики Москвы А.В. Семенов, к.п.н., зав. лабораторией МИОО	НОУ «Ломоносовская школа» Лекция Преподавание математики в профильной школе. Из опыта работы НОУ «Ломоносовская школа» Н.Н. Хлевнюк, М.Е. Шишкина, М.В. Иванова	Издательство «Экзамен» Лекция ЕГЭ-2011. Решение задач типа С И.Н. Сергеев, д.ф.-м.н., профессор МГУ	РАСПИСАНИЕ УТОЧНЯЕТСЯ
11.45➤12.15		ПЕРЕРЫВ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ПОДАРКОВ И ПОСЕЩЕНИЯ ВЫСТАВКИ-ЯРМАРКИ				
12.15 ▼ 13.30 регистрация 12.05–12.20		Круглый стол с участием представителей вузовских олимпиад Развитие математической одаренности учащихся и математические олимпиады И.В. Яценко, проректор МИОО; В.Д. Арнольд, зам. директора МЦНМО	Творческая мастерская Калейдоскоп педагогических идей. Презентация опыта работы учителей математики Москвы (продолжение) А.В. Семенов, к.п.н., зав. лабораторией МИОО	Издательство «БАКО» Лекция Решение сложных задач ЕГЭ по математике С.И. Колесникова, ст. преп. каф. высшей математики МФТИ, редактор журнала «Потенциал», ведущий специалист ФЭФТШ при МФТИ, соросовский учитель	Издательство «Экзамен» Лекция Инновационные, электронные учебно-наглядные пособия по математике в рамках введения новых стандартов образования и реализации национальной образовательной программы «Наша новая школа» А.А. Кудрявцев, преподаватель математики, физики и информатики, разработчик электронных учебных пособий («Экзамен-Медиа»)	Издательство «Легион» Лекция Методика подготовки школьников к различным формам аттестации и контроля с использованием пособий издательства «Легион» С.Ю. Кулабухов, к.ф.-м.н., начальник отдела математики издательства «Легион»
13.45 ▼ 15.00 регистрация 13.35–13.50		Лекция Основы для решения сложных задач ЕГЭ закладываются в 8–9-х классах Д.Э. Шноль, зав. кафедрой математики школы-интерната «Интеллектуал»	Круглый стол Компьютер как инструмент учителя математики О.В. Макарова, редактор газеты «Математика», учитель ЦО №1428; В.Н. Дубровский, к.ф.-м.н., доц. каф. математики СУНЦ МГУ, методист отдела образовательных программ фирмы «1С»	Круглый стол Компьютерная поддержка урока математики в контексте стандартов нового поколения А.В. Пантуев, к.ф.-м.н., доцент кафедры математической физики МГПУ, ст. преподаватель СУНЦ МГУ, методист ЦИТУО по математике	Издательство «Илекса» Лекция Выделение общих методов решения задач в новом двухуровневом учебнике алгебры и начал анализа как основа успешной подготовки учащихся к решению заданий ЕГЭ по математике Е.П. Нелин, к.п.н., проф., лектор курсов повышения квалификации учителей математики при Старооскольском городском ИУУ, Курском областном ИПКиПРО	Издательство «Национальное образование» Лекция
15.00		ЗАКРЫТИЕ ДНЯ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ				

Номера аудиторий будут объявлены в день проведения мероприятий. В расписании возможны изменения и дополнения.

ВСЬ ДЕНЬ РАБОТАЕТ ВЫСТАВКА-ЯРМАРКА УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ



ВХОД ТОЛЬКО ПО ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ РЕГИСТРАЦИИ на сайте <http://marathon.1september.ru> и с предварительно распечатанным именным билетом.

Регистрация прекращается при достижении максимального количества участников.

ОФИЦИАЛЬНЫЙ ИМЕННОЙ СЕРТИФИКАТ ВСЕМ УЧАСТНИКАМ МАРАФОНА–2011, посетившим три мероприятия подряд.

Дополнительную информацию о Марафоне можно найти на сайте Издательского дома «Первое сентября» www.1september.ru или получить по телефону: (499) 249-3138.

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

ЗАДАЧА В6 — ДЕЙСТВИЯ С ФИГУРАМИ, КООРДИНАТАМИ И ВЕКТОРАМИ

С. ДВОРЯНИНОВ

Напоминаем!
Задача В6 части 1 оценивается 1 первичным баллом (из 30 возможных).

Часть В единого государственного экзамена содержит задачи, связанные с понятием площади.

Напомним **основные формулы** для вычисления площади геометрических фигур: Площадь треугольника с основанием a и высотой h : $S = \frac{1}{2}ah$.

Площадь прямоугольного треугольника с катетами a и b : $S = \frac{1}{2}ab$.

Площадь трапеции с основаниями a и b и высотой h : $S = \frac{a+b}{2}h$.

Площадь параллелограмма с основанием a и высотой h : $S = ah$.

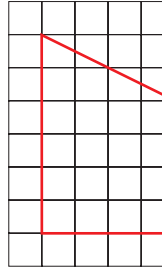
Самое популярное задание В6 — это найти площадь многоугольника с вершинами в узлах квадратной сетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$.

Но существует формула, позволяющая сразу вычислить площадь многоугольника с вершинами в узлах сетки, это **формула Пика**:

$$S = B + \frac{\Gamma}{2} - 1,$$

где B — число узлов сетки, которые лежат внутри многоугольника, Γ — число узлов сетки на границе многоугольника.

Пример 1. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (рис. 1). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Пример 2. Найдите площадь трапеции, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ (рис. 4). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

Если дан многоугольник, то его можно **разбить** на такие части, которые пересекаются только по границам и площадь каждой из которых легко находится. Например, разбиваем многоугольник на треугольники, его площадь равна сумме площадей треугольников.

А можно **дополнить** данную фигуру до многоугольника, площадь которого легко вычисляется. Например, добавив треугольник, достраиваем многоугольник до прямоугольника; площадь многоугольника равна разности площадей прямоугольника и треугольника.

Подобные задачи не очень сложные. Главное здесь — быть внимательным и аккуратным при проведении элементарных вычислений. Для самоконтроля полезно решить задачу нахождения площади двумя способами. Разумеется, результаты должны совпадать.

В некоторых случаях полезно найти длины сторон многоугольника. Здесь надо использовать теорему Пифагора. В частности, длина диагонали одной клетки равна $\sqrt{2}$.

ся пополам; они разбивают его на 4 равных прямоугольных треугольника с катетами 2 и 6.

Значит, площадь ромба равна $S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 24$.

Ответ: 24.

Пример 4. Найдите площадь параллелограмма, изображенного на рисунке 8.

у



Рис. 1

Решение. Способ I. Разобьем многоугольник на трапецию и треугольник (рис. 2).

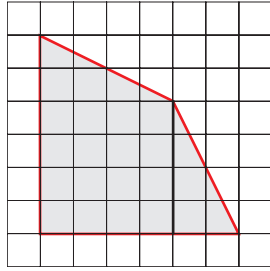


Рис. 2

$$S = \frac{4+6}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 20 + 4 = 24 \text{ см}^2.$$

Способ II. Дополним многоугольник до прямоугольника квадратом и двумя треугольниками (рис. 3).

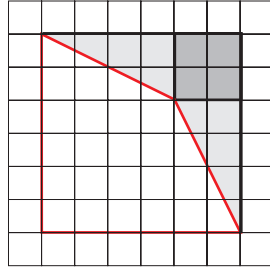


Рис. 3

$$S = 6^2 - 2 \cdot \frac{4 \cdot 2}{2} - 2^2 = 36 - 8 - 4 = 24 \text{ см}^2.$$

Способ III. По формуле Пика $S = 17 + \frac{16}{2} - 1 = 24$; внутри четырехугольника 17 узлов сетки, на границе — 16 узлов.

Комментарий. В качестве основания треугольника следует выбирать сторону так, чтобы вычисления оказывались наиболее простыми.

Ответ: 24 см².

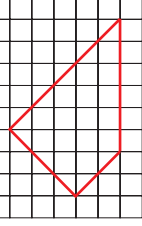


Рис. 4

Решение. Площадь трапеции равна

$$S = \frac{2\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{2} = 21 \text{ см}^2.$$

Можно поступать, как и в примере 1 (рис. 5).

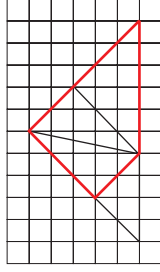


Рис. 5

Разбиваем на два треугольника:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 21 \text{ см}^2.$$

Разбиваем на прямоугольник и равнобедренный треугольник:

$$S = 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 21 \text{ см}^2;$$

дополняем до треугольника:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 21 \text{ см}^2;$$

используем формулу Пика:

$$S = 14 + \frac{16}{2} - 1 = 21 \text{ см}^2.$$

Ответ: 21 см².

Комментарий. В трех последних случаях были использованы только натуральные числа.

Пример 3. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 4 и 12.



Рис. 6

Решение. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и в точке пересечения делят-

Рис. 7

Ответ: 6.

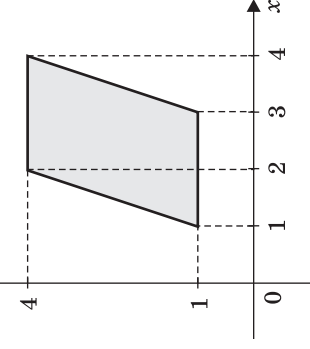


Рис. 8

Решение. Чтобы воспользоваться формулой площади параллелограмма, надо знать его основание и высоту. Найдём их: меньшее основание равно $3 - 1 = 2$, высота равна $4 - 1 = 3$. Площадь параллелограмма равна: $S = 2 \cdot 3 = 6$.

Ответ: 6.

Пример 5.

Стороны параллелограмма равны 9 и 15. Высота, опущенная на первую сторону, равна 10. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма (рис. 9).

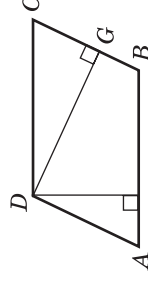


Рис. 9

Решение. В этой задаче площадь находить не требуется, но именно она поможет нам получить ответ. Выразим площадь параллелограмма дважды: $S = AB \cdot DH$, $S = BC \cdot DG$.

По условию задачи $AB = 15$, $BC = 9$, $DG = 10$. Приравняв оба произведения и подставив известные нам значения, получим: $15 \cdot DH = 9 \cdot 10$, откуда $DH = 6$.

Ответ: 6.

Региональный круглый стол «Теория и практика обучения комбинаторике, статистике и теории вероятностей в школе (опыт Липецкой области)»

Место и дата проведения: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина. 20 мая 2011 г.

Цель: интеграция усилий ученых, преподавателей, методистов, учителей Липецкой области и соседних регионов для решения актуальных проблем школьного математического образования, связанных с введением стохастической линии.

Предполагается обсуждение вопросов:

1. Преподавание комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики в России: уроки истории. 2. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей в ФГОС второго поколения. 3. Методика и технология обучения комбинаторике, статистике и теории вероятностей в школе (опыт Липецкой области). 4. Новая содержательная линия школьного курса математики в заданиях ГИА для 9-х классов. 5. Методика организации и проведения элективных курсов. 6. Образовательные электронные и телекоммуникационные ресурсы. 7. Подготовка и переподготовка учителя математики к реализации новой содержательной линии.

Формы участия: с публикацией материалов доклада и с устным докладом; с публикацией материала доклада, но без устного доклада; без доклада.

Для участия в работе круглого стола необходимо прислать заявку и текст доклада (с устным докладом

или без устного доклада) до 11 апреля 2011 года по электронному адресу.

Публикации:

1. Сборник материалов докладов будет издан к началу работы круглого стола. 2. Текст не более 5 страниц формата А4 в редакторе Word MS Office 2003, 2007. 3. Титульная страница: фамилии и инициалы каждого автора, название тезисов, аннотация. 4. Межстрочный интервал: одинарный (1,0) 5. Ширина всех полей: по 2,5 см. Красная строка 1 см. 6. Шрифт: Times New Roman. Размер символа 14. 7. Страницы должны быть пронумерованы последовательно. 8. Список литературы (библиография) в конце статьи оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ.

Приглашение на круглый стол будет выслано до 30 апреля 2011 года.

Электронный адрес (e-mail): shcherserg@mail.ru (Щербатых Сергей Викторович).

Контактные телефоны: (8-474-67) 2-85-22 (кафедрa), 8-915-559-29-67 (С.В. Щербатых).



Мультимедийные приложения к УМК по геометрии И. Ф. Шарыгина (7–9 классы)

В мультимедийном издании представлены материалы ко всем темам школьного курса геометрии. Большое внимание уделяется методам решения геометрических задач. Учащиеся могут самостоятельно выполнять с помощью компьютера все построения, о которых идет речь в печатном варианте учебника.

Интерактивное наглядное пособие «Алгебра. Графики функций»

Пособие представляет собой специальное программное средство, с помощью которого можно на одной координатной плоскости построить до 6 графиков различных функций, выполнить параллельный перенос, отображение, сдвиг, произвести редактирование построения, получить распечатки построений.



«Вероятность и статистика». Практикум. 5–9 классы

С помощью пособия можно не только решить предложенные задачи, но и произвести ряд экспериментов с помощью входящей в состав издания «Статистической лаборатории». На диске имеется ряд виртуальных лабораторий, моделирующих различные случайные ситуации (выпадение монеты, игральной кости, шарика на рулетке и др.). Самостоятельное проведение статистических экспериментов поможет более глубокому пониманию законов теории вероятностей.

Мультимедийная продукция совместима с интерактивными досками различных производителей, рассчитана на эксплуатацию на компьютерах как в образовательных учреждениях, так и дома.



Издательство «Дрофа»

127018, Москва, Суэцкий вал, д. 49, стр. 1
Тел.: (495) 795-05-50, 795-05-51;
факс: (495) 795-05-52
E-mail: sales@drofa.ru, http://www.drofa.ru

Книготорговые организации. Оптовые продажи

ООО Компания «Разумник»
Тел.: (495) 589-26-88
E-mail: zakaz@razumnik.ru
http://www.razumnik.ru

ООО «Абрис»
Тел./факс: (495) 229-67-59
E-mail: abrisd@textbook.ru
http://www.textbook.ru

Г. НИКИФОРОВ,
С. МИНАЕВА,
Москва

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ ПО ФИЗИКЕ: МЕЖПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗЕРВЫ

На семинаре учителей математики из школ г. Ярославля обсуждались проблемы межпредметных связей предметов естественно-математического цикла. На семинаре присутствовал ведущий научный сотрудник лаборатории физического образования ИСМО РАО, научный консультант муниципального диагностического центра ЕГЭ по физике г. Ярославля **Геннадий Григорьевич Никифоров**. Поскольку он — заместитель председателя федеральной предметной комиссии разработчиков контрольных измерительных материалов ЕГЭ по физике, то именно с ним мы обсуждаем эти вопросы.

С.М. Как, на Ваш взгляд, можно охарактеризовать состояние межпредметных связей физики и математики в настоящее время?

Г.Н. В условиях свободы выбора учебных методических комплектов и при наличии права учителя при составлении рабочих программ на 20% изменять содержание курса, в принципе, невозможен подход к установлению межпредметных связей, существовавших в условиях работы по единой для всей страны программе и одному учебнику. Вместе с тем внимательный анализ стандартов и примерных программ по физике и математике показывает, что содержание курса математики по всем принципиальным вопросам полностью обеспечивает потребности курса физики как при базовом, так и при профильном уровнях ее изучения: ученики изучают все необходимые при изучении физики функции и методы их анализа, овладевают приемами алгебраических преобразований при решении уравнений и их систем. Более того, математики работают «на опережение».

С.М. Что Вы имеете в виду?

Г.Н. Речь идет об изучении в курсе математики статистики, элементов теории вероятностей, анализа данных. Введение этого крайне необходимого для физики раздела осталось просто незамеченным физическим сообществом. Весь раздел молекулярной физики, который имеет принципиально статистический характер, изучается без учета этих математических знаний. Среди физиков до сих пор идут бои, можно ли пользоваться представлением о среднем значении результатов измерений, тогда как математики это представление вводят.

С.М. Следует ли из Ваших слов, что межпредметные проблемы исчезли, обсуждение их потеряло актуальность?

Г.Н. Нет, конечно. И здесь есть, по-моему, два уровня работы. Первый из них: кто, где и когда будет проводить согласование программ, если на федеральном уровне она невозможна. Выход из этого противоречия, на мой взгляд, есть. На федеральном уровне

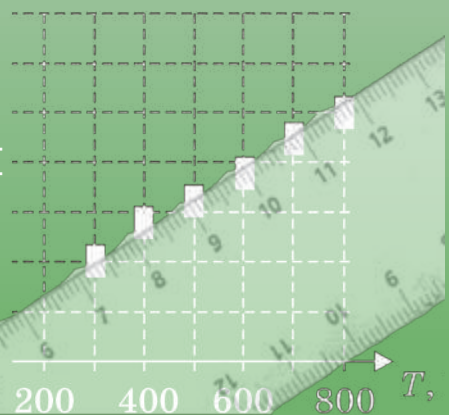
Масса холодной воды m_1 :

Температура холодной во

Масса смеси $m = 242 \pm 3$:

Температура смеси $\theta = 56$:

Масса горячей воды $m_2 =$



Температура горячей воды $t_2 =$
 $80 \pm 1^\circ\text{C}$.
 $c_{\text{воды}} = (4200 \pm 100) \text{ Дж/(кг} \cdot ^\circ\text{C)}$
Определим количество теплоты, отданной горячей водой
 $Q_2 = c \cdot m(t_2 - \theta)$
 $Q_2 = 4200 \cdot 0,142 \cdot (80$

могут быть согласованы примерные программы, а на уровне учебного заведения — рабочие программы в рамках разрешенных 20%, о которых речь шла выше.

С.М. Что имеется в виду под вторым уровнем?

Г.Н. Я имею в виду конкретную, кропотливую работу учителей и физики, и математики над преодолением неизбежных и объективно существующих проблем учеников. Их приходится учитывать и при конструировании заданий КИМ ЕГЭ по физике. Так, например, две из четырех задач второй части КИМ имели расчетный характер. Ответ записывался учеником в бланк, и правильность его проверял компьютер. В 2011 году мы отказались от этих задач: количество вычислительных ошибок в них достаточно велико. Еще один пример касается алгебраических умений. В критериях оценивания решений заданий части С есть фраза «допускается решение по частям, с промежуточными вычислениями»: мы не уверены, что алгебраические преобразования при выводе конечного выражения будут доведены до конца и будут выполнены верно.

С.М. Какие проблемы в математической подготовке одиннадцатиклассников обнаруживаются в итоговой проверке знаний по физике?

Г.Н. Результаты ЕГЭ указывают направления совершенствования методики, в том числе в преодолении противоречий межпредметного характера. Именно эти результаты показывают два актуальных направления: вычисления и работа с графиками. Вычислительные умения (подсчеты, округление результата, работа с приближенными данными) необходимы учащимся при выполнении 40% заданий части А и пяти из шести заданий части С, а задания на построение и анализ графиков встречаются во всех трех частях экзаменационной работы. Чтобы не быть голословным, приведу пример задания базового уровня по работе с графиком части А из демонстрационного варианта контрольных измерительных материалов ЕГЭ-2010 по физике.

А1. На рисунке 1 представлен график зависимости скорости автомобиля от времени t . Найдите путь, пройденный автомобилем за 5 с.

- 1) 0 м 2) 20 м 3) 30 м 4) 35 м

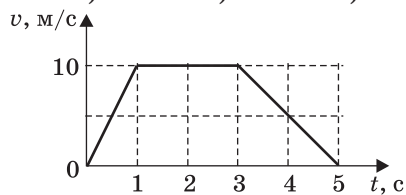


Рис. 1

Учащиеся знают, что на графике зависимости модуля скорости от времени путь численно равен площади трапеции, ограниченной этим графиком. Они должны найти площадь по клеткам или по формуле площади трапеции. Каждая клетка соответствует 5 м, пройденный путь равен 35 м.

Ответ: 4.

Следующий пример графического задания части А уже относится к повышенному уровню.

А25. На рисунке 2 показаны результаты измерения давления постоянной массы разреженного газа при повышении его температуры. Погрешность измерения температуры $\Delta T = \pm 10$ К, давления $\Delta p = \pm 2 \cdot 10^4$ Па. Газ занимает сосуд объемом 5 л. Чему примерно равно число молей газа?

- 1) 0,2 2) 0,4 3) 1,0 4) 2,0

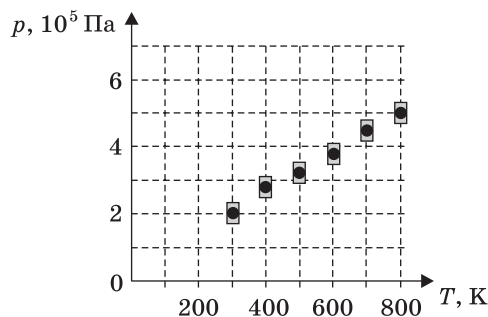


Рис. 2

С.М. Почему задания такого типа в физике относятся к повышенному уровню?

Г.Н. Такая классификация имеет как раз межпредметную причину: соответствующие умения эффективно могут формироваться лишь совместными усилиями учителей физики и математики. При решении этой задачи ученик должен использовать целый комплекс межпредметных умений: вначале он должен определить основу эксперимента (уравнение состояния $P \cdot V = \nu \cdot R \cdot T$ — это физическая сторона вопроса), потом он должен вспомнить математику и увидеть в физическом уравнении состояния математическую функцию $y = kx$. Для этого приходится переписать уравнение состояния в виде $P = \frac{\nu R}{V} T$.

Чтобы построить прямую, выражающую зависимость давления от температуры, ученик использует умение по проведению аппроксимирующих прямых: *прямая должна проходить так, чтобы одинаковое число точек находилось по разную сторону прямой*. Увидеть их при построении поможет прозрачная линейка (рис. 3). Теперь выберем «удобную» точку на графике.

Таковыми являются точки *A* или *B* (рис. 4), координаты которых совпадают с узлами координатной сетки. Если координаты не совпадают с координатной сеткой, то возникает дополнительная погрешность измерения.

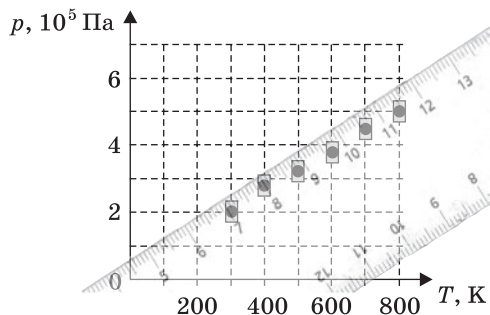


Рис. 3

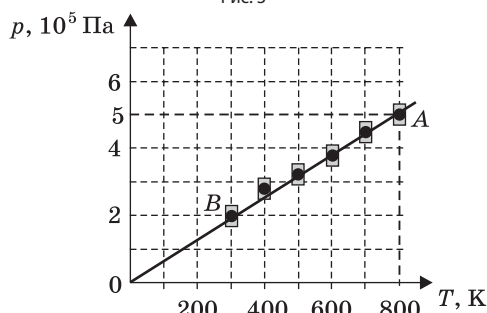


Рис. 4

Проведем вычисления, используя координаты точки *A*. Сначала работаем со степенями, затем проводим вычисления и округляем ответ до десятых:

$$v = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{8,3 \cdot 8 \cdot 10^2} = \frac{5 \cdot 5}{8,3 \cdot 8} \approx 0,3765060241 \approx 0,4.$$

Ответ: 2.

С.М. Для иллюстрации межпредметных связей Вы выбрали примеры, в которых участвуют графики. Случайно ли это?

Г.Н. Большое место в требованиях к учащимся занимают умения по чтению и построению графиков. Эти умения могут быть разделены на две группы. К первой группе относятся умения работать с графиками идеализированных моделей (свободное падение, равноускоренное движение, изопроцессы, гармонические колебания и т.д.). Ко второй группе относится требование представлять результаты измерений с помощью графиков и выявлять на этой основе эмпирические закономерности. Конечно, анализ данных физического эксперимента — непременная составляющая уроков физики. Но знакомство с графическим представлением экспериментальных данных возможно уже при изучении графиков функций на уроках математики. Например, хочу с удовлетворением отметить, что в учебном комплекте «Алгебра, 8», авт. Г.В. Дорофе-

ев, С.Б. Суворова и др. (М: Просвещение, 2005–2009), рассматривается идея аппроксимации, и учащиеся знакомятся с зависимостями, которые не являются линейными, но приближенно могут быть заданы линейными функциями. В этом же комплекте рассматривается значительное число графиков реальных процессов. В работе с ними отрабатываются такие важные для изучения физики умения, как находить с помощью графика значение одной из анализируемых величин по значению другой, описывать характер изменения одной величины в зависимости от другой (растет, убывает, остается постоянной, растет быстрее, медленнее и пр.), строить график зависимости по ее заданию таблицей.

С.М. В учебнике, который Вы назвали, сказано, что в математике существуют специальные методы расчетов коэффициентов *A* и *B* уравнения аппроксимирующей прямой $y = A + Bx$. Подразумевается метод наименьших квадратов (МНК). (Напомним, что в соответствии с этим методом из всей совокупности прямых, которые можно провести через экспериментальные точки, находится такая, что сумма расстояний от нее до экспериментальных точек оказывается наименьшей.) Целесообразно ли знакомить учащихся с этим методом на уроках математики?

Г.Н. Поскольку «потребителем» умений построения графиков по результатам измерений является физика, то и знакомить учащихся с идеей МНК целесообразно на уроках физики. При выполнении лабораторных работ в основной и старшей профильной школе ученикам приходится строить достаточно много графиков такого типа. Именно в рамках этой деятельности ученики естественным образом и усваивают основную идею МНК.

С.М. Почему вы считаете, что достаточно формирования лишь представления о МНК.

Г.Н. В рамках реализации национального проекта «Образование» в перечень оборудования по физике был включен научный калькулятор FX-82 ES. С его помощью ученики при выполнении лабораторных работ легко определяют коэффициенты *A* и *B* аппроксимирующей прямой. Важно и то, что начиная с 2006 г. на ЕГЭ по физике разрешается пользоваться непрограммируемым калькулятором, обеспечивающим выполнение всех арифметических действий, вычисление квадратного корня и тригонометрических функций и др.

С.М. Что можно отметить из опыта проведения экзамена с использованием калькулятора?

Г.Н. Задачи на применение физических законов связаны с громоздкими вычислениями. Нередки случаи, когда вследствие дефицита времени на уроке решение таких задач рассматривается только в общем виде, а расчет учащиеся делают дома. Однако наиболее продуктивным является выполнение расчета именно на уроке — с целью выявления физического смысла полученного результата.

С.М. Имеются ли подтверждения положительного влияния систематического применения калькуляторов на результаты ЕГЭ по физике?

Г.Н. Вот мнение методиста Л.П. Мошейко (г. Хабаровск): «Сравнение итогов ЕГЭ 2009 года среди общеобразовательных учреждений Хабаровского края показало, что выпускники тех школ, где в течение последних трех лет на уроках физики все учащиеся использовали калькулятор, показали на экзамене значительно лучшие результаты».

С.М. На что еще Вы хотели бы обратить внимание наших учителей и авторов учебников по математике?

Г.Н. На уроках математики учащиеся знакомятся со способами записи приближенного значения величины с прикидкой и оценкой результатов вычислений. Заметим следующее. Истинное значение измеряемой величины определить невозможно, прежде всего потому, что ограничена точность воспроизведения эталона единицы физической величины. Например, эталон килограмма воспроизводится с точностью $2 \cdot 10^{-9}$ кг. Скорость света, являющаяся основой для реализации эталонов метра и секунды, также измерена с некоторой погрешностью. По последним данным, истинное значение скорости света находится в интервале

$$299\,792\,458,8 \text{ м/с} < c < 299\,792\,459,2 \text{ м/с}.$$

С.М. Как следует из Вашего ответа, в физике используется понятие о погрешности измерения, а в школьном курсе алгебры вводится понятие границы погрешности приближения как разности между числом и его приближенным значением. Возникают ли здесь методические проблемы?

Г.Н. Вопрос о введении в курс физики основной школы представления о погрешностях измерений вызывает очень острые дискуссии. По моему мнению, математика создает вполне достаточный фундамент для введения представления о границах как абсолютной, так и относительной погрешностей измерения.

С.М. Влияет ли на эффективность вычислительной работы на уроках физики учет межпредметных связей с математикой?

Г.Н. Для подготовки к ЕГЭ такая вычислительная работа имеет большое значение, так как результаты лабораторных работ используются при конструировании так называемых практико ориентированных заданий, а также заданий по фотографиям измерительных установок. Эти задания имеют принципиальное значение в условиях, когда мы еще не пользовались реальным лабораторным оборудованием. В качестве примера воспользуемся результатами лабораторной работы по сравнению количества теплоты, отданной и полученной при смешивании воды разной температуры.

Приведем возможные результаты такой работы.

Масса холодной воды $m_1 = 100 \pm 1$ г.

Температура холодной воды $t_1 = 23 \pm 1$ °С.

Масса смеси $m = 242 \pm 3$ г.

Температура смеси $\theta = 56 \pm 1$ °С.

Масса горячей воды $m_2 = 142 \pm 4$ г.

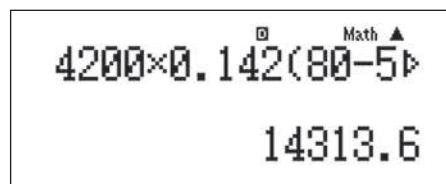
Температура горячей воды $t_2 = 80 \pm 1$ °С.

$$c_{\text{воды}} = (4200 \pm 100) \text{ Дж/(кг} \cdot \text{°С)}.$$

Определим количество теплоты, отданной горячей водой: $Q_2 = c \cdot m(t_2 - \theta)$.

$$Q_2 = 4200 \cdot 0,142 \cdot (80 - 56) = 14\,313,6 \text{ Дж}.$$

Для расчета Q_2 выполним действия с калькулятором:



4200×0.142(80-56)
14313.6

Как относиться к цифре 6 в разряде десятых? Можно ли при округлении результат записать как 14 313, или надо 14 314? Именно для ответов на эти и аналогичные вопросы необходимо добиваться согласования изучаемого физического материала с математикой. Напомним, что в нашем примере, во-первых, цифра 6 просто неверна и при округлении не учитывается, а во-вторых, поскольку теплоемкость воды дана с точностью до сотен единиц, целесообразно представить результат расчетов в виде $Q_2 = 14300$ Дж.

С.М. Спасибо за беседу и примеры задач, которые подтверждают важность для учащихся умения пользоваться математическими средствами наглядности, видеть математическую задачу при изучении физики и решать ее средствами математики.

Т. ЖАВОРОНКОВА,
г. Пятигорск

СКОЛЬКО РЕШЕНИЙ НУЖНО НАЙТИ?

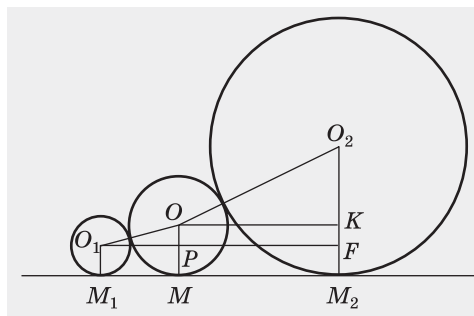
Хочу поблагодарить организаторов системы диагностических работ «СтатГрад» за дополнительные и бесплатные для учащихся возможности подготовки к итоговой аттестации. Но хочу поговорить об одной конкретной проблеме, с которой мы столкнулись, а именно, о проблеме поиска всех решений задания С4.

Самое сложное в ситуации, предложенной авторами, это найти все различные варианты возможного расположения фигур, которые могут удовлетворять условию задачи. Иногда и сами составители диагностической работы не способны до конца оценить сложность поставленной ими задачи. К счастью, а может быть случайно, исследование числа вариантов возможного расположения фигур не входит в критерии оценивания задания, а на данный момент число вариантов в диагностических работах колеблется от 1 до 4.

Чтобы не быть голословной, предлагаю рассмотреть задание С4 диагностической работы № 6 МИОО «СтатГрад» 2010 года.

С4. Расстояние между центрами окружностей радиусов 1 и 9 равно 17. Обе окружности лежат по одну сторону от общей касательной. Третья окружность касается обеих окружностей и их общей касательной. Найдите радиус третьей окружности.

Рассмотрим краткое авторское решение задачи. Пусть O_1 и O_2 — центры заданных окружностей, M_1 и M_2 — точки касания их с общей касательной, O — центр третьей окружности, x — искомое значение радиуса. При касании окружностей расстояние между их центрами равно сумме радиусов, а проведя стандартные построения перпендикуляров к радиусам, проведенным в точки касания, получим значения длин отрезков, равные разностям соответствующих радиусов.



В треугольнике O_1OP : $O_1O = x + 1$, $OP = x - 1$. Тогда $O_1P = M_1M = 2\sqrt{x}$.

В треугольнике O_2OK : $O_2O = x + 9$, $O_2K = 9 - x$. Откуда $OK = 6\sqrt{x}$.



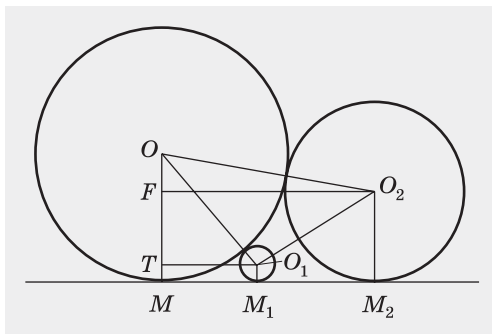
К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 8.

Используя треугольник O_1O_2F , получаем:

$$O_1F = M_1M_2 = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15.$$

Составляем уравнение $2\sqrt{x} + 6\sqrt{x} = 15$, откуда $x = \frac{225}{64}$.

Теперь второй вариант расположения фигур, предложенный составителями.



Отметим, что длина отрезка M_1M_2 не изменилась. Рассуждая аналогично, получаем:

$$FO_2 = 6\sqrt{x}, \quad TO_1 = 2\sqrt{x}.$$

Составляем уравнение $6\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = 1$,

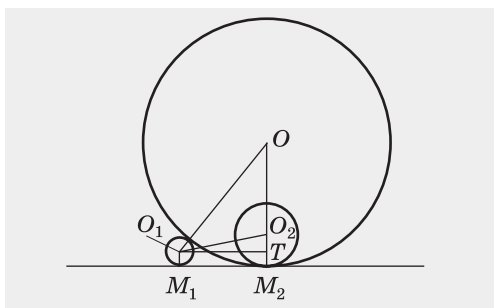
откуда $x = \frac{225}{16}$.

Вот и ответ авторов: $\frac{225}{64}$ или $\frac{225}{16}$.

На следующий день, получив решения, я увидела, что у авторов не было еще двух возможных конфигураций, которые были в решениях моих учеников.

После дополнительной проверки полученных результатов я не обнаружила внутренних противоречий. Так что авторам я выслала дополнительные варианты расположения фигур.

Вот они. (Ученикам я всегда советую: не забывайте о возможностях внутреннего касания, которые, обычно упускаются.)

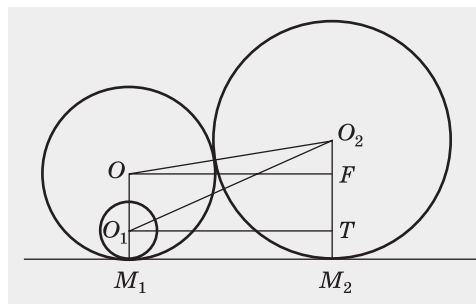


$$OO_1 = x + 1, \quad OT = x - 1, \quad O_1T = 15.$$

Составляем уравнение, применяя теорему Пифагора для треугольника O_1O_2D :

$$(x + 1)^2 = 15^2 + (x - 1)^2,$$

откуда $x = \frac{225}{4}$.



$$OO_2 = x + 9, \quad O_2F = 9 - x, \quad OF = M_1M_2 = 15.$$

Составляем уравнение, применяя теорему Пифагора в треугольнике O_2OF :

$$(x + 9)^2 = (9 - x)^2 + 15^2,$$

откуда $x = \frac{225}{36}$.

Рассмотренные варианты лишний раз показывают, насколько непросто решить задание в полном объеме, если в спокойной домашней обстановке можно не досчитаться вариантов, которые должны найти выпускники, обладающие гораздо меньшим временем и работающие в условиях стресса. Конечно, такое задание позволяет оценить, помимо психологической устойчивости, умение выпускника четко анализировать текст условия задачи, его знакомство с планиметрическими утверждениями и их возможными формулировками. И все-таки, здесь есть над чем задуматься. Что проверяет это задание и как его оценивать?

Конкурс фотографий «Зима-весна-2011»

На конкурс принимаются фотографии, на которых запечатлены учителя математики и их ученики 5–11-х классов в учебном процессе, на занятиях кружка, олимпиадах, в летних математических школах и пр. К каждой фотографии необходимо приложить краткое описание изображенного на ней события (место, время, действующие лица).

Фотографии могут быть цветными или черно-белыми. Формат для фотографий, отпечатанных на фотобумаге, не менее 10×15 см. Цифровые фотографии могут быть присланы на электронном носителе или по электронной почте. Размер цифровых фотографий не менее 800×600 пикселей, формат — JPG, качество, используемое при сохранении JPG-файлов, — высокое (high).

Лучшие фотографии будут напечатаны в газете, а победитель получит бесплатную подписку на второе полугодие 2011 года.

А. БЛИНКОВ, Е. ГОРСКАЯ,
И. ЯЦЕНКО,
Москва

ТВОРЧЕСКИЙ КОНКУРС УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Победители конкурса

Дмитриев Олег Юрьевич
«Лицей прикладных наук»,
г. Саратов

Захарова Виктория Федоровна
лицей № 145, г. Казань

Ильиченкова Зоя Викторовна
центр образования № 1840,
Москва

Каплиев Алексей Викторович
школа № 83, «Ломоносовский
лицей», г. Ногинск

Невидимый Дмитрий Борисович
школа № 1530, «Школа
Ломоносова», Москва

Синякова Стелла Леонидовна
школа № 315, Москва

Федулкин Алексей Леонидович
школы № 45 и № 91, Москва

Холодная Оксана Васильевна
школа № 1265, Москва

Шилейко Софья Евгеньевна
гимназия № 1567, Москва

Юрков Андрей Юрьевич
школа № 179, Москва

■ 26 сентября 2010 года в Москве состоялся

VI Творческий конкурс учителей по математике. Он был организован Московским центром непрерывного математического образования совместно с Московским институтом открытого образования, газетой «Математика» («Первое сентября»), математическим факультетом Московского педагогического государственного университета и Московским городским педагогическим университетом при поддержке фонда «Династия».

Информацию о предыдущих творческих конкурсах можно найти на сайте www.mcsme.ru и в газете «Математика» (см. № 10/2005, № 1/2006, № 10/2007, № 8/2009, № 2/2010). Кроме того, материалы этих конкурсов, а также материалы заочных конкурсов учителей математики опубликованы в книжке: *Блинков А.Д., Горская Е.С., Яценко И.В.* Творческие конкурсы учителей математики. — М.: МЦНМО, 2008.

В очередной раз отметим, что творческий конкурс учителей, ставший традиционным, отличается от многих других конкурсов. В нем стимулируется проявление прежде всего профессиональных качеств учителя математики. В ходе работы участники могут продемонстрировать умение решать задачи, умение найти ошибку в чужом решении и отличить верное решение от неверного, знание различных разделов школьной программы и свою математическую эрудицию.

По установившейся традиции победители и призеры предыдущего конкурса не могли стать победителями или призерами этого, что не помешало некоторым из них принять участие в олимпиаде вне конкурса, а другим — влиться в состав жюри. Вместе с тем, как и в прошлые годы, для расширения рамок проведения конкурса на него были персонально приглашены (за счет организаторов) победители V Заочного конкурса учителей математики, который был проведен в первой половине года при активном участии газеты «Математика» (см. № 1, 20 за 2010 г.). Поэтому среди участников очного тура VII конкурса, помимо учителей Москвы и Подмосковья, были учителя из г. Астаны, г. Казани, Краснодарского и Красноярского краев, г. Петропавловска-Камчатского, г. Санкт-Петербурга, г. Саратова, г. Тихвина и г. Чебоксар.

Задания для проведения конкурса были подготовлены методической комиссией, работавшей на базе МЦНМО. В эту комиссию и в жюри олимпиады вошли сотрудники МИОО, МЦНМО, МПГУ и учителя школ Москвы.

Вариант включал в себя 10 заданий, разбитых на два блока. Первый блок — математические задачи, которые требовалось решить; второй блок — «методический», включавший в себя формулировки математических утверждений и их «доказательства»,



в которых требовалось найти ошибки, а также задания, связанные с обоснованием тонких моментов школьной программы. По отзывам участников, в этот раз составителям удалось найти оптимальное соотношение разнообразия заданий и их сложности. Как всегда, в вариант были включены задания по арифметике, алгебре, основам математического анализа, комбинаторике и геометрии. Каждое задание оценивалось исходя из 10 баллов.

Очный тур конкурса проходил, как и в предыдущие годы, в помещении математического факультета МПГУ. Проведение конкурса в стенах факультета обеспечил заведующий кафедрой элементарной математики профессор В.А. Смирнов, которому помогали студенты. На выполнение заданий очного тура отводилось 4,5 часа.

Для тех учителей, которые не имели возможности приехать на очный тур, был проведен заочный тур конкурса в Интернете. Одновременно с началом конкурса в Москве на портале МЦНМО были выложены задания конкурса и анкета. Участникам заочного тура на выполнение заданий было выделено 5,5 ч. В интернет-туре конкурса приняли участие учителя из многих городов России, а также из Армении, Беларуси, Казахстана и Украины.

Творческий конкурс являлся, как обычно, открытым для всех желающих: для участия в очном туре достаточно было только предварительно зарегистрироваться, а для участия в интернет-туре не требовалось и этого.

Всем участникам конкурса была обеспечена полная анонимность участия и объективность проверки, так как все работы были зашифрованы. Каждый участник мог узнать результат проверки только своей работы. Победителями или призерами конкурса могли стать только школьные учителя, имеющие в текущем учебном году не менее 9 часов в неделю преподавательской нагрузки. Возможность стать победителем или призером интернет-тура не зависела от успешности участия в предыдущих конкурсах.

По итогам конкурса были выделены две номинации: победители (набравшие более 80 баллов) и призеры (набравшие более 57 баллов). Все они награждены специальными дипломами. Кроме того, победители конкурса получили индивидуальные денежные гранты фонда «Династия», а призеры конкурса (а также победители и призеры интернет-тура) – научно-популярную и методическую литературу. Списки победителей и призеров публикуются в алфавитном порядке.

Призеры конкурса

Абрамсон Яков Иосифович (школа-интернат «Интеллектуал», Москва);

Афанасьева Анна Владимировна (лицей № 1580, Москва);

Бушин Сергей Васильевич (лицей «Вторая школа», Москва);

Бычкова Лидия Олеговна (гимназия № 1514, Москва);

Василькова Екатерина Николаевна (лицей № 1524, Москва);

Гани Вахид Абдулович (школа № 978, Москва);

Дудакова Ольга Сергеевна (гимназия № 1579, Москва);

Иванова Татьяна Юрьевна (физико-математический лицей № 30, г. Санкт-Петербург);

Карасев Юрий Анатольевич (гимназия № 1512, Москва);

Крайко Мария Александровна (лицей № 1523, Москва);

Крачковский Сергей Михайлович (школа № 315, Москва);

Лебедев Дмитрий Алексеевич («Школа здоровья» № 896, Москва);

Прокопенко Дмитрий Викторович (физико-математическая школа № 2007, Москва);

Пукас Юрий Остапович (гимназия, г. Троицк);
Сенькова Елена Ивановна (лицей № 3, г. Чебоксары);

Соколова Татьяна Владимировна (школа № 1557, г. Зеленоград);

Татаринов Дмитрий Анатольевич (школа № 11, г. Петропавловск-Камчатский);

Фролова Оксана Владимировна (школа № 906, Москва);

Ханькова Анастасия Марковна (гимназия № 1567, Москва);

Хлевнюк Наталья Николаевна («Ломоносовская школа», Москва);

Шарыгин Дмитрий Игоревич (школы № 463 и № 1173, Москва);

Эльман Игорь Александрович (центр образования № 218 и школа № 91, Москва).

Победители интернет-тура

Берштейн Александр Лазаревич (физико-математический лицей № 27, г. Харьков);

Королев Юрий Николаевич (лицей им. Н.И. Лобачевского при КГУ, г. Казань);

Ню Владимир Владимирович (Югорский физико-математический лицей-интернат, г. Ханты-Мансийск);

Ткаченко Мария Николаевна (лицей № 23, г. Подольск).

Призеры интернет-тура

Аглиуллина Дания Садыровна (школа № 10, г. Нижнекамск);

Алексеев Алексей Евгениевич (Соболевская средняя школа, Камчатский край);

Баева Любовь Владимировна (гимназия № 26, г. Набережные Челны);

Беляев Сергей Анатольевич (школа № 1173, Москва);

Кузьмина Светлана Станиславовна (лицей № 3, г. Чебоксары);

Путилов Виктор Васильевич (школа № 146, г. Пермь);

Утяганов Сайяр Эмдасович (лицей им. Н.И. Лобачевского при КГУ, г. Казань);

Хамидуллин Алмаз Нуртдинович (лицей-интернат № 4, г. Нижнекамск).

Задания конкурса

Вам предлагаются два блока заданий:

- математический — № 1–5 (задачи для решения);
- методический — № 6–10 (включает в себя задания, моделирующие повседневную работу учителя).

I. Решите задачи

1. (А.К. Ковальджи.) Врач сообщил Змею Горынычу, что если Змей будет выкуривать по 6 сигарет в день, то помрет через 10 лет, а если по 17 сигарет в день, то через 5 лет. Сколько проживет Змей, если бросит курить? (Условимся, что все годы одинаковой длины, а каждая сигарета сокращает жизнь на одно и то же время.)

2. (Фольклор.) Вычислите:

$$\frac{1}{\log_2 100!} + \frac{1}{\log_3 100!} + \dots + \frac{1}{\log_{100} 100!}.$$

3. (Санкт-Петербургские математические олимпиады.) Существует ли одиннадцатигранник, у которого количество ребер в каждой грани четно?

4. (Фольклор.) Докажите, что

$$\frac{a^2 + 2bc}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + 2ac}{a^2 + c^2} + \frac{c^2 + 2ab}{a^2 + b^2} > 3,$$

где a , b и c — стороны некоторого треугольника.

5. (Фольклор.) В остроугольном треугольнике ABC ортоцентр (точка пересечения высот) H делит высоту CC_1 в отношении $3 : 1$, считая от вершины. Найдите угол AMB , где M — середина этой высоты.

II. Методический блок

6. (Предложил Д.Э. Шноль.) Ученик пришел к учителю и сообщил, что нашел ошибку в пособии по математике. Он показал следующий текст.

Задача. Разложите на множители выражение $x^4 - 3x^2 - 4$.

Решение. Сделаем замену переменной: $x^2 = y$, и разложим на множители квадратный трехчлен $y^2 - 3y - 4$, решив квадратное уравнение

$$y^2 - 3y - 4 = 0.$$

Его корни: $y_1 = -1$, $y_2 = 4$. Значит,

$$y^2 - 3y - 4 = (y + 1)(y - 4).$$

Следовательно,

$$x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2 + 1)(x^2 - 4) = (x^2 + 1)(x - 2)(x + 2).$$

Ошибка, по мнению ученика, состоит в следующем: так как $x^2 = y$, то $y \geq 0$. Значит, корень $y_1 = -1$ — посторонний и дальнейшее решение неверно.

Что бы вы ответили на это ученику?

7. (Предложила И.В. Раскина.) В двух вариантах контрольной работы по теории вероятностей и статистике были предложены такие задачи.

Вариант 1. В семье двое детей. Известно, что среди них есть мальчик. С какой вероятностью оба ребенка — мальчики?

Вариант 2. В семье двое детей. Известно, что старший из них мальчик. С какой вероятностью оба ребенка — мальчики?

Вася, решавший задачу варианта 1, написал следующее: «По условию задачи один из детей мальчик. Вторым может быть как мальчиком, так и девочкой с одинаковой вероятностью. Поэтому оба ребенка мальчики с вероятностью $\frac{1}{2}$ ».

Петя, решавший вариант 2, полностью списал его решение.

Как бы вы оценили правильность этого решения (для каждого из вариантов)? Считаете ли вы предложенные варианты равноценными?

В предложенных «задачах» и «теореме» (задания № 8–10) могут содержаться математические ошибки (как в условиях, так и в «решениях» или «доказательствах»). Если некорректно условие «задачи» («теоремы»), то объясните, почему это так, и найдите все ошибки в «решении» («доказательстве»). Если неверно только «решение» («доказательство»), то укажите все ошибки и приведите верное решение (доказательство).

8. (Предложил В.М. Гуровиц.) «Задача». Два приятеля пошли на базар. Веселый молодец продавал 20 котов по цене от 12 до 15 рублей и 20 мешков по цене от 30 копеек до 1 рубля. Докажите, что каждый из друзей может купить по коту в мешке так, чтобы они заплатили одинаковую сумму денег.

«Решение». Заметим, что наименьшая стоимость кота в мешке — 12 рублей 30 копеек, а наибольшая — 16 рублей. Следовательно, ко-

личество вариантов возможной стоимости кота в мешке не превышает количества целых чисел на отрезке $[1230; 1600]$, то есть не больше, чем 371. Вместе с тем количество различных пар вида «кот – мешок» равно $20 \cdot 20 = 400$. Следовательно, по принципу Дирихле, найдутся две пары, имеющие одинаковую стоимость.

9. (Предложил А.Д. Блинков.) «Задача». В треугольнике ABC медиана AM равна высоте BH . Кроме того, равны углы MAB и HBC . Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

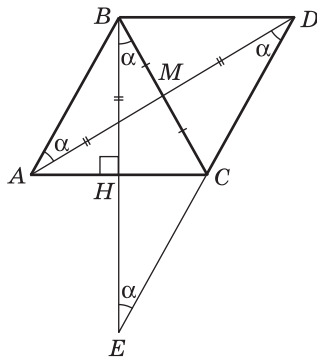


Рис. 1

«Решение». Пусть $\angle MAB = \angle HBC = \alpha$ (рис. 1). На луче AM отметим точку D так, что $DM = AM$, тогда $ABDC$ — параллелограмм и $\angle ADC = \angle DAB = \alpha$. На луче BH отметим точку E так, что $EH = BH$, тогда $EC = BC$ и $\angle CEB = \angle CBE = \alpha$.

Так как $HC \parallel BD$, то $EC = CD$ (по теореме Фалеса). Тогда $\triangle ADC = \triangle BEC$ ($AD = BE$, $DC = EC$, $\angle ADC = \angle BEC$). Следовательно, $AC = BC$ и треугольник ACD — равнобедренный: $AC = CD = AB$. Таким образом, треугольник ABC — равносторонний, что и требовалось.

10. (Предложили А.В. Иванищук и А.Г. Мякишев.) «Теорема». Если функция $f(x)$ непрерывна на множестве R и не является постоянной ни на каком из промежутков, то функция $f(f(x))$ возрастает на R .

«Доказательство». Если у функции $f(x)$ нет экстремумов, то она либо возрастает, либо убывает на R . Так как композиция как двух возрастающих, так и двух убывающих функций есть функция возрастающая, то в этом случае $f(f(x))$ возрастает на R .

Пусть теперь функция $f(x)$ имеет экстремумы в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$. Тогда, в силу непрерывности, эта функция строго монотонна: на $(-\infty; x_1]$, на каждом промежутке вида $[x_k; x_{k+1}]$, где k принимает все натуральные значения от 1 до $n-1$, и на $[x_n; +\infty)$.

Действительно, если бы на каком-то из указанных промежутков это было не так, то «при переходе слева направо» через некоторую внутреннюю точку x_0 этого промежутка вид монотонности должен был измениться, — например, с убывания на возрастание (из условия следует, что промежутков, на которых функция постоянна, нет). Тогда, по определению, x_0 — еще одна точка экстремума (в нашем случае — точка минимума), но эта точка отлична от $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Таким образом, числовая прямая разбивается на промежутки, которые пересекаются только граничными точками, на каждом из которых функция $f(x)$ либо возрастает, либо убывает. Но композиция как двух возрастающих, так и двух убывающих функций есть функция возрастающая. Поэтому $f(f(x))$ — возрастающая функция, что и требовалось доказать.

Решения

I. Каждая задача оценивалась в 10 баллов.

1. 22 года.

Способ I. Пусть n — искомая величина и пусть в году p дней. Если Змей будет выкуривать по 6 сигарет в день, то его жизнь сократится на $(n-10)$ лет, и за 10 лет от выкурит $6 \cdot p \cdot 10$ сигарет. Значит, одна сигарета сокращает жизнь на $\frac{n-10}{6 \cdot p \cdot 10}$

дней. Если же Змей будет выкуривать по 17 сигарет в день, то его жизнь сократится на $(n-5)$ лет, и за 5 лет от выкурит $17 \cdot p \cdot 5$ сигарет. Значит, одна сигарета сокращает жизнь на $\frac{n-5}{17 \cdot p \cdot 5}$ лет.

Поскольку каждая сигарета сокращает жизнь на одно и то же время, то $\frac{n-10}{6 \cdot p \cdot 10} = \frac{n-5}{17 \cdot p \cdot 5}$. Решая уравнение, получим: $n = 22$.

Способ II. Пусть N — количество дней в году. Тогда, выкуривая по 6 сигарет в день, за 10 лет жизни Змей выкурит $60N$ сигарет. Если же он будет курить по 17 сигарет в день, то за 5 лет жизни выкурит $85N$ сигарет. Разница между этими числами — $25N$ — соответствует потере Змеем пяти лет жизни. Следовательно, выкурив $5N$ сигарет, он потеряет год жизни, а выкурив $60N$ сигарет — 12 лет жизни. Следовательно, если Змей бросит курить, то проживет еще $10 + 12 = 22$ года.

2. 1.

Так как $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ ($a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$), то

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_2 100!} + \frac{1}{\log_3 100!} + \dots + \frac{1}{\log_{100} 100!} &= \\ &= \log_{100!} 2 + \log_{100!} 3 + \dots + \log_{100!} 100 = \\ &= \log_{100!} (2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100) = \log_{100!} 100! = 1. \end{aligned}$$

3. Да, существует.

Существует много примеров многогранников, удовлетворяющих условию задачи. Попробуем привести рассуждения, показывающие, каким образом можно получить некоторые из них.

Один из возможных примеров получится, если изначально рассмотреть самый простой шестигранник с четным количеством ребер в каждой грани — куб. Если поставить один куб на другой (рис. 2, а), то, казалось бы, условие задачи выполняется, но является ли изображенное тело многогранником? Проблема заключается в том, что одна из граней представляет собой квадрат $ABCD$ с вырезанным из него квадратом, и неясно, можно ли считать такую фигуру с дыркой многоугольником.

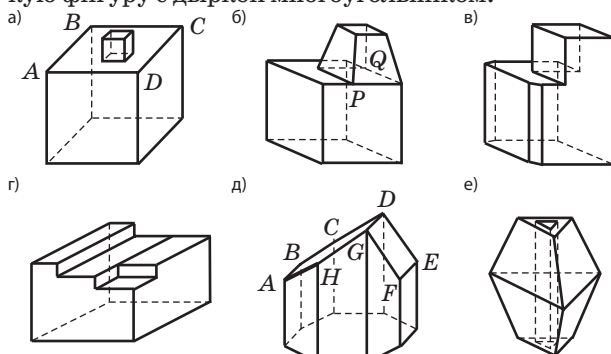


Рис. 2

Попробуем слегка изменить эту конструкцию, передвинув верхний куб в угол, но тогда уменьшается количество граней. Чтобы решить эту проблему, можно поступить, например, так: заменим верхний куб на усеченную четырехугольную пирамиду (рис. 2, б). Но возникает другая проблема: вершина P одной грани лежит на ребре другой грани (аналогично, и вершина Q). Можно ли такое тело считать многогранником?

Можно поступить иначе. Сохраним верхний куб, а от нижнего куба «отпилим» два ребра (рис. 2, в).

Можно попытаться обойтись одним кубом, сделав в нем соответствующие «вырезы». Пример такого многогранника изображен на рисунке 2, г.

Отметим, что все приведенные тела если и являются многогранниками, то невыпуклыми. Наиболее интересен пример выпуклого многогранника, удовлетворяющего условию (рис. 2, д). Он получится, если изначально взять десятигранник с четным количеством ребер в каждой грани — правильную восьмиугольную призму, а затем в верхней грани $ABCDEFGH$ «поднять» на одинаковое расстояние сначала вершины D и G , а затем вершины C и H . Тем самым вместо одной грани — восьмиугольника — образуются две грани: четырехугольник $DEFG$ и шестиугольник $ABCDGH$ (и сохранится четность количества ребер в остальных гранях).

Отметим, что в работах участников конкурса встречались также разнообразные примеры тел со сквозными дырами (рис. 2, е). Можно ли их считать многогранниками?

Таким образом, примеры, аналогичные 2, г–д, безусловно, удовлетворяют условию задачи, а с остальными примерами будем разбираться, обратившись к определениям многогранника и многоугольника из различных источников.

1. Математическая энциклопедия, т. 3, с. 708: «Многогранник — совокупность конечного числа плоских многоугольников такая, что: 1) каждая сторона любого из многоугольников есть одновременно сторона другого (но только одного), называемого смежным с первым (по этой стороне); 2) от любого из многоугольников, составляющих многогранник, можно дойти до любого из них, переходя к смежному с ним, а от этого, в свою очередь, к смежному с ним и т.д.»

С точки зрения этого определения пример 2, б многогранником не является, так как не выполняется условие «1». Является ли многогранником пример 2, а, зависит от определения многоугольника.

2. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия, 10–11 (М.: Просвещение, 1994, с. 201): «Многогранником называется ограниченное тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников». На следующей странице поясняется, что понятие многоугольника можно обобщить: «Многоугольником называется ограниченная замкнутая область, граница которой состоит из конечного числа отрезков».

Отметим, что на тех же страницах на рисунке 241 приведены некоторые примеры многогранников, среди которых есть многогранник со сквозными дырками и есть многогранник, у которого часть вершин одной грани лежит на ребрах другой. Здесь же обсуждается, а на рисунке 243 изображается многогранник в виде куба, стоящего на кубе.

Далее (в п. 23.6) обсуждается другой подход к определению многогранника. «Многогранник — это фигура, являющаяся объединением конечного числа тетраэдров, для которых выполнены следующие условия: 1) каждые два тетраэдра либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо только общее ребро, либо целую общую грань; 2) от каждого тетраэдра к другому можно перейти по цепочке тетраэдров, в которой каждый последующий прилегает к предыдущему по целой грани».

Этим определениям удовлетворяют все примеры, рассмотренные выше.

3. Калинин А.Ю., Терёшин Д.А. Стереометрия, 10 (М.: Физматкнига, 2007, гл. 6, § 6.2): «Многогранником называется тело, поверхность

которого является объединением конечного числа многоугольников». Перед этим дано определение тела как «объединения ограниченной пространственной области и ее границы; пространственная область — непустое открытое связное множество точек». Там же на странице 166 приведен пример неодносвязного многогранника.

Этим определениям, безусловно, удовлетворяют все тела с дырками.

4. Атанасян Л.С. и др. Геометрия, 10–11 (М.: Просвещение, 1992, с. 60 (гл. III, § 1)): «Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, будем называть многогранной поверхностью или многогранником. Тело, ограниченное многогранником, часто тоже называют многогранником».

5. Погорелов А.В. Геометрия, 7–11 (М.: Просвещение, 1995, § 19, п. 168): «Многогранник — это такое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников».

Поскольку в источниках 3–5 не уточняется, что понимается под многоугольниками (а в учебнике И.Ф. Шарыгина вообще не дается определения произвольного многогранника), то они вряд ли помогут нам разобраться с примерами типа 2, а и б.

Комментарий. Обсудив все это, жюри приняло решение засчитывать в качестве правильных все примеры, удовлетворяющие хотя бы одному из возможных определений многогранника.

4. Приведем два из возможных способов доказательства.

Способ I. Рассмотрим разность между левой и правой частями доказываемого неравенства. Получим: $\left(\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}-1\right)+\left(\frac{b^2+2ac}{a^2+c^2}-1\right)+\left(\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}-1\right)$.

Докажем, что выражение в первой скобке положительно:

$$\begin{aligned}\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}-1 &= \frac{a^2+2bc-b^2-c^2}{b^2+c^2} = \frac{a^2-(b-c)^2}{b^2+c^2} = \\ &= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{b^2+c^2} > 0,\end{aligned}$$

что следует из неравенства треугольника. Аналогично доказывается, что выражения во второй и третьей скобках положительны. Таким образом, рассмотренная разность положительна, следовательно, исходное неравенство доказано.

Комментарий. Отметим, что неравенство треугольника можно было использовать иначе, например: $a > |b-c|$, следовательно,

$$a^2 > (b-c)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2bc > b^2 + c^2,$$

значит, $\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2} > 1$.

Способ II. Из теоремы косинусов следует, что

$$a^2 + b^2 = c^2 + 2ab \cos C < c^2 + 2ab,$$

откуда $\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2} > 1$. Аналогично доказывается, что

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2} > 1 \text{ и } \frac{b^2+2ac}{a^2+c^2} > 1.$$

Складывая три полученных верных равенства, получаем искомое.

5. 90°.

Приведем три из возможных способа решения.

Способ I. Из условия задачи следует, что $HM = HC_1$ (рис. 3). Пусть D — середина отрезка BC_1 , тогда DM — средняя линия треугольника BCC_1 , значит, $DM \parallel BC$, поэтому отрезок DM перпендикулярен высоте AA_1 треугольника ABC .

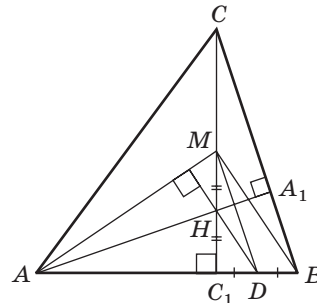


Рис. 3

Следовательно, точка H является также и ортоцентром треугольника AMD , значит, прямая DH содержит высоту этого треугольника. Но отрезок DH является средней линией треугольника BMC_1 , значит, $DH \parallel BM$, поэтому отрезки AM и BM перпендикулярны.

Способ II. Воспользуемся тем, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно сторон, лежат на окружности, описанной около треугольника. Пусть точка E симметрична ортоцентру H относительно AB (рис. 4). Тогда $EC_1 = HC_1 = x$, $MC_1 = MC = 2x$, $AC_1 = y$, $BC_1 = z$.

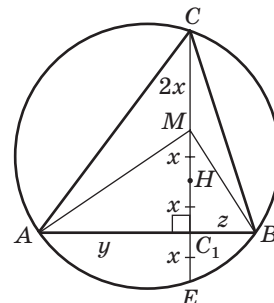


Рис. 4

Из прямоугольных треугольников AC_1M и BC_1M получим, что

$$AM^2 = y^2 + 4x^2, \quad BM^2 = z^2 + 4x^2.$$

Кроме того, для отрезков пересекающихся хорд AB и CE окружности справедливо равенство $AC_1 \cdot BC_1 = CC_1 \cdot EC_1$, то есть $yz = 4x^2$. Таким образом,

$$AM^2 + BM^2 = y^2 + z^2 + 8x^2 = (y+z)^2 = AB^2,$$

значит, $\angle AMB = 90^\circ$.

Способ III. Проведем высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC , тогда около четырехугольника AB_1A_1B можно описать окружность (рис. 5). Пусть она пересекает высоту CC_1 в точке N . Так как AB — диаметр окружности, то $\angle ANB = 90^\circ$. Докажем, что точка N совпадает с точкой M — серединой высоты.

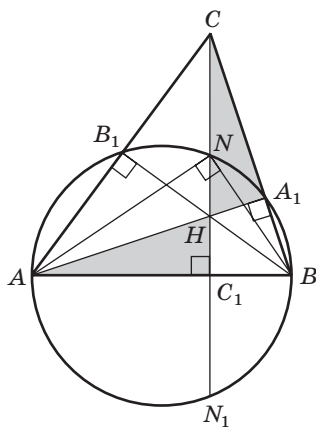


Рис. 5

Рассмотрим точку N_1 окружности, симметричную N относительно прямой AB . Так как прямоугольные треугольники AC_1H и CA_1H подобны, то $\frac{AH}{CH} = \frac{C_1H}{A_1H}$. Следовательно,

$$CH \cdot C_1H = AH \cdot A_1H = NH \cdot N_1H$$

(последнее равенство следует из свойства отрезков хорд окружности).

Пусть $C_1H = x$, $NH = y$, тогда по условию

$$CH = 3x, N_1H = 2x + y.$$

Получим уравнение

$$3x^2 = y(2x + y) \Leftrightarrow y^2 + 2xy - 3x^2 = 0.$$

Решая его как квадратное относительно переменной y , получим, что $y = x$ или $y = -3x$. Второе равенство невозможно, значит, $NH = C_1H$, что и требовалось.

Комментарий. Существует также вариация этого способа решения, в котором вместо подобия используется теорема об отрезках секущих.

Можно также использовать векторный или координатный методы.

II. Каждое задание оценивалось в 10 баллов.

6. Во-первых, можно сначала убедить ученика, что получен верный ответ. Для этого достаточно предложить ему раскрыть скобки в полученном произведении либо предложить разложить на множители исходное выражение способом группировки.

Во-вторых, объяснить, что в приведенном решении нет ошибки, можно, например, так: поскольку равенство $y^2 - 3y - 4 = (y + 1)(y - 4)$ является тождеством, то оно верно для всех действи-

тельных значений y , в частности, и для неотрицательных. Поэтому, подставляя в это равенство x^2 вместо y , мы также получаем тождество.

А полученный отрицательный корень вспомогательного квадратного уравнения говорит в данном случае только о том, что выражение $x^2 + 1$ на множители не разложится.

7. Пусть в семье двое детей, про пол которых ничего не сказано. Этой ситуации соответствует пространство из 4 элементарных событий: ММ, МД, ДМ, ДД. Решая задачу второго варианта, можно сразу рассматривать только два равновероятных события: ММ и МД. Или, как оказалось в Петинском решении, М и Д. Поэтому для второго варианта следует признать приведенное решение верным. Придираться к краткости решения или к тому, что вместо слов «старший» и «младший» записано «один» и «второй», вряд ли имеет смысл.

А вот свою задачу Вася решил неверно и получил неверный ответ. В первом варианте роли детей не разделены, поэтому из 4 элементарных событий общего случая (ММ, МД, ДМ, ДД) здесь может реализоваться с равной вероятностью любое из трех событий: ММ, МД, ДМ. Поэтому вероятность того, что оба ребенка — мальчики, равна $\frac{1}{3}$.

Задача второго варианта проще. Для ее решения можно рассматривать любое из пространств элементарных событий (ММ, МД, ДМ, ДД или М, Д). Ее ответ интуитивно ясен. Задача первого варианта требует гораздо более глубокого понимания материала.

8. В задаче предложено доказать неверное утверждение. Действительно, если цены всех котят одинаковы, а цены мешков — различны, то покупка неосуществима. Ошибка в решении заключается в том, что пары «кот — мешок» с одинаковой стоимостью могут содержать одного и того же кота (или один и тот же мешок) и поэтому не могут быть куплены.

9. Комментарий. Отметим сначала, что многие участники конкурса посчитали, что условие задачи может выполняться для прямоугольного треугольника с углами 30° и 60° , то есть что точка H может совпадать с вершиной A треугольника. На взгляд жюри, это не так, поскольку в геометрических задачах существует негласная договоренность о том, что различными буквами обозначаются различные точки. В противном случае многие геометрические утверждения становятся бессмысленными. Например, невозможно вести речь о прямой AB , если точки A и B могут совпадать. Если бы высота и медиана в условии задачи не были поименованы, то с возможностью совпадения точек можно было бы согласиться.

На самом деле, условие задачи неверно. Единственным контрпримером является тупоугольный треугольник (рис. 6). Показать, что для него выполняется условие $AM = BH$, можно, например, следующим образом. Опустим перпендикуляр MK из точки M на прямую AC . Поскольку $\angle MAK = 30^\circ$, то $MK = \frac{1}{2}AM$. С другой стороны, MK — средняя линия в треугольнике CBH , откуда $MK = \frac{1}{2}BH$. Следовательно, $AM = BH$.

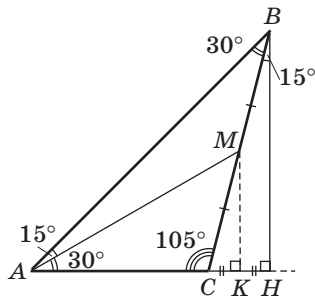


Рис. 6

Кроме того, есть ошибка и в приведенном «решении». Она заключается в том, что в нем неявно предполагается, что E , C и D лежат на одной прямой (иначе нельзя пользоваться теоремой Фалеса), а это ниоткуда не следует.

Комментарий. Если же в условии задачи оговорить, что треугольник — остроугольный, то утверждение становится верным, и доказать его можно, например, следующим способом.

Из условия задачи будет следовать, что AM — медиана прямоугольного треугольника BCH , проведенная к гипотенузе, значит, $HM = \frac{1}{2}BC = BM$. Тогда треугольник BMH — равнобедренный, значит, $\angle MHB = \angle HBC$. Используя также, что $\angle HBC = \angle MAB$ (по условию), получим, что $\angle MHB = \angle MAB$ (рис. 7).

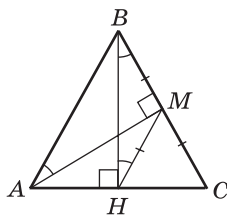


Рис. 7

Таким образом, отрезок BM виден из точек A и H под одинаковыми углами, поэтому точки A , B , M и H лежат на одной окружности. Так как прямой угол AHB — вписанный, то AB — диаметр этой окружности, тогда вписанный угол AMB также прямой.

Следовательно, медиана AM треугольника ABC является также и его высотой, поэтому треугольник ABC — равнобедренный: $AB = AC$. Кроме того, равны прямоугольные треугольники AMC и BHC ($AM = BH$, угол C — общий). Следо-

вательно, $AC = BC$. Таким образом, треугольник ABC — равнобедренный, что и требовалось.

10. «Теорема» неверна. Например, если взять функцию $f(x) = x^2$, то функция $f(f(x)) = x^4$ не является возрастающей функцией (убывает при $x \in (-\infty; 0]$ и возрастает при $x \in [0; +\infty)$). Дело в том, что утверждение «композиция как двух возрастающих функций, так и двух убывающих функций есть функция возрастающая» подразумевает, что обе функции монотонны на $\mathbf{R}$. Для функций вида $f(f(x))$ оно может оказаться верным, если $f(x)$ монотонна на промежутке M и ее множество значений содержится в том же промежутке M .

В приведенном примере функция $f(x) = x^2$ отображает промежуток $(-\infty; 0]$ не в себя, а на промежуток $[0; +\infty)$. Другим возможным простым примером, опровергающим утверждение «теоремы», является функция $f(x) = |x|$.

Эти примеры наглядно показывают характер ошибки: утверждение, справедливое для монотонных функций, применяется в последней части «доказательства» к кусочно-монотонным функциям.

Кроме того, допущена ошибка и в «доказательстве», поскольку отсутствие промежутков, на которых функция постоянна, не означает, что количество точек экстремума конечно, ведь их может быть счетное число. Тем самым утверждение о том, что числовая прямая разбивается на неперекрывающиеся промежутки монотонности функции $f(x)$, приведенное в «доказательстве», также неверно.

На этот счет существует «классический» пример, предложенный известным алгебраистом Ван дер Варденом. Продолжим функцию $f_1(x) = |x|$ при $|x| \leq \frac{1}{2}$ периодически на всю числовую прямую с периодом $T = 1$. Положим далее: $f_n(x) = 4^{1-x} \cdot f_1(4^n \cdot x)$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда можно показать, что ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ сходится к некоторой не-

прерывной функции $f(x)$ (грубо говоря, состоящей сплошь из изломов), обладающей парой необычных свойств. Во-первых, на любом интервале числовой прямой эта функция не является монотонной и, во-вторых, не имеет производной ни в одной точке.

Доказательство этих фактов можно прочитать, например, в книжке: Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. — М.: URSS-ЛКИ, 2007.

Другим возможным контрпримером является функция

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Ю. АНДРИАНОВА,
Ю. МЕЖЕВОВА,
г. Москва

Наш адрес: 119991, Москва,
ГСП-1, Ленинские горы, МГУ,
мехмат, МММФ.
Электронная почта:
zaoch.mmmf@gmail.com
(для вступительных работ);
zaoch.questions@gmail.com
(для вопросов).
Телефон: (495) 939-39-43.
Сайт: mmmf.math.msu.su

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ

■ Малый мехмат — школа юных математиков при механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова — работает более 30 лет. Основные задачи Малого мехмата — углубление знаний по темам школьной программы и расширение математического кругозора за рамки программы средней школы.

На заочное отделение принимают учащихся из России, стран СНГ и Прибалтики, а также русскоязычных учащихся из стран дальнего зарубежья. В 2011 году заочное отделение Малого мехмата объявляет прием учащихся на 2011/12 учебный год в 8–10-е классы.

Обучение на заочном отделении Малого мехмата осуществляется по переписке: школьники выполняют задания по высылаемым им методическим разработкам и отправляют свои решения для проверки. Преподаватели, проверяющие работы, указывают на ошибки в рассуждениях или вычислениях и дают указания, помогающие школьникам самостоятельно исправить эти ошибки. После проверки работы отсылаются обратно. Методические разработки заочного отделения содержат необходимый для изучения данной темы теоретический материал и решения типовых задач, а также задачи для самостоятельного решения. Школьники, получившие неудовлетворительную оценку за какое-либо задание, имеют возможность, ознакомившись с замечаниями и указаниями преподавателя, повторно выполнить и выслать для проверки это задание. Ученики, успешно выполнившие все обязательные задания, автоматически переводятся по окончании учебного года в следующий класс.

На заочном отделении существует возможность обучения нескольких учеников из одной школы по форме «Коллективный ученик». Группа работает под руководством своего школьного преподавателя и может включать не более 15 учащихся из одной параллели (если учащихся, желающих заниматься, больше, то можно сформировать несколько групп). Как правило, группы изучают материалы методических разработок во время факультативных (кружковых) занятий. Группа «Коллективный ученик» обучается как *один учащийся*, то есть оформляет по каждому заданию одну работу.

Обучение на заочном отделении *бесплатное*.

Условия приема

Зачисление индивидуальных учеников производится *на конкурсной основе* по результатам выполнения приведенной ниже вступительной работы (группам «Коллективный ученик» выполнять вступительную работу *не требуется*).

Ученики, желающие поступить на заочное отделение Малого мехмата, должны *не позднее 30 апреля 2011 года* выслать в наш адрес письмом или по электронной почте решения задач



К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 8.

вступительной работы. Для разных классов предусмотрены задачи с разными номерами, но при этом они не обязательно должны быть решены все. Вступительную работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. Записывать решения в тетрадь следует в том же порядке, в каком задачи идут во вступительной работе.

На обложку тетради следует наклеить лист бумаги со следующими данными:

1. Фамилия, имя, отчество учащегося.
2. Класс (в 2011/12 учебном году).
3. Полный домашний адрес с указанием почтового индекса.
4. Адрес электронной почты (если он есть).
5. Телефон (с кодом города).
6. Источник, из которого вы узнали о наборе на заочное отделение.

Вступительные работы обратно не высылаются.

Группам «Коллективный ученик» не нужно выполнять вступительную работу: необходимо лишь *не позднее 15 сентября 2011 года* выслать письмом или по электронной почте данные:

1. Фамилия, имя, отчество руководителя.
2. Фамилии, имена, отчества учащихся (не более 15 человек).
3. Класс (в 2011/12 учебном году).
4. Полный адрес руководителя группы (по которому будут высылаются задания) с указанием почтового индекса.
5. Адрес электронной почты (если он есть).
6. Телефон (с кодом города).
7. Источник, из которого вы узнали о наборе на заочное отделение.

Вступительная работа

Задачи 1–8 для поступления в 8-й класс; 4–13 для поступления в 9–10-е класс. В скобках указаны классы, для поступления в которые предназначена соответствующая задача.

1. (8-й класс.) К приходу подружек Юля испекла круглый торт. Но она не знает, сколько подружек придет в гости – две или три. Она хочет заранее разрезать торт на куски так, чтобы независимо от того, сколько придет подружек, можно было разделить весь торт поровну на всех (включая саму Юлю), причем дополнительных разрезов делать не придется. Каково минимальное число кусков, на которое придется разрезать торт?

2. (8-й класс.) Даны семь чисел. Сумма любых трех из них равна 0. Найдите эти числа?

3. (8-й класс.) Илья Муромец, Алеша Попович, Добрыня Никитич и Микула Селянинович поразили стрелами несколько змеев-горынычей. В каждого из змеев попало ровно по 3 стрелы, причем это были стрелы разных богатырей. Больше всего попаданий — 6 — было у Ильи Муромца, а меньше всего — 3 — у Алеши Поповича. Сколько змеев было подстрелено?

4. (8–10-е классы.) Среди жителей города 85% знают русский язык, 80% — украинский, а 10% не знают ни того, ни другого языка. Сколько процентов жителей знают оба языка?

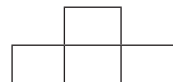
5. (8–10-е классы.) Сколькими нулями оканчивается число $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 125$?

6. (8–10-е классы.) Можно ли разрезать произвольный треугольник на четыре треугольника, любые два из которых не имеют общих сторон (но, возможно, имеют общие участки сторон)?

7. (8–10-е классы.) Докажите, что если $q = p - 1$, то

$$(p^{16} + q^{16})(p^8 + q^8)(p^4 + q^4)(p^2 + q^2)(p + q) = p^{32} - q^{32}.$$

8. (8–10-е классы.) Таблица 20×20 клеток заполнена числами так, что в каждой четырех клетках, которые можно покрыть фигурой, изображенной на рисунке (фигуру можно поворачивать), сумма чисел равна 100. Найдите все числа, заполняющие таблицу.



9. (9–10-е классы.) Три хорды окружности пересекаются в одной точке, причем две из них делятся этой точкой пополам. В каком отношении делится третья хорда и почему?

10. (9–10-е классы.) Изобразите на координатной плоскости линию, заданную уравнением $|x - y| + |x + y| = 2$. Определите длину линии.

11. (9–10-е классы.) Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M так, что треугольник AMD равнобедренный. Найдите величину угла AMB .

12. (9–10-е классы.) На арену цирка, имеющую форму круга радиуса 7 метров, выбежали 7 клоунов. Обязательно ли, что расстояние между какими-нибудь двумя из них не превосходит 7 метров?

13. (9–10-е классы.) Решите систему

$$\begin{cases} xy + yz = 2009, \\ yz + zx = 2010, \\ xy + zx = 2011. \end{cases}$$

В. АРНОЛЬД,
Москва

Опубликовано в книге: Арнольд В.И.
Математическое понимание природы:
Очерки удивительных явлений и их
понимания математиками (с рисунками
автора). — М.: МЦНМО, 2009.



Фото с сайта <http://ru.wikipedia.org>

ПЯТЬ СЮЖЕТОВ О ВОДЕ

Расследование убийства привело кинорежиссера (в детективной повести «Коррида» В. Токаревой) к выводу: «математика — это то, что можно объяснить».

Основной вклад математики в естествознание состоит вовсе не в формальных вычислениях (или других применениях готовых математических достижений), а в исследовании тех неформальных вопросов, где точное выяснение постановки вопроса (того, что именно следует искать и какие именно модели использовать) составляет обычно полдела.

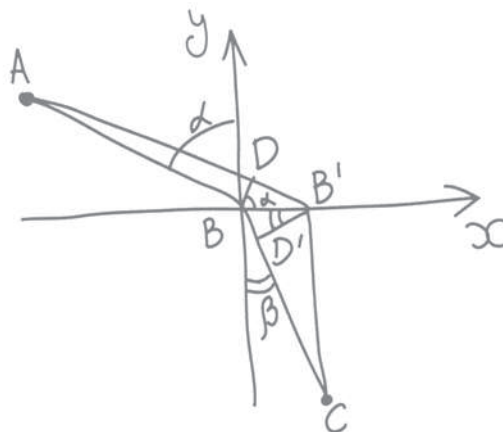
Собранные здесь очерки преследуют именно эту цель: научить читателя не столько умножать большие числа (что иногда тоже приходится делать), но и догадываться о неожиданных связях непохожих на вид явлений и фактов, относящихся порой к разным областям естествознания и других наук.

Закон Снеллиуса преломления лучей

Скорость движения (по любому направлению) в верхней полуплоскости $y > 0$ (плоскости с декартовыми координатами $(x; y)$) равна v , а в нижней полуплоскости $y < 0$ она составляет $\omega = \frac{3}{4}v$ (для распространения света в воздухе $v = 1$, в воде $\omega = \frac{3}{4}$).

Кратчайший по времени движения пути ABC из точки A верхней полуплоскости в точку C нижней полуплоскости представляет собой ломаную ABC с изломом B на границе раздела.

Определить соотношение между углами α и β путей AB и BC с нормалью к границе раздела.



Решение. Рассмотрим близкую к B точку B' на границе раздела: $|BB'| = \varepsilon$. Путь AB' длиннее пути AB на отрезок $B'D$, длина которого составляет $\varepsilon \sin \alpha + O(\varepsilon^2)$.

Точно так же путь CB' короче пути CB на отрезок BD' , длина которого составляет $\varepsilon \sin \beta + O(\varepsilon^2)$.

Поэтому время нахождения пути $AB'C$ больше времени нахождения пути ABC на

$$\Delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon \sin \alpha}{v} - \frac{\varepsilon \sin \beta}{\omega} + O(\varepsilon^2).$$

Чтобы время нахождения пути ABC было минимальным (при любом знаке ε , то есть как для точек B' правее B , так и для точек B' левее B), необходимо, чтобы $\Delta(\varepsilon) = 0$ (в первом приближении по ε), то есть чтобы

$$\frac{\sin \alpha}{v} = \frac{\sin \beta}{\omega}. \quad (*)$$

Обратная скорости величина называется *показателем преломления* (обозначается обычно буквой $n = \frac{1}{v}$). Полученный выше закон преломления (*) на границе сред с показателями преломления $n_1 = \frac{1}{v}$ и $n_2 = \frac{1}{\omega}$ записывается в виде закона Снеллиуса

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2.$$

Пример. Для луча света, переходящего из воздуха ($n_1 = 1$) в воду ($n_2 = \frac{4}{3}$), закон преломления принимает вид

$$\sin \alpha_1 = \frac{4}{3} \sin \alpha_2.$$

Если угол α_1 входящего из воздуха в воду луча с вертикальной нормалью к горизонтальной поверхности воды мал, то угол α_2 преломленного луча с вертикалью еще меньше, он составляет примерно $\frac{3}{4} \alpha_1$.

Мы вывели выше закон преломления лучей из «принципа Ферма», по которому лучи света достигают цели за кратчайшее время.

Сам Снеллиус открыл этот закон преломления экспериментально, измеряя углы α и β в множестве примеров.

Читателю, знакомому с принципом Гюйгенса (описывающим распространение волн при помощи огибающих семейств локальных волновых фронтов), будет приятно увидеть, что из этого принципа Гюйгенса закон Снеллиуса легко вытекает (в виде простого частного случая).

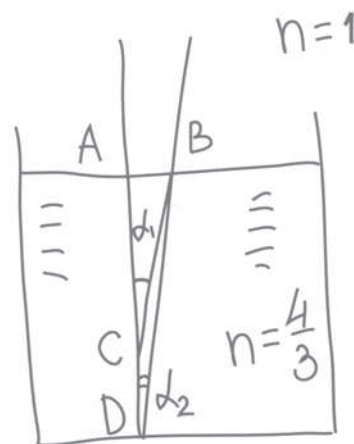
Интересно, что во всех этих примерах природа распространяющихся волн малосущественна. Например, акустические или оптические лучи и фронты ведут себя сходным образом и та же математика применима к теории распространения эпидемий.

Глубина воды и картезианская наука

Насколько кастрюля с водой, стоящая на столе, кажется смотрящему на нее сверху зрителю менее глубокой, чем ее истинная глубина?

Решение. Треугольники BAC и BAD прямоугольные,

$$|AB| = |AC| \operatorname{tg} \alpha_1 = |AD| \operatorname{tg} \alpha_2.$$



Для малого угла падения α_1 находим

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \approx \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = n = \frac{4}{3},$$

то есть кажущаяся глубина $|AC|$ на четверть меньше истинной глубины $|AD|$.

Замечание. На эту кастрюлю стоило бы взглянуть Декарту, который утверждал, будто свет распространяется в воде на 30% быстрее, чем в воздухе.

К этому выводу он пришел потому, что знал, что звук распространяется в воде быстрее, чем в воздухе (примерно впятеро).

Дедуктивные заключения на основании таких аналогий крайне опасны — их всегда следует проверять экспериментами. Но Декарт торжественно объявил, что наука — это последовательность нахождения дедуктивных следствий из произвольных аксиом, а экспериментальная проверка этих аксиом в науку не входит (хотя и может оказаться полезной для рыночной экономики).

Из нескольких десятков подобных «принципов» Декарта опаснее всего такой: «Правительству следует немедленно запретить все другие методы преподавания, кроме моего, так как только мой метод политически корректен: двигаясь моим путем, любой тупица преуспевает столь же быстро, как и любой гений, в то время как при всех других методах обучения таланты доставляют обучаемым преимущества».

Следуя этим своим принципам, Декарт изгнал из геометрии чертежи, как, с одной стороны, следы экспериментов с рисованием прямых и окружностей, а с другой — нишу для воображения, которое он из науки старался исключить.

Бывший президент Франции Жак Ширак сказал мне (12 июня 2008 года, в Кремле), что именно за эти черты картезианской науки с детства ненавидит математику. Но он добавил (по-русски): «Впрочем, вероятно, это относится только к французской, бурбакистской математи-

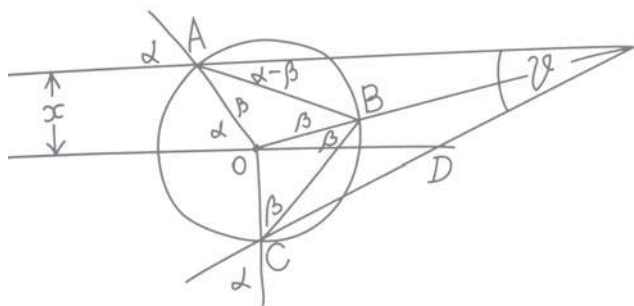
ке, а здесь я все понимаю, что ты говоришь. Ведь ваш Федор Иванович не зря сказал:

*Умом Россию не понять,
Аршином общим не измерить:
У ней особенная стать —
В Россию можно только верить».*

В России никто не верит в теорию Декарта, будто свет распространяется в воде быстрее, чем в воздухе, — зато его замечательная теория радуги известна здесь больше, чем во Франции.

Капля воды, преломляющая свет

На какой угол ϑ отклонится от возвращения вдоль падающего луча луч, попавший на сферическую каплю воды радиуса r на расстоянии x от проходящего через центр капли параллельного ему луча OD ?



Решение. Угол BOD равен $\beta - (\alpha - \beta) = 2\beta - \alpha$.

Угол отклонения ϑ вдвое больше (ввиду симметрии относительно оси OB): $\vartheta = 4\beta - 2\alpha$.

По закону преломления $\sin \alpha = n \sin \beta$, а по определению падающего луча $r \sin \alpha = x$. Поэтому $\alpha = \arcsin \frac{x}{r}$, $\beta = \arcsin \frac{x}{nr}$,

$$\vartheta(x) = 4 \arcsin \frac{3x}{4r} - 2 \arcsin \frac{x}{r}.$$

Хотя эта формула решает вопрос, ее смысл выясняется только после построения графика численной функции ϑ . А именно, такое исследование объясняет и поразительный блеск росынок, и радугу на дождевом небе.

Наибольший угол отклонения луча

Какой из падающих на сферическую каплю воды луч отклонится от возвращения вдоль себя на наибольший угол $\vartheta_{\max}$ (и на какой именно угол)?

Решение. Обозначим $\frac{3x}{4r}$ через u , тогда $\frac{x}{r} = nu$,

$$\frac{\vartheta}{2} = 2 \arcsin u - \arcsin nu.$$

Производная функции $\frac{\vartheta}{2}$ по переменной u должна обращаться в 0 для луча наибольшего отклонения $\vartheta_{\max}$; для этого луча

$$\frac{2}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{n}{\sqrt{1-n^2u^2}},$$

$$\frac{4}{1-u^2} = \frac{n^2}{1-n^2u^2},$$

так что

$$u_{\max}^2 = \frac{4-n^2}{3n^2},$$

$$\frac{\vartheta_{\max}}{2} = 2 \arcsin u_{\max} - \arcsin nu_{\max}.$$

При $n = \frac{4}{3}$ мы находим

$$u_{\max}^2 = \frac{5}{12}, \quad u_{\max} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad nu_{\max} = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \frac{2}{3}.$$

Поскольку $\frac{5}{3} \approx 1,666$, мы легко вычисляем

$$\sqrt{\frac{5}{3}} \approx \frac{\sqrt{166,6}}{10} \approx 1,29.$$

Итак,

$$u_{\max} \approx 0,645, \quad nu_{\max} \approx 0,86.$$

Поскольку

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0,5, \quad \sin \frac{\pi}{4} \approx 0,707, \quad \sin \frac{\pi}{3} \approx 0,86,$$

мы находим

$$\arcsin nu_{\max} \approx \frac{\pi}{3}, \quad \arcsin u_{\max} \approx \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{40},$$

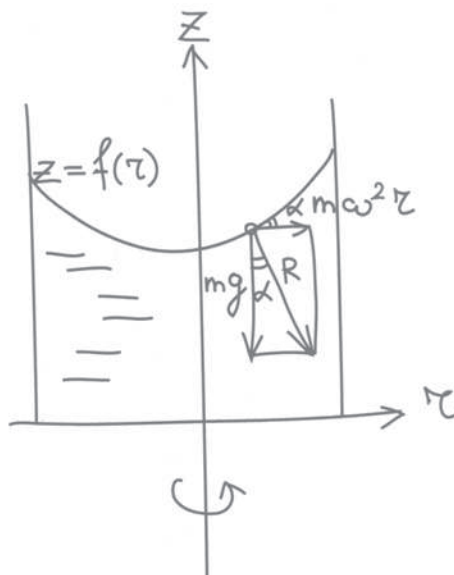
откуда

$$\frac{\vartheta_{\max}}{2} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{20} - \frac{\pi}{3}, \quad \vartheta_{\max} \approx \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{10},$$

то есть около 42° .

Вращение жидкости

Стакан чая поставили на равномерно вращающийся патефонный диск (например, на середину этого диска, так что ось вращения совпадает с осью симметрии стакана). Какую форму примет поверхность чая?





Виллеброрд СНЕЛЛИУС (1580—1626) — голландский математик и физик. Родился в Лейдене в семье профессора математики местного университета. Изучал математику и юриспруденцию в различных университетах Европы, много путешествовал, был знаком со многими видными учеными своего

времени. В 1621 г. после многочисленных экспериментов по оптике открыл закон преломления лучей, позже названный его именем. Своих результатов Снеллиус не публиковал — они пылились в архивах, пока не были обнаружены Рене Декартом, который включил их в свой фундаментальный труд «Начала философии».



Христиан ГЮЙГЕНС (1629—1695) — нидерландский механик, физик, математик, астроном и изобретатель. Молодой Гюйгенс изучал право и математику в Лейденском университете, затем решил посвятить себя науке. Он участвовал в спорах о природе света. В 1678 г. выпустил «Трактат о свете» — набросок волновой теории света, а в 1690 г.

изложил качественную теорию отражения и преломления. Сформулировал принцип Гюйгенса, позволяющий исследовать движение волнового фронта, впоследствии развитый Френелем и сыгравший важную роль в волновой теории света и теории дифракции.



Рене ДЕКАРТ (1596—1650) — французский математик, философ, физик и физиолог, создатель аналитической геометрии и современной алгебраической символики, автор метода радикального сомнения в философии, механицизма в физике (предтеча рефлексологии).

Решение. Из симметрии ясно, что это будет поверхность вращения с уравнением вида $z = f(r)$, где r — расстояние от оси вращения, а z — высота чая.

Центробежная сила, действующая на массу m на расстоянии r от оси вращения с угловой скоростью ω , составляет $m\omega^2 r$, а сила тяготения составляет mg .

Условие ортогональности результирующей силы R поверхности чая состоит в том, что тангенс угла α этой поверхности с горизонтальным радиусом стакана равен

$$\frac{m\omega^2 r}{mg} = cr,$$

(где постоянная $c = \frac{\omega^2}{g}$ не зависит от точки

поверхности чая, но быстро растет с угловой скоростью вращения ω).

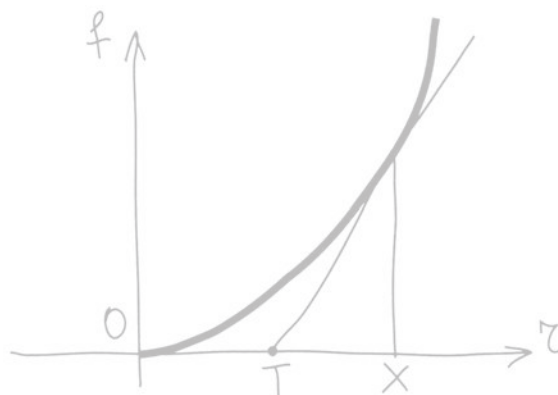
Мы получаем для функции f дифференциальное уравнение (указывающее наклон графика этой функции):

$$\frac{df}{dr} = cr.$$

Его решение

$$f(r) = f(0) + \frac{c}{2} r^2$$

показывает, что поверхность чая имеет вид параболоида вращения.



Замечание. Наше дифференциальное уравнение означает, что касательная к параболе делит пополам отрезок оси абсцисс:

$$|OT| = \frac{|OX|}{2},$$

так как

$$\frac{\frac{cr^2}{2}}{cr} = \frac{r}{2}.$$

Для параболы степени a было бы (как знал еще Архимед) $|TX| = \frac{|OX|}{a}$: для кубической параболы T вдвое ближе к X , чем к O .



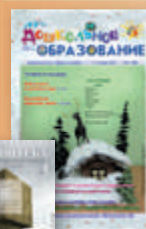
Издательский дом

ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ

новый этап развития



Дорогие коллеги!



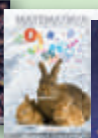
СО II ПОЛУГОДИЯ 2011 ГОДА все наши предметно-методические газеты становятся ЖУРНАЛАМИ:

- Ежемесячными
- Цветными
- 64-страничными
- В каждом номере – CD-диск с материалами к уроку
(для непредметных изданий – с дополнительными материалами), а также с электронной версией общепедагогической газеты «Первое сентября»

**Журналы будут выходить
в двух версиях: бумажной и электронной**

Оформить подписку на выбранную вами версию журнала можно в любом отделении связи по подписным каталогам агентства «Роспечать» и «Почта России».

В обоих каталогах информация о подписке размещена в разделе «ЖУРНАЛЫ» под заголовком «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ. ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА»



Журнал «Математика – Первое сентября»

Подписка на второе полугодие 2011 года открыта!

НА БУМАЖНУЮ ВЕРСИЮ:



**1200
рублей**

— каталожная цена
для частных лиц
за полгода
(в июле журнал не выходит)

Подписные индексы по каталогам:
32030 агентство «Роспечать»;
79073 «Почта России»

НА ЭЛЕКТРОННУЮ ВЕРСИЮ:



**780
рублей**

— каталожная цена
на электронную
версию журнала
за полгода
(в июле журнал не выходит)

Подписные индексы по каталогам:
26113 агентство «Роспечать»;
12717 «Почта России»

При подписке на сайте **www.1september.ru** действуют скидки!

Подробности на сайте www.1september.ru и по телефону: 8-499-249-47-58

ЧИСЛО π

3,14159265358979323846264338...

π – число, достойное восхищения:

Каждая цифра дает ощущение

ведь до конца не дойти ни

Взглядом всех цифр не объять –

шесть пять три пять.

Арифметических действий –

восемь девять –

уже не хватает, и трудно поверить –

семь девять –

что не отделаться – три два три

ВОСЕМЬ —

ни уравнением, которого нет,

ни шутливым сравнением –

ОНЫХ НЕ СЧЕСТЬ.

Двинемся дальше: четыре шесть...

перевод автора статьи

3,14... 3,14... МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИКА