

МАТЕМАТИКА

основана в 1992 г.

МЕТОДИЧЕСКАЯ ГАЗЕТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

16 – 28 февраль, 2011

mat.1september.ru

4

$e = 2,718281828459045235360287471352662497757...$



1september.ru

издательский дом
Первое сентября

МАТЕМАТИКА

индексы подписки Почта россии - 79083 (инд.); - 79584 (орг.) Роспечать - 32031 (инд.); - 32598 (орг.)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ
«ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»

Главный редактор:

Артем Соловейчик
(генеральный директор)

Коммерческая деятельность:

Константин Шмарковский
(финансовый директор)

Развитие, IT и координация проектов:

Сергей Островский
(исполнительный директор)

Реклама и продвижение:

Марк Сартан

Мультимедиа, конференции

и техническое обеспечение:

Павел Кузнецов

Производство:

Станислав Савельев

Административно-хозяйственное

обеспечение: Андрей Ушаков

Дизайн:

Иван Лукьянов, Андрей Балдин

Педагогический университет:

Валерия Арсланьян
(ректор)

ГАЗЕТЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:

Первое сентября – Е. Бирюкова,

Английский язык – А. Громушкина,

Библиотека в школе – О. Громова,

Биология – Н. Иванова,

География – О. Коротова,

Дошкольное

образование – М. Аромштам,

Здоровье детей – Н. Сёмина,

Информатика – С. Островский,

Искусство – М. Сартан,

История – А. Савельев,

Классное руководство

и воспитание школьников – О. Леонтьева,

Литература – С. Волков,

Математика – Л. Рослова,

Начальная школа – М. Соловейчик,

Немецкий язык – М. Бузоева,

Русский язык – Л. Гончар,

Спорт в школе – О. Леонтьева,

Управление школой – Я. Сартан,

Физика – Н. Козлова,

Французский язык – Г. Чесновицкая,

Химия – О. Блохина,

Школьный психолог – И. Вачков

УЧРЕДИТЕЛЬ: ООО «ЧИСТЫЕ ПРУДЫ»

Зарегистрировано ПИ № 77-7241 от 12.04.01

в Министерстве РФ по делам печати

Подписано в печать: по графику 20.01.11,

фактически 20.01.11 Заказ №

Отпечатано в ОАО «Чеховский

полиграфический комбинат»

ул. Полиграфистов, д. 1,

Московская область,

г. Чехов, 142300

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:

ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165

Телефон/факс: (499) 249-3138

Отдел рекламы: (499) 249-9870

Сайт: 1september.ru

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:

Телефон: (499) 249-4758

E-mail: podpiska@1september.ru

Документооборот

Издательского дома «Первое сентября»
защищен антивирусной программой Dr.Web



В НОМЕРЕ:

ТЕМА НОМЕРА: АКТИВНЫЙ УЧЕНИК

4 ОЛИМПИАДЫ, КОНКУРСЫ, ТУРНИРЫ

Чтобы зажечь сердца.

Интервью с Н.Х. Агахановым

12 ПРЕДЛАГАЮ КОЛЛЕГАМ

Воспитать привычку мыслить

И. Фролова

15 Я делаю – я усваиваю

Н. Мойсейченко

21 Время, затраченное на выполнение домашнего задания

З. Хамидуллина

18 ОТКРЫТЫЙ УРОК

Прямоугольный треугольник

Е. Козобина

24 НА СТЕНД

Готовимся к ЕГЭ

Задача В12 – задачи на проценты и на работу

27 ОФИЦИАЛЬНЫЕ ДОКУМЕНТЫ

Демонстрационный вариант

контрольных измерительных

материалов для проведения в 2012

году государственной (итоговой)

аттестации (в новой форме) по

математике обучающихся, освоивших

основные общеобразовательные

программы основного общего

образования. Проект

31 Первые результаты международной программы PISA-2009

Г. Ковалева

36 ВНЕКЛАСНАЯ РАБОТА

Открытый лицей ВЗМШ

при МГУ имени М.В. Ломоносова

Л. Серебренникова

39 ОЛИМПИАДЫ, КОНКУРСЫ, ТУРНИРЫ

Решаем задачи «Кенгуру»-2010

Н. Жарковская

43 ЛЕКТОРИЙ

Ладейные числа

К. Кохась

СОДЕРЖАНИЕ ДИСКА

К № 1

VII Олимпиада по геометрии

им. И.Ф. Шарыгина (заочный тур).

Шестой заочный конкурс учителей математики.

Хлевнюк Н., Лазаренко М.

Как помочь школьнику справиться с ЕГЭ

К № 2

Бирюкова С. Интеллект-карты в геометрии.

Высоцкий И., Яценко И. 7 класс Контрольные

работы по теории вероятностей и статистике.

Пахаева Н., Шерстнева Н. Статистическая

информация и формы ее представления

К № 3

Высоцкий И., Яценко И. 8 класс. Контрольные

работы по теории вероятностей и статистике.

Филлиповский Г. Леммы Архимеда из Сиракуз.

Сазонова Т. Не будем жалеть времени.

Демонстрационный вариант ГИА 2011.

XX Турнир Архимеда

К материалам, обозначенным этим символом, есть приложение на CD-диске, вложенном в № 4.

МАТЕМАТИКА

Методическая газета
для учителей математики

Основана в 1992 г.

Выходит два раза в месяц

РЕДАКЦИЯ:

Главный редактор:

Л. Рослова

Отв. секретарь:

Т. Черкавская

Редакторы:

П. Камаев,

И. Бокова,

О. Макарова

Дизайн макета и

обложки:

И. Лукьянов

Корректор:

Л. Громова

Верстка:

Л. Кукушкина,

Д. Кардановская

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:

Роспечать:

инд. – **32030;**

орг. – **32594**

Почта России:

инд. – **79073;**

орг. – **79583**

ПОМОЖЕМ НАШИМ БУРАТИНО

Л. РОСЛОВА



Художник Л. Владимировский.
Из иллюстраций к книге А. Толстого
«Приключения Буратино»

■ Недавно отец напомнил мне о том, что, когда я оканчивала школу, вся семья целый год жила без телевизора: семья пошла на такие жертвы, чтобы ничто не отвлекало меня от подготовки к поступлению в вуз. Честно говоря, моя легкомысленная память сей пример жертвенности не сохранила. Видимо, и так было не до него, да и вообще телевизор никогда не был для меня проблемой. Ну, и смотреть-то было нечего. Что же сейчас?

Несчетное множество TV-программ, Интернет, компьютерные игры... Каждый день появляется что-то новое, необычное, ярко и эффектно «упакованное» с помощью специалистов в этой области, которые знают все слабые стороны детской натуры и профессионально на них воздействуют в своих целях. И детская любознательность не может на все это «не покупаться». Современная информационная среда напоминает мне известных персонажей – лису Алису и кота Базилио, увлекающих наивного Буратино на поле Дураков. И живут наши Буратино в этой атмосфере праздника с первых дней жизни...

Все жалуются, что дети мало читают. Понятно, ведь чтобы преобразовать прочитанное в образы, мысли и чувства, нужно проделать серьезную внутреннюю работу: понимать, представлять, сопоставлять, анализировать. Куда проще посмотреть фильм в жанре экшн, где все броско и динамично, сверкает и взрывается, только что еще не пахнет.

Что сейчас противопоставляет этому фейерверку образов и чувств школа? Нотации и нравоучения, блеклые учебники и плохо пишущий мел, бесконечные тесты и тучу однообразных примеров. И где же здесь место чувствам?

Вы спросите, что может противопоставить школа такому мощному воздействию на психику, на эмоциональную сферу юного, несформированного создания? Соревноваться в спецэффектах? Проигрыш обеспечен. Однако, мне кажется, пришла пора вспомнить о том, что природа наделила ребенка любознательностью, которую полностью убить все-таки непросто. И пусть эта любознательность послужит воспитанию активного ученика.

На вопросы главного
редактора газеты
«Математика»
Л.О. РОСЛОВОЙ
отвечает председатель
координационного
совета Международных
математических
олимпиад
НАЗАР ХАНГЕЛЬДЫЕВИЧ
АГАХАНОВ

Фото Л. Рословой и Н. Агаханова



Н.Х. Агаханов

4

ЧТОБЫ ЗАЖЕЧЬ СЕРДЦА

Я познакомилась с Назаром Хангельдыевичем, когда пришла работать в министерство образования и одним из направлений моей деятельности стало курирование вопросов, связанных с организацией и проведением всероссийских математических олимпиад. Эта была совершенно новая для меня сфера, на таком высоком уровне я с олимпиадами никогда не сталкивалась, и Назар, будучи руководителем российской команды на международной олимпиаде и председателем методической комиссии, терпеливо вводил меня в курс олимпиадных дел и в круг людей, ими занимающихся. Он знает про математические олимпиады все, или почти все, поскольку живет ими много лет. А нынешней осенью появился повод встретиться с ним и снова поговорить об олимпиадах.

Л.Р. Назар, я бы хотела начать разговор с человеком, который возглавляет олимпиадное движение в нашей стране, с вопроса о том, помнишь ли ты свою первую математическую олимпиаду.

Н.А. Я очень хорошо помню свою первую олимпиаду. Я перешел в 5-й класс, и в нашей школе только-только начала работать новая, молодая учительница. Она как-то увидела во мне ребенка, с которым ей интересно общаться, и с первых же уроков стала давать дополнительные задачи, принесла мне книгу, по-моему — Кордемского. Я с удовольствием решал из нее задачи. И первая олимпиада, которая очень хорошо запомнилась, это городская олимпиада. Я учился в 5-м классе, а олимпиада была для 6-х, но пятиклассники допускались. Я занял 2-е место, потому что неправильно решил задачу про «полторы курицы», которые «за полторы минуты снесли полтора яичка». И меня не пускали на республиканскую олимпиаду. Я расплакался, и жюри приняло решение все-таки меня на олимпиаду допустить. И там уж я, как говорится, отыгрался: занял 1-е место, решив все задачи.

Л.Р. Сколько же лет прошло с тех пор?

Н.А. Это было в 1966 году. Фактически это были самые первые Всесоюзные олимпиады, и я в них участвовал. Более того, тогда в Новосибирском Академгородке проводилась летняя школа, и в качестве эксперимента в тот год набирали группу шестиклассников, в которую я и попал. Происходило это интересно. Олимпиаду написал хорошо, и меня пригласили на собеседование, а я в это время был на тренировке по футболу. Позвонили домой, мама прибежала, забрала меня с тренировки, и я очень расстроился. Но и сейчас помню задачи, которые решал на собеседовании: классическую задачу про муху, которая летала между двумя велосипедистами, и задачу про двух друзей, один из которых на вопрос о возрасте его детей давал нелепые ответы. Мне страшно это все понравилось, и тут уж я был счастлив, когда меня пригласили в летнюю школу.

Л.Р. А эти задачи не были тебе знакомы?

Н.А. Нет. Я тогда с ходу решил. Ну, конечно, подумав вначале. Общение с Новосибирском, с Академгородком и преподавателями, всегда было для меня позитивным. В частности, мои олимпиадные достижения как раз связаны с Новосибирском — я два раза был победителем олимпиады Академгородка, а это практически вся азиатская часть СССР. А на всесоюзных олимпиадах выступал не очень хорошо.

Л.Р. А первая международная олимпиада, и в каком качестве?

Н.А. В 1992 году в Москве проходила Международная олимпиада, я был на ней в числе координаторов. Мне чрезвычайно все понравилось, потому что была возможность пообщаться с математиками всего мира. А через два года, в 94-м, я был официальным обозревателем на Международной олимпиаде, которая проходила в Гонконге, в 95-м, в Канаде, впервые был руководителем команды. И до сих пор руковожу нашей сборной. Пятнадцать лет, и в этом году была уже шестнадцатая моя олимпиада.

А первый опыт работы в жюри — на Московской городской олимпиаде. Это 1973 год, я был студентом 2-го курса мехмата, пригласил меня Николай Николаевич Константинов, а уже в 74-м году — в жюри Всесоюзной олимпиады. Был перерыв, когда я после окончания аспирантуры на пять лет

отошел от олимпиад, но в 83-м году меня пригласили провести областную олимпиаду на Дальнем Востоке, и в 84-м году снова был в жюри Всесоюзной олимпиады.

Л.Р. Я начала издавать, чтобы плавно подойти к событию этого года — твоему избранию на высший пост международной математической олимпиады. С удовольствием тебя с этим поздравляю и от себя, и от имени учителей математики — читателей газеты.

Н.А. Спасибо. Да, этим летом я был избран на четыре года председателем координационного совета Международных математических олимпиад (кратко это называется «президент международных олимпиад»). Координационный совет определяет политику международных олимпиад: готовит предложения по изменению в положении, которые потом уже принимают лидеры стран, участвующих в олимпиаде; выбирает место для проведения олимпиады. И все текущие олимпиады курирует как раз координационный совет. Поэтому в идеале — это текущая работа и проверка подготовки к предстоящим олимпиадам, но получилось так, что меня избрали в тот момент, когда международные олимпиады нуждаются в значительных изменениях в правилах.

Л.Р. Как давно проводятся Международные олимпиады?

Н.А. Они начались с 59-го года. Был пропуск, один год — 80-й, по политическим причинам. Пра-



Золотая молодежь, или Руководитель результатом доволен. Традиционное фото с командой России, выступавшей на международной олимпиаде, после награждения, 2010 г.

вила за это время претерпели изменения, но нынешние действуют уже достаточно давно, уж лет двадцать как они не менялись. А за это время произошло следующее. Практически удвоилось число стран-участниц и, кроме того, изменились технические возможности. К сожалению, в последние годы появилась возможность передачи информации участникам относительно заданий олимпиады.

Л.Р. О, те же проблемы, что и на ЕГЭ?

Н.А. Да, и это испытание выдерживают далеко не все руководители команд, особенно если в стране есть финансовая поддержка тех руководителей, которые добиваются успехов на олимпиаде. Ну, об этом, может быть, не стоит писать.

Л.Р. Не будем углубляться, но отметим, что такого рода проблемы есть не только у нас.

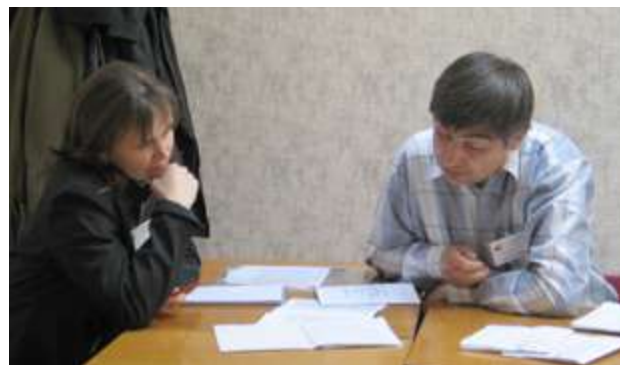
Н.А. И в итоге получилось, что сейчас нужно просто коренным образом изменить правила проведения олимпиад. В настоящее время задания готовятся за три дня до начала олимпиады и уже до проведения туров становятся известны, причем с решениями. А три дня для передачи информации — это слишком много (впрочем, сейчас достаточно и пары часов, чтобы хорошо ознакомиться с решениями). Поэтому готовится пакет документов, который будет дистанционно обсуждаться в течение года с руководителями команд, а уже очно — на следующей международной олимпиаде, которая будет проходить в Амстердаме летом следующего года. На мне лежит в данном случае большая ответственность, поскольку смена правил влечет и смену структуры олимпиады, а это не всем лидерам команд нравится, они привыкли к традиционному стилю проведения олимпиад.

Л.Р. Меняются внешние условия, приходится менять и правила. Это же происходит, например, и со спортивными соревнованиями, там форматы изменяют в сторону зрелищности, «телевизионности».

Н.А. Ну да. С другой стороны, иногда отказываются от применения новейших технических средств, меняющих возможности спортсменов. Простейший пример из спорта — отказались от использования гидрокостюмов для пловцов.

Л.Р. Твоя программа действий на ближайшее время — это модернизация правил?

Н.А. Да. В частности, олимпиада будет несколько короче, поскольку не будет периода подготовки заданий, в котором участвуют представители 100 стран. С одной стороны, это удешевит олимпиаду, а с другой — позволит школьникам и руководителям команд общаться во время олимпиады. Сейчас они живут раздельно, даже в разных городах страны-организатора, и получается, что лидеры команд не видят своих ребят, а это, конечно, плохо. На самом деле, важно помочь ребенку психо-



Идет проверка работ Всероссийской олимпиады, Псков, 2006 г.

логически настроиться на олимпиаду, успокоить, погладить по головке.

Л.Р. Да, многие дети впервые попадают за границу, в новую обстановку (отдых на курортах Турции и Египта — не в счет). Конечно, нагрузка очень большая. А вот в соответствии с этими изменениями у нас в стране могут быть какие-то изменения? И нужны ли они? И вообще, каково сейчас состояние всероссийской олимпиады?

Н.А. Это вопрос сложный. Вообще, напрямую — никак не связан. Другое дело, что высказываются предложения: раз уж реформа, так реформа. И вот некоторые лидеры предлагают изменить тематику международных олимпиад, не радикально, полностью, а добавить некоторые разделы элементарной или неэлементарной математики, которые бы расширили возможности по составлению вариантов заданий. Но если это произойдет, то соответственно нужно будет включить эти темы в программу подготовки к международной олимпиаде. Но мы, в принципе, и так вынуждены в период подготовки дополнительно изучать некоторые разделы математики, потому что все-таки программа нашей школы достаточно сильно отличается от программ других стран. С одной стороны, у нас мало изучается теория чисел, функциональные уравнения. Поэтому в период трехнедельных сборов, когда идет интенсивная подготовка команды, мы как раз пытаемся восполнить эти пробелы. Но, с другой стороны, у нас есть большое преимущество перед другими странами — наши школьники креативнее, потому что у нас очень сильна комбинаторная линия, это те разделы математики, где в первую очередь необходимо построение логических конструкций, необходима креативность. И здесь мы можем дать фору многим странам. У нас эти традиции сохраняются. Может быть, по той причине, что во многих странах олимпиады проводятся для старшеклассников, и по единым заданиям для учащихся разных классов, задачи более технические. А у нас в традиции — начинать олимпиады с 5–6-го класса, когда задания составляются на уровне элементарного, совсем примитивного технического аппарата

та, зато в них больше логики. Это и позволяет отбирать детей с творческим потенциалом.

Л.Р. Как определить математическую одаренность?

Н.А. Математическая одаренность, в первую очередь, это умение аналитически обрабатывать информацию и умение строить новые для себя логические конструкции. Иными словами, умение создавать цепочку логических шагов, математических шагов, когда есть некие входные данные, объект, который нужно изучить, и нужно что-то получить относительно него на выходе. Эта обработка информации фактически сродни научной деятельности, научному творчеству, и школьник на математической олимпиаде, то есть в момент, когда он реализует свои математические способности, решает некоторую новую для него научную проблему. Результат иногда известен заранее, иногда неизвестен, и он должен (а) создать некую гипотезу насчет справедливости того или иного утверждения и (б) доказать ее, обосновать научно. Почему математическую олимпиаду выделяют среди других олимпиад? Потому что на других олимпиадах, как правило, во главу угла ставится энциклопедичность, объем знаний, ну и иногда способность вычленивать самое важное из этих знаний. А в математике объем знаний мало помогает, потому что на хороших олимпиадах главная цель составителей — придумать такие задачи, которые участникам незнакомы.

Помимо этого, математические способности — это еще и способности к эстетике, к красоте, гармонии. Почему? В математике есть понятие «красивая задача» — элегантное решение очень сложных задач, в котором используется новый, неожиданный ход. В общем, математика — это креативная гармония.

Л.Р. А в каком возрасте целесообразно начинать участвовать в олимпиадах?

Н.А. У меня был такой опыт. Я преподаю в Долгопрудненской математической школе № 5. Меня попросили вести уроки математики в начальной школе, ну а потом я с этими детьми встретился, когда они были уже в выпускных классах. И могу сказать: склонность, способность к математике четко проявляется уже в начальной школе. Тот, кто выделялся во 2-м классе, изначально демонстрировал свои способности, даже если в среднем звене у него были проблемы, связанные с математикой, тот становился лидером в старшем звене. Способности заложены изначально. Но способности сами по себе ничего не значат, если они не подкрепляются последующей работой: нужна мотивированность, нужен упорный труд, и тогда эти способности раскрываются.

Л.Р. Может ли учитель распознать способности? Что он должен делать в ситуации, когда рядом нет центра, работающего с одаренными детьми?

Н.А. Это очень сложная проблема. Умение распознавать и раскрывать способности (не только математические) ученика и задача обучения всех детей в классе своему предмету — это на самом деле противоречащие друг другу задачи. Обязанность учителя математики — это «научение» всего класса некоторым стандартным алгоритмам. Это запоминание приемов, усвоение их и отработка технических навыков. А способности творческие — это совсем другое, и учителю, ответственно выполняющему свою основную работу, конечно, очень сложно оценить способности ребенка. А дети, которые обладают творческим потенциалом, часто не очень легко вписываются в стандарты обучения. Учение — это серьезная работа, для нее должен быть интерес, но талантливому ребенку неинтересно решать большое количество квадратных уравнений, он при этом может быть рассеян. Это одна проблема. Вторая проблема. Чтобы как-то вести своего талантливого ученика вперед, учитель должен быть примерно на два шага впереди. Учителю, у которого большая нагрузка, который должен выполнять рутинную работу, каждый день проверять тетради, очень сложно параллельно с этим работать с талантливым ребенком. Могу сказать на своем примере. Я работал в школе, и в 10-й класс, что очень поздно, ко мне попал будущий победитель международной олимпиады, кстати, недавно защитивший докторскую диссертацию, Роман Николаевич Карасев. Пришел, почти ничего не зная. Он в тот год на областной олимпиаде даже не смог пройти во второй тур. А уже через полгода я должен был готовиться к каждому очередному занятию для того, чтобы в течение урока чем-то интересным, содержательным загрузить именно его. Фактически я параллельно проводил два урока: один для всего класса и один для Ромы. То, что мы изучали, он проглатывал мгновенно. И я специально читал серьезные математические книги, подбирал сложные задания, а он их выполнял с легкостью. Поэтому-то и тяжело работать с такими ребятами.

Наибольших результатов в поиске и педагогическом сопровождении одаренных детей добиваются в тех территориях, где работать с одаренными детьми приходят вузовские преподаватели, люди академического сообщества, студенты, аспиранты. Это может быть и кружок, и работа в математической школе, и просто индивидуальная работа с талантливым ребенком. Поэтому скажу так: задача учителя — увидеть способности в своем ученике, поддержать его, ну а дальше, если есть возможность, передать, как говорится, «в хорошие руки».

Л.Р. А существуют ли какие-нибудь дистанционные формы работы?

Н.А. У нас в стране хорошо отработана такая форма работы с ребятами из глубинки — летние мате-



В составе жюри на Турнире матбоев в Орленке, 2007 г.

математические лагеря. А еще зимние школы. Лучшими в такой работе являются несколько центров. Это Кировская математическая школа, которую я бы поставил на первое место, Питерская школа, школы в Татарстане, Омске, в Московской области, Челябинске, Адыгее. Здесь есть возможность для ребят из глубинки пообщаться с хорошими, сильными математиками, которые и могут открыть для них мир математики.

Л.Р. Понятно, что для одаренных ребят важно личное общение, и в летней школе оно может быть. А вот по Интернету нельзя общаться?

Н.А. По поводу Интернета. Дистанционные формы есть, и они активно развиваются. Одним из пионеров в этой работе стал Ярославль. Уже семь лет назад они начали программу по проведению интернет-олимпиад.

Л.Р. Но я имею в виду не олимпиады, а именно обучение.

Н.А. У нас в стране существовали заочные школы при мехмате МГУ, при Физтехе, физикотехническая школа. Они по-прежнему функционируют. Это флагманы нашей работы в регионах. В школах большое количество учеников. К сожалению, одна из ведущих проблем — это загруженность тех людей, которые могли бы работать с детьми. Они востребованы, но вот профессионалов высшего уровня — единицы.

Л.Р. Правильно ли я понимаю, что важна индивидуальная работа?

Н.А. Почему, скажем, в отличие от других дисциплин, где нередко бывают случаи успешного выступления на всероссийских олимпиадах школьников из глубинки, такое практически не встречается в математике? Смотрите. Ребенок должен построить правильную конструкцию. А вот оценить истинность этой конструкции часто бывает сложно. Он-то уверен, что правильно решил задачу, правильно рассуждал, а на самом деле его решение глубоко ошибочно. И главная зада-

ча профессионала-математика, который должен быть рядом с ребенком, — понять решение, увидеть, все ли там хорошо, или наоборот — объяснить неверный логический вывод. Обязательно нужны такие педагоги. Но, к сожалению, в нашей стране каждый преподаватель вынужден, помимо основной своей работы, еще где-то подрабатывать, потому что ему нужно кормить семью, поэтому его потенциал не может быть использован полностью. Занятие наукой и занятие педагогикой пока оплачиваются плохо.

Л.Р. Предположим, что мы создаем некую фантастическую программу «Математически одаренный школьник», систему работы с одаренным юным математиком. Из каких положений она должна состоять?

Н.А. Ну, в первую очередь, это информационное освещение того, что такая группа существует, чтобы преподаватели математики в случае появления талантливого ребенка о нем могли заявить, сразу его туда направить. Приведу пример — Василий Мокин, который в этом году завоевал золотую медаль на международной олимпиаде. Про него мы узнали, когда он учился в 5-м классе. На традиционном Южном математическом турнире его учительница сказала: «У меня появился новый Вася». (Предыдущим ее учеником был Василий Астахов, один из наших лучших, талантливых юных математиков, в настоящее время аспирант мехмата и преподаватель Физтеха.)

Следующий шаг — это обязательное поощрение, поддержка тех учителей, которые открывают такого ребенка. Потому что сейчас учителя часто стараются скрывать потенциально талантливых, ярких ребят. Не только в математике, но и в других дисциплинах. Потому что они рассчитывают, что в последующем, когда их ученики добьются успехов на высоком уровне, они смогут отчитаться их успехами. Нужна система, при которой учитель, открывший талантливого ребенка, будет заинтересован в передаче ученика другому педагогу; чтобы лавры доставались не только тому, кто «доводит» до высоких успехов юный талант, но и тому, кто его открывает.

Затем можно попробовать сформировать группу, которая бы занималась с такими ребятами дистанционно. Нужно поддержать такую группу финансово, чтобы у преподавателей не было необходимости большую часть своего времени посвящать проблеме заработка денег «на хлеб насущный».

И еще. Сейчас у нас в стране четко прослеживается, в том числе и в выступлениях президента, концепция создания специализированных учебных заведений типа школ-интернатов. У таких школ есть большой плюс: обучаясь вместе с равными себе по заинтересованности и нацеленности на учебу, та-



лантливые ребята оказываются в конкурентной обстановке, что очень важно. И конечно, в эти школы можно приглашать сильных педагогов. Другое дело, что у всех интернатов есть большой недостаток: ребенок отрывается от семьи, и далеко не всем ребятам удастся успешно перенести это испытание.

Л.Р. И неизбежно расслоение.

Н.А. Расслоение происходит всегда. Сильный (сильнейший) в своей старой школе, в новой он может оказаться в числе аутсайдеров. И это тоже, конечно, оказывает сильное психологическое воздействие на ребят. Проблемы школ-интернатов практически неразрешимы еще вот по какой причине. Далеко не все дети психологически, психофизически готовы к тому, чтобы жить не в семье, а в интернате. Причем изначально даже нельзя определить, кто сумеет, а кто нет. Пока же принцип формирования учащихся интернатов — только по результатам профессиональных способностей и достижений.

Л.Р. Но такие интернаты у нас уже давно есть — это СУНЦы.

Н.А. Да, Московский СУНЦ в последние годы проводит очень агрессивную, в хорошем смысле слова, политику по привлечению детей. И сейчас большую часть сильных ребят из глубинки они выбирают. Сильный СУНЦ в Новосибирском Академгородке. Но он значительно уступает московскому, поскольку даже дети из сибирских регионов предпочитают ехать в Москву.

Л.Р. Но, тем не менее, нельзя сказать, что на Всероссийской олимпиаде эти дети доминируют.

Н.А. К сожалению, происходит следующее явление. Когда ребенок оказывается в среде равных себе и понимает, что он не лидер, то это открытие гасит энтузиазм в достижении определенных целей у многих ребят. Поэтому потенциально сильные олимпиадники, которые оказываются в СУНЦе, часто резко сбавляют.

Есть еще один момент. Когда в глубинке талантливый ребенок занимается каким-то предметом и показывает высокие результаты, то к изучению им других дисциплин относятся доброжелательно, многое ему прощается. А в СУНЦе этого нет — все на равных. И ребята тратят больше сил на другие предметы. И очень многое зависит от программ и методики преподавания: негативным является опыт, когда вместо цельного курса математики ребятам преподносятся разрозненные куски «большой науки».

Л.Р. А математическое сообщество не заинтересовано в составлении и отслеживании программ обучения будущих математиков?

Н.А. Конечно, заинтересовано. Сейчас стали поддерживаться специализированные учебные заведения. У нас в стране давно стихийно возникли профильные школы, скажем, физико-математические

школы. В прежние годы их деятельность постоянно ограничивалась. Например, запрещали набирать в эти учебные заведения детей из других территорий, заставляли в обязательном порядке брать детей из микрорайона школы. То есть под предлогом борьбы с элитарностью, «за равноправие», всячески препятствовали тому, чтобы обучение было качественным для избранной группы детей (одаренных детей). В таких школах от программ, конечно, многое зависит. Возвращаясь к математическим и физико-математическим школам, я могу сказать, что самый неудачный вариант, когда программы этих школ начинают копировать вузовские программы, то есть дети просто изучают высшую математику. Такое механистическое перенесение программ дает негативный результат. С одной стороны, ребята не обладают в должной степени техническим аппаратом для того, чтобы изучать высшую математику. С другой стороны, само по себе изучение технической стороны математики подавляет как раз творческую сторону. А с третьей — пропадает интерес к математике.

Реально сильных школ математических, которые могут дать что-то талантливым детям, немного. И одна из следующих задач — это, конечно, привлечение в сильные школы сильных математиков. Причем необязательно ученых с мировым именем. Это могут быть и студенты, и аспиранты сильных математических и технических вузов, которые сами в прошлом были хорошими олимпийцами, и вузовские преподаватели, которым интересно работать со школьниками и которые готовы к этому в силу своих личных качеств. К сожалению, опыт показывает, что очень небольшой процент вузовских преподавателей может работать в школе, и это потому, что в школе, в отличие от вуза, очень важную роль играет педагогический компонент, человеческое общение и воспитательная сторона обучения.

Упомяну, кстати, и еще об одной проблеме сильных школ. Необходимо снять ограничения по пред-



Вручение наград на международной олимпиаде, 2008 г.

ставительству школ на муниципальных и региональных олимпиадах, поскольку у нас происходит следующая парадоксальная вещь: мы отбираем лучших детей в определенные школы, а потом местные чиновники системы образования косо смотрят на успехи этого учебного заведения и вводят жесткие ограничения на его участие в олимпиадах. У ребят пропадает интерес не только к олимпиадным успехам, но и просто к обучению.

Л.Р. А есть ли какие-то страны, в которых решена эта проблема или есть интересный опыт в работе с одаренными детьми, который можно было бы и нам использовать?

Н.А. Об опыте других стран. В Китае вообще по-другому устроено образование. В первую очередь оно основано на конкурентности, а именно, в каждой провинции есть школа № 1, по сути дела это те же самые школы-интернаты, которые обязательно обеспечены общежитиями, куда набираются лучшие ребята из провинции. В старших классах в Китае обучение платное, причем плата весьма высокая. Но для талантливых детей есть большие льготы по обучению. Но, кроме того, и сама система обучения другая. На уроках учитель практически ничего не объясняет: в классе 45 учеников, и педагог заранее готовит для них большое количество раздаточного материала. Формально у него недельная нагрузка 4 часа, 6 часов — максимум. Но он все рабочее время работает над подготовкой материалов и над обработкой того, что выдают школьники. Кроме того, у учителя есть послеобеденные часы, предназначенные для консультаций, и ученики подходят к нему как раз за индивидуальными консультациями. Так работают на низовом уровне, в том числе и с одаренными детьми. А больших олимпиадных успехов Китай добивается и за счет того, что в Китае большое количество талантливых детей, и за счет того, что государство заинтересовано в больших успехах на международной арене. Из большого количества лучших ребят отбирают тех, кто будет защищать честь страны на международных олимпиадах, и на протяжении нескольких месяцев их готовят к олимпиадам.

Похожее обучение в Южной Корее, которая тоже входит в число стран — лидеров международного олимпиадного движения. Они в свою специализированную школу отбирают порядка 120 лучших детей со всей страны и серьезно готовят их, в том числе и к выступлениям на международных соревнованиях.

Л.Р. То есть своя система отслеживания одаренных, их поиск есть во многих странах. А у нас? Ребенок показался на какой-то олимпиаде, потом пропал, и никто не знает, что с ним?

Н.А. Скажем так, в тех регионах, где чиновники заинтересованы в успешности выступления сво-

их ребят на всероссийской, международной арене, таких детей поддерживают. Но нередко ситуации, когда дети вынуждены за свой счет выезжать на мероприятия федерального уровня, например, на летние сборы по математике.

Л.Р. У нас нет ни федеральных, ни региональных программ?

Н.А. Региональные положения об олимпиадах, региональные программы формируются, конечно же, на основе федерального положения. Но, к сожалению, каждое положение может трактоваться (при желании-нежелании) в ту или иную сторону. И если этим занимаются чиновники, которые не заинтересованы в работе с одаренными детьми, то соответствующие позиции так и трактуются...

Вот простой пример. В одной из областей на региональную олимпиаду пригласили настолько мизерное количество участников, что ребята, которые по всероссийскому рейтингу находятся в первой десятке в своих параллелях, на региональной олимпиаде не вошли даже в число призеров. Почему? По положению призерами могут становиться не более четверти от числа участников, и в области было определено всего два призера. Это абсурдная ситуация. Но формально они сделали всё по правилам.

Л.Р. Существуют ли программы повышения квалификации учителей, которые хотят работать с одаренными детьми?

Н.А. По отзывам, видимо, лучшими из них по содержанию работы с одаренными детьми являются курсы повышения квалификации, которые проводятся в МФТИ для учителей физики и математики. К сожалению, они коммерческие, поскольку для Физтеха эта деятельность дополнительная. А с другой стороны, далеко не во всех регионах готовы засчитывать эти курсы — ведь формально есть региональные курсы повышения квалификации. Из региональных, видимо, лучшими на протяжении многих лет были курсы в Ижевске. В Удмуртии вообще очень сильные традиции, там хорошая математическая школа. Но сейчас как-то все, увы, немножко приходит в упадок. А так, те курсы, которые проводятся по переподготовке и повышению квалификации учителей, в очень слабой степени отвечают запросам такой работы. Но у нас, к сожалению, получается, что региональные курсы засчитываются в качестве повышения квалификации, а уникальные курсы не засчитываются. Другое дело, что сейчас министерство образования несколько изменило свое отношение к этой проблеме, в частности, предусматривается проведение федеральных курсов повышения квалификации в Москве на базе Академии повышения квалификации. Предполагается пригласить минимум по одному представителю от каждого региона России.

Л.Р. Может быть, это можно совмещать с проведением Всероссийской олимпиады? Ведь в регион приезжает такая мощная команда специалистов.

Н.А. Это разные задачи. К сожалению, их трудно совмещать, ведь на Всероссийской олимпиаде у членов жюри просто не остается свободного времени для чтения дополнительных лекций. Такая работа ведется в другое время. В некоторых регионах есть заинтересованность в работе с учителями. И они приглашают преподавателей, в том числе членов жюри Всероссийской олимпиады для работы именно с учителями. Но это скорее не на уровне федеральной программы, а личных контактов. В общем, эту систему нужно развивать, и один вариант — приглашение в регион профессионалов этой деятельности, второй вариант — это проведение курсов на базе Академии повышения квалификации, такие возможности есть.

Но проблема еще вот в чем. У нас, к сожалению, был серьезный провал в 90-е годы, провал по подготовке, по привлечению в школу молодых учителей. Поскольку в педвузы не шли самые лучшие выпускники школ в силу падения престижности учительской профессии. И поэтому сейчас в школах складывается катастрофическая ситуация: уходят, в лучшем случае, на пенсию кадры, которые создавали и поддерживали традиции нашей математической школы, а те, кто приходит в школу, к сожалению, даже потенциально недостаточно сильные педагоги.

Л.Р. Давай нарисую портрет специалиста, который работает с одаренными детьми. Какими качествами он должен обладать? Какими знаниями?

Н.А. Я считаю, что у нас должно быть два варианта работы с одаренными детьми. Первый вариант — это региональные профильные учебные заведения, использующие региональные потенциалы: приглашающие лучших учителей региона и вузовских преподавателей, которые будут работать с разумной нагрузкой. Этот вариант можно реализовать только в тех регионах, где есть база в виде потенциально сильных кадров. Второй — вузовские работники, которые ведут кружки для школ на базе университета или дворца творчества детей. Но в любом случае это должен быть энтузиаст, сильный профессиональный математик, для которого работа с детьми является не основным видом деятельности, а именно интересом, работой для души. Таковые существуют, конечно. У нас всегда находились люди, которые увлеченно занимались какой-то полезной деятельностью.

Л.Р. Я вспомнила чемпионат Европы по легкой атлетике, прошедший летом, и наши успехи в ходьбе — не самом престижном, казалось, ее виде. Все наши победители и призеры — из Саранска, они ученики одного тренера — В.М. Чегина. Он создал в республике целую сеть, его специалисты



Торжественное открытие Всероссийской олимпиады, Майкоп, 2007 г.

ездят по школам региона, работают с тренерами, ищут способных детей. И в республике этот вид спорта — номер один, все хотят заниматься ходьбой. И вот чемпионка Европы Ольга Каниськина, кстати, она заканчивает учёбу на математическом факультете Мордовского государственного университета, называет фамилии всех тренеров, которые передавали ее из рук в руки, воспитывая ее талант, и подвели к победам. Меня поразило не то, что вся система держится на одном человеке, а то, что все тренеры работают на единую цель, единый результат.

Н.А. Согласен. Не секрет, что на химических олимпиадах, если вдруг начинал какой-то регион, город сильно выступать на олимпиадах, всегда оказывалось, что причина — в пришедшем в школу молодом учителе, у которого у самого горели глаза, который мог зажечь своим отношением к предмету ребят. Из Магадана на протяжении нескольких лет ребята выезжали на международные олимпиады. В химии это гораздо проще, конечно. В математике нужны традиции. Чтобы чего-то добиться, должна быть система работы, причем многолетняя. Но чтобы открыть детей талантливых, чтобы зажечь их сердца, все равно обязательно нужен энтузиаст, который этим будет заниматься. Пример Ярославской области очень показателен. Когда там стал работать с детьми, тратя свое время, профессор Владимир Леонидович Дольников, появились результаты. Он хороший большой ученый, которого знают в мире. И, конечно, когда узнают, что такой человек возится с детьми, многие удивляются. Но обязательно нужна поддержка работы таких энтузиастов образовательными структурами, которые бы бережно и трепетно относились к тандему педагог-энтузиаст и ребенок. Тогда приходят успехи.

Л.Р. Получается, что все держится на энтузиазме и личности.

Н.А. В нашей стране — да.

И. ФРОЛОВА,
с. Красная Звезда,
Курганская обл.

ВОСПИТАТЬ ПРИВЫЧКУ МЫСЛИТЬ

Три качества — обширные знания,
привычка мыслить и благородство чувств —
необходимы для того, чтобы человек
был образованным в полном смысле этого слова.

Г. Чернышевский

Математика — один из опорных школьных предметов. Математика обеспечивает изучение других дисциплин: физики, химии, информатики. Развитие логического мышления учащихся при обучении математике способствует усвоению и предметов гуманитарного цикла. Практические умения и навыки математического характера необходимы для трудовой и профессиональной подготовки школьников.

Характер человека, способности, привычки, интерес формируются в процессе его деятельности. Известно, что многие учащиеся, которых считали не способными к математике, попадая в новые условия, когда необходимо самостоятельно действовать, мыслить, искать, под влиянием этих новых условий успешно овладевают математическими законами, правилами, теоремами. Именно такие условия обеспечивают умственное развитие школьника.

Требуя от учащихся умственных и волевых усилий, концентрации внимания, активности воображения, математика развивает нравственные черты личности: настойчивость, целеустремленность, творческую активность, самостоятельность, ответственность, трудолюбие, дисциплину и критичность мышления.

Основной задачей обучения математике в общеобразовательной школе является обеспечение прочного и сознательного овладения учащимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену современного общества, достаточных для изучения смежных дисциплин и продолжения образования.

Наряду с этой задачей перед учителем стоит проблема: научить школьников рассуждать, научить мыслить. Ни один школьный предмет не может конкурировать с возможностями математики в воспитании мыслящей личности.

Достижение необходимого развивающего эффекта обучения математике возможно на базе реализации деятельностного подхода.

Исследования психологов и педагогов показывают: чтобы научить школьников самостоятельно и творчески учиться, нужно включить их в специально организованную деятельность, сделать «хозяевами» этой деятельности. Для этого нужно выработать у школьников мотивы и цели учебной деятельности («зачем учиться математике»), обучить способам ее осуществления («как учиться»). Необходимо освободить ребенка от боязни



К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 4.



наказания за неделанное, за невыученное (не секрет, что именно эта причина является основной «движущей силой» сегодняшнего обучения). Однако психологи единодушны в том, что неизмеримо больший стимул учения — положительное подкрепление, поощрение правильных действий ученика. Получать удовольствие от занятий математикой школьник может лишь при условии, если она, математика, ему доступна. И только дифференцированный подход в обучении школьников является самым оптимальным и разумным. В противном случае один ученик будет учиться налегке, не напрягаясь, другой — пытаться осилить непосильное. Первый из них не найдет применения имеющимся способностям и не разовьет потенциальные, второй будет чувствовать постоянное унижение, ощущать собственную неполноценность, что приведет к отворачиванию от математики.

Мы должны дать детям новые стимулы учения — те, что лежат в самом учении. Если внешних побуждений к учению почти нет, если способов к принуждению совсем нет, если нельзя рассчитывать на всеобщий интерес к предмету, то перед нами лишь один путь: мы должны вовлекать детей в общий труд учения, вызывая у них радостные чувства успеха, движения вперед и развития.

Почти в каждом классе есть от природы одаренные дети. Но если постоянно не заботиться об их развитии, не поставлять им достаточную пищу для ума, то они могут не состояться как творческие личности. Одной из перспективных форм развития творческих способностей личности является создание в общеобразовательных школах научных обществ учащихся. Увлечение наукой в школьные годы развивает потребность в творческой деятельности, воспитывает трудолюбие и ответственность за порученное дело.

Основная задача, которая ставится перед учениками, — научиться мыслить и овладевать фундаментальными знаниями. Это не набор правил и умений по решению стандартных задач, а глубокое понимание сути изучаемого материала. В процессе исследовательской работы школьники сами ищут способы решения поставленной задачи, реализуют их, учатся обобщать полученные результаты, применять их для решения новых проблем.

Одной из форм активной познавательной деятельности учащихся является подготовка и проведение теоретических и практических семинаров по данной теме. Представленный ниже вариант семинара был проведен автором в 11-м классе, его тема — «Задачи, решаемые с помощью интегралов».

Подготовка к семинару

1. Изучение темы начинаем с повторения и обобщения свойств всех ранее изученных функций и их графиков. При этом необходимо обратить внимание на аналитическое решение заданий такого типа:

— Установите, пересекаются ли графики функций.

— Найдите точки пересечения графиков двух функций.

— Найдите промежутки, на которых график первой функции лежит выше (ниже) графика второй функции.

При выполнении этих упражнений можно ограничиться планом действий перехода от графического языка к алгебраическому. Домашнее задание полезно провести в виде практической работы по построению графиков и нахождению части координатной плоскости, заключенной между двумя графиками. В дальнейшем работа с этим домашним заданием, выполненным на отдельном листочке, будет продолжена на семинарском занятии.

Анализ соответствующих разделов учебников по алгебре и геометрии показал аналогию в выводе формул для вычислений с помощью интеграла площади криволинейной трапеции и объема тела. Значит, при изложении темы «Интеграл» имеет смысл укрупнить учебную информацию и провести урок-дуэт «алгебра + геометрия» в форме лекции. После этого можно предложить учащимся задания как по алгебре, так и по геометрии.

Далее идет серия уроков алгебры и геометрии по изучению способов вычисления интегралов, вычисления площадей криволинейных трапеций и нахождения объемов тел.

2. Подготовка к семинару идет параллельно изучению теоретического материала. Четыре-пять наиболее подготовленных учащихся получают индивидуальное домашнее задание: изучить соответствующие разделы учебника, найти и использовать дополнительную литературу, подготовить решения 2–3 задач по заданной теме.

Творческие задания по этой теме могут быть такими:

— Выведите формулу для вычисления площади фигуры, составленной из неперекрывающихся криволинейных трапеций.

— Выведите формулу для вычисления площади фигуры, ограниченной криволинейными трапециями, которые образованы графиками функций, принимающими только положительные значения.

— Выведите формулу для вычисления площади криволинейной трапеции, расположенной в нижней полуплоскости.

— Подготовьте сообщение о применении интеграла к вычислению объемов частей шара.

— Подберите задачи из практики, решаемые с помощью интегралов.

— Покажите применение интегралов в курсе физики.

На семинаре остальные ребята не должны быть пассивны. Им предлагаются карточки-задания с вопросами по теме каждого сообщения. Зная об этом заранее, они будут внимательно слушать докладчиков и искать ответ на свой вопрос. В конце семинара, перед подведением итогов, необходимо обязательно выслушать все ответы на поставленные в карточках вопросы.

Примерные вопросы для учащихся — слушателей семинара могут быть следующими:

— Кто ввел знаки производной и интеграла?

— Какие задачи решают с помощью интеграла?

— Найдите на доске фигуру, для вычисления площади которой надо сложить значения соответствующих интегралов.

— Расскажите о способе отыскания площади фигуры, составленной из двух не перекрывающих друг друга криволинейных трапеций.

— Как вычислить площадь фигуры, если она ограничена графиком функции $p(x)$, где $p(x) \leq 0$?

— Какое свойство площадей используется при вычислении площадей фигур, имеющих сложную конфигурацию?

— Как называют формулу для нахождения площади криволинейной трапеции?

За неделю до семинара необходимо провести индивидуальные консультации, посмотреть выполнение заданий, оформление докладов, проверить решения задач, дать настрой на то, как дер-

жаться и вести себя в роли докладчика, что нужно быть готовым ответить на вопросы по своему сообщению.

Перед семинаром учителю необходимо продумать оформление класса и доски: написать темы сообщений и фамилии докладчиков, решить, где вывесить плакаты и таблицы, куда поставить трибуну для выступающих, какое место на доске оставить для записей и т.д.

План проведения семинара

1. Вступительное слово учителя о теме и цели семинарского занятия.

2. Выступления учащихся.

3. Итог каждому выступлению подводит учитель, но только после того, как выступающий коротко и четко запишет на доске алгоритм решения соответствующей задачи.

4. После каждого выступления и подведения по нему итогов учитель задает вопрос учащимся-слушателям: «На чьих карточках вопросы соответствуют докладу?». Учащиеся поочередно встают, зачитывают вопросы и отвечают на них.

5. В качестве нестандартной задачи из практики, решаемой с помощью интегралов, можно предложить решить задачу «О каше».

6. В заключение учитель еще раз перечисляет те задачи, при решении которых применяются интегралы, подводит итоги, оценивает работу всех учащихся.

После урока-семинара, как правило, проводится разноуровневая контрольная работа, в эту работу полезно включить и задание по геометрии на вычисление объема тела вращения.

Задача «О каше»

Оля насыпала в цилиндрическую кастрюлю немного пшена и спросила маму: «Сколько надо добавить воды, чтобы получилась вкусная каша?» — «Это очень просто, — ответила мама, — наклоняй кастрюлю так, чтобы крупа закрыла ровно половину дна. Теперь сделай метку на стенке кастрю-



ли на уровне, до которого поднялась крупа, и до нее налей воды!» — «Так ведь пшена можно насыпать побольше или поменьше, да и кастрюли бывают разные — широкие, узкие», — усомнилась дочь. «Все равно мой способ годится в любом случае, запомни это и применяй!» — гордо ответила мама.

Докажите, что мама права: отношение объемов воды и крупы по ее рецепту для любой цилиндрической кастрюли получается одинаковым. Найдите, чему равно это отношение.

[1,5π – 1]

Н. МОЙСЕЙЧЕНКО,
с. Павлофедоровка,
Приморский край



Сам придумал – сам смастерил.
Автор: Т.В. Качурина, учитель математики
основной школы № 5 г. Лесосибирска,
Красноярский край

15

Я ДЕЛАЮ— Я УСВАИВАЮ

Когда людей станут учить не тому,
что они должны думать, а тому,
как они должны думать, то тогда
исчезнут всякие недоразумения.
Г. Лихтенберг

Уравнение — это золотой ключ,
открывающий все математические сезамы.
С. Коваль

Каждый раз, планируя очередной урок, учитель задает себе одни и те же вопросы:

1. Каковы цели урока и как обеспечить их достижение?
2. Какой учебный материал отобрать и какой дидактической обработки он требует?
3. Какие методы и средства обучения выбрать?
4. Как организовать собственную деятельность и деятельность учеников?
5. Как добиться того, чтобы взаимодействие этих компонентов привело к определенной системе знаний и ценностных ориентаций?

Основной задачей учителя является такая организация учебной деятельности, чтобы у учащихся сформировались потребности в осуществлении творческого преобразования учебного материала с целью овладения новыми знаниями.

Чтобы знания учащихся стали результатом их собственных поисков, необходимо организовать эти поиски, управлять учащимися, развивать их познавательную деятельность.

При деятельностном подходе в обучении выделяются следующие компоненты овладения знаниями:

- а) восприятие информации;
- б) анализ полученной информации (выявление характерных признаков, сравнение, осознание, трансформация знаний, преобразование информации);
- в) запоминание (создание образца);
- г) самооценка.

Расскажу о деятельностном подходе в обучении математике на примере конкретных уроков.

7 класс

Тема: «Формулы сокращенного умножения»

Цели урока:

- доказать справедливость тождества $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$;
- развивать логику, способность проводить анализ;
- содействовать воспитанию уважительного отношения к себе и товарищам.



К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 4.

Актуализация прежних знаний

Устный счет.

1. Найдите квадрат одночлена:
 2^2 ; 4^2 ; $(3x)^2$; $(cx)^2$.
2. Представьте одночлен в виде квадрата другого одночлена:
 25 ; $81c^2$; $4c^2$; $49y^2$; c^2y^2 .
3. Прочитайте выражение:
 $x^2 + y^2$; $(a - b)(a + b)$;
 $(a + b)(a - b)$; $a^2 - b^2$.
4. Как умножить многочлен на многочлен? Покажите это на схеме:
 $(\Delta - \square) \cdot (\Delta + \square)$.

Постановка задачи

Найти более простой способ получения результата умножения суммы двух чисел на их разность.

Ученик ставится в положение исследователя: он должен провести исследование, чтобы открыть принцип и овладеть им. Все правила и законы выстраиваются учеником самостоятельно.

Задание. Упростите выражение и проанализируйте результат.

Вариант 1

1. $(x - y)(x + y)$.
2. $(a - b)(a + b)$.
3. $(x - 2)(x + 2)$.

Вариант 2

1. $(c + d)(c - d)$.
2. $(m + n)(m - n)$.
3. $(x - 3)(x + 3)$.

Работа проводится в парах. Ребята раскрывают скобки знакомым им способом умножения многочлена на многочлен. Результат записывают на доске.

Анализ полученного результата и создание образа

$$(\Delta - \square) \cdot (\Delta + \square) = \Delta^2 - \square^2.$$

Озвучивание полученного результата

Произведение разности двух чисел на их сумму равно разности квадратов двух чисел.

Каждый ученик действует в рамках коллективного обсуждения проблемы. Проблемные вопросы вызывают у него определенные творческие усилия, заставляют излагать собственное мнение, формулировать выводы, строить гипотезы и проверять их в диалоге с оппонентами. Такая «коллективно-распределительная мыследеятельность» дает двойной результат: помогает решить учебную задачу и развивает умения учащихся формулировать вопросы и от-

веты, искать аргументацию и источники решений, а также способствует деловому общению.

Работа с учебником

Ребята сравнивают свой результат с текстом учебника. Идет парный пересказ текста учебника и полученного правила.

Первичное закрепление (устно)

1. Упростите выражение:
а) $(x + 1)(x - 1)$; б) $(3 - y)(3 + y)$;
в) $(7 - 3y)(7 + 3y)$.
2. Разложите на множители:
а) $m^2 - n^2$; б) $9 - x^2$;
в) $9x^2 - 4y^2$.
3. Вычислите:
а) $16^2 - 15^2$; б) $19^2 - 18^2$.

Самооценка

В данный момент самооценка отражает персональное развитие ученика, уровень его учебной деятельности.

Каждый ученик получает три карточки (синюю, красную, зеленую) с заданиями.

Синяя карточка

Упростите выражение:

- а) $(c - a)(c + a)$; б) $(p - 7)(p + 7)$;
в) $(4 + 5y)(4 - 5y)$; г) $(2x + 3y)(2x - 3y)$.

Красная карточка

Разложите на множители:

- а) $a^2 - n^2$; б) $4x^2 - 9y^2$;
в) $9 - z^2$; г) $16x^2 - 25$.

Зеленая карточка

Вычислите:

- а) $23^2 - 13^2$; б) $\frac{17^2 - 16^2}{66}$;
в) $\frac{15^2 - 12^2}{17^2 - 10^2}$.

Выполнив задания одной карточки, ученик подходит к столу, на котором находятся ответы на каждую карточку, и проверяет результат. Если все решено верно, то в тетради он это отмечает и начинает решать задачи с другой карточки.

Если результат неверен, то ученик подходит к другому столу, на котором находятся подробно записанные решения заданий каждой карточки. После этого он должен вернуться и постараться решить задание заново.

Итог урока

Задание на дом: § 21, с. 88, № 532.

Тема: «Неполные квадратные уравнения»**Цели урока:**

- систематизировать и обобщить знания учащихся по теме «Квадратные уравнения»;
- развивать логическое мышление;
- повышать интерес к предмету.

Актуализация прежних знаний

Ответьте на вопросы:

1. Какое уравнение называется квадратным?
2. Что записывается с помощью букв «а», «b» и «с»?
3. Запишите неполные квадратные уравнения разных видов.
4. Запишите алгоритм решения полного квадратного уравнения.

Алгоритм решения полного квадратного уравнения

$$D = b^2 - 4ac$$

$D < 0$ — корней нет

$D = 0$ — один корень: $x = -\frac{b}{2a}$

$D > 0$ — два корня: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Постановка учебной задачи

Используя формулу корней полного квадратного уравнения, вывести формулы для решения неполных квадратных уравнений.

Решение учебной задачи в группах

1-й случай. $b = 0, ax^2 + c = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4ac}}{2a} = \pm \sqrt{\frac{-4ac}{4a^2}} = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

Вывод: если $b = 0$, то $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$.

2-й случай. $c = 0, ax^2 + bx = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2a} = \frac{-b \pm b}{2a}.$$

$$\text{Тогда } x_1 = \frac{-b+b}{2a} = 0, \quad x_2 = \frac{-b-b}{2a} = \frac{-b}{a}.$$

Вывод: если $c = 0$, то $x_1 = 0, x_2 = \frac{-b}{a}$.

3-й случай. $b = 0$ и $c = 0, ax^2 = 0$.

Вывод: так как $a \neq 0$, то $x = 0$.

Обсуждение результата

Результат заносится в таблицу.

$b = 0,$ $ax^2 + c = 0$ $a \neq 0, c \neq 0$	$c = 0,$ $ax^2 + bx = 0$ $a \neq 0, b \neq 0$	$b = 0, c = 0,$ $ax^2 = 0$ $a \neq 0$
$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$ при $\frac{c}{a} < 0$; при $\frac{c}{a} > 0$ решений нет	$x_1 = 0, x_2 = \frac{-b}{a}$	$x = 0$

Самостоятельная работа**Вариант 1**

1. $4x^2 + 9x = 0$.
2. $4x^2 - 9 = 0$.
3. $4x^2 - 3x + 7 = 2x^2 - 3x + 7$.
4. $6x^2 + 7 = 6x^2 + 7$.

Вариант 2

1. $4a^2 - 3a = 0$.
2. $2x^2 - 8 = 0$.
3. $-5y^2 + 8y = 3y^2 + 8y$.
4. $x^2 + 5 = x^2 + 5$.

Итог урока

Ученики в результате работы сами вывели формулы для решения неполных квадратных уравнений. Учащиеся получили не только необходимые знания, но и большое удовлетворение от проделанной работы.

Новогодние фантазии
5 «Б» на тему
параллелепипеда

Автор: Т.В. Качурина,
учитель математики
основной школы
№ 5 г. Лесосибирска,
Красноярский край



ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Цели урока:

- сформировать понятия: прямоугольный треугольник, его катет и гипотенуза;
- ввести признаки равенства прямоугольных треугольников на основе признаков равенства треугольников;
- научить выявлять и применять эти признаки для определения равных треугольников по чертежу.

Ход урока

Мотивация учебной деятельности

На уроке вам понадобятся знания признаков равенства треугольников, умение отличать прямоугольный треугольник от произвольного, умение сравнивать чертежи и находить на них одинаковые элементы. Каждое задание, которое вы выполняете самостоятельно, будет оценено вами же. В конце урока мы подведем итоги по рабочей карточке.

Рабочая карточка

(число)	(фамилия и имя)			(класс)
	Названия сторон	Признаки равенства	Самостоятельная работа	Итого
Количество плюсов				
Отметка				

Задание 1. (Сумма углов треугольника.) Определите величины углов 1–4 на рисунке 1.

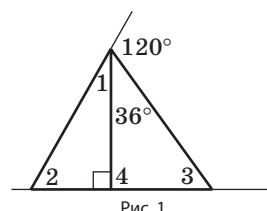


Рис. 1

Какой треугольник помог вычислить углы?

Подготовка к изучению нового материала через повторение и актуализацию опорных знаний

Задание 2. Определите градусные меры острых углов α и β прямоугольного треугольника, если:

- а) $\alpha = 20^\circ$, б) $\beta = 45^\circ$, в) $\alpha = 30^\circ$.



К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 4.

Задание 3. Докажите, что треугольники на рисунке 2 равны.

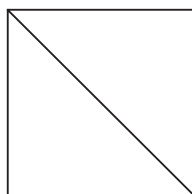


Рис. 2

Задание 4. Мы знаем, что у прямоугольных треугольников стороны имеют свои названия. Начертите произвольный прямоугольный треугольник в тетради и подпишите названия его сторон (рис. 3).

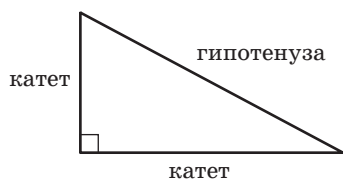


Рис. 3

Запишите определение сторон прямоугольного треугольника:

гипотенуза — сторона, _____ против _____ угла, в переводе с греческого — «стягивающая»;

катеты — стороны, _____ угол.

Задание 5. Начертите произвольный треугольник и проведите в нем высоту (рис. 4). Заполните таблицу:

Треугольник	Гипотенуза	Катеты
ADB		
BDC		

$\triangle ABC$, BD — высота

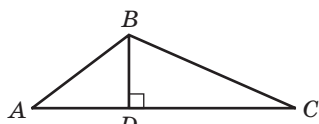


Рис. 4

Ученики сами заполняют таблицу и проверяют заполнение под диктовку учителя, выставляя плюсы рядом с правильно записанными названиями сторон (максимум 6 плюсов).

Задание 6. (Проверка умения определять названия сторон прямоугольного треугольника.) На доске и в тетрадях учащихся начерчены пять прямоугольных треугольников (рис. 5). К доске выходят по одному ученику от каждого ряда, остальные выполняют задание в тетра-

дах. Задание выполняется под диктовку учителя.

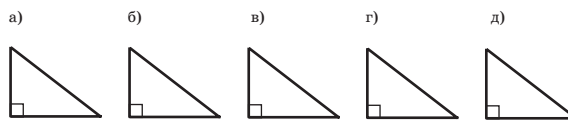


Рис. 5

На чертеже а) обозначьте гипотенузу буквами A и C .

На чертеже б) обозначьте катет буквами M и K .

На чертеже в) отметьте, что гипотенуза равна 10 см.

На чертеже г) отметьте катет BK и гипотенузу BC .

На чертеже д) обозначьте малыми буквами гипотенузу a и катеты b и c .

Проверка проводится сразу по записям на доске, а ученики выполняют самопроверку в тетрадях, выставляя за каждое правильно написанное обозначение один плюс (максимум 8 плюсов).

Число плюсов за задания 5 и 6 заносятся в рабочую карточку в колонку «названия сторон», и выставляются отметки по количеству плюсов: 13–14 плюсов — «5», 10–12 — «4» и 7–9 — «3».

Ознакомление с новым материалом

Задание 7. а) Сформулируйте признаки равенства треугольников (рис. 6).

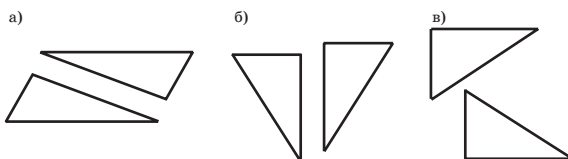


Рис. 6

б) Сформулируйте признаки равенства прямоугольных треугольников, используя названия их сторон (рис. 7).

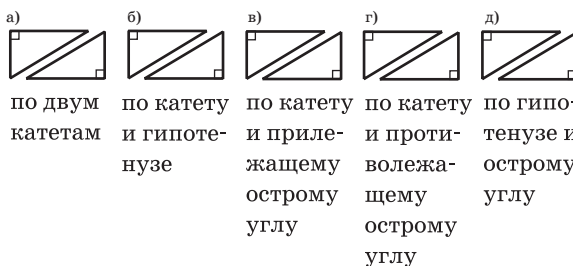


Рис. 7

Первичное закрепление связей и отношений

Задание 8. (Фронтально.) Выберите на рисунке 8 пары равных треугольников и укажите признак, на основании которого можно утверждать, что треугольники равны.

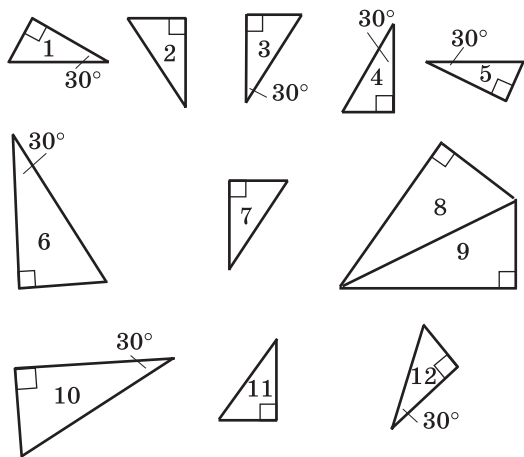


Рис. 8

Ответ: равные треугольники 8 и 9; 3 и 4; 1 и 5; 6 и 10; 2 и 7.

Задание 9. (Работа в парах.) На каждую парту выдаются пять карточек с треугольниками. Нужно записать пары равных треугольников и указать, какой признак равенства был применен.

Проверка проводится фронтально: выслушиваются версии учащихся, затем сообщается правильный ответ. Ученики на полях тетрадей ставят плюсы, за правильно определенные пары равных треугольников и верно указанный признак равенства (после чего заполняют в рабочей карточке колонку «Признаки равенства») по следующим критериям: 4 плюса — «5», 3 — «4» и 2 — «3».

Ответ: $\triangle ABC = \triangle CDF$ — по двум катетам; $\triangle MKO = \triangle PRT$ — по гипотенузе и острому углу; $\triangle SYX$ — остался без пары.

Примеры карточек показаны на рисунке 9. Наборы карточек отличаются друг от друга либо цветом бумаги, на которой выполнены чертежи, либо цветом линий на чертежах, либо только номером, который обозначает номер парты, можно менять и числовые данные.

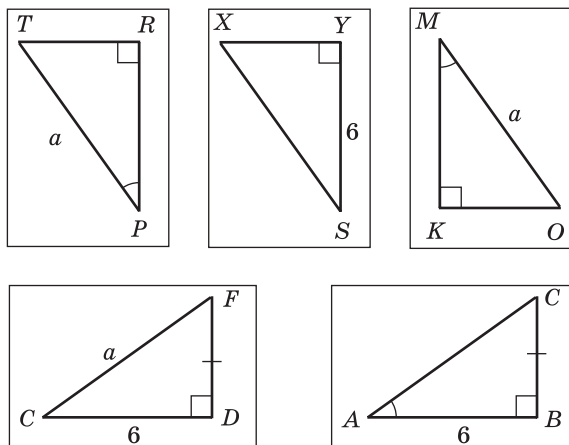
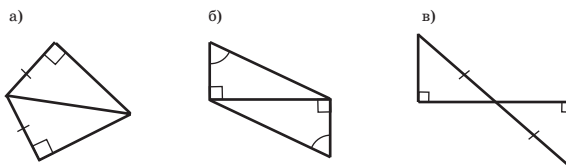


Рис. 9

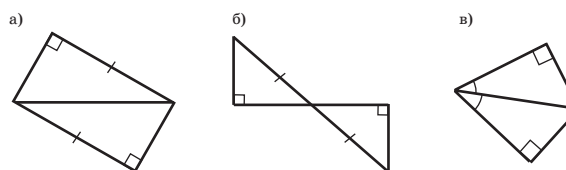
Самостоятельная работа

Определите признак равенства треугольников.

Вариант 1



Вариант 2



Ответ для обоих вариантов: а) по гипотенузе и катету, б) по катету и противолежащему острому углу, в) по гипотенузе и острому углу.

Проверить самостоятельную работу можно в парах. Отметки выставляются по количеству плюсов: 3 плюса — «5», 2 — «4», 1 — «3».

Подведение итогов урока

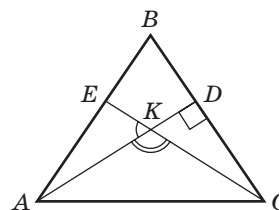
Вопросы классу:

1. Отличаются ли признаки равенства треугольников произвольных и прямоугольных?
2. Сколько признаков равенства у каждого вида треугольников? Назовите их.

Заполняется рабочая карточка и выводится средняя отметка за урок.

Домашнее задание: знать определение прямоугольного треугольника и его элементов, формулировки признаков равенства прямоугольных треугольников. Прочитать по учебнику и рассмотреть доказательства признаков.

Задача. Дано: $\triangle ABC$ — равнобедренный, высоты AD и CE пересекаются в точке K . Найдите углы треугольников AKC , AKE , CDK .



З. ХАМИДУЛЛИНА,
г. Надым

ВРЕМЯ, ЗАТРАЧЕННОЕ НА ВЫПОЛНЕНИЕ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

Эта работа не требует специального внеурочного времени; ее удобно использовать один-два раза в году: в 5–6-х классах при изучении тем «Столбчатые и круговые диаграммы», «Среднее арифметическое», «Проценты»; в 7–8-х классах — «Задачи на проценты». Результаты данной работы можно использовать как для бесед на классных часах, так и на родительских собраниях. Они заставляют задуматься не только учеников и их родителей о рационализации труда, но также и педагогов: объем домашнего задания, соответствует ли он санитарно-гигиеническим требованиям, отношение учащихся к предмету, комфортно ли им на конкретных уроках.

Ход работы

1-й этап. Учащиеся получают задание на неделю : отметить в дневниках, сколько времени уходит на подготовку домашней работы по каждому предмету.

2-й этап. В конце недели проводится практическая работа, цель которой правильно произвести расчет времени, уходящего на подготовку домашнего задания по каждому предмету в течение недели, и определить средние значения. Данные заносятся в таблицу, и на их основе в тетрадях строятся черно-белые диаграммы (столбчатая и круговая). Обсуждаем с учащимися: рационально ли они распределяют время выполнения домашних заданий.

3-й этап. Заполняется оценочный лист, который в конце занятия сдается учителю.

4-й этап. Ученики получают домашнее задание: построить диаграммы в цвете и написать мини-сочинение или стихотворение.

5-й этап. На интегрированном уроке математики и информатики создаются индивидуальные столбчатые и круговые диаграммы. Лучшие экспромты зачитываются и сохраняются в портфолио.

Экспромты учеников 6 класса

С биологией — ого!
Пришлось потрудиться.
Надо знать этот предмет —
В жизни пригодится.

English время все мое
Свободное занимает.
Кто родился в Англии,
Тот все понимает.

Оценочный лист

Тема: «Распределение времени на выполнение домашнего задания»

Ученика (цы) 6 _____ класса _____

Дата выполнения: _____

	Задания				
	Предварительная работа с дневником	Выполнение практических заданий	Построение диаграмм	Творческое задание	Итоговая оценка
Самооценка					
Оценка экспертов					
Оценка учителя					
Итоговая оценка					

Эксперт: _____

Подпись учителя _____

Диаграмма «Распределение времени на выполнение домашнего задания»

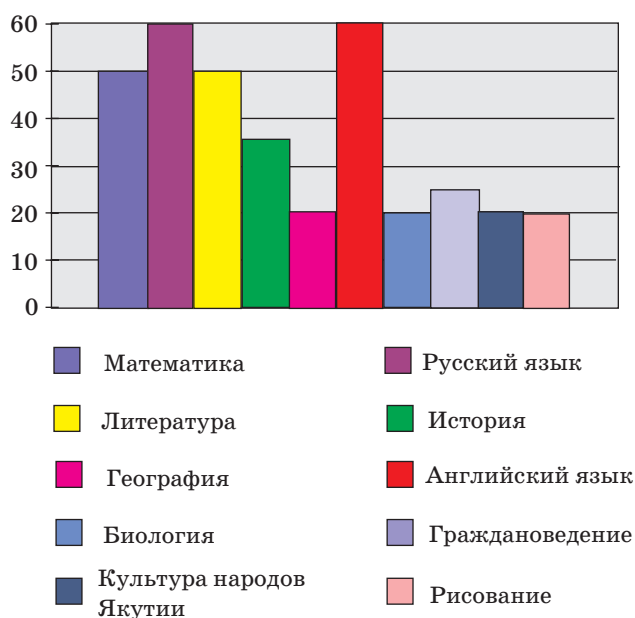
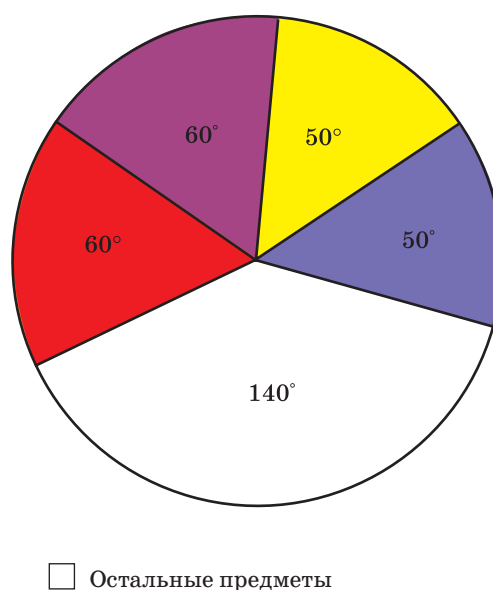


Диаграмма «Приоритетность предметов»



Экспромты учеников 6 класса

Историю средних веков я люблю,
Про историю ночью я песни пою.
А встану поутру — не помню совсем,
Кто напал? На кого? И закончилось чем?

Математика моя
Для меня не мука.
Три задачи и пример —
Прекрасная наука.

Пушкин, Лермонтов, Толстой,
Жанр — стихотворенье.
Литература, будь простой,
Как пирожок с вареньем.

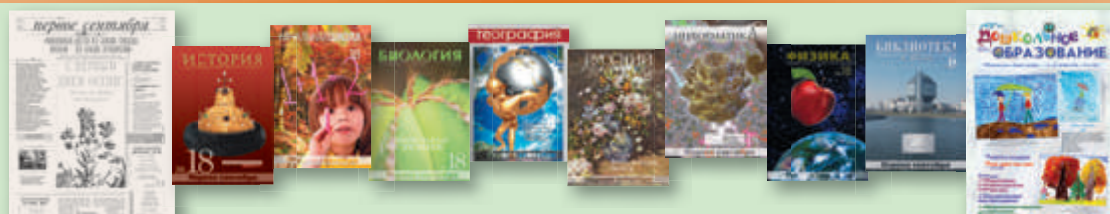
Много времени он занимает.
И читать, и писать я привык.
Все же лучше его не бывает —
Замечательный русский язык!



Издательский дом

ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ

представляет



Льготная редакционная подписка на II полугодие 2011 года



Подпишитесь на нашем сайте
www.1september.ru

и вы получите скидку на подписку!

БУМАЖНАЯ ВЕРСИЯ



~~1200
рублей~~

1080
рублей

- льготная цена
на полгода

960
рублей

- льготная цена на полгода
для тех, кто подписывался
через сайт на первое
полугодие 2011 года

ЭЛЕКТРОННАЯ ВЕРСИЯ



~~780
рублей~~

699
рублей

- льготная цена
на полгода

599
рублей

- льготная цена на полгода
для тех, кто подписывался
через сайт на первое
полугодие 2011 года

Справки по телефону: 8-499-249-31-38, e-mail: podpiska@1september.ru

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

ЗАДАЧА В12 — ЗАДАЧИ НА РАБОТУ И НА ПРОЦЕНТЫ

С. ДВОРЯНИНОВ

Напоминаем!
Задача В12 части 1 оценивается 1 первичным баллом (из 30 возможных).

Часть В Единого государственного экзамена содержит текстовые задачи, в частности, задачи на работу и задачи на проценты.

Один процент (1%) от числа M — это одна сотая часть числа M , то есть

$$\frac{M}{100} = 0,01 \cdot M. \text{ Процент всегда берется от какого-либо числа.}$$

В задачах на работу используется формула $A = pt$; A — величина выполненной работы, p — производительность труда, t — время работы. Предполагается,

что производительность труда постоянна. Из этой формулы следуют формулы $t = \frac{A}{p}$, $p = \frac{A}{t}$.

Если в задаче говорится про работу, то ее можно моделировать прокладыванием траншеи, и тогда работа будет измеряться в м, производительность труда (скорость выполнения работы) — в м/ч или м/день. Тем самым задача на работу превращается в задачу на движение экскаватора вдоль траншеи! Если речь идет о нескольких рабочих, то формулы следует записать для каждого из них.

1. Проценты

Пример 1. Имелось 8 кг 4%-го раствора соли. Часть воды испарилась, и масса раствора уменьшилась на 24%. Сколько процентов воды испарилось?

Решение. Заполняем таблицу по условию задачи:

Состояние	Масса раствора, кг	Масса соли, кг	Масса воды, кг
Было	8	$8 \cdot 0,04 = 0,32$	$8 - 0,32 = 7,68$
Стало	$8 \cdot 0,76 = 6,08$	0,32 (не изменилась!)	$6,08 - 0,32 = 5,76$

Масса воды уменьшилась на $7,68 - 5,76 = 1,92$ кг. От начальной массы воды это составляет $1,92 : \frac{7,68}{100} = 25\%$.

Здесь мы обошлись без уравнений.

Комментарий. Ответ по вариантам от 1 до 100.

увеличилась на 5 %. Сколько процентов воды испарилось?

Решение. Заполняем таблицу:

Состояние	Масса раствора, кг	Масса соли, кг	Масса воды, кг
Было	8	$8 \cdot 0,20 = 1,6$	$8 - 1,6 = 6,4$
Стало		1,6	

Концентрация нового раствора равна 25%.

Пусть масса нового раствора равна x кг. Используя определение концентрации, составим уравнение $\frac{1,6}{x} = \frac{25}{100}$. Следовательно,

$x = 6,4$ кг — масса нового раствора. В этом растворе масса воды равна $6,4 - 1,6 = 4,8$ кг.

Следовательно, масса испарившейся воды равна $6,4 - 4,8 = 1,6$ кг. От начального количества

жины на 4% и увеличить добычу из третьей на 8%. На сколько процентов следует изменить — уменьшить или увеличить — добычу нефти из второй скважины, чтобы суммарная годовая добыча нефти не изменилась?

Решение. Пусть количество добываемой нефти из каждой скважины равно $7a$, $6a$ и $5a$ соответственно. Совершенно неважно, что здесь обозначает a — тонны, баррели, бочки или железнодорожные цистерны. Пусть x — количество нефти, которое надо будет добывать из третьей скважины. Составляем уравнение, учитывая, что количество добываемой нефти не должно измениться:

$$7a + 6a + 5a = 7a \cdot (1 - 0,04) + x + 5a \cdot (1 + 0,08).$$

Отсюда находим, что $x = 5,88a$. Это меньше, чем $6a$, значит, добычу из второй скважины

надо уменьшить. На $6a - 5,88a = 0,12a$. Один процент от $6a$ равен $\frac{6a}{100}$. Следовательно, уменьшение добычи из второй скважины в процентах равно $0,12a : \frac{6a}{100} = 2$. Число 2 и следует внести в бланк ответа.

Ответ: уменьшить на 2%.

чества воды это составляет $1,6 : \frac{6,4}{100} = 25\%$.

Ответ: 25%.

Пример 3. Размеры ежегодной добычи нефти первой, второй и третьей скважинами относятся как $7 : 6 : 5$. Планируется уменьшить годовую добычу нефти из первой сква-

исходного раствора! Для упрощения расчетов можно считать, что масса исходного раствора равна 100 г.

Ответ: 25%.

Пример 2. Имелось 8 кг 20%-го раствора соли. Часть воды испарилась, и концентрация

2. Совместная работа

Пример 1. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 18 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня?

Решение. Составим таблицу:

Рабочий	Работа	Производительность труда	Время
Первый	A	v_1	$t_1 = \frac{A}{v_1}$
Второй	A	v_2	$t_2 = \frac{A}{v_2}$

Переведем на язык уравнений первое условие задачи: $(v_1 + v_2) \cdot 18 = A$. Сравнение производительностей дает еще одно уравнение: $v_1 \cdot 2 = v_2 \cdot 3$. Получилась система двух уравнений с тремя неизвестными. Не бойтесь, что число уравнений меньше числа неизвестных, ведь нас интересует отношение $t = \frac{A}{v_1}$. Выразим из второго уравнения производительность труда второго рабочего, $v_2 = \frac{2v_1}{3}$, и подставим в пер-

одной и той же работы. Итоговое уравнение — это сравнение времени работы двух бригад.

Уравнение может быть другим, если взять в качестве неизвестного не скорость, а время работы, например, первой бригады.

Бригада	Работа, га	Время, ч	Производительность труда, га/ч
Первая	80	t	$\frac{80}{t}$
Вторая	80	$t + 2$	$\frac{80}{t + 2}$

Сравнивая производительности труда, приходим к уравнению относительно времени t :

$$\frac{80}{t} - 2 = \frac{80}{t + 2}.$$

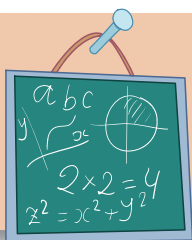
Отсюда $t_2 + 2t - 80 = 0$. Условие задачи удовлетворяет только положительный корень уравнения: $t = 8$. Значит, первая бригада вспахивает в час $p = \frac{80}{8} = 10$ га.

Пример 2. Две тракторные бригады должны вспахать два участка — по 80 га каждая. Начиная работу одновременно, первая вспахивает за час на 2 га больше, чем вторая, и заканчивает свою работу на 2 часа раньше второй. Сколько гектаров в час вспахивает бригада, выполнявшая работу первой?

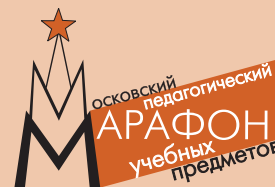
Пусть p га/ч — производительность труда первой бригады. Тогда производительность труда второй равна $(p - 2)$ га/ч. Время работы первой бригады равно $\frac{80}{p}$ ч, второй — $\frac{80}{p - 2}$ ч. По условию, первая величина меньше второй на 2 ч. Получаем уравнение: $\frac{80}{p} + 2 = \frac{80}{p - 2}$, откуда $p = 10$.

Ответ: 10 га.

Комментарий. Решая задачу, полезно выяснить, сколько раз в условии задачи сравниваются однородные величины. В нашей задаче два сравнения: производительности труда двух бригад и время выполнения ими



ПРОГРАММА ДНЯ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ



3 апреля		2011 года		В московском государственном лицее № 1535 по адресу: ул. Усачева, дом 52 (в 3 минутах ходьбы от станции метро «Спортивная»).		
9.00		НАЧАЛО РАБОТЫ				
9.30➤10.15		ОТКРЫТИЕ ДНЯ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ				
10.30 ▼ 11.45 регистрация 10.20–10.35		Круглый стол ГИА по математике за курс основной и за курс средней (полной) школы в 2012 году А.Л. Семенов, председатель НМС ФИПИ по математике, ректор МИОО, чл.-корр. РАН, акад. РАО; Л.В. Кузнецова, к.п.н., в.н.с. ИСМО РАО; И.В. Яценко, к.ф.-м.н., руководитель ФКР КИМ по математике, проректор МИОО	Творческая мастерская Калейдоскоп педагогических идей. Презентация опыта работы учителей математики Москвы А.В. Семенов, к.п.н., зав. лабораторией МИОО	НОУ «Ломоносовская школа» Лекция Преподавание математики в профильной школе. Из опыта работы НОУ «Ломоносовская школа» Н.Н. Хлевнюк, М.Е. Шишкина, М.В. Иванова	Издательство «Экзамен» Лекция ЕГЭ-2011. Решение задач типа С И.Н. Сергеев, д.ф.-м.н., профессор МГУ	РАСПИСАНИЕ УТОЧНЯЕТСЯ
11.45➤12.15		ПЕРЕРЫВ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ПОДАРОКОВ И ПОСЕЩЕНИЯ ВЫСТАВКИ-ЯРМАРКИ				
12.15 ▼ 13.30 регистрация 12.05–12.20		Круглый стол с участием представителей вузовских олимпиад Развитие математической одаренности учащихся и математические олимпиады И.В. Яценко, проректор МИОО; В.Д. Арнольд, зам. директора МЦНМО	Творческая мастерская Калейдоскоп педагогических идей. Презентация опыта работы учителей математики Москвы (продолжение) А.В. Семенов, к.п.н., зав. лабораторией МИОО	Издательство «ВАКО» Лекция Решение сложных задач ЕГЭ по математике С.И. Колесникова, ст. преп. каф. высшей математики МФТИ, редактор журнала «Потенциал», ведущий специалист ФЗФТШ при МФТИ, соросовский учитель	Издательство «Экзамен» Лекция Инновационные, электронные учебно-наглядные пособия по математике в рамках введения новых стандартов образования и реализации национальной образовательной программы «Наша новая школа» А.А. Кудрявцев, преподаватель математики, физики и информатики, разработчик электронных учебных пособий («Экзамен-Медиа»)	Издательство «Легион» Лекция Методика подготовки школьников к различным формам аттестации и контроля с использованием пособий издательства «Легион» С.Ю. Кулабухов, к.ф.-м.н., начальник отдела математики издательства «Легион»
13.45 ▼ 15.00 регистрация 13.35–13.50		Лекция Основы для решения сложных задач ЕГЭ закладываются в 8–9-х классах Д.Э. Шноль, зав. кафедрой математики школы-интерната «Интеллектуал»	Круглый стол Компьютер как инструмент учителя математики О.В. Макарова, редактор газеты «Математика», учитель ЦО №1428; В.Н. Дубровский, к.ф.-м.н., доц. каф. математики СУНЦ МГУ, методист отдела образовательных программ фирмы «1С»	Круглый стол Компьютерная поддержка урока математики в контексте стандартов нового поколения А.В. Пантуев, к.ф.-м.н., доцент кафедры математической физики МГПУ, ст. преподаватель СУНЦ МГУ, методист ЦИТУО по математике	Издательство «Илекса» Лекция Выделение общих методов решения задач в новом двухуровневом учебнике алгебры и начал анализа как основа успешной подготовки учащихся к решению заданий ЕГЭ по математике Е.П. Нелин, к.п.н., проф., лектор курсов повышения квалификации учителей математики при Старооскольском городском ИУУ, Курском областном ИПКиПРО	РАСПИСАНИЕ УТОЧНЯЕТСЯ
15.00		ЗАКРЫТИЕ ДНЯ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ				

Номера аудиторий будут объявлены в день проведения мероприятий. В расписании возможны изменения и дополнения.

ВСЬ ДЕНЬ РАБОТАЕТ ВЫСТАВКА-ЯРМАРКА УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ



ВХОД ТОЛЬКО ПО ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ РЕГИСТРАЦИИ на сайте <http://marathon.1september.ru> и с предварительно распечатанным именной билетом.

Регистрация прекращается при достижении максимального количества участников.

ОФИЦИАЛЬНЫЙ ИМЕННОЙ СЕРТИФИКАТ ВСЕМ УЧАСТНИКАМ МАРАФОНА–2011, посетившим три мероприятия подряд.

Дополнительную информацию о Марафоне можно найти на сайте Издательского дома «Первое сентября» www.1september.ru или получить по телефону: (499) 249-3138.

Полная программа Марафона также размещена на компакт-диске, который вы получите вместе с этим номером.

ПРОЕКТ
Подготовлен
Федеральным
государственным
научным учреждением
«Федеральный институт
педагогических
измерений»

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ

КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ
ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ В 2012 ГОДУ ГОСУДАРСТВЕННОЙ
(ИТОГОВОЙ) АТТЕСТАЦИИ (В НОВОЙ ФОРМЕ)
ПО МАТЕМАТИКЕ ОБУЧАЮЩИХСЯ, ОСВОИВШИХ
ОСНОВНЫЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ПРОГРАММЫ
ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Пояснения к демонстрационному варианту экзаменационной работы

При ознакомлении с демонстрационным вариантом следует иметь в виду, что включенные в него задания *не отражают всех элементов содержания, которые будут проверяться с помощью вариантов КИМ в 2012 году*. Разделы содержания, на которых базируются контрольно-измерительные материалы, определены в спецификации; полный перечень соответствующих элементов содержания и умений, которые могут контролироваться на экзамене 2012 года, приведен в кодификаторах, размещенных на сайте www.fipi.ru.

Демонстрационный вариант предназначен для того, чтобы дать возможность участнику экзамена и широкой общественности составить представление о структуре будущей экзаменационной работы, числе и форме заданий, а также их уровне сложности. Эти сведения дают возможность выработать стратегию подготовки к сдаче экзамена по математике.

Часть 1

1. Установите соответствие между выражениями и их значениями.

- А) $\frac{4}{5} + 0,4$ Б) $1 : \frac{2}{3}$ В) $\frac{0,5}{1-0,7}$
1) $\frac{2}{3}$ 2) 1,2 3) 1,5 4) $1\frac{2}{3}$

Ответ:

А	Б	В

2. На рисунке показаны четыре круговые диаграммы, отражающие содержание питательных веществ в четырех разных продуктах. Определите, в каком из этих продуктов процентное содержание жира наименьшее.



■ Белки

■ Жиры

■ Углеводы

□ Прочие

- 1) Арахис
3) Шоколад

- 2) Пирожное
4) Сгущенное молоко

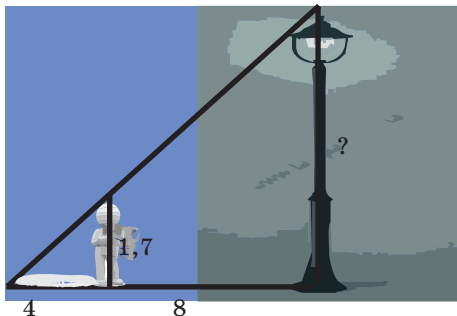


К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 4.

3. Из объявления фирмы, проводящей обучающие семинары: «Стоимость участия в семинаре — 3000 р. с человека. Группам от организаций предоставляются скидки: от 3 до 10 человек — 5%; более 10 человек — 8%». Сколько должна заплатить организация, направившая на семинар группу из 8 человек?

- 1) 24 000 р. 2) 22 080 р.
3) 22 800 р. 4) 1200 р.

4. Человек ростом 1,7 м стоит на расстоянии 8 шагов от столба, на котором висит фонарь (см. рис.). Человек отбрасывает тень длиной 4 шага. На какой высоте расположен фонарь?



Ответ: _____

5. В соревнованиях по художественной гимнастике участвуют: три гимнастки из России, три гимнастки из Украины и четыре гимнастки из Белоруссии. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что первой будет выступать гимнастка из России.

Ответ: _____

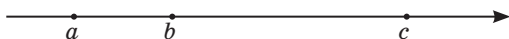
6. Укажите два соседних числа, между которыми заключено число $3\sqrt{10}$.

Ответ: _____

7. Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них — геометрическая прогрессия. Найдите ее.

- 1) $1; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4} \dots$ 2) 1; 2; 4; 8...
3) 1; 3; 5; 7... 4) 1; 2; 3; 5...

8. На координатной прямой отмечены числа a , b и c .



Из следующих утверждений выберите верное.

- 1) $a - c > 0$ 2) $c - a < 0$
3) $a - b < 0$ 4) $b - c > 0$

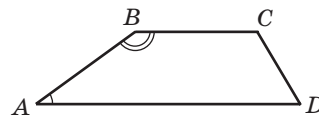
9. Из физической формулы $P = I^2 R$ выразите переменную I (все величины положительны).

Ответ: _____

10. Упростите выражение $\frac{a^2 - b^2}{ab} : \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$.

Ответ: _____

11. Угол B трапеции (см. рис.) в четыре раза больше угла A . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____

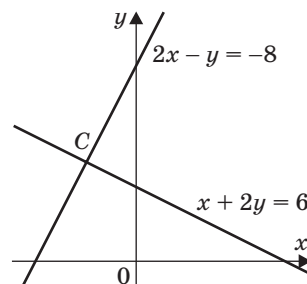
12. Найдите корни уравнения $4x^2 + 7x + 3 = 0$.

Ответ: _____

13. Решите неравенство $20 - 3(x + 5) < 1 - 7x$.

Ответ: _____

14. Две прямые пересекаются в точке C (см. рис.). Вычислите координаты точки C .



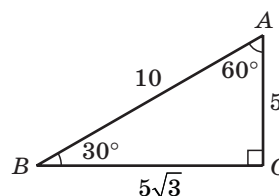
Ответ: _____

15. Укажите номера **верных** утверждений.

- 1) Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.
- 2) Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса, то эта прямая и окружность не имеют общих точек.
- 3) Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.
- 4) Площадь трапеции равна произведению основания трапеции на высоту.
- 5) Сумма углов тупоугольного треугольника больше 180° .

Ответ: _____

16. Найдите площадь треугольника, изображенного на рисунке.



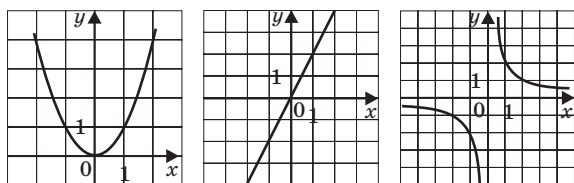
Ответ: _____

17. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

А)

Б)

В)

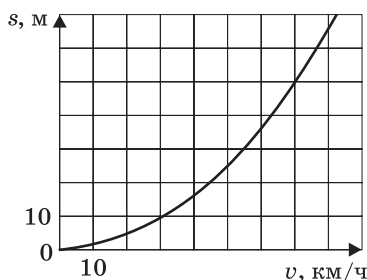


1) $y = \frac{2}{x}$ 2) $y = 2x$ 3) $y = -2x$ 4) $y = x^2$

Ответ:

А	Б	В

18. При резком торможении расстояние, пройденное автомобилем до полной остановки (тормозной путь), зависит от скорости, с которой автомобиль двигался. На рисунке показан график этой зависимости (для сухой асфальтовой дороги). По горизонтальной оси откладывается скорость (в км/ч), по вертикальной — пройденное до полной остановки расстояние (в метрах). Определите по графику, с какой наибольшей скоростью может двигаться автомобиль, чтобы его тормозной путь был не длиннее 50 метров.



Ответ: _____

Часть 2

При выполнении заданий 19–23 используйте отдельный лист. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение.

19. Сократите дробь $\frac{100^n}{2^{2n-1} \cdot 5^{2n+2}}$.

20. Из города А в город В, расстояние между которыми 200 км, выехал грузовик. Через час вслед за ним выехал легковой автомобиль, скорость которого на 10 км/ч больше, чем скорость грузовика. В город В они въехали одновременно. Найдите скорости грузовика и легкового автомобиля.

21. Докажите, что диаметр окружности, проведенный через середину хорды (не являющейся диаметром), перпендикулярен этой хорде.

22. Постройте график функции $y = \frac{(x-3)(x^2-2x+1)}{1-x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с этим графиком только одну общую точку.

23. Основания трапеции равны 6 и 10, а боковые стороны равны 2 и 4. Биссектрисы углов при одной боковой стороне пересекаются в точке А, а при другой — в точке В. Найдите АВ.

Решения и критерии оценивания части 2

19. Сократите дробь $\frac{100^n}{2^{2n-1} \cdot 5^{2n+2}}$.

Решение.

$$\frac{100^n}{2^{2n-1} \cdot 5^{2n+2}} = \frac{10^{2n}}{2^{2n-1} \cdot 5^{2n+2}} = \frac{2^{2n} \cdot 5^{2n}}{2^{2n-1} \cdot 5^{2n+2}} = \frac{2}{5^2} = \frac{2}{25}.$$

Ответ: $\frac{2}{25}$.

Содержание критерия	Баллы
Правильно выполнены преобразования, получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера (например, при вычитании $2n + 2$ из $2n$), и с ее учетом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Другие случаи, не соответствующие перечисленным выше критериям	0

Комментарий. Ошибки в применении свойств степеней считаются существенными, при их наличии решение не засчитывается.

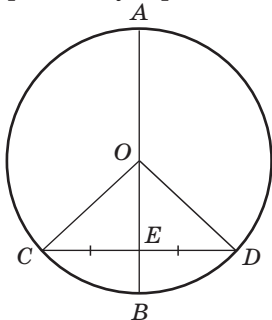
20. Из города А в город В, расстояние между которыми 200 км, выехал грузовик. Через час вслед за ним выехал легковой автомобиль, скорость которого на 10 км/ч больше, чем скорость грузовика. В город В они въехали одновременно. Найдите скорости грузовика и легкового автомобиля.

Решение. Пусть x км/ч — скорость грузовика, тогда скорость легкового автомобиля $(x + 10)$ км/ч. Грузовик был в пути $\frac{200}{x}$ ч, а легковой автомобиль — $\frac{200}{x+10}$ ч. Составим уравнение: $\frac{200}{x+10} = \frac{200}{x} - 1$. Решив его, получим: $x_1 = 40$, $x_2 = -50$. Второй корень не соответствует условию задачи. Имеем: скорость грузовика равна 40 км/ч, скорость легкового автомобиля равна $40 + 10 = 50$ км/ч.

Ответ: 40 км/ч и 50 км/ч.

Содержание критерия	Баллы
Правильно составлено и решено уравнение (или система уравнений), получен верный ответ	2
Правильно составлено уравнение (или система уравнений), но при его решении допущена вычислительная ошибка, с ее учетом решение доведено до конца	1
Другие случаи, не соответствующие перечисленным выше критериям	0

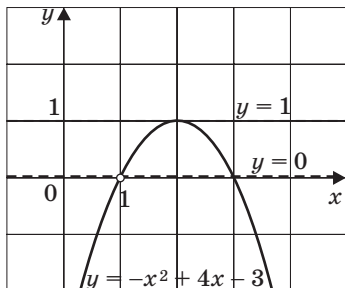
21. Докажите, что диаметр окружности, проведенный через середину хорды (не являющейся диаметром), перпендикулярен этой хорде.



Доказательство. OE — медиана треугольника COD . Так как $OC = OD$, треугольник COD — равнобедренный. Следовательно, OE является высотой треугольника COD . Поэтому $AB \perp CD$.

Содержание критерия	Баллы
Выполнен верный чертеж, ход доказательства верный, все его шаги выполнены правильно	3
Выполнен верный чертеж, доказательство содержит неточности	2
Другие случаи, не соответствующие перечисленным выше критериям	0

22. Постройте график функции $y = \frac{(x-3)(x^2-2x+1)}{1-x}$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с этим графиком только одну общую точку.



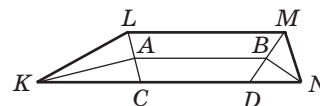
Решение. Областью определения функции является множество всех чисел, кроме $x = 1$. Так как $\frac{(x-3)(x^2-2x+1)}{1-x} = (x-3)(1-x)$, то графиком

данной функции является парабола $y = -x^2 + 4x - 3$ без точки с абсциссой, равной 1 (см. рис.). Горизонтальная прямая $y = t$ имеет с графиком функции только одну общую точку при $t = 0$ и $t = 1$.

Ответ: график функции изображен на рисунке; при $t = 0$ и $t = 1$.

Содержание критерия	Баллы
График построен правильно, верно указаны значения t , при которых прямая $y = t$ имеет с графиком только одну общую точку	4
График построен правильно, но отсутствует ответ на вопрос или указано только одно искомое значение t	3
Другие случаи, не соответствующие перечисленным выше критериям	0

23. Основания трапеции равны 6 и 10, а боковые стороны равны 2 и 4. Биссектрисы углов при одной боковой стороне пересекаются в точке A , а при другой — в точке B . Найдите AB .



Решение. Пусть LC — биссектриса угла KLM трапеции $KLMN$ с основаниями KN и LM , $KN = 10$, $LM = 6$, $KL = 4$, $MN = 2$. Тогда треугольник KLC равнобедренный с основанием LC . В нем KA — высота, биссектриса и медиана. Аналогично, пусть MD — биссектриса угла LMN . Тогда NB — высота, биссектриса и медиана треугольника MND . Получаем: $KC = LK = 4$, $MN = ND = 2$, поэтому $CD = KN - (KC + ND) = 10 - 6 = 4$. В трапеции $CLMD$ отрезок AB — средняя линия. $CD = 4$, $LM = 6$, поэтому $AB = 5$.

Ответ: 5.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	4
Ход решения верный: доказано, что точки A и B лежат на средней линии трапеции, но не найдена длина отрезка AB или длина отрезка найдена верно, но в рассуждении допущены неточности	3
Другие случаи, не соответствующие перечисленным выше критериям	0

Ответы к заданиям части 1

1. 2, 3, 4. 2. 4. 3. 3. 4. 5, 1 м. 5. 0, 3. 6. $\frac{9}{10}$ и 10 ; или $9 < 3\sqrt{10} < 10$ 7. 2. 8. 3. 9. $I = \sqrt{\frac{P}{R}}$.

10. $a + b$. 11. 144° . 12. $-1, -\frac{3}{4}$. 13. $x < -1$. 14. $(-2; 4)$.

15. 2, 3. 16. $\frac{25\sqrt{3}}{2}$. 17. 4, 2, 1. 18. 70 км/ч.

Г. КОВАЛЕВА,
Москва

ПЕРВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ ПРОГРАММЫ PISA-2009

Об исследовании

Обладают ли учащиеся 15-летнего возраста, получившие обязательное общее образование, знаниями и умениями, необходимыми им для полноценного функционирования в современном обществе?

На этот вопрос пытаются ответить специалисты 65 стран мира в ходе международной программы PISA¹, в которой впервые реализуется компетентностный подход в оценке образовательных достижений. Данная программа осуществляется Организацией экономического сотрудничества и развития (ОЭСР)².

Целью программы PISA является оценка способности 15-летних учащихся использовать приобретенные в школе знания и опыт для широкого диапазона жизненных задач в различных сферах человеческой деятельности, общения и социальных отношений (оценивается читательская грамотность, математическая грамотность и естественнонаучная грамотность).

За годы реализации программы значительно вырос авторитет этого исследования: в 2000 году в программе участвовало 32 страны (из них 28 стран ОЭСР), в 2003 году — 40 стран, в 2006 — 57 стран, а в 2009 году — 65 стран (из них 34 страны ОЭСР).

Особенностью программы PISA в 2009 году является ориентация исследования на оценку читательской грамотности³. Впервые появилась возможность по единой шкале, установленной в 2000 году, оценить читательскую грамотность более 470 тысяч 15-летних учащихся из 65 стран мира и выявить тенденции развития образования в данной области за 9 лет.

Ни одно международное сравнительное исследование качества образования не имело такого воздействия на образование стран, как программа PISA. Для объяснения результатов, полученных в исследовании в 2000, 2003 и 2006 годах, было инициировано значительное число научных исследований в области оценки качества и эффективности образования. Страны, используя результаты исследования, смогли определить сильные и слабые стороны образования, увидеть свой профиль на фоне других стран и определить направления совершенствования учебного процесса

¹ PISA — Programme for International Student Assessment (международная программа по оценке образовательных достижений учащихся).

² ОЭСР (OECD — Organization for Economic Cooperation and Development).

³ Исследование проводится трехлетними малыми циклами. В каждом цикле основное внимание (две трети времени тестирования) уделяется одному из трех направлений исследования. В 2000 году основным направлением исследования была «читательская грамотность», в 2003 году — «математическая грамотность», в 2006 году — «естественнонаучная грамотность». В 2009 году, в котором основным направлением являлась опять читательская грамотность, завершился первый полный цикл мониторинга сформированности читательской грамотности.

в школах. В 13 странах были проведены эффективные реформы образования, положительный результат которых был зафиксирован в 2009 году.

Как было показано в публикациях стран, которые дополнительно провели лонгитюдные исследования на выборке исследования PISA 2000-го и 2003 годов, результаты оценки функциональной грамотности 15-летних учащихся являются надежным индикатором дальнейшей образовательной траектории молодых людей и их благосостояния.

Россия принимала участие во всех четырех циклах программы PISA: в 2000, 2003, 2006 и 2009 годах. Результаты проведенных исследований стали предметом дополнительного анализа коллективов Российской академии образования, Федерального института развития образования, проектов Национального фонда подготовки кадров и Высшей школы экономики. Рекомендации и материалы, разработанные в процессе анализа, использовались при введении государственной итоговой аттестации выпускников школы в форме ЕГЭ и ГИА-9, при разработке компетентностно-ориентированных измерителей образовательных достижений. По результатам анализа были инициированы дополнительные исследования, целью которых было объяснить отличающиеся результаты в различных международных исследованиях, например, PISA и PIRLS.

От участия России в исследованиях PISA в 2009 году ожидаются ответы на следующие вопросы:

1. Каково состояние российского образования с точки зрения международных стандартов, основанных на компетентностном подходе?

2. Что изменилось в российском образовании за последнее десятилетие?

3. В каком направлении следует совершенствовать российское образование? Какие средства и методы можно использовать для достижения положительного эффекта?

Ниже представлены первые результаты исследования PISA в 2009 году в России в сравнении с 34 странами ОЭСР, наиболее экономически развитыми из 65 стран-участниц.

Выборка российских учащихся 15-летнего возраста включала 5633 обучающихся из 210 образовательных учреждений 45 регионов России. В выборку вошли 15-летние учащиеся основной и средней школы, а также учащиеся и студенты образовательных учреждений начального и среднего профессионального образования.

Математическая грамотность

Математическая грамотность — способность человека определять и понимать роль математики в мире, в котором он живет, высказывать хорошо обоснованные математические суждения и использовать математику так, чтобы удовлетворять в настоящем и будущем потребности, присущие созидательному, заинтересованному и мыслящему гражданину.

1. По результатам исследования математической грамотности 15-летних учащихся в 2009 году российские учащиеся оказались в группе стран, результаты которых существенно ниже результатов стран ОЭСР. Средний балл российских учащихся составил 468 баллов (по странам ОЭСР — 496), что соответствует 38–40 местам среди 65 стран-участниц (табл.).

Наивысшие результаты показали учащиеся Шанхая (Китай) со средним баллом 600, Сингапура — 562 балла, Гонконга (Китай) — 555 баллов, Республики Корея — 546 баллов и Тайвань — 543 балла.

2. В соответствии с международной шкалой уровней математической грамотности 71% российских 15-летних учащихся продемонстрировали способность применять математические знания и умения; они достигли порогового уровня (2-го уровня по международной шкале) или превысили его. Из них чуть более 5% обладают продвинутым математическим мышлением и умением проводить рассуждения. Они могут выполнять задания самого высокого уровня трудности (5–6-го уровней по международной шкале). Они могут осмыслить, обобщить и использовать информацию, полученную ими на основе исследования сложных проблемных ситуаций и их моделирования. Они могут использовать информацию из разных источников, представленную в различной форме. В ОЭСР таких учащихся 12,7%.

Не достигли 2-го уровня математической грамотности (порогового) 28,5% российских учащихся 15-летнего возраста (в странах ОЭСР — 22,1%) (рис. 1).

3. В России не выявляется различий между математической грамотностью юношей и девушек, как это было выявлено во многих странах, в которых практическая составляющая курса математики лучше осваивается юношами, чем девушками. Средний балл девушек в 2009 году в России по математической грамотности составил 467 баллов (в странах ОЭСР — 490), а юношей — 469 (в странах ОЭСР — 501).

4. За годы участия в программе PISA не произошло никаких существенных изменений в состоянии математической грамотности российских

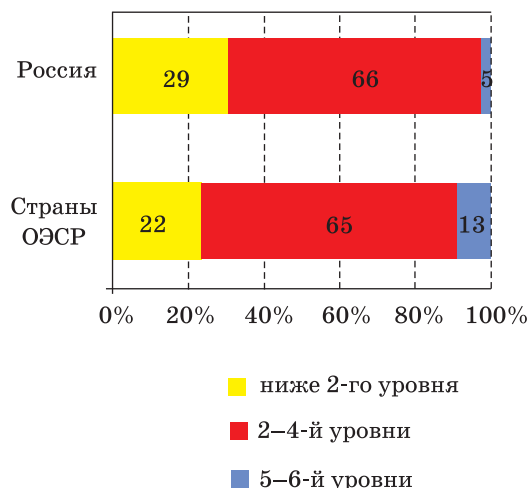


Рис. 1

15-летних учащихся: 2003 год⁴ — 468 баллов, 2006 год — 476 баллов, 2009 год — 468 баллов.

5. Невысокие результаты российских учащихся в исследовании PISA еще раз демонстрируют, что давно поставленная перед российской школой цель подготовить выпускников к свободному использованию математики в повседневной жизни в значительной степени не достигается на уровне требований международных тестов PISA, оценивающих сформированность математической грамотности. Причины этого кроются в крайностях реализации академической направленности школьного курса математики, что приводит к уменьшению внимания к практической составляющей обучения математике в школе.

Анализ заданий, оценивающих математическую грамотность, позволяет выделить относительно небольшой перечень знаний и умений, которые считаются необходимыми для математически грамотного современного человека, с точки зрения международных экспертов. К ним относятся: пространственные представления, пространственное воображение, некоторые свойства пространственных фигур, использование масштаба, нахождение периметра и площадей нестандартных фигур; умение читать и интерпретировать количественную информацию, представленную в различной форме (таблицы, диаграммы, графики реальных зависимостей), характерную для средств массовой информации; работа с формулами, знаковые и числовые последовательности; вычисления с рациональными числами, действия с процентами; умение выполнять действия с различными единицами измерения (длины, массы, времени, скорости); использование среднего арифметического для характеристики явлений и процессов, близких к

реальной действительности и др. Успешное выполнение большинства заданий связано с развитием таких важнейших общеучебных умений, как, например, умение внимательно прочитать некоторый связный текст, выделить в приведенной в нем информации только те факты и данные, которые необходимы для получения ответа на поставленный вопрос.

Таким образом, за период с 2000 до 2009 года в функциональной грамотности российских 15-летних учащихся, а именно в их способности использовать полученные в школе знания, умения и опыт для широкого диапазона жизненных задач в повседневной жизни, в ситуациях лично и социально значимых, выходящих за пределы чисто учебных, не зафиксировано никаких значительных изменений.

По всем трем направлениям исследования PISA Россия находится в группе стран, средний балл которых статистически значимо ниже среднего балла по странам ОЭСР.

Средние баллы российских учащихся по всем трем направлениям соответствуют пороговому значению функциональной грамотности, то есть значению, с которого учащиеся начинают явно самостоятельно проявлять в знакомых ситуациях компетентности, необходимые для активного функционирования в современном мире.

Разрыв с лидирующими странами по всем направлениям составляет около 100 баллов (одно стандартное отклонение). Это говорит о том, что почти две трети учащихся в лидирующих странах имеют уровень функциональной грамотности, превышающий средний уровень функциональной грамотности российских учащихся.

Около 8% российских 15-летних учащихся продемонстрировали самые высокие результаты (5-й или 6-й уровень) хотя бы по одному из трех направлений (в среднем по ОЭСР — 16,3%); одновременно по всем трем направлениям таких ребят оказалось в России 1,4% (в среднем в странах ОЭСР — 4,1%, в лидирующих странах до 14%). Эти данные позволяют стране оценить свой потенциал по числу талантливых детей.

В составе российской выборки 2009 года, как и в предыдущих циклах исследования, приняли участие 15-летние подростки, обучавшиеся в общеобразовательных учреждениях (7–11-е классы), в учреждениях среднего профессионального образования (техникумах, колледжах и др.) и в учреждениях начального профессионального образования.

⁴ Основная шкала математической грамотности была установлена в цикле исследований 2003 года. В связи с этим тенденции изменения выявляются только в сравнении с 2003 годом.

Анализ их результатов показывает, что российские 15-летние учащиеся 10-х и 11-х классов по всем направлениям исследования показали результаты, статистически значимо превышающие общероссийские и не отличающиеся от средних результатов по странам ОЭСР. Результаты 15-летних первокурсников учреждений среднего профессионального образования и учащихся 7–9-х классов находятся примерно на уровне средних по России. Самые низкие результаты по всем направлениям исследования PISA-2009 показали студенты, получающие начальное профессиональное образование. Таким образом, только 15-летних учащихся 10–11-х классов общеобразовательных учреждений России можно считать конкурентоспособными в сравнении с их сверстниками из стран ОЭСР.

Сравнение результатов России с другими странами явно показывает **отличие приоритетов отечественного образования** от приоритетов, которые проявились в исследованиях PISA и разделяются многими странами. Обеспечивая учащихся значительным багажом предметных знаний, о чем свидетельствует международное исследование качества математического и естественнонаучного образования TIMSS⁵, российская система общего образования не способствует развитию у них умения выходить за пределы учебных ситуаций, в которых формируются эти знания, в связи с чем не формируется функциональная грамотность российских учащихся.

Не оказал существенного влияния на математическую и естественнонаучную грамотность российских учащихся переход школы на работу по образовательным стандартам 2004 года, в которых было выделено специальное требование к общеобразовательной подготовке — «использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни». Это требование нашло отражение в планируемых результа-

тах, представленных в образовательных стандартах второго поколения (2009 г.) для начальной, основной и старшей школы. Однако опыт работы школы явно свидетельствует, что без целенаправленной работы по обеспечению достижения учащимися этого требования вряд ли наступят положительные перемены в практической составляющей общеобразовательной подготовки выпускников российской школы.

Российской системе образования необходимо предпринять ряд усилий по созданию новых учебных пособий, переподготовке учителей, мониторингу способности применять изученные знания в учебных и практических ситуациях, а также обеспечить адекватные условия обучения учащихся в школе.

Результаты исследования PISA требуют дальнейшего анализа российскими методистами, психологами, авторами учебников, разработчиками стандартов и другими специалистами в области общего образования. При разработке стандартов второго поколения и сопровождающих методических материалов, которая осуществляется в настоящее время, необходимо широкое общественное обсуждение для нахождения разумного баланса между традиционными приоритетами в области общего образования в России и приоритетами, которые проявились в исследованиях PISA.

Результаты международной программы PISA-2009 представлены на сайтах:

- организации экономического сотрудничества и развития (ОЭСР) (Organization for Economic Cooperation and Development, OECD) — www.oecd.org/edu/pisa/;
- австралийского совета педагогических исследований (The Australian Council for Educational Research, ACER) — <http://www.acer.edu.au/>;
- отдела оценки качества образования ИСМО PAO — <http://www.centeroko.ru>.

Результаты стран по математической грамотности

Таблица 2

		Страна	Средней балл	Стандартная ошибка измерения	Место страны среди других стран
1	Страны, средний балл которых статистически значимо выше среднего балла по странам ОЭСР	Шанхай (Китай)	600	(2,8)	1
2		Сингапур	562	(1,4)	2
3		Гонконг (Китай)	555	(2,7)	3–4
4		Республика Корея	546	(4,0)	3–6
5		Тайвань	543	(3,4)	4–7
6		Финляндия	541	(2,2)	4–7
7		Лихтенштейн	536	(4,1)	5–9
8		Швейцария	534	(3,3)	6–9
9		Япония	529	(3,3)	8–12
10		Канада	527	(1,6)	9–12

⁵ TIMSS — Trend in International Mathematics and Science Study.

		Страна	Средней балл	Стандартная ошибка измерения	Место страны среди других стран
11		Нидерланды	526	(4,7)	8–13
12		Макао (Китай)	525	(0,9)	10–12
13		Новая Зеландия	519	(2,3)	12–14
14		Бельгия	515	(2,3)	13–17
15		Австралия	514	(2,5)	13–17
16		Германия	513	(2,9)	13–17
17		Эстония	512	(2,6)	14–17
18		Исландия	507	(1,4)	17–19
19		Дания	503	(2,6)	18–21
20		Словения	501	(1,2)	19–21
21	Страны, средний балла которых не отличается от среднего балла по странам ОЭСР	Норвегия	498	(2,4)	19–26
22		Франция	497	(3,1)	19–28
23		Словацкая Республика	497	(3,1)	19–28
24		Австрия	496	(2,7)	20–28
25		Польша	495	(2,8)	21–29
26		Швеция	494	(2,9)	21–30
27		Чешская Республика	493	(2,8)	22–31
28		Великобритания	492	(2,4)	23–31
29		Венгрия	490	(3,5)	23–34
30	Страны, средний балл которых статистически ниже среднего балла по странам ОЭСР	Люксембург	489	(1,2)	28–33
31		США	487	(3,6)	26–36
32		Ирландия	487	(2,5)	28–35
33		Португалия	487	(2,9)	28–36
34		Испания	483	(2,1)	32–36
35		Италия	483	(1,9)	32–36
36		Латвия	482	(3,1)	32–37
37		Литва	477	(2,6)	36–38
38		Россия	468	(3,3)	38–39
39		Греция	466	(3,9)	38–40
40		Хорватия	460	(3,1)	39–40
41		Дубай (ОАЭ)	453	(1,1)	41–42
42		Израиль	447	(3,3)	42–44
43		Турция	445	(4,4)	41–44
44		Сербия	442	(2,9)	42–44
45		Азербайджан	431	(2,8)	45–47
46		Болгария	428	(5,9)	45–51
47		Румыния	427	(3,4)	45–49
48		Уругвай	427	(2,6)	45–49
49		Чили	421	(3,1)	47–51
50		Таиланд	419	(3,2)	48–52
51		Мексика	419	(1,8)	49–51
52		Тринидад и Тобаго	414	(1,3)	51–52
53		Казахстан	405	(3,0)	53–54
54		Черногория	403	(2,0)	53–54
55		Аргентина	388	(4,1)	55–58
56		Иордания	387	(3,7)	55–58
57		Бразилия	386	(2,4)	55–58
58		Колумбия	381	(3,2)	56–59
59		Албания	377	(4,0)	57–61
60		Тунис	371	(3,0)	59–63
61		Индонезия	371	(3,7)	59–63
62		Катар	368	(0,7)	61–63
63		Перу	365	(4,0)	61–64
64		Панама	360	(5,2)	62–64
65		Кыргызстан	331	(2,9)	65

Л. СЕРЕБРЕННИКОВА,
Москва

ОТКРЫТЫЙ ЛИЦЕЙ ВЗМШ ПРИ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА ОБЪЯВЛЯЕТ ПРИЕМ УЧАЩИХСЯ НА 2010/2011 УЧЕБНЫЙ ГОД

Реформа образования поставила перед учителями математики, родителями и учениками сложные задачи. С одной стороны, подготовка к Единому государственному экзамену, с другой – подготовка к олимпиадам. Такие задачи трудно совместить.

В последние годы многие наши ученики решали обе задачи. Некоторые прошли вступительные испытания через олимпиады, другие поступили в вузы, получив высокие результаты на ЕГЭ.

А может быть, до поступления в вуз далеко, и ученику просто интересно знать, например, как выглядят сечения четырехмерного куба или под каким углом к берегу нужно направить лодку, чтобы за время переправы через реку ее как можно меньше снесло течением? Всегда ли можно разрезать на выпуклые кусочки квадратный кусок сыра так, чтобы в каждом кусочке была ровно одна дырка? На эти и множество других интересных вопросов учащийся сможет ответить, если станет учеником **математического** отделения Открытого лицея «Всероссийская заочная многопредметная школа» (ОЛ ВЗМШ).

«Открытый» — означает, что к нам может поступить **каждый**, кого интересуют математика, физика, химия, биология и другие дисциплины.

Отделение математики ведет работу по двум направлениям: с учащимися, обучающимися индивидуально, и с группами школьников при непосредственном руководстве школьного учителя математики.

Как же происходит обучение?

Из названия школы следует, что оно заочное.

Все поступившие будут получать по почте пособия и другие материалы, специально разработанные для заочного обучения, а также разнообразные задачи для самостоятельной работы, контрольные и практические задания. Многие пособия переведены на электронный язык, и к ним учащиеся ВЗМШ будут иметь доступ через Интернет. Это очень помогает в тех случаях, когда случаются почтовые задержки.

Большая часть наших пособий издана массовым тиражом (в том числе и за рубежом). В числе первых авторов были академик И.М. Гельфанд, доктор физ.-мат. наук А.А. Кириллов, член-корр. РАО Н.Х. Розов, канд. пед. наук Е.Г. Глаголева.

 К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 4.

Контрольные работы учащихся будут тщательно проверять и рецензировать преподаватели ВЗМШ — студенты, аспиранты, преподаватели и научные сотрудники МГУ, а также других вузов и учреждений, где имеются филиалы школы.

Став учеником математического отделения, можно более глубоко, чем в обычной школе, усвоить основные идеи, на которых базируется курс элементарной математики, узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьных учебников, попробовать свои силы в решении интересных задач, научиться самостоятельно работать с книгой и грамотно излагать свои мысли, поучиться решать олимпиадные задачи. На последнем курсе большое внимание уделяется подготовке к сдаче школьных экзаменов или ЕГЭ, а также подготовке к вступительным экзаменам в вузы.

Начать обучение можно с любого курса. Учащиеся 6-го класса поступают на I курс, учащиеся 7-го класса — на II курс, и т.д., десятиклассники поступают на V курс. При этом поступившим не на первый курс будет предложена часть заданий за предыдущие годы. Для поступивших на V курс обучение проводится по специальной интенсивной программе с упором на подготовку к поступлению в вуз. Однако мы принимаем не только школьников, но и взрослых. В этом случае выбор курса зависит от поступающего.

Многолетний опыт убеждает, что знания, полученные в ВЗМШ, позволяют выпускникам успешно поступать в лучшие вузы страны. Однако это не означает, что наша цель — подготовка в вуз.

А начиналось все в середине 60-х годов прошлого века. Существующие тогда формы работы рассчитаны были, главным образом, на школьников крупных городов. Чтобы помочь тысячам ребят из отдаленных сел и городов найти свой путь в математике, удовлетворить интерес, научить работать с книгой, потребовалась новая форма работы. Такой формой стало заочное или, как сейчас принято говорить, дистантное обучение.

Сейчас в стране достаточно широко развита сеть заочных школ, в том числе работают и филиалы ВЗМШ (их адреса можно найти на сайте). Тогда же ВЗМШ стала первой в Отечестве заочной школой общегосударственного уровня. Создана она по инициативе ректора МГУ акад. И.Г. Петровского и акад. И.М. Гельфанда, который долгие годы, вплоть до своей смерти, возглавлял Научный совет ВЗМШ.

Важное положение «педагогике по Гельфанду» Израиль Моисеевич сам сформулировал так:

«В математике новому надо учить на простых вещах, знакомых ученикам».

Программа математического отделения постоянно совершенствуется, появляются новые пособия, материал которых учитывает запросы учащихся. ВЗМШ, по существу, предвосхитила современную реорганизацию школьного образования.

Имея за плечами почти пятидесятилетний опыт работы, без преувеличения можно сказать, что ВЗМШ прочно вписалась в систему среднего образования России, фактически основала и реализовала в ней новое направление, нашла в ней свое достойное место, завоевала признание передовой педагогической общест-венности.

Наши учащиеся ежегодно должны выполнить 7–8 заданий по специально написанным пособиям. Каждое задание состоит из двух (а то и трех) десятков задач, решить которые можно, изучив соответствующий текст пособия и разобрав примеры. А потом свои решения нужно записать с полным обоснованием. «В конце концов, — писал Гельфанд, — большинство учащихся заочной школы научаются не “отбалтываться”, а по-настоящему работать».

В настоящее время создан интерактивный курс по одной из основополагающих тем школьной программы — «Многочлены». На сайте работает консультационный центр, где можно быстро получить совет по решению задач.

Большинство наших учащихся проживают в малых городах и селах, а там компьютер, подключенный к Интернету, есть далеко не в каждой школе, не в каждой семье. Поэтому, пользуясь старым способом — обыкновенной перепиской, ВЗМШ не на словах, а на деле создает равные стартовые возможности для всех, кто хочет получить образование высшей пробы и продолжить его после окончания средней школы.

Условия приема

На индивидуальное обучение прием конкурсный. Для поступления надо решить хотя бы часть задач; главное — показать умение рассуждать и записывать свои мысли. Следует выбрать те задачи, которые соответствуют классу, в котором обучается школьник (около номера каждой задачи в скобках указано, учащимся каких классов она предназначена; впрочем, можно, конечно, решать и задачи предназначенные учащимся классом старше).

Группы «Коллективный ученик» принимают без выполнения вступительной работы. Чтобы учиться в группе «КУ», необходимо

прислать заявление учителя и список учащихся, заверенные подписью директора и печатью школы. В заявлении также указывается класс, в котором ученики будут учиться с сентября 2011 года.

Программа, по которой обучаются такие группы, практически не отличается от индивидуальной. Разница лишь в том, что оформляется одна коллективная работа, которая также проверяется и рецензируется. При этом такая форма работы имеет свои преимущества. Учащиеся при изучении теоретического материала получают помощь непосредственно от своего учителя, а учитель получает возможность повышать свою квалификацию и на высоком уровне вести профильный или элективный курс.

Все окончившие ВЗМШ получают дипломы соответствующего образца.

Учащиеся частично возмещают расходы на обучение.

Решения задач надо написать на русском языке в тетради в клетку и выслать *простой бандеролью, не сворачивая в трубку*, либо по электронной почте.

Желающие поступить сразу на несколько отделений каждую работу присылают в *отдельной тетради*. На обложке тетради укажите *фамилию, имя, отчество (ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ), год рождения, напишите фразу «с сентября 2011 года я буду учиться в ... классе, полный почтовый адрес* (с индексом) и, если есть, электронный. Напишите, *откуда вы узнали о ВЗМШ*. Не забудьте указать, *на какое отделение хотите поступить*.

Работы следует направлять либо по почтовому адресу:

119234, Москва, В-234, МГУ, ВЗМШ, отделение математики, **на прием;**

либо по электронной почте: priem@vzms.org, телефон: (495) 939 39 30.

Срок отправки — не позднее 25 апреля 2011 г.

Вступительные работы обратно не высылаются.

Заявление от учителя для обучения в группе «Коллективный ученик» можно выслать до 15 сентября 2011 года. Однако, если вы решили вести такую группу на следующий год, лучше прислать заявление пораньше, чтобы до начала летних отпусков мы смогли выслать вам программу обучения и, возможно, некоторые из пособий.

Сайт математического отделения в сети Интернет — <http://math.vzms.org>

Задачи вступительной контрольной работы на отделение математики

1. (6–10-е классы.) Лариса хочет получить в результате сложения двух двенадцатизначных чисел, все цифры которых четны, число, у которого имеется двенадцать нечетных цифр. Удастся ли ей это сделать?

2. (8–10-е классы.) Известно, что $\frac{mn}{n^2 + 12m^2} = \frac{1}{7}$.
Найдите $\frac{3mn}{2n^2 - 5m^2}$.

3. (6–10-е классы.) Может ли сумма кубов двух последовательных натуральных чисел равняться кубу следующего за ними натурального числа?

4. (7–10-е классы.) Угол A треугольника ABC равен 48° . Точка E лежит на стороне BC так, что прямая AE делит данный треугольник на два равнобедренных треугольника. Найдите наибольший угол треугольника ABC .

5. (9–10-е классы.) Могут ли все члены арифметической прогрессии из натуральных чисел быть простыми?

6. (6–10-е классы.) На обычную шахматную доску (размером 8×8 клеток) кладут длинную линейку. Какое наибольшее число клеток может пересечь ее длинный край?

7. (8–10-е классы.) Может ли уравнение $x^2 + ax + b = 0$ иметь целый корень, если a и b – нечетные числа?

8. (8–10-е классы.) Пусть M – точка пересечения диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$. Найдите значение DM , если $AM = 1$, $BM = 2$, $CM = 4$.

9. (8–10-е классы.) Пусть $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. В каких пределах может изменяться значение выражения $ab + bc + ca$?

10. (7–10-е классы.) Несколько землекопов, работая по очереди, выкопали яму. При этом каждый работал столько времени, сколько нужно всем остальным, чтобы они (остальные) вместе выкопали такую же яму целиком. Во сколько раз быстрее они выкопали бы эту яму, если бы работали все вместе, если всего землекопов: а) пятеро; б) n человек? (Каждый землекоп работает с постоянной скоростью, но у разных землекопов производительность может быть разной.)

11. (7–10-е классы.) H – точка пересечения высот AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC , причем $AH = BC$. Найдите угол A треугольника.

12. (7–10-е классы.) Пусть a , b и c – натуральные числа, расположенные в порядке возрастания, причем сумма обратных им чисел, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$

и $\frac{1}{c}$, равна целому числу. Найдите все тройки $(a; b; c)$ таких чисел.

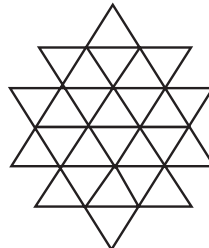
РЕШАЕМ ЗАДАЧИ «КЕНГУРУ» — 2010

18 марта поздравить «Кенгуру» с 17-летием и порешать задачи собрались более чем в 23 000 школ практически всех регионов России почти 2 миллиона ребят. А всего в конкурсе участвовало более 5 млн 842 тыс. ребят из 46 стран. С заданиями конкурса, а также с некоторыми статистическими данными о нем можно познакомиться на сайте www.kenguru.sp.ru

Проверка работ участников дает огромный и интересный статистический материал. Рассмотрим некоторые задания, которые оказались наиболее трудными для школьников или вызвали наиболее оживленное обсуждение на сайте конкурса.

Среди задач для самых младших участников наиболее трудной оказалась следующая (правильный ответ к ней указали менее 6% ребят).

Задача 1. (№ 24 для 3–4-х классов.) Сколько треугольников изображено на рисунке?



- (А) 26 (Б) 42 (В) 50 (Г) 52 (Д) 54

Решение. Подсчитаем количество треугольников, обращенных вершиной вверх (картинка симметрична относительно горизонтальной оси, поэтому общее количество треугольников будет в 2 раза больше).

Пусть сторона самого маленького треугольника равна 1. Тогда треугольников со стороной 1 и «смотрящих» вершиной вверх — 13. Сторону длины 2 имеют 8 треугольников, сторону длины 3 имеют 4 треугольника, длины 4 — только 1 треугольник. Получается $13 + 8 + 4 + 1 = 26$ треугольников, «смотрящих вверх». Тогда общее количество треугольников равно $26 \cdot 2 = 52$.

Самыми популярными ответами оказались А (26) и Б (42). Первый из этих ответов выбрали те, кто сосчитал только самые маленькие треугольники, а второй — те, кто увидел еще и треугольники со стороной 2.

Следующая задача оказалась одной из самых обсуждаемых.



К материалу есть приложение на CD-диске, вложенном в № 4.

Задача 2. (№ 23 для 3–4-х классов.) Мама разрешает Пете играть в компьютерные игры только по понедельникам, пятницам и нечетным числам. Какое наибольшее число дней подряд Петя сможет играть?

(А) 7 (Б) 6 (В) 4 (Г) 3 (Д) 2

Решение. Заметим, что в календаре могут встретиться два нечетных числа подряд: например, 31 января и 1 февраля. Если при этом 30 января — пятница, то 2 февраля — понедельник. Тогда Пете удастся играть 29 января, 30 января, 31 января, 1 февраля, 2 февраля и 3 февраля, то есть целых 6 дней подряд! Ясно, что большее число игровых дней подряд получить невозможно.

Конечно, эту задачу едва ли можно назвать по-настоящему трудной, но из-за того, что правильный ответ к ней кажется совершенно неожиданным, его указали всего 10,6% ребят. Самое удивительное, что старшеклассники, которым предлагалась аналогичная задача, справились ней так же плохо (ее решили 10,7% учеников 7–8-х классов и 12,6% учеников 9–10-х классов). Вот эта задача.

Задача 3. (№ 19 для 7–10-х классов.) Дворник работает по вторникам, пятницам и нечетным числам. Какое наибольшее количество дней подряд он может работать?

(А) 3 (Б) 4 (В) 5 (Г) 6 (Д) 7

Однако неверные ответы младшие и старшие выбирали по-разному: младшим больше всего понравился ответ В (4) (его выбрали 23% второклассников, 30% третьеклассников и 34% четвероклассников), а старшие облюбовали ответ А (3) (около 40% во всех параллелях).

Не менее живое обсуждение на сайте вызвала еще одна задача.

Задача 4. (№ 26 для 3–4-х классов.) Знайка, Незнайка, Винтик и Шпунтик съели торт. Они ели по очереди, и каждый из них ел столько времени, сколько понадобилось бы трем другим едокам, чтобы, «работая» вместе, съесть половину торта. Во сколько раз быстрее они съели бы торт, если бы ели его не по очереди, а все вместе?

(А) 2 (Б) 3 (В) 4 (Г) 5 (Д) 6

Решение. Пусть в тот момент, когда Знайка начал есть свою долю торта, остальные трое начинают вместе есть другой, точно такой же торт (при этом скорость каждого едока всегда остается одной и той же, независимо от того, какой торт он ест). Когда эти трое съедят половину своего торта, наступит очередь кого-то из них прийти на смену Знайке.

Пусть Знайку сменяет Незнайка, а Знайка присоединяется к Винтику и Шпунтику, и все четверо продолжают есть дальше. Когда Знайка, Винтик и Шпунтик съедят половину торта (их торт при этом кончится), наступит очередь сменить Незнайку у первого торта.

Допустим, Незнайку сменяет Винтик, а остальные трое начинают есть еще один точно такой же торт. Когда они съедят половину этого торта, наступит время Шпунтику заменить Винтика у первого торта (Винтик при этом присоединяется к Знайке и Незнайке). Когда эта тройка доест оставшуюся половину своего торта, Шпунтик доест первый торт. Всего за это время будет съедено 3 торта. Итак, за то время, которое нужно этой компании, чтобы съесть торт «по очереди», все вместе они могут съесть 3 торта, то есть вместе они едят в три раза быстрее, чем по очереди.

Вариант для 5–6-х классов начинался с такой задачи.

Задача 5. (№ 1 для 5–6-х классов.) В 2009 году в конкурсе «Кенгуру» приняли участие 5,5 миллиона ребят из 46 стран. Каждый из них заполнил бланк ответов. Если один бланк весит 3 грамма, то все эти бланки вместе весят

(А) 165 тонн (Б) 16,5 тонн
(В) 1,65 тонны (Г) 165 кг (Д) 16,5 кг

К сожалению, с этой простенькой задачей справились всего 40% пятиклассников и 47% шестиклассников. А наиболее трудными в этом варианте оказались следующие две задачи.

Задача 6. (№ 15 для 5–6-х классов.) Для каждой пары различных чисел из ряда 1, 2, 3, ..., 2010 робот находит их сумму. Сколько различных результатов он получит?

(А) 4020 (Б) 4019
(В) 4018 (Г) 4017 (Д) 2010

Для решения этой задачи надо было заметить, что наименьшая сумма, полученная роботом, равна $1 + 2 = 3$, а наибольшая сумма равна $2010 + 2009 = 4019$. Количество чисел в этом ряду равно $4019 - 2 = 4017$.

Правильно на вопрос задачи ответили примерно 8% участников. Огромной популярностью пользовался ответ А, его выбрали 41% пятиклассников и 46% шестиклассников.

Задача 7. (№ 27 для 5–6-х классов.) Какой цифрой оканчивается самое маленькое число, у которого произведение цифр равно 2000?

(А) 0 (Б) 2 (В) 4 (Г) 5 (Д) 8

Решение. Заметим, что $2000 = 2 \cdot 10^3 = 2 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^4 \cdot 5^3$. Чтобы число с таким произведением цифр сделать поменьше, нужно постараться сделать в нем как можно меньше цифр. Ясно, что цифру 5 придется взять 3 раза (при умножении ее на 2, 4 или 8 получается двузначное число). А вот 2^4 можно представить в виде произведения двух цифр двумя способами: $2^4 = 4 \cdot 4 = 2 \cdot 8$. Итак, искомое число будет пятизначным. Чтобы оно было самым маленьким из всех возможных, нужно первой цифрой в числе поставить самую меньшую. Из всех возможных вариантов надо выбрать цифру 2. Теперь число легко дописать до конца 25 558. Мы видим, что оно оканчивается цифрой 8.

Этот ответ указали всего 7% школьников обеих параллелей. Среди неверных ответов особой популярностью пользовались А (0) и Б (2), каждый из них понравился более чем 30% участников.

Красивый и неожиданный ответ к следующей задаче указали всего 13% школьников обеих параллелей.

Задача 8. (№ 30 для 5–6-х классов.) На клетчатой доске 4×4 есть 4 горизонтальных ряда клеток, 4 вертикальных и 10 диагональных рядов (угловые клетки рядов не образуют). На этой доске отметили 10 клеток так, что число рядов с четным количеством отмеченных клеток оказалось самым большим из возможных (0 — число четное!). Чему равно это число рядов?

(А) 18 (Б) 17 (В) 16 (Г) 14 (Д) 12

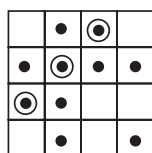


Рис. 1

Решение. На рисунке 1 показано, что можно так отметить клетки, что рядов с нечетным числом клеток окажется всего один. Убедимся в том, что сделать все ряды четными невозможно (от участников конкурса этого, конечно, не требуется).

Прежде всего заметим, что, распределяя 10 точек по 4 горизонтальным рядам так, чтобы в каждом ряду было четное число точек, мы обязательно получим хотя бы один ряд с 4 точками. Допустим, таких рядов 2 ($10 = 4 + 4 + 2$), размещая оставшиеся 2 точки в один вертикальный ряд, мы получим две «нечетные» горизонтали, а поместив их в одну горизонталь (и разные вертикали), получим две «нечетные» вертикали. Итак, мы можем рассматривать только расстановки с одной горизонталью из 4 клеток. Ясно, что точно то же можно сказать и о вертикальных рядах. Поэтому мы дальше будем рассматривать только расстановки с одной вертикалью и одной горизонталью из 4 точек.

С точностью до поворотов, эти 2 ряда (горизонтальный и вертикальный) могут располагаться одним из трех способов (рис. 2).

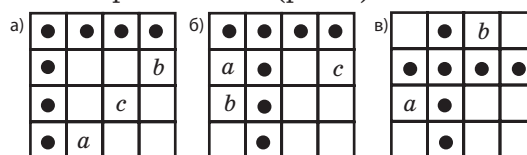


Рис. 2

Рассмотрим рисунок 2, «а». Чтобы на диагоналях из двух клеток было четное число точек, мы обязаны поставить по точке в клетках a и b . Чтобы одновременно добавить по точке к третьей строке и третьему столбцу, нужно поставить последнюю точку в клетку c . Но тогда на диагонали acb образуется 3 точки!

Чтобы на рисунке «б» на каждой диагонали из двух клеток было четное число точек, нужно разместить недостающие 3 точки в клетках a , b и c . Но тогда нечетное число точек образуется, например, в первом столбце.

Наконец, рассмотрим рисунок «в». Как и раньше, из-за двухклеточных диагоналей мы обязаны пометить клетки a и b . Но при этом они попадают на трехклеточную диагональ, на которой уже отмечена одна клетка, и мы снова получаем ряд с нечетным числом клеток (заметим, что при этом получается в точности рисунок 1 с единственным нечетным рядом).

Итак, самое большое количество рядов с четным числом точек — это 17.

Для учеников 7–8-х классов неожиданно трудным оказался следующий вопрос, с которым справилось около 15% участников.

Задача 9. (№ 6 для 7–8-х классов.) Среди нескольких различных простых чисел ровно $n\%$ делятся на 3. Чему не может быть равно n ?

(А) 10 (Б) 20 (В) 25 (Г) 40 (Д) 50

Решение. На 3 делится только одно простое число: 3. Если оно попало в данный набор из k простых чисел, то оно составляет $\frac{1}{k} \cdot 100\%$ от их числа, если не попало — 0%. То есть, нам нужно выяснить, при каких n выражение $\frac{n}{100}$ нельзя представить в виде $\frac{1}{k}$. При $n = 10, 20, 25$ и 50 такое представление возможно (получаем $\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}$ соответственно). А вот при $n = 40$ это невозможно: $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$. Итак, n не может равняться 40.

Впрочем, ученики 9–10-х классов, которым была предложена следующая, полностью аналогичная задача, справились с ней ненамного лучше: верные ответы указали 22% девятиклассников и 25% десятиклассников. При этом более трети участников выбрали явно провокационный ответ Д (50).

Задача 10. (№ 9 для 9–10-х классов.) Среди нескольких различных простых чисел ровно $n\%$ делится на 5. Чему не может быть равно n ?

- (А) 25 (Б) 20 (В) 15 (Г) 10 (Д) 5

Задачи «на проценты» вообще нередко становятся камнем преткновения для многих участников. И хотя следующая задача не попала в число самых трудных, но на сайте конкурса ее обсуждали очень бурно.

Задача 11. (№ 13 для 7–8-х классов.) В музыкальной школе количество участников конкурса «Кенгуру» составляет 5% от количества всех девочек и 20% от количества всех мальчиков. Сколько процентов учеников этой школы участвуют в конкурсе «Кенгуру»?

- (А) 2% (Б) 4% (В) 5% (Г) 8% (Д) 12,5%

Решение. Пусть x — количество участников конкурса «Кенгуру» в школе. Тогда x — это $\frac{1}{20}$ от числа всех девочек и $\frac{1}{5}$ от числа всех мальчиков. Значит, девочек в школе $20x$, а мальчиков — $5x$. Тогда всего учеников в школе $25x$, и число участников x составляет $\frac{1}{25} = \frac{4}{100} = 4\%$ от числа учеников школы.

С этой задачей справились примерно 30% участников обеих параллелей, но практически столько же ребят выбрали ответ Д, то есть просто взяли среднее арифметическое данных величин.

И, как обычно, трудной оказалась последняя задача варианта.

Задача 12. (№ 30 для 7–8-х классов.) Наименьшее общее кратное чисел 24 и x меньше, чем наименьшее общее кратное чисел 24 и y . Чему не может быть равно отношение $\frac{y}{x}$?

- (А) $\frac{7}{8}$ (Б) $\frac{8}{7}$ (В) $\frac{2}{3}$ (Г) $\frac{7}{6}$ (Д) $\frac{6}{7}$

Решение. Покажем, что отношение $\frac{y}{x}$ равно $\frac{6}{7}$. то есть если $\frac{y}{x} = \frac{6}{7}$, то $\text{НОК}(24; y) \leq \text{НОК}(24; x)$. В самом деле, если $\frac{y}{x} = \frac{6}{7}$, то при некотором натуральном k , $x = 7k$, а $y = 6k$. Но тогда

$$\begin{aligned}\text{НОК}(24; x) &= \text{НОК}(24; 7k) = 7\text{НОК}(24; k), \\ \text{НОК}(24; y) &= \text{НОК}(24; 6k) \leq 6\text{НОК}(24; k) < \\ &< 7\text{НОК}(24; k) = \text{НОК}(24; x).\end{aligned}$$

Итак, верный ответ — Д. Для всех остальных вариантов ответа нетрудно придумать примеры чисел, удовлетворяющих условиям задачи. Например:

- если $x = 8 \cdot 3$, $y = 7 \cdot 3$, то $\text{НОК}(24; x) = 24$, $\text{НОК}(24; y) = 24 \cdot 7 > \text{НОК}(24; x)$, и $\frac{y}{x} = \frac{7}{8}$;
- если $x = 24 \cdot 7$, $y = 24 \cdot 8$, то $\text{НОК}(24; x) = 24 \cdot 7$,

$$\text{НОК}(24; y) = 24 \cdot 8 > \text{НОК}(24; x), \text{ и } \frac{y}{x} = \frac{8}{7};$$

- если $x = 3 \cdot 8$, $y = 2 \cdot 8$, то $\text{НОК}(24; x) = 24$,

$$\text{НОК}(24; y) = 48 > \text{НОК}(24; x), \text{ и } \frac{y}{x} = \frac{2}{3};$$

- если $x = 24 \cdot 6$, $y = 24 \cdot 7$, то $\text{НОК}(24; x) = 24 \cdot 6$,

$$\text{НОК}(24; y) = 24 \cdot 7 > \text{НОК}(24; x), \text{ и } \frac{y}{x} = \frac{7}{6}.$$

По традиции в варианты конкурса включаются задачи, для решения которых требуется сочетать комбинаторные и теоретико-числовые рассуждения. Как правило, они оказываются довольно трудными для участников. Не стал исключением и следующий незамысловатый вопрос (верно на него ответили 13% девятиклассников и 16% десятиклассников, причем около 40% ребят выбрали странный ответ Г).

Задача 13. (№ 17 для 9–10-х классов.) Сколько натуральных чисел имеют сумму цифр 2010 и произведение цифр 2?

- (А) 2010 (Б) 2009
(В) 2008 (Г) 1005 (Д) 1004

Решение. Произведение цифр, равное 2, можно получить, только составив число из одной цифры 2 и, возможно, из нескольких единиц. Чтобы при этом сумма цифр оказалась равной 2010, нужно, чтобы единиц было 2008. Итак, в наших числах одна двойка и 2008 единиц — всего 2009 знаков. Двойку можно поставить на любое из 2009 мест, а на остальные места придется поставить единицы. Значит, таких чисел 2009.

Вот еще одна задача из этого же ряда.

Задача 14. (№ 21 для 9–10-х классов.) Для скольких чисел n из набора 1, 2, 3, ..., 100 число n^n является квадратом некоторого натурального числа?

- (А) 5 (Б) 10 (В) 50 (Г) 54 (Д) 55

Решение. Чтобы число n^n было квадратом натурального числа, нужно, чтобы n было четным (тогда

$n^n = \left(n^{\frac{n}{2}}\right)^2$) или чтобы n было квадратом некоторого натурального числа (если $n = k^2$, то $n^n = (k^2)^n = (k^n)^2$). Никаких других возможностей нет. В этом можно убедиться, если записать n в виде разложения на простые множители: $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$. Если n — не квадрат, то хотя бы одно из чисел k_i нечетно. А если и n нечетно, то $n^n = p_1^{nk_1} \cdot p_2^{nk_2} \cdot \dots \cdot p_m^{nk_m}$ и число nk_i тоже нечетно, а значит, n^n — не квадрат.

Итак, годятся все четные n из набора 1, 2, 3, ..., 100 (их 50) и нечетные n из этого набора, которые являются квадратами (их 5: 1^2 , 3^2 , 5^2 , 7^2 , 9^2). Всего получаем 55 значений n .

Эта задача оказалась самой трудной во всем варианте: с ней справились около 6% участников обеих параллелей, а почти половина ребят выбрали ответ Б.

ЛАДЕЙНЫЕ ЧИСЛА

Рассмотрим обычную шахматную доску и обычную шахматную фигуру — ладью. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску две ладьи так, чтобы они не били друг друга? Какое наибольшее число ладей можно поставить на доску так, чтобы каждая ладья была не более двух других? Можно задать много подобных вопросов, наверняка читатель встречал такого рода задачи на олимпиадах или в книжках по занимательной математике.

Вопросы, о которых пойдет речь, являются естественными обобщениями задач о расстановке ладей. Мы рассмотрим произвольные доски и обсудим многочисленные свойства ладейных чисел. Для начала несколько определений.

Определения и примеры

Пусть дана бесконечная клетчатая плоскость. *Доской* будем называть произвольный конечный набор клеток этой плоскости. *Ладья* — это фигура, которая держит под боем все клетки плоскости, находящиеся с ней на одной горизонтали или на одной вертикали.



Рис. 1

Таким образом, для досок сложной формы ладья может держать под боем клетки, отделенные от нее клетками, не принадлежащими доске. Так, на рисунке 1 изображена несвязная доска из пяти клеток, ладья и клетки, находящиеся под боем этой ладьи (отмечены крестиками).

Зафиксируем произвольную доску B и для каждого натурального n вычислим количество различных способов поставить на эту доску n не бьющих друг друга ладей. Обозначим это количество r_n или $r_n(B)$, если нужно указать, о какой именно доске идет речь. Положим по определению $r_0 = 1$. Числа $r_0, r_1, r_2, \dots$ называются *ладейными числами* доски B .

Очевидно, что $r_1(B) = S$, где S — площадь (количество клеток) доски B .

Если же мы хотим разместить на доске слишком много ладей — больше S , то у нас ничего не получится: все ладьи не поместятся на нашу доску. Таким образом, для любой доски ладейные числа с большими номерами равны нулю.

В таблице на рисунке 2 приведены примеры досок, состоящих из пяти клеток, и все их ненулевые ладейные числа. Заметим, что доски разной формы могут иметь одинаковые наборы ладейных чисел.

1. Проверьте данные таблицы на рисунке 2.



О. Домье Шахматисты



Доски	r_0	r_1	r_2	r_3
	1	5		
	1	5	3	
	1	5	4	
	1	5	5	
	1	5	5	1
	1	5	6	1

Рис. 2

Для вычисления ладейных чисел часто хватает несложных комбинаторных соображений. Найдем, например, чему равно число r_3 для обычной шахматной доски 8×8 . Трех ладей на доске 3×3 можно расставить $3!$ способами. Чтобы расставить трех ладей на доске 8×8 , достаточно сначала выбрать три вертикали и три горизонтали — это можно сделать $\binom{8}{3}^2$ способами, а потом на образовавшейся доске 3×3 взять одну из шести расстановок. Итак, для шахматной доски $r_3 = 6 \cdot 7^2 \cdot 8^2$.

Приведем еще один пример.

Лемма I. Пусть имеется доска B и $c \in B$ — произвольная клетка. Пусть $\text{Крест}(c)$ — это множество клеток доски B , лежащих на той же горизонтали или в той же вертикали, что и клетка c . Тогда

$$r_k(B) = r_k(B \setminus c) + r_{k-1}(B \setminus \text{Крест}(c)). \quad (1)$$

(Здесь мы используем обычные обозначения: $B \setminus c$ — это доска, полученная из B удалением клетки c .)

Доказательство очевидно: поставить k ладей на доску B можно либо разместив их так, чтобы клетка c осталась свободной (это можно сделать $r_k(B \setminus c)$ способами), либо поставив одну ладью в клетку c , тогда остальные придется ставить вне креста клетки c (это можно сделать как раз $r_{k-1}(B \setminus \text{Крест}(c))$ способами).

Заметим, что утверждение леммы I показывает, как можно вычислить ладейные числа какой-нибудь доски, если известны ладейные числа меньших досок. Таким образом, на самом деле равенство (1) — это рекуррентная формула, с помощью которой мы можем вычислять ладейные числа любой доски B (лучше на компьютере), не пользуясь никакими комбинаторными идеями. Правда, придется накопить довольно много информации о ладейных числах доски, которые содержатся в B .

Теперь, когда мы убедились, что вычисление ладейных чисел — задача в принципе решаемая, введем еще одно понятие. Две доски назовем *эквивалентными*, если наборы ладейных чисел у этих досок совпадают. Примеры эквивалентных досок можно видеть в таблице на рисунке 2.

Изучая ладейные числа различных досок, хотелось бы научиться для каждой доски подбирать эквивалентную доску «достаточно простой» формы.

Естественный и простой способ преобразовать доску так, чтобы ее ладейные числа не изменились, состоит в перестановке вертикальных или горизонтальных рядов клеток, составляющих эту доску. Так, для доски на рисунке 1, переставляя вертикальный ряд клеток, содержащий изолированную клетку, «поближе» к «основной части» доски, мы можем получить связную доску, изображенную на рисунке 3, что, по-видимому, можно рассматривать как «упрощение» формы. Другими естественными операциями над досками, сохраняющими ладейные числа, являются поворот на $\pm 90^\circ$ или 180° и отражения доски относительно вертикали, горизонтали или диагонали.

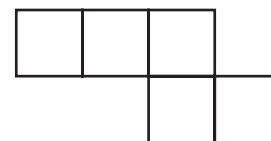
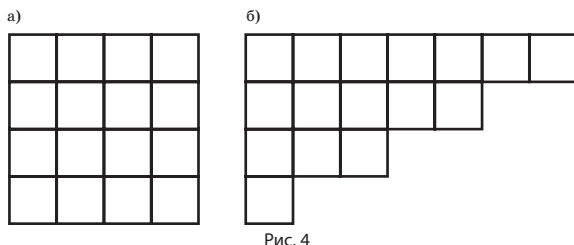


Рис. 3

Хотя эти операции и позволяют изменить форму доски, добиться «совсем простой» формы, пользуясь этими или еще какими-нибудь операциями, видимо, не удастся, что видно уже на примере все тех же пятиклеточных досок. Но все же мы будем рассматривать достаточно богатый

класс досок относительно простой формы. Это так называемые диаграммы Юнга.

Диаграмма Юнга со сторонами $b_1, b_2, \dots, b_m$ ($0 < b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_m$) — это доска, горизонтали которой выравнены по левому краю и содержат соответственно $b_1, b_2, \dots, b_m$ клеток (снизу вверх). Иногда мы будем считать, что диаграмма Юнга может иметь нулевые строки. На рисунке 3 изображены две диаграммы Юнга: квадрат 4×4 (а) и диаграмма Юнга со сторонами 1, 3, 5, 7 (б).



В заключение этого параграфа приведем нетривиальный пример двух эквивалентных досок.

2. Докажите, что доски, изображенные на рисунке 4, а, б, эквивалентны!

Теорема I. Квадратная доска $n \times n$ эквивалентна доске Y_n в форме диаграммы Юнга с длинами сторон 1, 3, 5, ..., $2n - 1$.

Доказательство. Обозначим квадрат $n \times n$ через K_n . Мы построим по индукции взаимно однозначное соответствие между расстановками ладей в K_n и в Y_n , следуя А. Левиту.

База индукции $n = 1$ очевидна. Докажем индукционный переход. Разобьем квадрат K_n на две части: квадрат K_{n-1} и «рамку», состоящую из $2n - 1$ клеток. Треугольную доску Y_n тоже разобьем на две части: доску Y_{n-1} и самую длинную горизонталь (тоже из $2n - 1$ клеток). Допустим, что совпадение ладейных чисел квадрата K_{n-1} и треугольника Y_{n-1} уже установлено. Тогда можно считать, что построено соответствие между расстановками ладей в квадрате $n \times n$, в которых все ладьи находятся в выделенной части $(n - 1) \times (n - 1)$, и расстановками ладей в Y_n , в которых все ладьи находятся в выделенной части Y_{n-1} . Осталось построить соответствие между расстановками ладей в Y_n , которые содержат ладью на длинной горизонтали, и расстановками ладей в K_n , которые содержат ладью в «рамке». Рассмотрим все расстановки k ладей в Y_n , содержащие ладью в длинной строке, у которых расстановка $k - 1$ ладей в Y_{n-1} фиксирована, назовем ее s , а соответствующую ей расстановку в K_{n-1} назовем t . Всего имеется $2n - k = n + (n - k)$ таких расстановок, поскольку в длинной строке ровно столько подходящих для последней ладьи клеток. Пронумеруем как-нибудь эти клетки (рис. 5).

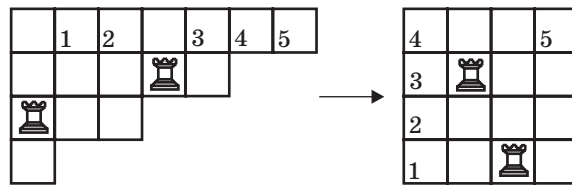


Рис. 5

Если ладья стоит на клетке с номером l , $1 \leq l \leq n$, то поставим ладью на l -ю клетку вертикальной стороны «рамки» в K_n , вычеркнем мысленно вертикаль и горизонталь, содержащие поставленную ладью, и на оставшейся части доски (которая представляет собой «раздвинутый» квадрат K_{n-1} , очевидно, у него ладейные числа такие же, как у K_{n-1}) реализуем расстановку t (рис. 6).

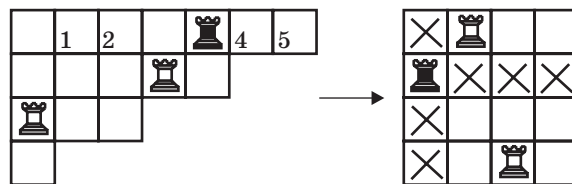


Рис. 6

Если же ладья стоит на клетке с номером $l > n$ (таких номеров имеется $n - k$), то реализуем расстановку t в стандартном квадрате K_{n-1} . Заметим, что среди $n - 1$ клеток «рамки», расположенных над K_{n-1} , есть ровно $n - k$ мест, куда можно было бы поставить ладью. Ну так и поставим ладью на $(l - n)$ -е из этих мест (рис. 7).

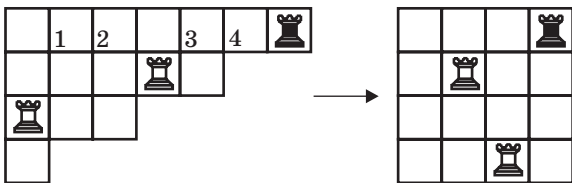


Рис. 7

Построенное соответствие является взаимно однозначным. Действительно, нетрудно предъявить обратное отображение. Если в «рамке» квадрата K_n не стоит ни одной ладьи, следует воспользоваться взаимно однозначным отображением, которое существует по индукционному предположению. Если имеется ладья, стоящая в первом столбце, следует вычеркнуть ее вместе с вертикалью и горизонталью, которые она занимает, и для оставшейся фигуры («раздвинутый» квадрат K_{n-1}) опять воспользоваться индукционным предположением. Если же в первом столбце ладьи нет, но есть ладья в первой строке, следует мысленно удалить рамку, воспользовавшись индукционным отображением, расположить ладью в диаграмме $Y_{n-1} \subset Y_n$ и добавить ладью в самую длинную строчку диаграммы Y_n на подходящее место.

Замечание. Как мы уже отмечали, число $r_1(B)$ равно площади доски B . Поэтому, доказав утверждение теоремы I, мы получили также (не самое простое, зато очень комбинаторное) доказательство равенства

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

3. Разглядывая рисунки 4–6, докажите, что

$$r_k(K_n) = r_k(K_{n-1}) + (2n - k)r_{k-1}(K_{n-1}).$$

Комбинаторные неравенства с ладейными числами

Докажем несколько неравенств с ладейными числами. Будем считать, что фиксирована произвольная доска B . Говоря о расстановке небьющих друг друга ладей, мы часто для краткости будем опускать слова «друг друга».

Неравенство 1. $C_{k+m}^k r_{k+m} \leq r_m r_k$.

Доказательство. Число $r_m r_k$ имеет ясный комбинаторный смысл: это количество способов разместить на доске k белых и m черных ладей так, чтобы белые ладьи не били белых, а черные — черных; при этом на любую клетку разрешается ставить две ладьи, если они разного цвета. Заметим, что из каждой расстановки $k + m$ небьющих ладей можно получить расстановку из k белых небьющих ладей и m черных небьющих ладей — нужно просто выбрать, какие ладьи будут белыми (это можно сделать как раз C_{k+m}^k способами), а остальные ладьи пусть будут черными. Разным исходным расстановкам и разным способам выборки соответствуют разные пары наборов белых и черных ладей, итого — $C_{k+m}^k r_{k+m}$ пар. Но, конечно же, таким способом мы можем получить далеко не все наборы белых и черных ладей, поскольку мы заведомо не получим таких наборов, где имеются черная и белая ладьи, стоящие на одной клетке.

4. Докажите неравенство $18480r_{12} \leq r_9^2$ (не будем скрывать от читателя, что $18480 = C_{12}^6 \cdot C_6^3$).

Неравенство 2. $k^{k-2} r_k \leq C_{r_2}^{k-1}$ при $1 \leq k \leq n$.

Доказательство. Для любого множества A из k небьющих ладей построим всевозможные такие наборы из $k - 1$ пар небьющих ладей, что все ладьи в этих парах принадлежат A и каждая ладья из A входит хотя бы в одну пару. Это можно сделать многими способами. Чтобы подсчитать это число способов, заметим, что любые k небьющих ладей можно считать упорядоченными, например, по расположению их горизонталей сверху вниз. Тогда каждому способу выбора $k - 1$ пар небьющих ладей можно сопоставить

граф, в котором имеется k помеченных вершин, соответствующих ладьям, и $k - 1$ ребер, соответствующих выбираемым парам. Этот граф будет, вообще говоря, несвязным; нетрудно видеть, что в нем не может быть изолированных вершин. Пусть N_k — число графов, состоящих из k неизоллированных помеченных вершин и $k - 1$ ребер. Далеко не всякий набор из $k - 1$ пар ладей может быть получен таким образом, хотя бы потому, что в наших наборах общее число ладей равно k , а в произвольном наборе их количество может быть и другим. Следовательно, мы получаем неравенство

$$N_k r_k \leq C_{r_2}^{k-1}.$$

По-видимому, для чисел N_k нет хорошей формулы. Для завершения доказательства заметим, что $N_k \geq k^{k-2}$, так как последняя величина выражает количество деревьев с k помеченными вершинами (это утверждение знаменитой теоремы Кэли).

Неравенства, которые мы сейчас рассмотрели, — грубые, поскольку не используют «геометрию» доски. Действительно, при доказательстве этих неравенств мы пользовались теоретико-множественными соображениями и никак не учитывали взаиморасположение ладей. Поэтому доказанные неравенства верны в следующей более общей ситуации. Пусть дано произвольное конечное множество A . Пусть S — некоторое свойство подмножеств множества A , удовлетворяющее условию монотонности: если множество $B \subset A$ удовлетворяет свойству S , то и любое подмножество $B' \subset B$ также удовлетворяет свойству S .

Например, пусть A — произвольное множество натуральных чисел, а S — свойство «произведение данных чисел нечетно» (или, скажем, свободно от квадратов). В применении к ладейным числам A — это множество клеток доски, S — свойство «все клетки данного подмножества ладейно независимы» (то есть каждая вертикаль и горизонталь содержат не более одной клетки из множества S). Пусть r_k — количество k -элементных подмножеств множества A , удовлетворяющих свойству S . Тогда величины r_k удовлетворяют неравенствам 1 и 2.

Следующее неравенство значительно тоньше.

Неравенство 3. $r_{k-1} r_{k+1} \leq r_k^2$.

Доказательство. Опять воспользуемся комбинаторным смыслом обеих частей неравенства: $r_{k-1} r_{k+1}$ — это количество способов поставить на доску $k - 1$ черных небьющих ладей и $k + 1$ белых небьющих ладей так, что ладьи разных цветов могут стоять на одной клетке; r_k^2 — это ко-

личество аналогичных расстановок k черных и k белых ладей.

Фиксируем произвольный набор C из $2k - m$ клеток доски, $0 \leq m \leq k$. Пусть p_C — количество расстановок $k - 1$ черных и $k + 1$ белых ладей, в которых все клетки из C заняты ладьями, назовем эти расстановки расстановками первого типа, будем считать, что $p_C = 0$ при $m = k$; q_C — количество расстановок k черных и k белых небьющих ладей на C , в которых все клетки из C заняты ладьями, — расстановки второго типа. Покажем, что $p_C \leq q_C$ для каждого множества C из $2k - m$ клеток, $0 \leq m \leq k$. Из этого утверждения сразу следует требуемое неравенство.

Пусть $C = C_1 \cup C_2$, где C_1 — объединение всех одноклеточных компонент связности (по отношению к ходу ладьи) множества C , $C_2 = C \setminus C_1$. Пусть часть C_1 содержит u клеток.

Для того чтобы на доске C можно было разместить хотя бы одну расстановку первого или второго типа, необходимо, чтобы в каждой вертикали и каждой горизонтали содержалось не более двух клеток доски C . Это значит, что достаточно рассматривать только такие доски C , в которых все неодноклеточные компоненты связности имеют вид «лестничных диаграмм» или их «циклических замыканий» (компоненты A и B на рис. 7), для остальных досок C выполняется $p_C = q_C = 0$. Пусть имеется s неодноклеточных компонент связности, $C_2 = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_s$ — разбиение части C_2 на компоненты связности, пусть t — количество лестничных диаграмм с нечетным числом клеток среди них (см. рис. 8).

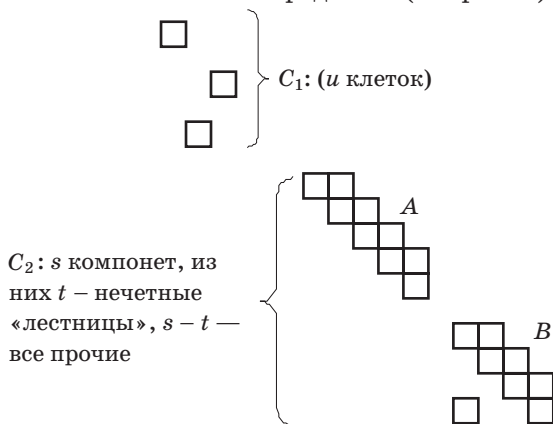


Рис. 8

Рассмотрим расстановки первого типа, в которых все клетки доски C заняты. Очевидно, что в m клетках доски C должны стоять по две ладьи, а в остальных $2k - 2m$ клетках — по одной. Заметим, что все m клеток с двумя ладьями обязательно должны располагаться в части C_1 . Поэтому, чтобы построить произвольную расстановку первого типа, мы сначала выберем m клеток среди u клеток части C_1 , а оставшиеся

клетки доски C раскрасим в два цвета так, чтобы ладьи, стоящие на клетках одного цвета, не били друг друга. Заметим, что для каждой «циклической лестничной диаграммы», а также для лестничной диаграммы с четным числом клеток существует ровно две такие раскраски, причем черных и белых клеток в этих раскрасках поровну. Для лестничной диаграммы с нечетным числом клеток (в том числе одноклеточной) существуют также две раскраски, причем в одной из них черных клеток будет на единицу больше, чем белых, сопоставим такой диаграмме значение $+1$; в другой — наоборот, белых клеток будет больше чем черных, сопоставим такой диаграмме значение -1 .

Выбор раскраски состоит теперь в том, что мы должны выбрать одну из двух возможностей для каждой компоненты D_i и каждой из $u - m$ невыбранных клеток части C_1 , причем сумма значений выбранных раскрасок для всех лестничных диаграмм с нечетным числом клеток должна быть равна -2 (чтобы черных клеток получилось на две меньше, чем белых). Последнее, кстати, возможно только в том случае, когда число $u - m + t$ четно. Итак, количество расстановок первого типа, в которых все клетки доски C заняты, равно

$$p_C = C_u^m 2^{s-t} C_{u-m+t}^{\frac{u-m+t}{2}-1}.$$

Здесь C_u^m — это число способов выбрать m клеток из u клеток части C_1 , 2^{s-t} — это количество способов выбрать раскраску в компонентах вида «циклическая лестничная диаграмма» и «лестничная диаграмма с четным числом клеток», $C_{u-m+t}^{\frac{u-m+t}{2}-1}$ — количество способов выбрать расстановку знаков у набора из $u - m + t$ единиц так, чтобы сумма полученных чисел со знаками была равна -2 .

По аналогичным соображениям число расстановок второго типа для той же доски C равно

$$q_C = C_u^m 2^{s-t} C_{u-m+t}^{\frac{u-m+t}{2}},$$

и мы видим, что оно не меньше числа расстановок первого типа. Неравенство доказано.

Как видим, доказательство неравенства 3 громоздко, требуются заметные усилия, чтобы его понять. Замечательно, что позже мы сумеем дать значительно более простое аналитическое доказательство этого неравенства и даже усилить его.

Полный текст опубликован: Кохась К.П. Ладейные числа и многочлены. — М.: МЦНМО, 2003. — (Библиотечка «Математического просвещения», вып. 26).

ЧИСЛО e
2,718281828459045235360287471352662497757...

Спирали, встречающиеся в природе, чаще всего бывают логарифмическими. Раковины наutilus и улитки, соцветия маргаритки и подсолнечника, шишки сосны и паутина, сплетаемая одним из наиболее распространенных пауков, эпейра. В книге Жана Анри Фабра «Жизнь паука» целое приложение посвящено математическим свойствам логарифмической спирали и наиболее замечательным случаям, когда она встречается в мире растений и животных.

Наиболее впечатляющим примером является спиральная структура галактик. И этот факт представляет не меньшую загадку, чем проблема их строения. Галактики состоят из горячих звезд и скоплений газа, которые в результате вращения галактики распределяются вдоль ветвей логарифмической спирали. У центра галактики ветви спирали вращаются быстрее, чем на границе, то есть они должны были бы быстро раскручиваться, и даже уничтожиться. Однако галактики, как правило, сохраняют спиральную структуру, что говорит о том, что ветви вовсе не раскручиваются.

По книге М. Гарднера «Математические досуги»



2,7182818284590452353602874713526624977...

МАТЕМАТИКА