МАТЕМАТИКА

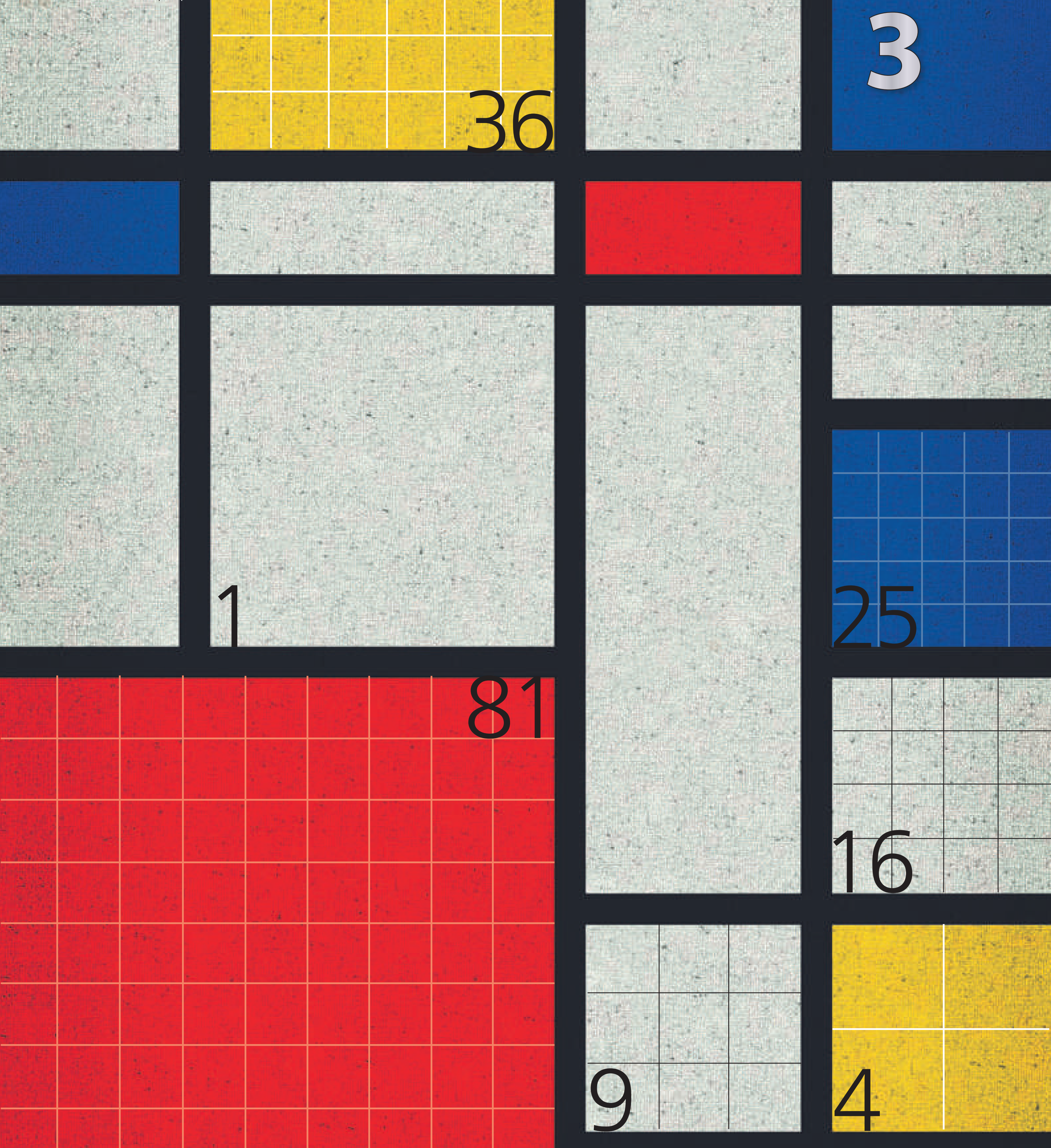
МЕТОДИЧЕСКАЯ ГАЗЕТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

1-15 февраля 2011

основана в 1992 г.

mat.1september.ru

3



издательский дом

Первое сентября

1september.ru

МАТЕМАТИКА индексы подписки: Почта России 79073 (инд.); 79583 (орг.); Роспечать 32030 (инд.) 32594 (орг.)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Главный редактор: Артем Соловейчик (генеральный директор)
Коммерческая деятельность: Константин Шмарковский (финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов: Сергей Островский (исполнительный директор)
Реклама и продвижение: Марк Сартан
Мультимедиа, конференции и техническое обеспечение: Павел Кузнецов
Производство: Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение: Андрей Ушаков
Дизайн: Иван Лукьянов, Андрей Балдин
Педагогический университет: Валерия Арсланьян (ректор)

ГАЗЕТЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Первое сентября – Е. Бирюкова,
Английский язык – А. Громушкина,
Библиотека в школе – О. Громова,
Биология – Н. Иванова,
География – О. Коротова,
Дошкольное образование – М. Аромштам,
Здоровье детей – Н. Сёмина,
Информатика – С. Островский,
Искусство – М. Сартан,
История – А. Савельев,
Классное руководство и воспитание школьников –О. Леонтьева,
Литература – С. Волков,
Математика – Л. Рослова,
Начальная школа – М. Соловейчик,
Немецкий язык – М. Бузоева,
Русский язык – Л. Гончар,
Спорт в школе – О. Леонтьева,
Управление школой – Я. Сартан,
Физика – Н. Козлова,
Французский язык – Г. Чесновицкая,
Химия – О. Блохина,
Школьный психолог – И. Вачков

УЧРЕДИТЕЛЬ: ООО «ЧИСТЫЕ ПРУДЫ»
Зарегистрировано ПИ № 77-7241 от 12.04.01
в Министерстве РФ по делам печати
Подписано в печать: по графику 13.01.11, фактически 13.01.11 Заказ №
Отпечатано в ОАО «Чеховский полиграфический комбинат»
ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: (499) 249-3138
Отдел рекламы: (499) 249-9870
Сайт:1september.ru

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: (499) 249-4758
E-mail: podpiska@1september.ru

В НОМЕРЕ:

ТЕМА НОМЕРА: ПОИСК РАЗНЫХ РЕШЕНИЙ

К материалам, обозначенным этим символом, есть приложение на CD-диске, вложенном в № 4.

МАТЕМАТИКА
Методическая газета для учителей математики
Основана в 1992 г.
Выходит два раза в месяц

Газета распространяется по подписке
Цена свободная Тираж 10 000 экз.
Тел. редакции: (499) 249-3460
E-mail: mat@1september.ru
Сайт: mat.1september.ru

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, И. Бокова, О. Макарова
Дизайн макета и обложки: И. Лукьянов
Корректор: Л. Громова
Верстка: Л. Кукушкина

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Роспечать:
инд.–**32030**;
орг.–**32594**
Почта России:
инд.–**79073**;
орг.–**79583**

И СНОВА: ЧТО ДЕЛАТЬ?

Л. РОСЛОВА

В конце года опубликованы очередные результаты международной программы по оценке образовательных достижений учащихся, известной как PISA. Ключевой вопрос исследования – «обладают ли учащиеся 15-летнего возраста, получившие общее обязательное образование, знаниями и умениями, необходимыми им для полноценного функционирования в обществе». Исследование направлено не на определение уровня освоения школьных программ, а на оценку способности учащихся применять полученные в школе знания и умения в жизненных ситуациях. Так что же наши выпускники основной школы?

Сухая и бесстрастная статистика безжалостно свидетельствует: «по результатам исследования математической грамотности 15-летних учащихся в 2009 году российские учащиеся оказались в группе стран, результаты которых существенно ниже результатов стран ОЭСР. Средний балл российских учащихся составил 468 баллов (по странам ОЭСР – 496), что соответствует 38–40 местам среди 65 стран-участниц».

И еще: не достигли порогового уровня математической грамотности 28,5% российских учащихся и лишь чуть более 5% обладают продвинутым математическим мышлением и умением проводить рассуждения и могут выполнять задания самого высокого уровня трудности.

Неожиданно? Ведь гордиться высоким уровнем российского математического образования – наша традиция. Вряд ли, мы ведь уже и сами умеем кое-что измерять – у нас есть ЕГЭ и ГИА. А их результаты у меня лично вызывают серьезные опасения, ни много ни мало, за судьбу страны.

Задания с намеком на практическую ориентацию, появившиеся в ГИА после 2004 г., вызвали поначалу довольно резкую реакцию учителей. Мотив понятен и ожидаем — мы этому не учим. А почему, собственно? Пришло осознание необходимости и понимание того, что не надо ничего ломать, надо лишь сделать в процессе обучения несколько иные акценты — и результаты выполнения этих заданий в ГИА несколько улучшились. Но, как видим, на итогах международного исследования не сказались: результаты стабильны на всех трех этапах его проведения, начиная с 2003 г.

«Математическая грамотность – способность человека определять и понимать роль математики в мире, в котором он живет, высказывать хорошо обоснованные математические суждения и использовать математику так, чтобы удовлетворять в настоящем и будущем потребности, присущие созидательному, заинтересованному и мыслящему гражданину». Так определяется математическая грамотность в исследовании PISA. Так что же нам надо делать сегодня, чтобы завтра наши граждане как минимум могли обеспечить свои потребности? И вообще, были созидательными, заинтересованными и мыслящими? Есть ли ответ на этот вопрос?

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ

КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ В 2011 ГОДУ ГОСУДАРСТВЕННОЙ (ИТОГОВОЙ) АТТЕСТАЦИИ (В НОВОЙ ФОРМЕ) ПО МАТЕМАТИКЕ ОБУЧАЮЩИХСЯ, ОСВОИВШИХ ОСНОВНЫЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ПРОГРАММЫ ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Инструкция по выполнению работы

Работа состоит из двух частей. В первой части 18 заданий, во второй — 5. На выполнение всей работы отводится 4 часа (240 минут). Время выполнения первой части ограничено — на нее отводится 90 минут; по истечении этого времени ответы на задания первой части работы сдаются.

При выполнении заданий первой части нужно указывать только ответы, ход решения приводить не надо.

При этом:

• если к заданию приводятся варианты ответа (четыре ответа, из них правильный только один), то обведите кружком **номер** выбранного ответа;

• если ответы к заданию не приводятся, то впишите полученный ответ в отведенное для этого место;

• если требуется соотнести некоторые объекты (например, графики, обозначенные буквами А, Б, В, и формулы, обозначенные цифрами 1, 2, 3, 4), то впишите в приведенную в ответе таблицу под каждой буквой соответствующую цифру.

Если вы ошиблись в выборе ответа, то зачеркните отмеченную цифру и обведите нужную:

~~1) 26~~ 2) 20 3) 15 4) 10

В случае записи неверного ответа зачеркните его и запишите новый:

Ответ: ~~$x = -12$~~ $x = 3$

Все необходимые вычисления, преобразования и т.д. выполняйте в черновике. Если задание содержит рисунок, то на нем можно проводить нужные линии, отмечать точки, выполнять дополнительные построения.

Задания второй части выполняются на отдельном листе с записью хода решения. Текст задания можно не переписывать, необходимо лишь указать его номер.

Часть 1

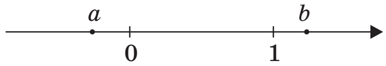
1. Площадь территории Испании составляет 506 тыс. км². Как эта величина записывается в стандартном виде?

1) $5{,}06 \cdot 10^2$ км² 2) $5{,}06 \cdot 10^3$ км²
3) $5{,}06 \cdot 10^4$ км² 4) $5{,}06 \cdot 10^5$ км²

2. Из 59 девятиклассников школы 22 человека приняли участие в городских спортивных соревнованиях. Сколько приблизительно процентов девятиклассников приняли участие в соревнованиях?

1) 0,37% 2) 27% 3) 37% 4) 2,7%

3. Числа a и b отмечены точками на координатной прямой. Расположите в порядке возрастания числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ и 1.



1) $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, 1$ 2) $1, \frac{1}{b}, \frac{1}{a}$

3) $\frac{1}{a}, 1, \frac{1}{b}$ 4) $\frac{1}{b}, \frac{1}{a}, 1$

4. Найдите значение выражения $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-1$ при $x = 1$.

Ответ: ________

5. Из формулы периода обращения $T=\frac{t}{N}$ выразите время вращения t.

Ответ: ________

6. Какое из приведенных ниже выражений тождественно равно произведению $(x - 4)(x - 2)$?

1) $(x - 4)(2 - x)$ 2) $-(x - 4)(2 - x)$

3) $(4 - x)(x - 2)$ 4) $-(4 - x)(2 - x)$

7. Представьте выражение $6m+\frac{3-7m^2}{m}$ в виде дроби.

Ответ: ________

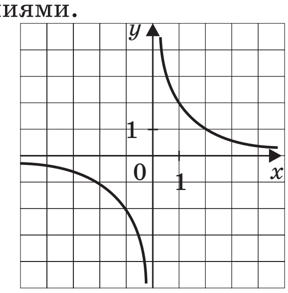
8. Какое из данных выражений **не равно** выражению $\frac{\sqrt{20}}{3}$?

1) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ 2) $\frac{20}{3\sqrt{20}}$ 3) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$ 4) $\sqrt{\frac{20}{3}}$

9. Решите уравнение $x^2 + 7x - 18 = 0$.

Ответ: ________

10. Гипербола, изображенная на рисунке, задается уравнением $y=\frac{2}{x}$. Используя рисунок, установите соответствие между системами уравнений и утверждениями.



Системы уравнений *Утверждения*

А) $\begin{cases} y=\frac{2}{x}, \\ y=x+1 \end{cases}$ 1) система имеет одно решение

Б) $\begin{cases} y=\frac{2}{x}, \\ y=1-x \end{cases}$ 2) система имеет два решения

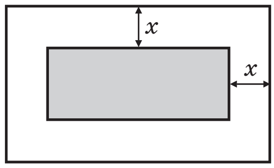
В) $\begin{cases} y=\frac{2}{x}, \\ y=-2 \end{cases}$ 3) система не имеет решений

Ответ:

А	Б	В

11. Прочитайте задачу:

«Фотография имеет форму прямоугольника со сторонами 10 см и 15 см. Ее наклеили на белую бумагу так, что вокруг фотографии получилась белая окантовка одинаковой ширины. Площадь, которую занимает фотография с окантовкой, равна 500 см². Какова ширина окантовки?»



Пусть ширина окантовки равна x см. Какое уравнение соответствует условию задачи?

1) $(10 + 2x)(15 + 2x) = 500$

2) $(10 + x)(15 + x) = 500$

3) $10 \cdot 15 + (10x + 15x) \cdot 2 = 500$

4) $(10 + 2x)(15 + x) = 500$

12. Решите неравенство $20 - 3(x + 5) < 1 - 7x$.

Ответ: ________

13. При каких значениях x верно неравенство

$$x^2 + 2x - 3 < 0?$$

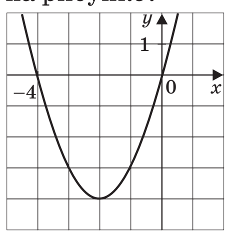
Ответ: ________

14. Из арифметических прогрессий, заданных формулой n-го члена, выберите ту, для которой выполняется условие $a_{25} < 0$.

1) $a_n = 2n$ 2) $a_n = -2n + 50$

3) $a_n = -2n + 100$ 4) $a_n = 2n - 100$

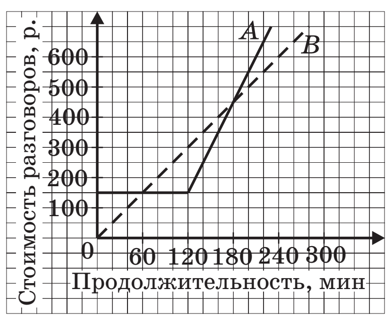
15. График какой из перечисленных ниже функций изображен на рисунке?



1) $y = x^2 + 4$ 2) $y = x^2 + 4x$

3) $y = -x^2 - 4x$ 4) $y = -x^2 - 4$

16. Компания предлагает на выбор два разных тарифа для оплаты телефонных разговоров: тариф А и тариф В. Для каждого тарифа зависимость стоимости разговора от его продолжительности изображена графически. На сколько минут хватит 550 р., если используется тариф В?



Ответ: ________ мин.

17. На каждые 100 электрических лампочек приходится 5 бракованных. Какова вероятность купить исправную лампочку?

Ответ: ________

18. Записан рост (в сантиметрах) пяти учащихся: 158, 166, 134, 130, 132. На сколько отличается среднее арифметическое этого набора чисел от его медианы?

Ответ: ________

Часть 2

При выполнении заданий 19–23 используйте отдельный лист. Сначала укажите номер задания, а затем запишите его решение.

19. Решите уравнение $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$.

20. Решите неравенство $\left(\sqrt{19}-4,5\right)(5-3x)>0$.

21. В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 108, а сумма второго и третьего членов равна 135. Найдите первые три члена этой прогрессии.

22. Прямая $y = 2x + b$ касается окружности $x^2 + y^2 = 5$ в точке с положительной абсциссой. Определите координаты точки касания.

23. Из пункта A в пункт B, расположенный ниже по течению реки, отправился плот. Одновременно навстречу ему из пункта B вышел катер. Встретив плот, катер сразу повернул и поплыл назад. Какую часть пути от A до B пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт B, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки?

Решения и критерии оценивания к заданиям части 2

19. Решите уравнение $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$.

Ответ: –2; 2; 6.

Решение. Разложим на множители левую часть уравнения. Получим: $x^2(x - 6) - 4(x - 6) = 0$,

$(x - 6)(x^2 - 4) = 0$, $x - 6 = 0$ или $x^2 - 4 = 0$.

Значит, уравнение имеет корни: –2; 2; 6.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания
2	Ход решения верный, оба его шага выполнены, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, многочлен в левой части уравнения разложен на множители, но при этом допущена ошибка в знаке, например, получен двучлен $x^2 + 4$, ответ дан с учетом этой ошибки или допущена описка на последнем шаге
0	Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям

20. Решите неравенство

$$\left(\sqrt{19}-4,5\right)(5-3x)>0.$$

Ответ: $\left(1\frac{2}{3};+\infty\right)$. Другая возможная форма ответа: $x>1\frac{2}{3}$.

Решение. 1. Определим знак разности $\sqrt{19}-4,5$. Так как $4,5=\sqrt{20,25}$ и $\sqrt{20,25}>\sqrt{19}$, то $\sqrt{19}-4,5<0$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания
3	Ход решения верный, оба его шага выполнены, получен верный ответ
2	Ход решения верный, правильно выполнен первый шаг, но при решении линейного неравенства допущена вычислительная ошибка или описка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям

21. В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 108, а сумма второго и третьего членов равна 135. Найдите первые три члена этой прогрессии.

Ответ: 48, 60, 75.

Решение. Пусть (b_n) — данная геометрическая прогрессия. Составим систему

$$\begin{cases} b_1+b_1q=108, \\ b_1q+b_1q^2=135. \end{cases}$$

Далее:

$$\begin{cases} b_1(1+q)=108, \\ b_1q(1+q)=135; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1(1+q)=108, \\ q\cdot 108=135. \end{cases}$$

Отсюда $q=\frac{5}{4}$, $b_1 = 48$.

$$b_2=48\cdot\frac{5}{4}=60,\quad b_3=60\cdot\frac{5}{4}=75.$$

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания
3	Ход решения верный, оба его шага выполнены, получен верный ответ
2	Ход решения верный, решение доведено до конца, но допущена одна вычислительная ошибка, и ответ отличается от правильного
0	Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям

22. Прямая $y = 2x + b$ касается окружности $x^2 + y^2 = 5$ в точке с положительной абсциссой. Определите координаты точки касания.

Ответ: (2; –1).

Решение. 1. Найдем значения b, при которых система $\begin{cases} y=2x+b, \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ имеет единственное решение. Выполнив подстановку, получим уравнение $x^2 + (2x + b)^2 = 5$, то есть $5x^2 + 4xb + b^2 - 5 = 0$.

2. Полученное уравнение имеет единственное решение, когда его дискриминант равен нулю. Имеем: $D_1 = 4b^2 - 5(b^2 - 5) = 25 - b^2$. Решив уравнение $25 - b^2 = 0$, получим: $b = \pm 5$.

3. Таким образом, получили уравнение двух прямых, касающихся окружности: $y = 2x + 5$ и $y = 2x - 5$. Найдем абсциссы точек касания, подставив найденные значения b в уравнение $5x^2 + 4xb + b^2 - 5 = 0$:

- при $b = 5$ получим уравнение $x^2 + 4x + 4 = 0$, откуда $x = -2$; этот корень не удовлетворяет условию задачи;
- при $b = -5$ получим уравнение $x^2 - 4x + 4 = 0$, откуда $x = 2$.

Найдем соответствующее значение y: $y = 2x - 5 = 2 \cdot 2 - 5 = -1$. Координаты точки касания (2; –1).

Замечания

1. В первом шаге решения учащийся может опустить запись системы, подставив сразу $y = 2x + b$ в уравнение окружности.

2. В третьем шаге учащийся может сначала выбрать касательную, удовлетворяющую условию задачи, а затем искать координаты точки касания; выбрать касательную учащийся может из графических соображений.

3. Решение задачи может быть геометрическим.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены, но допущена вычислительная ошибка или описка; или при верных вычислениях в ответе указаны координаты обеих точек касания
0	Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям

Комментарий. Ошибки в составлении выражения D_1 (или D), в применении формулы квадрата двучлена считаются существенными, и решение при их наличии на засчитывается.

23. Из пункта A в пункт B, расположенный ниже по течению реки, отправился плот. Одновременно навстречу ему из пункта B вышел катер. Встретив плот, катер сразу повернул и поплыл обратно. Какую часть пути от A до B пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт B, если скорость катера в стоячей воде больше скорости течения реки?

Ответ: плот пройдет $\frac{2}{5}$ всего пути.

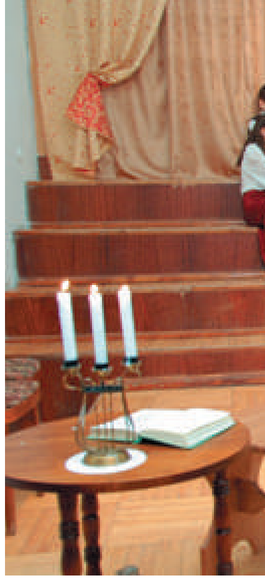
Решение. Пусть скорость течения реки (и плота) x км/ч. Тогда скорость катера против течения равна $4x - x = 3x$ км/ч, а по течению равна $4x + x = 5x$ км/ч. Следовательно, скорость катера против течения в 3 раза больше скорости плота, а по течению — в 5 раз больше скорости плота. Если плот до встречи проплыл S км, то катер — в 3 раза больше, то есть $3S$ км. После встречи катер пройдет $3S$ км, а плот — в 5 раз меньше, то есть $\frac{3S}{5}$ км. Всего плот пройдет $S+\frac{3S}{5}=\frac{8S}{5}$. Отношение пройденного плотом пути ко всему пути равно $\frac{\frac{8S}{5}}{4S}=\frac{2}{5}$.

Другое возможное решение. Пусть скорость течения реки (и плота) x км/ч. Тогда скорость катера против течения равна $4x - x = 3x$ км/ч, а по течению равна $4x + x = 5x$ км/ч. Скорость сближения катера и плота равна $x + 3x = 4x$ км/ч. Встреча произошла через $\frac{AB}{4x}$ ч. За это время плот проплыл $x\cdot\frac{AB}{4x}=\frac{AB}{4}$ км, а катер — $\frac{3AB}{4}$ км. Обратный путь катер пройдет за $\frac{\frac{3AB}{4}}{5x}=\frac{3AB}{20x}$ ч. Плот за это время проплывет расстояние, равное $x\cdot\frac{3AB}{20x}=\frac{3AB}{20}$ км, а всего он проплывет $\frac{AB}{4}+\frac{3AB}{20}=\frac{2}{5}AB$ км.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены, получен верный ответ
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены, но допущена одна ошибка — в преобразованиях или вычислениях, с ее учетом дальнейшие шаги выполнены правильно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям

Ответы к заданиям части 1

1. 4. **2.** 3. **3.** 1. **4.** $-\frac{5}{12}$. **5.** $t = TN$. **6.** 2. **7.** $\frac{3-m^2}{m}$. **8.** 4. **9.** $x_1 = 2$, $x_2 = -9$. **10.** 231. **11.** 1. **12.** $x < -1$. **13.** $-3 < x < 1$, или $(-3; 1)$. **14.** 4. **15.** 2. **16.** На 220 мин. **17.** 0,995. **18.** На 10.



С. КОЗЛОВ,
г. Великие Луки,
Псковская обл.

Все фото предоставлены автором статьи

ГОД С.В. КОВАЛЕВСКОЙ

Древние греки учили: «Не ищите новое — ищите вечное». А вечное — это память о прошлом, о людях, которые творили историю, преданно служа Отчизне, сохраняя верность своему долгу, своим идеалам. В сохранении этой памяти — залог успешности и процветания нашей страны в будущем.

В 2003–2006 гг. педагогический и ученический коллективы гимназии работали над проектом «Гимназия не должна быть безымянной». По его завершении образовательному учреждению было присвоено имя Софьи Васильевны Ковалевской, выдающегося ученого, яркого, разностороннего человека, нашей землячки. Проект естественным образом перерос в программу «С именем Ковалевской» (2007–2010), которая логично вписалась в рамки концепции культурологического построения гимназии, дала мощный толчок для ее развития, духовно объединила педагогов и учеников, позволила значительно расширить сферу деятельности коллектива.

Главные задачи — привлечь внимание широкой общественности к имени Ковалевской и помощь сотрудникам музея в решении проблем, связанных с восстановлением мемориальной усадьбы. Ведь, к большому сожалению, наши земляки мало знают об этой замечательной женщине, о ее вкладе в науку. Состояние музея — удручающее, а властям, местным и федеральным, не до него — они слишком заняты различными инновациями.

Есть одна незаживающая рана... До сих пор болью в сердце отзывается куцее празднование в 2000 году 150-летия со дня рождения С.В. Ковалевской на нашей Псковской земле, да и в России, а этот год был объявлен ЮНЕСКО ее годом. Свет этой яркой звезды, идущий сквозь столетия, не должен ослабевать! И нам очень

захотелось, чтобы дни, предшествующие юбилею и сам юбилей были наполнены воспоминаниями о ней, чтобы славной дочери России воздалось должное. Поэтому предъюбилейный, 2009 год мы объявили в гимназии Годом Ковалевской, создав программу «Навстречу юбилею Ковалевской». С инициативой гимназии были ознакомлены директора школ. Мы предложили управлению образования, администрациям города, района и области сделать общую программу, нацеленную на достойное празднование юбилея, и найти возможности для возобновления реставрационных работ в музее-усадьбе Ковалевской. На сайте Президента РФ мы разместили обращение, подписанное и директором Полибинского музея заслуженным работником культуры В.П. Румянцевой.

Наш призыв был услышан только управлением образования города Великие Луки. В феврале 2009 года, во время проведения ежегодного городского конкурса «Ученик года», управление образования объявило о начале реализации муниципального проекта «С именем Софьи Ковалевской» — проекта, объединяющего педагогов и учащихся города вокруг имени Ковалевской. «Болью отзывается в душе так и не доведенная до конца реставрация музея-усадьбы С.В. Ковалевской, — отметил начальник управления образования города А.А. Шулаев. — Гражданская ответственность, уважение к этому историческому памятнику, удивительным людям, которые там работают, неравнодушие к истории родного края побудили нас создать проект, направленный на привлечение внимания общественности к проблемам сохранения, возрождения и последующего развития усадьбы Софьи Ковалевской в Полибино. Воспитание юных великолучан на основе бережного и грамотного отношения к истории своего края — одна из первостепенных задач, стоящих перед работниками сферы образования г. Великие Луки».

С именем Софьи Ковалевской великолукское образование сделало шаг вперед в процессе обучения и воспитания, шире открыв дверь для талантливых людей и педагогов в мир математики, краеведения, истории.

Старт Году Ковалевской был дан во время педагогического марафона, проведенного 19–20 февраля 2009 года по инициативе управления образования г. Великие Луки и Издательского дома «Первое сентября». Во время его проведения работали 6 секций; гимназии выпала честь принимать учителей математики г. Великие Луки и районов южной зоны Псковской области. Работа гимназии получила высокую оценку участников марафона. Ряд разработок по теме «С именем Ковалевской» были опубликован на страницах газеты «Математика» (2009, № 10, 18, 24).

Одним из шагов в реализации муниципального проекта стал поиск учреждений, носящих имя Ковалевской. Это школа в Стокгольме (Швеция), средняя школа г. Вильнюса (Литва), средняя школа № 116 г. Алма-Аты (Казахстан), лицей в г. Купчинь (Молдова).

Письма, статьи в СМИ, сбор методических и дидактических материалов, открытые уроки, семинары, субботники и экскурсии в музей-усадьбу в течение года наполнили жизнь великолукского образования. Взрослые и дети с интересом посещали усадьбу в Полибино, где прошли отрочество и юность Софьи Васильевны. По словам директора Полибинского музея В.П. Румянцевой, интерес к Ковалевской значительно возрос в этом юбилейном году.

Серьезным, хотя и рискованным, шагом в мир информационных технологий стало проведение первой открытой интернет-олимпиады, в которой приняли участие девочки-восьмиклассницы из Литвы, Эстонии, Белоруссии, Москвы, Санкт-Петербурга и других городов. Ученицы г. Великие

Луки выходили в интернет из еще не отреставрированной гостиной музея-усадьбы в Полибино, из той гостиной, где маленькая Соня играла в мяч, где отмечала свое венчание, став взрослой. Победителями олимпиады стали восьмиклассницы из Великих Лук, а всем участникам были направлены памятные дипломы. Задачи, которые ставили перед собой организаторы и авторы данного подпроекта, были решены успешно: усадьба Ковалевской, ее имя, математика объединили в этот день учащихся и педагогов, неравнодушных к делу обучения основам наук и именам великих людей, славящих своим трудом и талантом Россию. Кстати сказать, управление образования сумело найти людей, которые безвозмездно к олимпиаде установили в усадьбе перила на лестнице, ведущей к эту гостиную.

1 сентября 2009 года во многих школах г. Великие Луки прошли «уроки Ковалевской», которые оставили след в сердцах юных великолучан: каждый из них почувствовал причастность к истории своего края, ответственность за сохранение музея-усадьбы — жемчужины великолукской земли.

В октябре был проведен городской турнир юных математиков и шахматистов общеобразовательных учреждений города, на котором учащиеся продемонстрировали свои достижения в области освоения шахмат и математики.

«Ковалевские чтения» по литературным произведениям С.В. Ковалевской, прошедшие в школах в декабре, обогатили проект и наполнили его красотой художественного слова. Учащиеся читали стихи и прозу, показывали театрализованные постановки, проявляя свои таланты и навыки литературного декларирования. Так, в гимназии родились два новых спектакля — «День в Полибино» и «Нигилистка», созданные педагогом-организатором Т.А. Сафроновой и учителем русского языка и литературы Л.В. Голубевой.

В январе 2010 года в гимназии прошел ряд юбилейных мероприятий. Почта России произвела гашение специальных конвертов, посвященных юбилею Софьи Васильевны. Великолукское издательство С. Маркелова провело презентации книг «Легенды и были Полибинской усадьбы» (из просветительской серии «Золотые страницы Великих Лук»), в которую вошли «Воспоминания детства» Ковалевской, и рассказы о музее В.П. Румянцевой, и «Путешествие в прошлое. Великие Луки» из той же серии учителя истории Великолукской школы № 5 В.В. Орлова. В гимназии управление образования провело совещание заместителей директоров школ города по воспитательной работе на тему «Работа с именем выдающейся личности на примере Ковалевской», а ученики гимназии провели для учителей математики города театрализованную экскурсию по музею-усадьбе.

Итоговым мероприятием проекта «С именем Софьи Ковалевской» стал международный фестиваль, состоявшийся 28–29 января 2010 года, в котором приняли участие делегации гимназии № 1567 Западного административного округа Москвы, центра образования № 170 Юго-Западного административного округа Москвы, средней школы им. С.В. Ковалевской г. Вильнюс (Литва), основной школы г. Маарду (Эстония) и образовательных учреждений Г. Великие Луки.

28 января в городском центре эстетического воспитания состоялось торжественное открытие фестиваля. Его участников приветствовали начальник управления образования А.А. Шулаев, заместитель главы администрации города К.В. Максимов, директора мемориальных музеев С.В. Ковалевской и академика И.М. Виноградова В.П. Румянцева и Т.Г. Бобкина. Были зачитаны поздравления в адрес фестиваля от заместителя председателя Совета Федерации Федерального собрания РФ С.Ю. Орловой и члена комитета по вопросам семьи, женщин и детей Государственной думы Н.А. Останиной.

Настоящим подарком стала музыкально-литературная композиция «Несколько дней из жизни Софьи Васильевны Ковалевской», подготовленная преподавателями и воспитателями центра эстетического воспитания. Звучали отрывки из воспоминаний С.В. Ковалевской. В роли юной


Софьи Васильевны выступила воспитанница центра Валерия Трошина.

В стенах школы № 13 прошла научно-практическая конференция учащихся и педагогов, в ходе которой работали биографическая, историческая, гуманитарная, краеведческая, физико-математическая и естественная секции. Учителя, руководители образовательных учреждений и делегаций встретились на педагогической секции, где поделились информацией о том, что им удалось узнать о жизни и научных открытиях С.В. Ковалевской и как это имя используется в учебной деятельности школ.

Завершил фестиваль бал Софьи Ковалевской, который прошел в эстетическом центре. Мы постарались воспроизвести обстановку тех вечеров в Полибинском доме, участницей которых была и юная Софья. Бал традиционно начался с полонеза, а гостей принимала сама Софья Ковалевская в исполнении артистки Великолукского драматического театра Натальи Муравьевской. Звучала музыка, разгадывались шарады, проводились игры тех дней, в которых приняли участие и хозяева, и гости. На балу были подведены итоги этих дней, награждены лучшие, прошел обмен подарками.

Во время фестиваля гости познакомились с городом, его образовательными учреждениями и музеями, посетили Полибинский мемориальный музей-усадьбу С.В. Ковалевской. Единение детей и педагогов Литвы, Эстонии, России — одна из главных побед фестиваля. Поистине, детство, юность и молодость не признают границ, воздвигаемых политиками наших государств. Общие интересы, общие взгляды: целеустремленность, инициатива, неравнодушие, желание познать, быть понятым и услышанным...

Участники фестиваля направили письма Президенту Российской Федерации, председателю Правительства РФ, министру культуры РФ, губернатору Псковской области с просьбой найти возможность финансирования реставрационных работ в музее-усадьбе С.В. Ковалевской.

На форуме сайта «Великолукское образование» (eduvluki.ru) читаем:

«Вы организовали очень нужное мероприятие! Конференция объединила людей»; «Наш визит к вам был очень полезным и будет способствовать воплощению наших совместных идей в учебно-воспитательном процессе»; «Ребята подружились не только со сверстниками, но и с их семьями, которые сердечно опекали наших учеников. В школе для нас были открыты все двери»; «Посещение Полибино повергло в шок. Чувствуешь только бессилие. А что можно сделать? Но так оставлять нельзя».

Возродить исторический памятник силами совместных проектов... Самонадеянно? Возможно. Но кто, если не мы, ответственные за души и судьбы растущих, будет стучаться в двери тех, кто решает: сохранить или уничтожить. Стучаться, не жалея сил, времени, трудов. Уверены, все это обязательно отзовется в наших детях новым ритмом жизни, энергии, любовью к своей Родине.

Минуло полгода, но дни Ковалевской продолжаются и после завершения проекта. К изучению всего, что связано с именем Ковалевской, и ее литературного наследия приступает все большее количество сограждан, «Воспоминания детства» начинает читать новое поколение. Ученики продолжают знакомиться с жизнь и творчеством нашей великой соотечественницы. Телевидение и киностудии готовят и показывают новые передачи и фильмы о ней. Действуют волонтерские летние лагеря в Полибино. В мае месяце директор гимназии посетил могилу Ковалевской в Стокгольме и оставил там землю из Полибинского парка, а земля с могилы была рассеяна у ее памятника в усадьбе. Делегации великолукских школ осенью нанесли ответные визиты в Литву, Эстонию и Белоруссию. Там, в верхах, решается вопрос о возобновлении реставрации музея-усадьбы.

Но опускать руки рано: Россия еще не воздала должное своей великой дочери. Будем надеяться, что наши усилия не будут напрасны и новое поколение россиян будет лучше знать Ковалевскую и свято чтить ее память, а музей-усадьба в Полибино будет отреставрирована и станет культурным центром нашего края и всей России.

Т. САЗОНОВА,
Москва

НЕ БУДЕМ ЖАЛЕТЬ ВРЕМЕНИ

Потребность решения задач несколькими способами воспитываю в детях постепенно, с 7-го и до 11-го класса. Нередко, шагнув на новую ступеньку знаний, мы возвращаемся с ребятами к ранее разобранной задаче и находим новые, весьма любопытные решения.

Я понимаю коллег, которым жаль времени на поиск различных путей к ответу на вопрос задачи. Не потому ли смелые, неординарно мыслящие личности все реже встречаются среди выпускников наших школ?

Но вы уже никогда не откажетесь от этой методики, если ваши ученики однажды сумели самостоятельно найти другие пути к ответу.

Особенно полезно направлять ребят на поиск альтернативных алгоритмов при организации заключительного повторения планиметрии в основной и средней школе. Здесь предоставляется богатейшая возможность повторить и закрепить самые разнообразные сведения по всему курсу.

Предлагаю накопленные в моей практике решения несколькими способами некоторых планиметрических задач из учебника А.В. Погорелова «Геометрия 7–9» (М.: Просвещение, 2007).

Призывая учеников к поискам новых путей, учитель сам должен иметь в своем арсенале запас всевозможных алгоритмов.

Задача № 1. (§ 4, № 46.) Высоты треугольника ABC, проведенные из вершин A и C, пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMC$, если $\angle A = 70°$, $\angle C = 80°$

Сначала необходимо установить вид данного треугольника, от этого зависит рисунок к задаче: $\angle B = 180° - 70° - 80° = 30°$ (по теореме о сумме углов в треугольнике), тогда треугольник ABC является остроугольным. Значит, точка пересечения высот находится во внутренней его области (рис. 1).

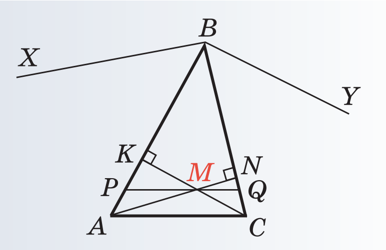


Рис. 1

I

В прямоугольном треугольнике BKC $\angle KCB = 90° - 30° = 60°$, тогда в треугольнике NMC $\angle NMC = 90° - 60° = 30°$. Значит, смежный с углом NMC угол AMC имеет градусную меру 150°.

II

Через точку M проведем прямую $PQ \parallel AC$. По свойству углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, $\angle KPM = \angle BAC = 70°$. Тогда $\angle KMP = 20°$ — из прямоугольного треугольника PKM. Аналогично, $\angle NMQ = 10°$. Тогда

$$20° + \angle KMN + 10° = 180°;$$

$$\angle KMN = 150° = \angle AMC$$

(по свойству вертикальных углов).

III

Посмотрев на выпуклый четырехугольник $MKBN$, в котором

$$\angle KBN = 30°, \angle BKN = \angle BNM = 90°,$$

мыслящие дети вполне способны «открыть» теорему о сумме внутренних углов выпуклого четырехугольника.

Учитель может, при организации устной разминки, вставить вспомогательные задачи на доказательство перед тем, как решать основную задачу.

Угол KMN, вертикальный с искомым углом AMC, равен $360° - 90° - 90° - 30° = 150°$.

IV

В прямоугольных треугольниках AKC и ANC

$$\angle KCA = 90° - 70° = 20°$$

и

$$\angle NAC = 90° - 80° = 10°,$$

тогда в треугольнике AMC

$$\angle AMC = 180° - (20° + 10°) = 150°.$$

V

В прямоугольных треугольниках ANB и CKB $\angle BAN = \angle BCK = 90° - 30° = 60°$. Тогда

$$\angle NAC = 70° - 60° = 10°$$

и

$$\angle KCA = 80° - 60° = 20°.$$

Получаем в треугольнике AMC:

$$\angle AMC = 180° - (20° + 10°) = 150°.$$

VI

Полезно знать, что углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны, если они оба тупые или оба острые; если же один из этих углов острый, а другой тупой, то сумма их градусных мер равна 180°. Поэтому если угол B острый и равен 30°, то угол AMC тупой и равен 150°.

VII

Через вершину B проведем лучи $BX \parallel NA$ и $BY \parallel KC$. Величина угла между этими лучами равна величине угла AMC. Поскольку углы XBC и YBA прямые, а $\angle B = 30°$, то

$$\angle XBY = 60° + 30° + 60° = 150° = \angle AMC.$$

Ответ: 150°.

Задача № 2. (§ 4, № 47.) В треугольнике ABC медиана BD равна половине стороны AC. Найдите угол B треугольника.

I

В треугольнике ABC проведем среднюю линию DK (рис. 2).

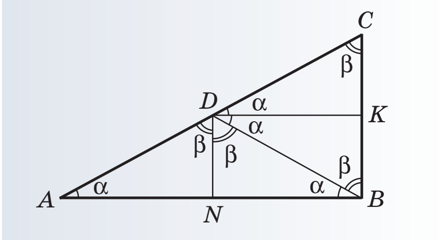


Рис. 2

В равнобедренном треугольнике BDC медиана DK является одновременно и высотой, то есть DK и CB перпендикулярны. По свойству средней линии треугольника $DK \parallel AB$, тогда и сторона AB перпендикулярна стороне CB, то есть $\angle B = 90°$.

II

Пусть $\angle DAB = \alpha$, $\angle DCB = \beta$. По условию, $BD = AD = DC$, значит,

$$\angle DBA = \alpha \text{ и } \angle DBC = \beta.$$

В треугольнике ABC $2\alpha + 2\beta = 180°$, $\alpha + \beta = 90°$, следовательно, $\angle ABC = 90°$.

III

По условию, $DA = DB = DC$, значит, точки A, B и C принадлежат окружности с центром D. Тогда $\angle ABC = 90°$ — по свойству вписанного угла, стороны которого проходят через концы диаметра AC.

IV

Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$. Проведем DK и DN параллельно соответственно сторонам AB и BC. По теореме Фалеса они окажутся средними линиями для треугольника ABC. Мы знаем, что медиана равнобедренного треугольника, проведенная из вершины к основанию, является и биссектрисой.

При точке D на прямой AC в одной полуплоскости «скопились» четыре попарно равных угла. Сумма всех четырех равна 180°, то есть $2\alpha + 2\beta = 180°$, $\alpha + \beta = 90°$, следовательно, $\angle ABC = 90°$.

V

Продолжив BD за точку D и отложив от точки D отрезок DE, равный BD, получим четырехугольник $AECB$, у которого диагонали равны и в точке пересечения делятся пополам. По признаку прямоугольника, угол B прямой.

Ответ: 90°.

Задача № 3. Найдите радиус r вписанной и радиус R описанной окружностей для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Я полагаю, что даже в сильном классе целесообразно разделить эту задачу на две и рассмотреть разнообразные способы решения каждой из них. При организации заключительного повторения здесь нам предоставляется возможность повторить правила нахождения центра окружности, описанной около треугольника, и центра окружности, вписанной в треугольник, свойство биссектрисы угла треугольника, а также формулы зависимости площади треугольника от его сторон и радиусов вписанной и описанной окружностей.

Сначала выясним, где находится центр описанной окружности – от этого зависит рисунок к задаче. Здесь 10^2 меньше суммы $13^2 + 13^2$, значит, угол при вершине равнобедренного треугольника острый. Центр описанной окружности находится во внутренней области равнобедренного треугольника (рис. 3).

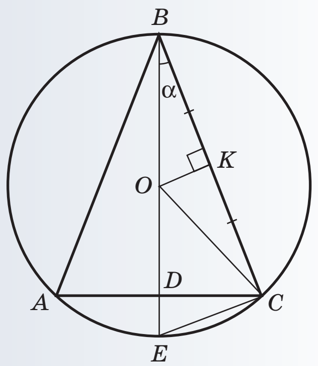


Рис. 3

Какой бы способ мы ни выбрали, заметим, что $AD = DC = 5$, и еще нам необходима длина высоты BD. Из треугольника BDC, по теореме Пифагора, $BD^2 = 13^2 - 5^2 = 12$ см.

I

Проведя серединный перпендикуляр KO, получим точку O – центр описанной окружности ($BK = KC = 6{,}5$ см):

$$OB = OC = R,$$
$$OD = BD - OB = 12 - R,$$

Из треугольника ODC, по теореме Пифагора,

$$OD^2 = OC^2 - DC^2 = R^2 - 5^2,$$
$$R^2 - 5^2 = (12 - R)^2.$$

Решив это уравнение, получим:

$$R = \frac{169}{24} \text{ см.}$$

II

Пусть $\angle DBC = \alpha$, тогда

$$\cos\alpha = \frac{BD}{BC} = \frac{12}{13}.$$

Из треугольника OKB

$$R = OB = \frac{BK}{\cos\alpha} = 6{,}5 : \frac{12}{13} = \frac{169}{24} \text{ см.}$$

III

Полезно помнить, что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около этого треугольника. Из треугольника DBC имеем:

$$\sin\alpha = \frac{DC}{BC} = \frac{5}{13},$$

$$\cos\alpha = \frac{BD}{BC} = \frac{12}{13}.$$

Получим:

$$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = 2R,$$

где

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{120}{169},$$

$$2R = 10 : \frac{120}{169},\ R = \frac{169}{24} \text{ см.}$$

IV

Из подобия треугольников OBK и CBD имеем:

$$\frac{OB}{CB} = \frac{BK}{BD},\quad \frac{R}{13} = \frac{6{,}5}{12}.$$

Отсюда

$$R = \frac{169}{24} \text{ см.}$$

V

Продолжим BD до пересечения с описанной окружностью, получим прямоугольный треугольник BCE, откуда

$$BC^2 = BD \cdot BE,\ 13^2 = 12 \cdot 2R,$$
$$R = \frac{169}{24} \text{ см.}$$

VI

По свойству хорд, пересекающихся внутри круга,

$$BD \cdot DE = AD \cdot DC,\ 12 \cdot (2R - 12) = 5 \cdot 5,$$
$$R = \frac{169}{24} \text{ см.}$$

VII

Внешний угол треугольника BOC равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним. Угол DOC имеет величину 2α.

$$OC = DC : \sin 2\alpha = 5 : \frac{120}{169}.$$

Имеем

$$OC = R = \frac{169}{24} \text{ см.}$$

VIII

По формуле $R = \frac{abc}{4S}$, где a, b, c – стороны треугольника, S – его площадь, которую мы вычислим без труда. Эту задачу можно вспомнить при изучении конуса, вписанного в шар.

Вы уже утомились читать? А представьте себе азарт команды, которая непременно хочет оставить за собой последнее слово. Каждая новая мысль – это шаг к победе! Даже другое обоснование того, что угол DOC имеет величину 2α даст им лишнее очко: вписанный угол CBE и центральный угол COE опираются на одну дугу и находятся в одной полуплоскости относительно хорды CE, значит, величина центрального угла равна 2α. Другая формула площади треугольника – формула Герона – тоже пригодилась для получения еще одного очка!

Поощряя школьников к поиску новых решений, награждаю их баллами, отражаю успехи учеников на стенде в кабинете математики, повышаю их рейтинговые оценки и т.д.

Задача № 4. Найдите радиус r вписанной окружности для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см (рис. 4).

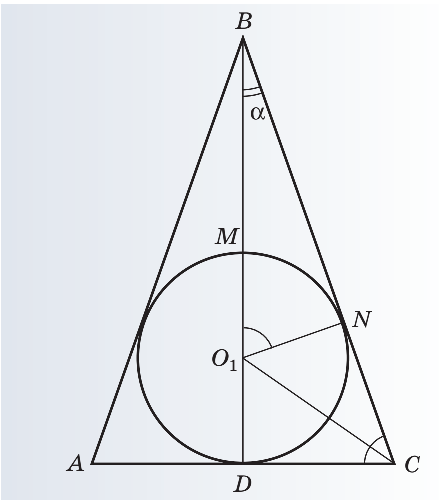


Рис. 4

I

Точка O_1 – центр вписанной окружности, $O_1N = r$. В треугольнике BNO_1

$$O_1N = r = BO_1 \cdot \sin\alpha,$$

то есть

$$r = (12 - r)\cdot\frac{5}{13},\quad r = \frac{10}{3}\ \text{см}.$$

II

Точка O_1 – центр вписанной окружности, $O_1N = r$. $DC = CN = 5$ см по свойству касательных, проведенных из одной точки к одной окружности. $BN = 13 - 5 = 8$ см.

$$BO_1 = 12 - r.$$

По теореме Пифагора для треугольника BNO_1

$$r^2 = (12 - r)^2 - 8^2,$$

откуда $r = \dfrac{10}{3}$ см.

III

$$r = \frac{2S}{a+b+c},\quad r = 2\cdot\frac{60}{13+10+13},$$

тогда $r = \dfrac{10}{3}$ см.

IV

Из треугольника O_1NB имеем:

$$r = O_1N = BN\ \mathrm{tg}\,\alpha.$$

Из треугольника BDC

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{5}{12},$$

поэтому

$$r = 8\cdot\frac{5}{12} = \frac{10}{3}\ \text{см}.$$

V

Из подобия треугольников O_1NB и CDB следует, что

$$\frac{BO_1}{BC} = \frac{BN}{BD},\quad \frac{12-r}{13} = \frac{8}{12},\quad r = \frac{10}{3}\ \text{см}.$$

VI

По свойству биссектрисы треугольника CBD, имеем:

$$\frac{CD}{CB} = \frac{DO_1}{BO_1},\quad \frac{5}{13} = \frac{r}{12-r},$$

тогда получим $r = \dfrac{10}{3}$ см.

VII

Когда ученики познакомились со свойством касательной и секущей, проведенными из одной точки к одной окружности, мы решили эту задачу так: $BN^2 = BD \cdot BM$, то есть $8^2 = 12 \cdot (12 - 2r)$, откуда $r = \dfrac{10}{3}$ см.

VIII

В треугольнике O_1DC угол

$$DCO_1 = \frac{90^\circ - \alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$O_1D = r = 5\cdot\mathrm{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Этот способ используется, когда нужно показать применение тригонометрических формул. Не всегда найденные ребятами способы решения той или иной задачи бывают оптимальны, но для достижения учебных и воспитательных целей нет «плохих» и «хороших» способов решения. За любой правильный путь к ответу на вопрос задачи нужно хвалить ученика, поблагодарить за смелость и смекалку. Опыт показывает, что такая поддержка способствует качественному скачку в развитии математических способностей и укреплению интереса к предмету. Не в этом ли и состоит наше учительское счастье?!

А. ГЛУХОВА,
г. Лиски,
Воронежская обл.

ПОИСК ОПТИМАЛЬНОГО СПОСОБА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С МОДУЛЯМИ

Очевидно, что одно и то же уравнение (особенно уравнение, содержащее переменную под знаком модуля) можно решить несколькими способами. Удачно выбранным способом уравнение с модулем решится быстро и легко, решение его получится красивым и интересным. Если же ошибиться в выборе способа решения, то можно получить громоздкие преобразования и вычисления.

Рассмотрим это на примерах решения некоторых уравнений.

Пример 1. Решить уравнение

$$\left|x^2-6x+7\right|=\frac{5x-9}{3}.$$

Решение.

Способ I. Задача сводится к решению совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-6x+7\ge 0,\\ x^2-6x+7=\dfrac{5x-9}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-6x+7<0,\\ x^2-6x+7=-\dfrac{5x-9}{3}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Рассмотрим первую систему. Преобразуем уравнение, входящее в эту систему, к виду:

$$3x^2-23x+30=0;\ D=529-360=169;$$

$$x_1=\frac{23-13}{6}=\frac{5}{3},\quad x_2=\frac{23+13}{6}=6.$$

Значение $x_1=\frac{5}{3}$ не удовлетворяет неравенству $x^2-6x+7\ge 0$, значит, не является и корнем данного уравнения.

Значение $x_2=6$ удовлетворяет неравенству $x^2-6x+7\ge 0$, значит является корнем данного уравнения.

Рассмотрим вторую систему. Уравнение, входящее в эту систему, преобразуем к виду: $3x^2-13x+12=0$. Находим корни: $x_3=3$, $x_4=\frac{4}{3}$. Значение $x_3=3$ удовлетворяет условию $x^2-6x+7<0$, а значит, является корнем данного уравнения.

Значение $x_4 = \frac{4}{3}$ не удовлетворяет условию $x^2 - 6x + 7 < 0$, а значит, не является корнем данного уравнения.

Ответ: 3; 6.

Способ II. Решим уравнения вида

$$x^2 - 6x + 7 = \frac{5x-9}{3} \text{ и } x^2 - 6x + 7 = -\frac{5x-9}{3},$$

но при этом учтем, что правая часть данного уравнения $\frac{5x-9}{3} \geq 0$, то есть $x \geq 1{,}8$. Очевидно, что корнем первого уравнения будут $x_1 = \frac{5}{3}$ и $x_2 = 6$, а корнями второго уравнения будут $x_3 = 3$ и $x_4 = \frac{4}{3}$. Видно, что условию $x \geq 1{,}8$ удовлетворяют корни 3 и 6.

Ответ: 3; 6.

Способ II более удачен, так как при отборе корней рассматривали неравенство $\frac{5x-9}{3} \geq 0$, которое решается легче, чем квадратичные неравенства $x^2 - 6x + 7 \geq 0$ и $x^2 - 6x + 7 < 0$.

Способ III. Решим уравнение графически, для этого построим графики функций

$$y = |x^2 - 6x + 7| \text{ и } y = \frac{5x-9}{3}.$$

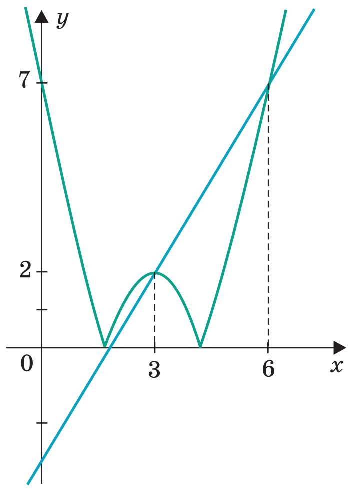


Рис. 1

График $y = |x^2 - 6x + 7|$ получаем из графика $y = x^2 - 6x + 7$ с помощью зеркального отражения части параболы, расположенной ниже оси Ox, вверх. Графиком функции $y = \frac{5x-9}{3}$ является прямая. Строим ее по двум точкам. Графики пересекаются в точках с абсциссами $x_1 = 3$ и $x_2 = 6$ (рис. 1).

Ответ: 3; 6.

Данное уравнение «решилось» графически, но если корни уравнения были бы дробными числами или иррациональными, то выбор графического способа был бы неудачным.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$$

Решение. Пусть $t = \sqrt{x-1}$, тогда $t^2 = x - 1$, $x = t^2 + 1$ (где $t \geq 0$) и данное уравнение запишется в виде:

$$\sqrt{t^2+1+3-4t} + \sqrt{t^2+1+8-6t} = 1,$$
$$\sqrt{t^2-4t+4} + \sqrt{t^2-6t+9} = 1,$$
$$\sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-3)^2} = 1,$$

то есть

$$|t-2| + |t-3| = 1.$$

Способ I. Это уравнение можно решить геометрически, так как точки t, такие, что сумма их расстояний от точек 2 и 3 равна 1, заполняют отрезок [2; 3] (рис. 2).

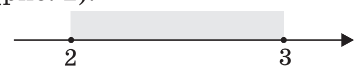


Рис. 2

Значит, $2 \leq t \leq 3$, то есть $2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$, тогда $4 \leq x - 1 \leq 9$, $5 \leq x \leq 10$.

Ответ: [5; 10]

Способ II. Решим уравнение аналитически. Если $t \geq 0$ (по условию замены) и при $t = 2$ и $t = 3$ подмодульные выражения равны 0, то рассмотрим решение данного уравнения на промежутках [0; 2), [2; 3], (3; +∞). Получим совокупность трех систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 \leq t < 2, \\ -(t-2)-(t-3)=1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 \leq t \leq 3, \\ t-2-(t-3)=1 \end{cases} \\ \begin{cases} t > 3, \\ t-2+t-3=1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 \leq t < 2, \\ t=2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 \leq t \leq 3, \\ 1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} t > 3, \\ t=3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Первая и третья системы не имеют решений, так как $t = 2$ не удовлетворяет условию $0 \leq t < 2$, а $t = 3$ не удовлетворяет условию $t > 3$.

Во второй системе получили $1 = 1$, что верно при любых значениях t, значит, $2 \leq t \leq 3$ является решением уравнения $|t-2| + |t-3| = 1$.

Если $2 \leq t \leq 3$, то аналогично способу I получаем: $5 \leq x \leq 10$.

Ответ: [5; 10].

Способ III. Решим уравнение графическим способом. Построим графики функций

$$y = |t-2| + |t-3| \text{ и } y = 1.$$

Рассмотрим

$$y = |t-2| + |t-3|:$$

графиком является ломаная с вершинами в точках (2; 1) и (3; 1). Вспомогательные точки — (4; 3) и (0; 5).

$y = 1$ — прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку (0; 1). Графическое решение уравнения показано на рисунке 3.

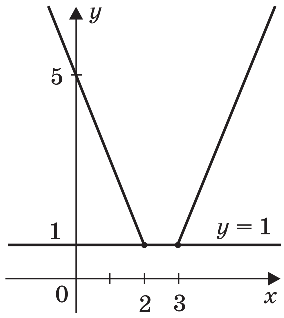


Рис. 3

Графики совпадают на отрезке [2; 3], то есть $t \in [2; 3]$ — есть решение данного уравнения. Аналогично получаем $x \in [5; 10]$.

Ответ: [5; 10].

Здесь удачны все способы. Они позволили решить уравнение быстро и легко; особенно наглядно решение видно в способе III.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x} = |0,5x-1| + |0,5x-3| - 2.$$

Решение.

Способ I. Для решения уравнения запишем его в виде, не содержащем знаки модулей. Так как $0,5x - 1 = 0$ при $x = 2$, а $0,5x - 3 = 0$ при $x = 6$, то рассмотрим решение данного уравнения на промежутках $(-\infty; 2)$, $[2; 6]$, $(6; +\infty)$. Уравнение запишется в виде совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<2, \\ \sqrt[3]{x} = 2-x \end{cases} \\ \begin{cases} 2 \le x \le 6, \\ \sqrt[3]{x} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>6, \\ \sqrt[3]{x} = x-6. \end{cases} \end{array}\right.$$

В первой и третьей системе придется возводить обе части уравнения в куб и решать уравнения третьей степени. Рассмотрим решение каждой системы совокупности.

1. $\begin{cases} x<2, \\ \sqrt[3]{x} = 2-x; \end{cases} \quad \begin{cases} x<2, \\ x^3 - 6x^2 + 13x - 8 = 0. \end{cases}$

Очевидно, что $x = 1$ является решением данного уравнения (установили подбором); разделим левую часть уравнения на $(x - 1)$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 13x - 8 & x-1 \\ \cline{2-2} -\ x^3 - x^2 \quad\quad\quad\quad & x^2 - 5x + 8 \\ \hline -5x^2 + 13x \quad\ \ & \\ -\ -5x^2 + 5x \quad\ \ & \\ \hline 8x - 8 & \\ -\ 8x - 8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Уравнение $x^2 - 5x + 8 = 0$ не имеет корней, так как $D < 0$.

$x = 1$ удовлетворяет условию $x < 2$, а значит, является корнем данного уравнения.

2. $\begin{cases} 2 \le x \le 6, \\ \sqrt[3]{x} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \le x \le 6, \\ x = 0. \end{cases}$

Так как $x = 0$ не удовлетворяет условию $2 \le x \le 6$, то система решений не имеет.

3. $\begin{cases} x>6, \\ \sqrt[3]{x} = x-6; \end{cases} \quad \begin{cases} x>6, \\ x^3 - 18x^2 + 107x - 216 = 0. \end{cases}$

Подбором установим, что $x = 8$ является корнем данного уравнения; разделим левую часть уравнения на $(x - 8)$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 18x^2 + 107 - 216 & x-8 \\ \cline{2-2} -\ x^3 - 8x^2 \quad\quad\quad\quad\quad & x^2 - 10x + 27 \\ \hline -10x^2 + 107x \quad\ \ & \\ -\ -10x^2 + 80x \quad\ \ & \\ \hline 27x - 216 & \\ -\ 27x - 216 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Уравнение $x^2 - 10x + 27 = 0$ не имеет корней, так как $D < 0$.

$x = 8$ удовлетворяет условию $x > 6$, а значит, является корнем данного уравнения.

Ответ: 1; 8.

Решая это уравнение таким способом, мы столкнулись с решением двух уравнений третьей степени. Это сопряжено с определенными трудностями, поэтому попробуем решить это уравнение по-другому — графическим способом.

Способ II. Построим в одной и той же системе координат графики функций

$$y = \sqrt[3]{x} \text{ и } y = |0,5x-1| + |0,5x-3| - 2.$$

Функцию $y = |0,5x - 1| + |0,5x - 3| - 2$ запишем в виде

$$y = \begin{cases} 2-x, \text{ если } x<2, \\ 0, \text{ если } 2 \le x \le 6, \\ x-6, \text{ если } x>6. \end{cases}$$

Графики пересекаются только в двух точках: (1; 1) и (8; 2), значит, уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = 8$ (рис. 4)

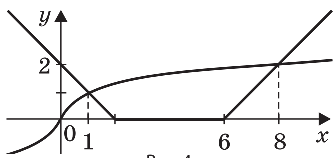


Рис. 4

Ответ: 1; 8.

Очевидно, что для этого уравнения удачным оказался графический способ решения, который позволил увидеть, что уравнение имеет два корня $x_1 = 1$ и $x_2 = 8$.

Пример 4. Решить уравнение

$$||x-1|-1| = x^2 - 4.$$

Решение.

Способ I. Если $|f(x)| = g(x)$, то надо решить уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) = -g(x)$ при условии, что $g(x) \geq 0$. Тогда для данного уравнения получим: $x^2 - 4 \geq 0$, если $(x - 2)(x + 2) \geq 0$, то есть $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Рассмотрим уравнения

$$|x-1|-1 = x^2 - 4 \text{ и } |x-1|-1 = 4 - x^2,$$

то есть

$$|x-1| = x^2 - 3 \text{ и } |x-1| = 5 - x^2.$$

Решим каждое из полученных уравнений.

1. $|x - 1| = x^2 - 3$;

$$\begin{cases} x^2-3\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x-1=x^2-3 \\ x-1=3-x^2, \end{array}\right. \end{cases}$$

то есть $x^2-3\geq 0, \left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\geq 0, x\in\left(-\infty; -\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3}; +\infty\right)$.

а) $x - 1 = x^2 - 3$, $x^2 - x - 2 = 0$,

$$x_1 = -1,\ x_2 = 2.$$

Число -1 не удовлетворяет условию $x^2 - 3 \geq 0$, значит, не является корнем уравнения. Число 2 удовлетворяет условию $x^2 - 3 \geq 0$, то есть является решением первого уравнения, а также удовлетворяет условию $x^2 - 4 \geq 0$, значит, является решением и данного уравнения;

б) $x - 1 = 3 - x^2$, $x^2 + x - 4 = 0$;

$$D = 1 + 16 = 17;$$

$$x_3 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2},\quad x_4 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}.$$

Число $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ удовлетворяет условию $x^2-3\geq 0$, значит, является решением данной системы и удовлетворяет условию $x^2 - 4 \geq 0$, то есть является корнем данного уравнения. Число $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ не удовлетворяет условию $x^2 - 4 \geq 0$, так как

$$\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2 - 4 = \frac{2-2\sqrt{17}}{4} < 0,$$

поэтому оно не является корнем данного уравнения.

2. $|x - 1| = 5 - x^2$,

$$\begin{cases} 5-x^2\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x-1=5-x^2 \\ x-1=x^2-5, \end{array}\right. \end{cases}$$

то есть $5 - x^2 \geq 0$, $\left(\sqrt{5}-x\right)\left(\sqrt{5}+x\right)\geq 0$, $x\in\left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$.

а) $x - 1 = 5 - x^2$, $x^2 + x - 6 = 0$,

$$x_1 = -3,\ x_2 = 2.$$

Очевидно, что $x_1 = -3$ не удовлетворяет условию $5 - x^2 \geq 0$, а $x_2 = 2$ удовлетворяет условиям $5 - x^2 \geq 0$ и $x^2 - 4 \geq 0$ и поэтому является корнем данного уравнения;

б) $x - 1 = x^2 - 5$, $x^2 - x - 4 = 0$;

$$D = 1 + 16 = 17;$$

$$x_3 = \frac{1-\sqrt{17}}{2},\quad x_4 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}.$$

Эти числа не являются корнями данного уравнения, так как первое из них не удовлетворяет условию $x^2 - 4 \geq 0$, а второе не удовлетворяет условию $5 - x^2 \geq 0$.

Ответ: $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$; 2.

Для решения этого уравнения потребовалось решить два новых уравнения с модулями, каждое из которых дало еще по два квадратных уравнения. Затем надо было выбрать из полученных корней те, при которых $x^2 - 4 \geq 0$ и $5 - x^2 \geq 0$. Решение получилось интересным, хотя и объемным. Рассмотрим другой способ решения.

Способ II. Решим уравнение графическим способом. Рассмотрим графики функций $y = x^2 - 4$ и $y = ||x - 1| - 1|$. Для функции $y = x^2 - 4$ графиком является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина в точке $(0; -4)$, пересечение с осью Ox в точках $(-2; 0)$ и $(2; 0)$.

$y = ||x - 1| - 1|$ получаем из графика $y = |x - 1|$ с помощью параллельного переноса вдоль оси Oy на 1 единицу вниз (получим $y = |x - 1| - 1$), затем нижнюю часть графика симметрично отразим вверх, получим $y = ||x - 1| - 1|$.

Видно, что графики пересекаются только в двух точках (рис. 5).

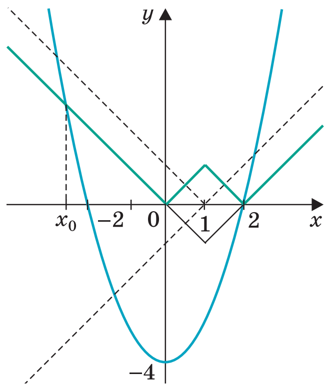


Рис. 5

Одна из них имеет абсциссу $x = 2$, а другая — абсциссу, меньшую нуля. Чтобы найти второе значение абсциссы, решим уравнение $-x = x^2 - 4$, причем $x < 0$: $x^2 + x - 4 = 0$; $D = 17$;

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2},\quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}.$$

Ответ: $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$; 2.

Хотя один из корней данного уравнения является иррациональным числом, этот корень можно «увидеть» графическим способом, а потом аналитически его вычислить, решив уравнение $-x = x^3 - 4$. Видно, что 2-й способ оказался проще и короче, для данного уравнения он является более удачным.

Пример 5. Решить уравнение

$$|x^3 - 1| + |2 - x^3| = 1.$$

Решение.

Способ I. Используя свойство

$$|a + b| = |a| + |b|,$$

если $a \cdot b \geq 0$, то есть a и b — одного знака, данное уравнение запишем в виде:

$$|x^3 - 1 + 2 - x^3| = 1,\ 1 = 1.$$

Это выполняется, если $x^3 - 1$ и $2 - x^3$ — выражения одного знака, то есть $(x^3 - 1)(2 - x^3) \geq 0$. Используя формулы разности кубов, неравенство запишем в виде:

$$(x-1)\left(x^2+x+1\right)\left(\sqrt[3]{2}-x\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+x^2\right)\geq 0.$$

Так как неполные квадраты всегда больше нуля, то $(x-1)\left(\sqrt[3]{2}-x\right)\geq 0$, то есть $x\in\left[1;\sqrt[3]{2}\right]$.

Ответ: $\left[1;\sqrt[3]{2}\right]$.

Решение этого уравнения свелось к решению неравенства методом интервалов, за счет использования свойства модуля.

Способ II. Введем новую переменную $t = x^3$. Тогда уравнение примет вид $|1 - t| + |2 - t| = 1$. Используя геометрический смысл модуля, получим, что $t \in [1; 2]$. Вернемся к переменной x. Имеем: $1 \leq x^3 \leq 2$, откуда $1\leq x\leq\sqrt[3]{2}$.

Ответ: $\left[1;\sqrt[3]{2}\right]$.

Какие-либо другие способы были бы здесь нерациональными за счет громоздких вычислений и объемных записей.

ДЕВЯТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ЗАДАЧИ

Есть замечательные задачи, с помощью которых можно прекрасно продемонстрировать различные математические методы и приемы.

Приведу пример одной задачи, которая имеет девять решений.

На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC построен квадрат $ABDE$ в той полуплоскости относительно прямой AB, которой не принадлежит треугольник ABC. Найдите расстояние от вершины C прямого угла до центра квадрата, если катеты BC и AC имеют соответственно длины a и b. Ее можно решить:

- по теореме синусов;
- по теореме косинусов;
- по теореме Птолемея;
- методом площадей;
- методом геометрических преобразований;
- методом координат;
- дать векторное решение,
- чисто геометрическое (описать квадрат со стороной $a + b$);
- методом комплексных чисел.

Восемь решений были рассмотрены в классе, а девятое оставлено для факультативных занятий.

Сравнение различных решений одной задачи очень поучительно. Стараюсь накапливать такие решения, подключая к этой работе учащихся.

С. Придача,
пос. Джубга, Краснодарский край

В. ДРОЗДОВ,
г. Рязань

ОЛИМПИАДНАЯ ЗАДАЧА

Просматривая книгу «Математические олимпиады школьников» (*Купцов Л.П.* и др. — М.: Просвещение, 1999, с. 25), автор обратил внимание на задачу, предлагавшуюся десятиклассникам на Всесоюзной олимпиаде 1975 года. Условие задачи таково: «Доказать, что для положительных чисел a, b и c справедливо неравенство

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c)». \qquad (1)$$

Причина интереса заключается в том, что эта задача, на первый взгляд, не похожа на олимпиадную. Ведь требуется исследовать симметрический однородный многочлен третьей степени от трех переменных. И рука сразу же потянулась к ручке и бумаге...

I. Поиск элементарного решения

Естественно разделить обе части неравенства (1) на $abc > 0$:

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}+3\geq\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}. \qquad (2)$$

По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим имеем:

$$\frac{\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}\cdot\frac{b^2}{ac}\cdot\frac{c^2}{ab}},$$

то есть

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}\geq 3.$$

Значит, левая часть неравенства (2) больше или равна шести. Перегруппируем слагаемые в правой части неравенства (2); она равна

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right).$$

Последнее выражение, очевидно, больше или равно шести, ибо сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше двух. Итак, к сожалению, число шесть не подходит в качестве разделительного между частями неравенства (2). Поиск элементарного решения успехом не увенчался.

II. Поиск не столь элементарного решения

Логично выразить обе части неравенства через элементарные симметрические многочлены $a + b + c = \sigma_1$, $ab + ac + bc = \sigma_2$, $abc = \sigma_3$.

Имеем:

$$\begin{aligned}
&a^3 + b^3 + c^3 + 3abc = \\
&= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + c^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc + 6abc = \\
&= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c) + 6abc = \\
&= (a + b + c)((a + b)^2 - (a + b)c + c^2) - 3ab(a + b + c) + 6abc = \\
&= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) + 6abc = \\
&= (a + b + c)((a + b + c)^2 - 3(ab + ac + bc)) + 6abc =
\end{aligned}$$

$= (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + ac + bc) + 6abc = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 6\sigma_3.$

Переходим к правой части неравенства (1):

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) =$$
$$= ab(a + b + c - c) + bc(a + b + c - a) + ac(a + b + c - b) =$$
$$= (a + b + c)ab - abc + (a + b + c)bc - abc + (a + b + c)ac - abc =$$
$$= (a + b + c)(ab + bc + ac) - 3abc = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3.$$

Итак, получаем неравенство

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 6\sigma_3 \ge \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3,$$

или

$$\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3 \ge 0. \qquad (3)$$

Попробуем доказать неравенство (3). Из очевидного неравенства $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b + c)^2 \ge 0$ сразу вытекает, что $\sigma_1^2 - 3\sigma_2 \ge 0$. После умножения обеих частей последнего неравенства на $\sigma_1 > 0$ получим: $\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 \ge 0$.

Перемножая почленно очевидные неравенства

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc} \quad \text{и} \quad \frac{ab+ac+bc}{3} \ge \sqrt[3]{a^2b^2c^2},$$

найдем, что $\sigma_1\sigma_2 \ge 9\sigma_3$, или $-\sigma_1\sigma_2 \le -9\sigma_3$.

Рассмотрим систему доказанных неравенств:

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 \ge 0, \\ -\sigma_1\sigma_2 \le -9\sigma_3. \end{cases}$$

Если бы во втором неравенстве этой системы знак неравенства был направлен в противоположную сторону, то неравенство (3) было бы доказано, а наша цель достигнута. Увы, это не так.

III. Поиск олимпиадного решения

Ясно, что равенство в неравенстве (1) достигается при $a = b = c$. Но при этом же условии имеет место равенство в очевидном симметричном неравенстве:

$$a(b + c - 2a)^2 + b(a + c - 2b)^2 + c(a + b - 2c)^2 \ge 0.$$

Раскрыв скобки, получим:

$$\frac{4}{3}\left(a^3 + b^3 + c^3\right) + 2abc \ge ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c).$$

Так как

$$\frac{4}{3}\left(a^3 + b^3 + c^3\right) + 2abc = a^3 + b^3 + c^3 + \frac{a^3+b^3+c^3}{3} + 2abc \ge$$
$$\ge a^3 + b^3 + c^3 + abc + 2abc = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc,$$

то нами доказано более слабое неравенство. Однако оно интересно само по себе.

IV. Решение, приведенное в книге

В упомянутой в начале статьи книге на с. 135 дано такое решение: «Поскольку выражение $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a + b) - bc(b + c) - ac(a + c)$ симметрично относительно a, b и c, без ограничения общности можно считать, что $a \ge b \ge c > 0$. Так как

$$a^3 + b^3 - ab(a + b) = (a + b)(a^2 - ab + b^2 - ab) = (a + b)(a - b)^2,$$
$$c^3 + 3abc - bc(b + c) - ac(a + c) =$$
$$= (c^3 + abc - bc^2 - ac^2) + (2abc - b^2c - a^2c) =$$
$$= c(c(c - a) + b(a - c)) + c(2ab - b^2 - a^2) =$$
$$= c(a - c)(b - c) - c(a - b)^2,$$

то рассматриваемое выражение равно

$$(a + b)(a - b)^2 + c(a - c)(b - c) - c(a - b)^2 =$$
$$= (a - b)^2(a + b - c) + c(a - c)(b - c) \ge 0.$$

Отсюда следует требуемое неравенство».

Красивое, но весьма искусственное решение.

V. Олимпиадное решение

Остался без ответа математически интересный вопрос: как было придумано неравенство (1)? Скорее всего так.

Рассмотрим три положительных числа x, y и z. Тогда по неравенству о средних имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}, \\ \dfrac{x+z}{2} \ge \sqrt{xz}, \\ \dfrac{y+z}{2} \ge \sqrt{yz}. \end{cases}$$

Перемножая почленно эти неравенства, получим:

$$(x + y)(x + z)(y + z) \ge 8xyz. \qquad (4)$$

Ясно, что знак равенства и неравенстве (4) имеет место тогда и только тогда, когда $x = y = z$.

Сделав замену переменных

$$x + y = a, \ x + z = b, \ y + z = c,$$

найдем, что

$$x = \frac{a+b-c}{2}, \quad y = \frac{a-b+c}{2}, \quad z = \frac{-a+b+c}{2}.$$

Подставив эти выражения x, y, z через a, b, c в неравенство (4), сразу придем к неравенству (1). Проверьте! Причем понятно, что равенство в неравенстве (1) достигается только при $a = b = c$.

Тоже красивое, но искусственное решение. Однако оно объясняет генезис неравенства (1).

VI. Естественное решение

Остается чувство неудовлетворенности, ибо неравенство (1) доказано лишь искусственно. Найдем естественное доказательство, применив соображения математического анализа. Перепишем неравенство (1) в равносильном виде:

$$a^3 - (b + c)a^2 + (3bc - b^2 - c^2)a + (b + c)(b - c)^2 \ge 0,$$

и рассмотрим функцию

$$f(a) = a^3 - (b + c)a^2 + (3bc - b^2 - c^2)a + (b + c)(b - c)^2.$$

По условию задачи $0 < a < +\infty$. Легко видеть, что при $a \to 0$ $f(a) \to (b + c)(b - c)^2 \geq 0$. Так как

$$f(a) = a^3 \cdot \left(1 - \frac{b+c}{a} + \frac{3bc - b^2 - c^2}{a^2}\right) + (b+c)(b-c)^2,$$

то ясно, что при $a \to +\infty$ $f(a) \to +\infty$.

Напишем уравнение $f'(a) = 0$, определяющее экстремальные точки функции $f(a)$:

$$3a^2 - 2(b + c)a + (3bc - b^2 - c^2) = 0. \qquad (5)$$

Дискриминант уравнения (5)

$$D = 4(4b^2 - 7bc + 4c^2).$$

Так как $D = 16(b - c)^2 + 4bc > 0$ при любых b и c, то экстремальные точки заведомо существуют.

Выше мы, используя симметрию неравенства (1), а значит, не умаляя общности, считали a «настоящей» переменной, а b и c параметрами. Но «настоящими» переменными можно считать и b, и c. Повторяя аналогично рассуждения, приходим к системе:

$$\begin{cases} 3a^2 - 2(b+c)a + \left(3bc - b^2 - c^2\right) = 0, \\ 3b^2 - 2(a+c)b + \left(3ac - a^2 - c^2\right) = 0, \\ 3c^2 - 2(a+b)c + \left(3ab - a^2 - b^2\right) = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Каждое из уравнений системы (6) не является симметрическим. Симметрия появляется при сложении уравнений. Так сложим их! При этом придем к равенству

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0,$$

что равносильно равенству

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 = 0.$$

Следовательно, $a = b = c$.

Найдем значение функции $f(a)$ при $b = a$ и $c = a$. Легко видеть, что при этих условиях $f(a) = 0$. Значит, наименьшее значение функции $f(a)$ равно нулю.

Следовательно, неравенство (1) доказано, причем равенство в нем имеет место в том и только том случае, когда $a = b = c$. Итак, рассмотренная олимпиадная задача допускает и неолимпиадное решение.

Интересная и поучительная математическая «борьба» с трудной и красивой задачей успешно завершена.

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

ЗАДАЧА В12 — ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ

С. Дворянинов

Часть В Единого государственного экзамена содержит текстовые задачи, в частности, **задачи на движение**.

В большинстве задач на движение используется формула $s = vt$, где v — это скорость движения, t — время движения, s — длина пройденного пути. Предполагается, что объект движется с постоянной скоростью. Из данной формулы можно получить еще две: $t = \frac{s}{v}$, $v = \frac{s}{t}$.

Путь — не обязательно прямая линия, но при решении задач путь можно изображать отрезком. Если в задаче говорится о нескольких движущихся объектах, то формулы следует записать для каждого.

В явном виде заданы не все величины, часть из них дана в сравнении (меньше – больше, позже – раньше и т.п.). Используя каждое такое сравнение, можно записать соответствующее уравнение. Как правило, число уравнений совпадает с числом сравнений, содержащихся в условии задачи. Решить задачу можно с помощью системы уравнений, а можно с помощью одного уравнения.

1. Движение по дороге

Пример. Из села в город, расстояние между которыми 36 км, выехали мотоциклист и велосипедист. Известно, что за час мотоциклист проезжает на 56 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он выехал из села на час раньше мотоциклиста, а прибыл в город на сорок пять минут позже. Ответ дайте в км/час.

Решение с помощью системы уравнений

Эффективный прием при решении текстовых задач — **составление таблицы.**

Объект	Путь, км	Скорость, км/ч	Время, ч
Мотоцикл	36	$v_м$	$t_м$
Велосипед	36	$v_в$	$t_в$

Используя указанное в задаче сравнение скоростей, получаем уравнение $v_м = v_в + 56$.

Решение с помощью уравнения

Можно осуществить перевод условия на язык уравнений и без таблицы. Пусть v — скорость велосипедиста (в км/ч). Тогда скорость мотоциклиста равна $v + 36$. Время движения мотоциклиста равно $\frac{36}{v+56}$, время движения велосипедиста равно $\frac{36}{v}$. По условию первая величина больше второй на $1\frac{3}{4} = 1,75$ (ч). Отсю-

Напоминаем!

Задача В12 части 1 оценивается 1 первичным баллом (из 30 возможных).

2. Движение по реке

Особенность движения по реке состоит в том, что течение реки увеличивает или уменьшает скорость плывущего объекта. Изменение это равно **скорости течения.**

Пример. Из пунктов A и B, расстояние между которыми по реке составляет 54 км, с интервалом в 45 минут вышли навстречу друг другу два одинаковых теплохода и встретились в середине пути. Скорость течения реки 3 км/ч. Найдите собственную скорость каждого теплохода.

Из условия следует, что велосипедист затратил на путь из села в город на 1 час 45 мин. больше, чем мотоциклист, то есть $t_в = t_м + 1\frac{3}{4}$.

Выразив t через s и v, приходим к системе двух уравнений:

$$\begin{cases} v_м = v_в + 56, \\ \dfrac{36}{v_в} = \dfrac{36}{v_м} + 1\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Исключая $v_м$, переходим к уравнению относительно скорости велосипедиста $v_в$:

$$\frac{36}{v_в} = \frac{36}{v_в + 56} + 1\frac{3}{4}.$$

Решая его, получим квадратное уравнение

$$v_в^2 + 56 \cdot v_в - 36 \cdot 4 \cdot 8 = 0,$$

корни которого $v_{1,\,2} = -28 \pm 4 \cdot 11$. Условию задачи удовлетворяет только положительный корень, и поэтому $v_в = -28 + 4 \cdot 11 = 16$. ***Последнее число и следует внести в бланк ответа.***

да вновь приходим к уравнению $\frac{36}{v} = \frac{36}{v+56} + 1\frac{3}{4}$ и находим его корень: $v = 16$.

Комментарий

Решая задачу на движение, полезно выяснить: **сколько раз в условии задачи сравниваются однородные величины.** В нашей задаче два сравнения: скоростей велосипедиста и мотоциклиста и времени их движения на одном и том же пути. Два уравнения, соответствующих этим сравнениям, мы видим в системе. Итоговое уравнение — это сравнение времени движения мотоцикла и велосипеда. Итоговое уравнение может быть другим. Можно заполнить таблицу, взяв в качестве неизвестного не скорость, а время движения, например, мотоциклиста.

Объект	Путь, км	Скорость, км/ч	Время, ч
Мотоцикл	36	$\frac{36}{t}$	t
Велосипед	36	$\frac{36}{t+1,75}$	$t + 1\frac{3}{4}$

Тогда, сравнивая скорости движения, приходим к уравнению относительно времени t:

$$\frac{36}{t} = \frac{36}{t+1,75} + 56.$$

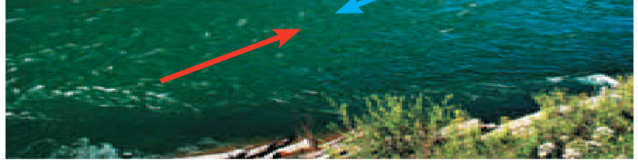
Откуда

$$8t^2 + 14t - 9 = 0,\ t_{1,\,2} = \frac{-7 \pm 11}{8}.$$

Условию задачи удовлетворяет только положительный корень $t = \frac{1}{2}$. Следовательно, скорость велосипедиста равна

$$v = \frac{36}{0,5 + 1,75} = \frac{36}{2,25} = 16 \text{ км/ч}.$$

Ответ: 16 км/ч.



Решение

Пусть пункт A лежит выше по течению реки, чем пункт B. Тогда скорость теплохода, идущего из A вниз по течению, больше скорости теплохода, идущего из B вверх по течению. Обозначим буквой x собственную скорость теплохода. Заполним таблицу:

Объект	Путь, км	Скорость, км/ч	Время, ч
Теплоход, идущий вниз по реке	27	$x + 3$	$\frac{27}{x+3}$
Теплоход, идущий вверх по реке	27	$x - 3$	$\frac{27}{x-3}$

В условии задачи имеется единственное сравнение — **сравнивается время движения одного теплохода со временем движения другого.** Этому сравнению соответствует уравнение

$$\frac{27}{x+3} + \frac{3}{4} = \frac{27}{x-3}.$$

После сокращения на 3 уравнение принимает вид

$$\frac{9}{x+3} + \frac{1}{4} = \frac{9}{x-3}.$$

Откуда $x^2 = 225$, $x = \pm 15$. Условию задачи удовлетворяет только положительный корень $x = 15$. ***Это число и следует внести в бланк ответа.***

Ответ: 15 км/ч.

ИНДЕКСЫ ПОДПИСКИ | Почта России - 79083 (инд.); - 79584 (орг.) | Роспечать - 32031 (инд.); - 32598 (орг.)

С. ГОРБАЧЕВА,
г. Ярославль

БЕНЕФИС ОДНОЙ ЗАДАЧИ

На уроке одной задачи у ученика появляется возможность услышать разные рассуждения, мнения, увидеть различные приемы решения и найти свой способ, тот который ему понятен. Такой урок развивает способности действовать не по шаблону, а путем обобщения знаний выйти на свой ход решения. Такие уроки не оставляют равнодушными ни одного ученика, что повышает мотивацию обучения математике. Решение задач разными способами помогает восполнить пробелы в ранее изученных темах. Что формирует личность, способную думать, отстаивать свое мнение, находить выход из создавшейся ситуации — то есть в дальнейшем разбираться в жизни, в людях.

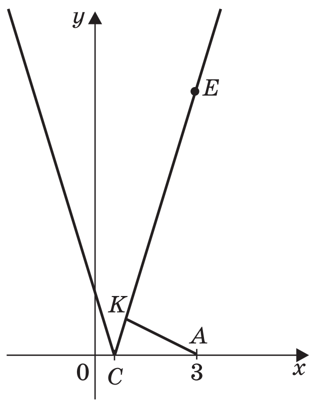
Цель урока: поиск разных способов решения одной задачи.

Задача. На графике функции $y = |3x - 2|$ найти точку, ближайшую к точке $A(3; 0)$.

Решение. $D(y) = \boldsymbol{R}$, $E(y) = [0; +\infty)$.

$$y = |3x-2| = \begin{cases} 3x-2, \text{ если } x \geq \dfrac{2}{3}, \\ -3x+2, \text{если } x < \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Способ I. ***(Уровень 7-го класса.)*** Построение графика. За наименьшее расстояние от точки до прямой принята длина перпендикуляра. Проводим его при помощи прямоугольного треугольника.



Способ II. ***(Уровень 8-го класса.)*** Применение теоремы Пифагора.

$$AK \perp CE,\ K(x; y),\ C\left(\frac{2}{3}; 0\right),\quad AC = 3 - \frac{2}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

Треугольник AKC — прямоугольный,

$$AC^2 = KC^2 + AK^2,\ KC^2 = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + y^2, \qquad AK^2 = (3 - x)^2 + y^2.$$

Имеет место система

$$\begin{cases}\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+y^2+(x-3)^2+y^2=\dfrac{49}{9},\\ y=3x-2\end{cases}$$

Решим уравнение

$$30x^2 - 47x + 18 = 0;$$

$x = 0{,}9,\ x = \dfrac{2}{3}$ (пост.). Тогда $y = 0{,}7$.

Ответ: $K(0{,}9;\ 0{,}7)$.

Способ III. (***Уровень 9-го класса.***) Подобие треугольников. Треугольники ***CKA*** и ***CAE*** подобны,

тогда $\dfrac{AK}{AE}=\dfrac{AC}{CE},\ AE=7,\ AC=\dfrac{7}{3},\ CE=\dfrac{7\sqrt{10}}{3},$

$$AK=\frac{AE\cdot AC}{CE}=\frac{7}{\sqrt{10}}.\quad \begin{cases}AK^2=(3-x)^2+y^2=4{,}9,\\ y=3x-2,\end{cases}$$

тогда

$$(3-x)^2 + (3x-2)^2 = 4{,}9,$$
$$10x^2 - 18x + 8{,}1 = 0,\ D_1 = 81 - 81 = 0,$$
$$x = 0{,}9,\ y = 3\cdot 0{,}9 - 2 = 0{,}7.$$

Ответ: $(0{,}9;\ 0{,}7)$.

Способ IV. (***Уровень 10-го класса.***) Нахождение наименьшего значения функции. Выразим ***AK***, используя формулу расстояния между точками плоскости ***A*** и точкой прямой $\boldsymbol{y = 3x - 2}$.

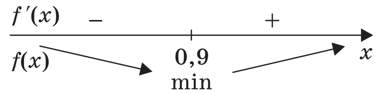
$$AK=\sqrt{(x-3)^2+(3x-2)^2}=\sqrt{10x^2-18x+13}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 10x^2 - 18x + 13$. Так как перпендикуляр короче наклонной, то найдем координаты точки минимума функции $f(x)$, это и будут координаты точки K.

1. Найдем производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = 20x - 18.$$

2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}9$.



$x_{min} = 0{,}9$,
$y = 3\cdot 0{,}9 - 2 = 0{,}7$.
Ответ: $K(0{,}9;\ 0{,}7)$.

Способ V. (***Уровень 9-го класса.***) Векторный метод в геометрии. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{KA}$. Так как они перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю. Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{CE}\left(3-\frac{2}{3};\ 7-0\right)=\left(\frac{7}{3};\ 7\right),$$

$$\overrightarrow{KA}(3-x;\ 0-y)=(3-x;\ -y).$$

Учитывая, что $y = 3x - 2$, получим систему

$$\begin{cases}\dfrac{7}{3}\cdot(3-x)+7\cdot(-y)=0,\\ y=3x-2,\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases}10x-9=0,\\ y=3x-2,\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}x=0{,}9,\\ y=0{,}7.\end{cases}$$

Ответ: $(0{,}9;\ 0{,}7)$.

Решение любой геометрической задачи на вычисление сводится, в сущности, к нахождению величин двух типов: расстояний и углов. Векторы позволяют находить более рациональные решения. Эту задачу можно отнести к задачам с геометрическим содержанием на координатной плоскости.

Коллеги, посмотрите, наша «Математика» в цвете!

Автор: Н.И. Авилов,
учитель математики
средней школы № 7
им. О. Казанского,
ст. Егорлыкская,
Ростовская область

ЗАДАЧА С4: КТО ВИНОВАТ ИЛИ ЧТО ДЕЛАТЬ

Уважаемые работники редакции!

Я — ученик, перешедший в 11-й класс. Получаю вашу газету и с удовольствием ее читаю, хотя она и рассчитана на учителей (моя мама — учитель). В этом году мой друг сдавал ЕГЭ и принес с экзамена задачу, которую он не решил.

Вот эта задача:

В треугольнике ABC $AB = 15$, $AC = 9$, $BC = 7$. Точка D делит сторону BC в отношении $5 : 7$, начиная от точки D. В треугольники ABD и ADC вписаны окружности, касающиеся отрезка AD в точках E и F соответственно. Найти длину отрезка EF.

Я решил эту задачу и затратил на ее решение (используя калькулятор) 4 часа. На экзамене калькуляторы запрещены. Без калькулятора у меня бы еще ушло часа 3–4 (громадные числа перемножаются или возводятся в квадрат и т.д.).

Я не понял, что составитель проверяет этой задачей: геометрию или арифметику? Ведь для арифметики есть другие задачи, в группе В например. Мне хотелось бы, чтобы составитель дал свое решение. Наверное, у него есть какой-то другой (короткий) способ, который я не увидел. Это будет интересно и учителям, и ученикам.

У меня решение заняло 7 стандартных листов А-4. Интересно узнать, сколько времени и листов это решение заняло у самого составителя? Может быть, он ее вообще не решал? Убедительно прошу напечатать мое письмо, так как оно может быть интересно всем.

А. Филатов,
ученик школы № 136, Москва

От редакции. Далее в письме идут действительно 7 страниц написанного от руки решения задачи. Выполняя пожелания автора письма, мы обратились за разъяснениями к членам федеральной предметной комиссии ЕГЭ по математике. Приводим их комментарий.

Уважаемый Алексей!

К сожалению, в условии задачи, которую вы решали, есть неточность. На экзамене задача С4 сформулирована так:

В треугольнике ABC $AB = 15$, $AC = 9$, $BC = 7$. Точка D лежит на *прямой* (а не на стороне) BC так, что $BD : DC = 5 : 7$. Окружности, вписанные в треугольники ABD и ADC, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

Ответ: $3\frac{7}{12}$ или $6\frac{1}{2}$.

Решение. Докажем сначала следующее утверждение. Если окружность, вписанная в треугольник KLM, касается его стороны MK в точке P, то

$$MP=\frac{1}{2}(MK+ML-KL).$$

Доказательство. Пусть Q и R — точки касания вписанной окружности треугольника KLM со сторонами ML и KL соответственно (рис. 1).

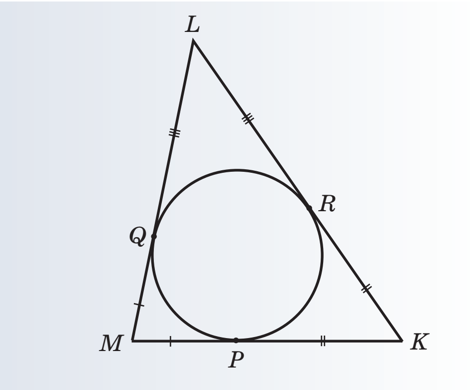


Рис. 1

Тогда

$$MQ = MP,\ KP = KR,\ LQ = LR,$$
$$KL = KR + RL = KP + LQ =$$
$$= (MK - MP) + (ML - MQ) =$$
$$= MK + ML - (MP + MQ) = MK + ML - 2MP.$$

Следовательно,

$$MP=\frac{1}{2}(MK+ML-KL),$$

что и требовалось доказать.

Вернемся к нашей задаче. Пусть вписанные окружности треугольников ADC и ABD касаются отрезка AD в точках E и F соответственно, причем точка D лежит на отрезке BC (рис. 2).

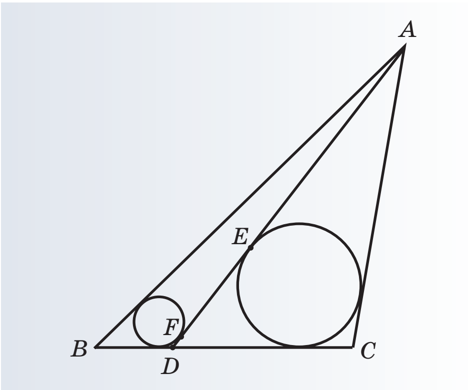


Рис. 2

Тогда по доказанному

$$AE=\frac{1}{2}(AC+AD-CD),$$

$$AF=\frac{1}{2}(AB+AD-BD),$$

значит,

$$EF=|AF-AE|=$$

$$=\left|\frac{1}{2}(AB+AD-BD)-\frac{1}{2}(AC+AD-CD)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}|AB-AC+CD-BD|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|AB-AC+\frac{7}{12}BC-\frac{5}{12}BC\right|=\frac{1}{2}\left|AB-AC+\frac{1}{6}BC\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|15-9+\frac{1}{6}\cdot 7\right|=\frac{43}{12}=3\frac{7}{12}.$$

Пусть теперь точка D лежит вне отрезка BC (рис. 3).

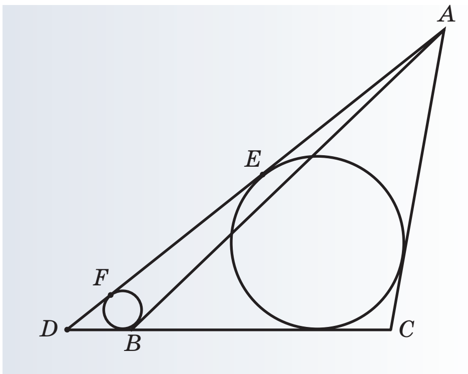


Рис. 3

Тогда она лежит на продолжении отрезка BC за точку B (так как $BD > CD$). Аналогично предыдущему случаю:

$$EF=|AF-AE|=\left|\frac{1}{2}(AB+AD-BD)-\frac{1}{2}(AC+AD-CD)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}|AB-AC+CD-BD|=$$

$$=\frac{1}{2}|AB-AC+BC|=\frac{1}{2}|15-9+7|=\frac{13}{2}=6\frac{1}{2}.$$

Так что вы получили правильный ответ к задаче с условием, которое сообщил вам приятель. При этом вы продемонстрировали настойчивость, умение пользоваться калькулятором, а также знание многих теорем школьной геометрии и умение их применять. Тем не менее разумнее было бы потратить время на поиск идеи, приводящей к более рациональному решению.

Как вы уже заметили, решение задачи основано на простом факте: отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны, то есть если прямые, проходящие через точку Z, касаются окружности в точках X и Y, то $ZX = ZY$. Надеемся, что теперь у вас нет сомнения в том, что задача действительно по геометрии.

Впереди еще несколько месяцев до экзамена. Уверены, что вы сможете хорошо подготовиться и успешно справитесь с большинством задач ЕГЭ, в частности с задачей С4. Желаем успеха.

ИНФОРМАЦИЯ

П. СЕМЕНОВ,
Л. ДЕНИЩЕВА,
Москва

Фото О. Кирюшкиной

СЕМИНАР А.Г. МОРДКОВИЧА

С 22 по 24 сентября на базе математического факультета Института математики и информатики МГПУ состоялся 29-й Всероссийский семинар преподавателей математики педвузов и университетов. Семинар этот достаточно уникален: вот уже почти 30 лет он проводится ежегодно и каждый раз в другом регионе страны. Семинар всегда вызывает интерес и энтузиазм его участников, на нем встречаются и обсуждают проблемы преподавания математики в школе и педагогическом вузе более ста вузовских преподавателей, треть которых — доктора наук. Бессменным руководителем семинара все эти годы является профессор А.Г. Мордкович, которому в этом году исполнилось 70 лет.

С пленарными докладами выступили профессора Е.И. Смирнов (г. Ярославль), В.Г. Ермаков (г. Гомель), В.А. Тестов (г. Вологда), В.А. Смирнов (Москва), С.Р. Когаловский (г. Шуя), Л.О. Денищева (Москва), Ю.Б. Мельников (г. Екатеринбург).

По традиции, после пленарного заседания начали работать секции. Секцией «Проблемы математической подготовки будущих учителей» руководил заведующий кафедрой математического анализа и методики преподавания математики МГПУ профессор П.В. Семенов. Тематика сделанных докладов была достаточно разнообразной.

Дидактическим, психологическим и общекультурным аспектам преподавания математики были посвящены доклады: Э.Г. Гельфман (г. Томск), И.Е. Маловой (г. Брянск), М.С. Ананьевой (г. Пермь), А.В. Ястребовой (г. Ярославль), А.Т. Зверевой (г. Курган), Г.И. Прокопенко (г. Челябинск).

Много докладов было связано с исторической тематикой, в которых все докладчики отмечали воспитательную и социально значимую роль этой темы. По ней выступили: Т.С. Полякова (г. Ростов-на-Дону), С.Ю. Щербакова (г. Тверь), М.Ф. Гильмуллин (г. Елабуга), Ю.А. Дробышев (г. Калуга).

Сложности и проблемы, возникающие при переходе на стандарты ВПО третьего поколения (при замене «ЗУНов» на «компетентности»), обсуждались в выступлениях И.Г. Липатовой (г. Екатеринбург), Е.Н. Перевощиковой (г. Нижний Новгород), Л.А. Салеховой (г. Казань), З.Ю. Нигматуллиной (г. Челябинск).

3

4

1 Руководитель семинара профессор А.Г. Мордкович.
2. Коллективное фото участников семинара.
3. Пленарный доклад профессора В.Г. Ермакова.
4. Постоянные участники семинара — ректор Калужского педуниверситета. профессор Ю.А. Дробышев и профессор Гомельского университета В.Г. Ермаков.

В докладе О.А. Иванова (Санкт-Петербург) «Системы компьютерной алгебры в обучении математике» была представлена оригинальная методика использования ИКТ, позволяющая при решении задач с параметром преобразовывать выражения и строить графики функций с помощью достаточно простого компьютерного редактора, тем самым концентрируя внимание учащихся на качественно важных вопросах.

А.Х. Назиев в докладе «О формировании понятия определения» убедительно показал, что излишнее внимание к формальному содержанию этого понятия зачастую противоречит естественному ходу возникновения тех или иных математических объектов.

В рамках работы секции прошел круглый стол по теме «Сравнение двух форматов КИМ ЕГЭ по математике». Участники обсуждения практически единодушно отметили как основной недостаток нового формата ЕГЭ то, что для преодоления минимального порога изучение математики в старшей школе оказывается совершенно ненужным. Этот факт априорно создает крайне напряженное положение с мотивированием обучения математике примерно 30–40% учащихся старшей школы.

Секцией «Школьное математическое образование — проблемы и перспективы» руководила профессор кафедры мат. анализа и методики преподавания математики МГПУ Л.О. Денищева. Выступающие сосредоточились на обсуждении трех основных на сегодняшний день проблем общеобразовательной и профильной школы: школьные стандарты второго поколения и возможности их реализации в практике работы учителя математики; проблемы подготовки и переподготовки учителей математики в условиях дифференциации обучения; применение ИКТ на уроках математики.

Большая часть сообщений были посвящены третьей из этих проблем: «О роли компьютерной инструментальной геометрии в подготовке будущих учителей математики» (А.А. Горбунов, г. Чебоксары); «Компьютерные инструменты для лабораторных работ по алгебре» (В.Н. Дубровский, Москва); «Работа учителя с системой цифровых ресурсов» (И.И. Зубарева, Москва); «Компьютерная поддержка формирования базовых понятий школьного курса математики» (О.В. Кирюшина, Москва); «Школьный учитель и математические сайты»(Н.И. Мерлина, А.В. Мерлин, г. Чебоксары).

Отдавая должное возможностям, которые предоставляет ИКТ для обучения математике, участники секции высказали опасения относительно смещения центра тяжести в обучении с развития математического мышления учащихся в область «визуального ряда» объектов, рассматриваемых на уроках математики.

Вопросы внедрения школьных стандартов второго поколения были представлены в докладах: «Моделирование при изучении геометрического материала как универсальное действие в рамках новых образовательных стандартов» (Н.С. Подходова, Санкт-Петербург); «О подготовке будущего учителя математики к формированию логической компетенции у учащихся 5–6 классов» (Т.В. Маколкина, г. Барнаул); «Контексты учебных материалов по математике» (Т.В. Макарченко, г. Таганрог).

Проблемы подготовки и переподготовки учителей освещались в различных аспектах: «О подготовке учителей математики для национальной школы» (С.С. Салаватова, г. Стерлитамак); бурно обсуждался вопрос «Об адаптации молодых специалистов в сфере образования на начальном этапе трудовой деятельности» (Е.И. Антонова, г. Владимир); вызвало интерес сообщение о «Значении портфолио студента педвуза для оценки его профессиональной подготовки» (Л.О. Денищева, Москва).

Не осталась без внимания и проблема оценки качества обучения математике.

И.В. Кисельниковым были представлены результаты исследования по теме «Процессный подход в обеспечении качества обучения математике».

Материалы семинара помещены в сборнике «Профессионально-педагогическая направленность математической подготовки учителя математики в педвузах в современных условиях».

Приглашаем коллег к участию в будущих семинарах.

И. ВЫСОЦКИЙ,
И. ЯЩЕНКО,
Москва

МОСКОВСКИЕ ГОРОДСКИЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКЕ

Окончание. Начало в № 2/2011.

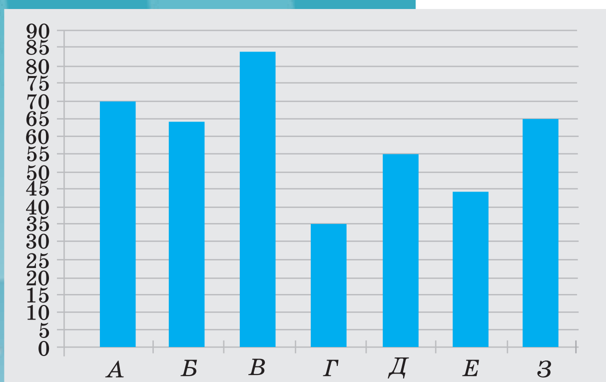
8-й класс

Критерии оценивания

Отметка «отлично» ставится, если безошибочно выполнены любые пять заданий из шести; отметка «хорошо» ставится за выполнение четырех любых заданий, возможно, с одной вычислительной ошибкой при верном ходе рассуждений; отметка «удовлетворительно» — за выполнение трех любых заданий, возможно, с вычислительной ошибкой.

Вариант 1

1. Рейтинговое агентство проводило опрос среди покупателей: «Какой книжный магазин вам больше нравится?» Столбиковая диаграмма показывает рейтинги семи магазинов (в баллах) по результатам опроса.



По диаграмме определите:

а) Какой магазин получил наибольшее число голосов по результатам опроса?

б) Сколько магазинов набрало более 60 баллов?

2. В таблице указано количество проданной минеральной воды (в тыс. бутылок) в весенние и летние месяцы за два года (по данным компании-производителя).

а) Вычислите среднее арифметическое данных за все летние месяцы.

б) Вычислите среднее арифметическое данных за все весенние месяцы.

в) Дайте возможное объяснение тому, что найденные показатели отличаются друг от друга.

Месяц	2007	2008
Март	100	105
Апрель	104	111
Май	112	110
Июнь	119	126
Июль	120	125
Август	110	120

3. В городе планируется построить метрополитен, в котором три линии — южная, западная и кольцевая. Художнику поручено нарисовать схему будущего метрополитена, причем каждая линия должна иметь свой цвет. Художник использует три цвета: красный, синий и зеленый.

а) Сколько существует возможных вариантов распределения цветов?

б) Перечислите все варианты с помощью таблицы.

4. На чемпионате по художественной гимнастике выступает 18 гимнасток, среди них 3 гимнастки из России, 2 гимнастки из Китая. Порядок выступления определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что:

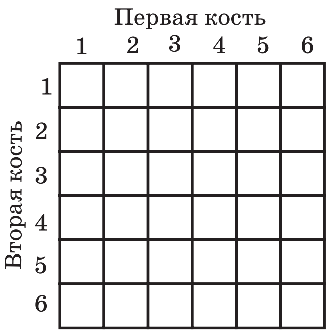
а) первой будет выступать гимнастка из России;

б) последней будет выступать гимнастка или из России, или из Китая.

5. Иван и Петр играют в кости. Каждый бросает кость два раза. Выигрывает тот, у кого выпавшая сумма очков больше. Если суммы очков равны, игра оканчивается вничью. Первым бросал кости Иван, и у него выпало 5 очков и 3 очка. Теперь бросает кости Петр.

а) В таблице элементарных событий укажите (штриховкой) элементарные события, благоприятствующие событию «Петр выиграет».

б) Найдите вероятность события «Петр выиграет».

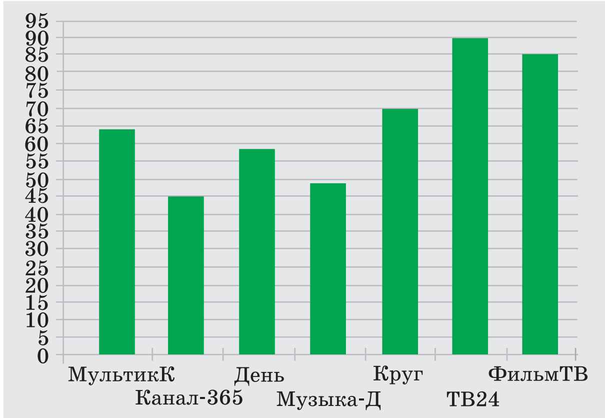


6. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном семизначном телефонном номере последние четыре цифры — тройка и три двойки (в любом порядке).

Вариант 2

1. Рейтинговое агентство проводило опрос среди телезрителей: «Какой телеканал вам больше нравится?» На диаграмме показаны рейтинги семи телевизионных каналов (в баллах) по результатам опроса.

По диаграмме определите:



а) Какой канал получил наименьшее число голосов по результатам опроса?

б) Сколько каналов набрали менее 50 баллов?

2. В таблице указано количество проданных порций мороженого (в тыс. штук) в летние и осенние месяцы за два года (по данным компании-производителя).

Месяц	2007	2008
Июнь	815	843
Июль	817	915
Август	507	543
Сентябрь	411	500
Октябрь	225	450
Ноябрь	211	411

а) Вычислите среднее арифметическое данных за все летние месяцы.

б) Вычислите среднее арифметическое данных за все осенние месяцы.

в) Дайте возможное объяснение тому, что найденные показатели отличаются друг от друга.

3. В городе три района — Заречный, Фабричный и Центральный. Художнику поручено нарисовать план города, причем каждый из районов должен быть выделен своим цветом. Художник решил использовать три цвета: розовый, голубой и желтый.

а) Сколько существует возможных вариантов распределения цветов?

б) Перечислите все варианты с помощью таблицы.

4. На чемпионате по прыжкам в воду выступает 20 спортсменов, среди них 5 прыгунов из России и 3 прыгуна из США. Порядок выступления определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что:

а) первым будет прыгать спортсмен из США;

б) вторым будет прыгать спортсмен или из России, или из США.

5. Татьяна и Виктория играют в кости. Каждая бросает кость дважды. Выигрывает та, у кого выпавшая сумма очков больше. Если суммы очков равны, игра оканчивается вничью. Первой бросала кости Виктория, и у нее выпало 2 очка и 4 очка. Теперь бросает кости Татьяна.

а) В таблице элементарных событий укажите (штриховкой) элементарные события, благоприятствующие событию «Виктория выиграет».

б) Найдите вероятность события «Виктория выиграет».

Первая кость

Вторая кость	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

6. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном семизначном телефонном номере последние пять цифр — одна семерка и четыре восьмерки (в любом порядке).

Решения заданий варианта 1, требования к выполнению заданий и рекомендации по оцениванию

1. 1. *Возможное решение*. Самый высокий столбик соответствует магазину В.

Более 60 баллов набрали магазины А, Б, В и З. Всего 4 магазина.

Ответ: а) В; б) 4.

Это задание на чтение столбиковой диаграммы. От учащихся не требуется ни пояснений, ни развернутых ответов.

2. *Возможное решение.* Вычислим среднее за все летние месяцы:

$$\frac{119+126+120+125+110+120}{6}=120.$$

Теперь найдем среднее за все весенние месяцы:

$$\frac{100+105+104+111+112+110}{6}=107.$$

Ответ: а) 120; б) 107; в) вероятно, весной минеральную воду покупают меньше, потому что не так жарко, как летом, и пить хочется меньше.

При вычислении средних учащийся может воспользоваться свойствами средних. Например, вычисляя средние за все летние месяцы, можно упростить вычисления, отняв от каждого из чисел 110, а потом прибавив это число к результату усреднения:

$$\frac{9+16+10+15+0+10}{6}+110=10+110=120.$$

Ответ на пункт «в» может быть непредсказуемым. Например — отличие небольшое, потому что хотя летом воды пьют больше, но все разъехались на дачи и покупают воду в других магазинах. Или: продажи весной и летом отличаются, потому что весной покупателям вода понравилась, и летом они стали покупать ее больше. Главный критерий — рассуждение содержит возможное, правдоподобное объяснение ситуации.

3. *Возможное решение.* Сначала решим пункт «б», перечислив варианты. Построим таблицу и заполним ее. Если южная линия имеет красный цвет, то западная и кольцевая имеют соответственно зеленый и синий или наоборот. Внесем эти два варианта в таблицу и найдем еще по два варианта в случаях, когда южная линия имеет синий или зеленый цвет. Получим таблицу.

Южная	К	К	С	С	З	З
Западная	З	С	К	З	К	С
Кольцевая	С	З	З	К	С	К

Тогда всего существует 6 раскрасок.

Ответ: а) 6.

Не следует выдавать школьникам шаблон таблицы заранее. Таблица должна быть сконструирована самостоятельно. При этом варианты могут располагаться как в строчках, так и в столбцах. Обозначения цветов могут быть сделаны буквами или цветными метками, линии метро также могут быть обозначены первыми буквами и т.п. Совершенно не играет роли, отделены графы таблицы друг от друга линиями или нет. Таблица должна быть аккуратной, полной и понятной. Других требований к ней нет. Пункт «а» многие школьники могут решить независимо от «б». Например, с помощью комбинаторного правила умножения: южной линии назначаем любой из трех цветов, для западной остается два цвета, а для кольцевой — один: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Особенное внимание следует обратить на тех учащихся, у кого в пунктах «а» и «б» получилось разное число раскрасок. Контроль над этой ошибкой не проводился, но в будущем планируется.

4. *Возможное решение*. а) При выборе первой гимнастки общее число элементарных событий

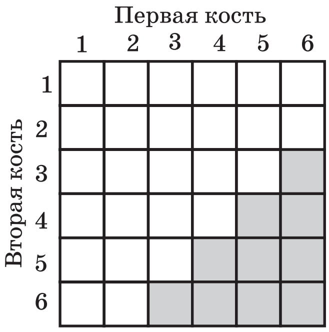
$N = 18$, число элементарных событий, благоприятствующих событию A = {первая из России}, $N(A) = 3$. Тогда

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}.$$

б) Пусть событие B = {последняя из России или из Китая}, $N = 18$, $N(B) = 3 + 2 = 5$, $P(B) = \frac{5}{18}$.

Учащийся может не обозначать события буквами. Запись решения может быть более или менее подробной, чем приведенная в примерном решении.

5. *Возможное решение*. Чтобы выиграть, Петр в сумме должен выбросить очков больше, чем $5 + 3 = 8$. Заштрихуем в таблице исходов опыта с бросанием двух игральных костей все исходы, благоприятствующие событию «Сумма очков больше 8». Общее число элементарных событий — 36, число благоприятствующих событий равно 10, значит, вероятность равна $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.



Учитель может разрешить учащимся пользоваться для штриховки заранее подготовленной таблицей либо потребовать перечертить таблицу в тетрадь. Не нужно требовать специальных письменных пояснений к штриховке.

6. *Возможное решение*. Общее число возможных комбинаций последних четырех цифр: $N = 10^4$. Указанному событию благоприятствуют исходы вида 3222, где цифры следуют в любом порядке. Позицию для тройки можно выбрать $C_4^1 = 4$ способами. На остальные места нужно поставить двойки. Тогда искомая вероятность равна

$$\frac{C_4^1}{N} = \frac{4}{10^4} = \frac{1}{2500} = 0,0004.$$

Учащийся может не использовать комбинаторные соображения, а просто перечислить все благоприятствующие исходы: 3222, 2322, 2232 и 2223. Общее число комбинаций также можно найти непосредственно — чисел от 0 до 9999 ровно 10 000. Ответ может быть записан как обыкновенной, так и десятичной дробью.

Анализ значимых и типичных ошибок учащихся

Пояснение к анализу

Обычно анализ ошибок подразумевает указание процентной доли учащихся, допустивших ту или иную ошибку. Конечно, такие данные есть. Но понимая, что эти числа не являются абсолютно точными в силу случайной изменчивости разного рода, авторы не хотят, чтобы у читателя возникло искушение делать категоричные выводы из приблизительных данных. Поэтому таблицы с процентными данными не публикуются. Вместо этого ошибки поделены на несколько категорий по частоте их появления.

Очень редкая — ошибка встречается настолько редко, что данные о ее появлении статистически незначимы — они с высокой вероятностью могут объясняться погрешностью сбора или ввода данных.

Редкая — ошибка встречается в незначительном количестве.

Частая — таких ошибок много, но не настолько, чтобы можно было говорить об их массовом характере или системных просчетах в методике преподавания.

Массовая — ошибка, допущенная значительной частью учащихся, характерная для целых образовательных учреждений, свидетельствующая скорее об общих просчетах в методике или общих чертах учащихся, присущих им в силу психолого-возрастных свойств.

Если типы ошибок в задании не выделялись, анализ ошибок по такому заданию отсутствует.

1. Рейтинговое агентство проводило опрос среди покупателей: «Какой книжный магазин вам больше нравится?» Столбиковая диаграмма показывает рейтинги семи магазинов (в баллах) по результатам опроса.

По диаграмме определите:

а) Какой магазин получил наибольшее число голосов по результатам опроса?

б) Сколько магазинов набрало более 60 баллов?

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Вместо количества магазинов указаны их названия или номера столбиков	Редкая

Комментарии. Учащиеся, указавшие названия магазинов вместо количества, вероятно, сделали это от излишней старательности. К сожалению, невнимание тоже нельзя списывать со счетов: в задаче четко спрашивалось о количестве.

2. В таблице указано количество проданной минеральной воды (в тыс. бутылок) в весенние и летние месяцы за два года (по данным компании-производителя).

Месяц	2007	2008
Март	100	105
Апрель	104	111
Май	112	110
Июнь	119	126
Июль	120	125
Август	110	120

а) Вычислите среднее арифметическое данных за все летние месяцы.

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Не выделены месяцы нужного времени года	Очень редкая
б	Взяты месяцы не за два года	Очень редкая
в	Ошибка в способе нахождения среднего арифметического (например, в качестве слагаемых взята полусумма данных)	Очень редкая

б) Вычислите среднее арифметическое данных за все весенние месяцы.

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Не выделены месяцы нужного времени года	Очень редкая
б	Взяты месяцы не за два года	Очень редкая
в	Ошибка в способе нахождения среднего арифметического (например, в качестве слагаемых взята полусумма данных)	Очень редкая

в) Дайте возможное объяснение тому, что найденные показатели отличаются друг от друга.

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Текст бессвязный, не имеет отношения к рассматриваемому явлению	Очень редкая
б	Рассуждение имеет отношение к делу, но неправдоподобное или ничего не объясняющее	Редкая

Комментарии. Не будем анализировать незначимые ошибки. Обратим внимание лишь на то, что количество восьмиклассников, показавших умение рассуждать, практически такое же, как и количество рассуждающих семиклассников: отличия в результатах решения задания 2(в) ничтожны.

3. В городе планируется построить метрополитен, в котором три линии — южная, западная и кольцевая. Художнику поручено нарисовать схему будущего метрополитена, причем каждая линия должна иметь свой цвет. Художник использует три цвета: красный, синий и зеленый.

а) Сколько существует возможных вариантов распределения цветов?

б) Перечислите все варианты с помощью таблицы.

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	В таблице один вариант встречается больше одного раза	Очень редкая
б	В таблице перечислены не все варианты	Редкая
в	Варианты частично или полностью перечислены, но таблица не оформлена	Очень редкая

4. На чемпионате по художественной гимнастике выступает 18 гимнасток, среди них 3 гимнастки из России, 2 гимнастки из Китая. Порядок выступления определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что:

а) первой будет выступать гимнастка из России;

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Учащийся неверно определяет общее число элементарных событий опыта	Редкая
б	Ответ дан в процентах	Очень редкая

б) последней будет выступать гимнастка или из России, или из Китая.

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Ошибка в определении числа благоприятствующих элементарных событий	Частая
б	Ответ дан в процентах	Очень редкая

Комментарии. Количество учащихся, не сумевших решить простую вероятностную задачу, находится в ожидаемых пределах. Задание 4(б), будучи более сложным, естественным образом дало больше ошибок. При рассмотрении работ учащихся удивило большое число пытающихся применить какую-то комбинаторную технику, начавших вычислять число сочетаний и т.п. Это говорит о том, что многие ошибочно опознают ситуацию, не могут выделить стандартный вероятностный сюжет и потому действуют наобум, пытаясь воспользоваться каким-то изученным алгоритмом.

5. Иван и Петр играют в кости. Каждый бросает кость два раза. Выигрывает тот, у кого выпавшая сумма очков больше. Если суммы очков равны, игра оканчивается вничью. Первым бросал кости Иван, и у него выпало 5 очков и 3 очка. Теперь бросает кости Петр.

а) В таблице элементарных событий укажите (штриховкой) элементарные события, благоприятствующие событию «Петр выиграет».

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Заштрихованы нужные клетки и лишние	Частая
б	Заштрихованы не все нужные клетки, но лишних нет	Редкая
в	Штриховка отсутствует или в корне неверна	Частая

б) Найдите вероятность события «Петр выиграет».

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	При правильной штриховке неверно вычислено число благоприятствующих элементарных событий	Частая
б	При правильной штриховке решение отсутствует	Редкая

Комментарии. Задача стандартная, вероятно, основную трудность составило правильное понимание развернутого условия. Некоторую странность являет собой большое число учащихся, неверно определивших число благоприятствующих событий при верной штриховке. Можно лишь предположить, что примерно один из десяти восьмиклассников плохо считает до десяти.

6. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном семизначном телефонном номере последние четыре цифры — тройка и три двойки (в любом порядке).

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Благоприятствующие события перечислены непосредственно (не является ошибкой)	Редкая
б	Общее число номеров определено неверно	Частая

Комментарий. Шестая задача, хотя и является самой трудной в работе, должна быть знакома учащимся — в учебниках содержится достаточное число заданий с похожим сюжетом. Задача могла быть решена с помощью комбинаторных методов, хотя допускала простой пересчет числа благоприятствующих элементарных исходов. Вероятно, основную трудность составило определение общего числа возможных номеров. Это проблема общематематической культуры: для того чтобы понять, что целых чисел от 0 до 9999 ровно десять тысяч, вовсе не требуется знать комбинаторные правила и формулы.

XX ТУРНИР АРХИМЕДА

Оргкомитет Турнира Архимеда совместно с редакцией газеты «Математика» объявляет заочный конкурс решения задач для учащихся 6–7-х классов.

Решения задач просим выслать до 15 марта 2011 г. по адресу: 121165, Москва, ул. Киевская, д. 24, редакция газеты «Математика», с пометкой на конверте «Турнир».

В письмо следует также вложить конверт с маркой и надписанным адресом участника — в нем будут высланы результаты проверки. В письме просим указать номер школы, класс, фамилию, имя, отчество учителя математики.

Победителей конкурса ждут призы редакции газеты «Математика» и оргкомитета Турнира Архимеда.

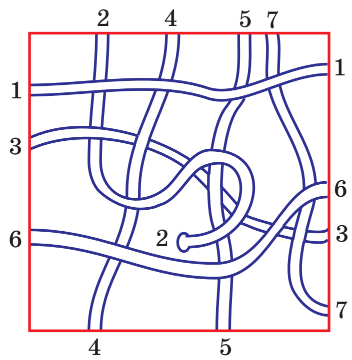
Желаем успехов!

Задача 1. Выборы

В выборах поселкового совета участвовали 900 жителей села. За кандидата А проголосовали 15% женщин и 20% мужчин, всего 159 жителей. Сколько женщин и сколько мужчин участвовало в голосовании?

Задача 2. Лабиринт

На рисунке показан лабиринт из семи пронумерованных дорожек. Требуется закрасить каждую из дорожек в какой-либо цвет, причем ни на одном перекрестке не должны пересекаться дорожки одинакового цвета. Какое наименьшее число красок необходимо иметь, чтобы выполнялось условие задачи? Приведите пример такой раскраски.



Задача 3. Когда начинается сеанс?

Школьник собрался в кино. Он знает, что первый сеанс начинается между 12 и 13 часами, а второй — между 13 и 14 часами. Последний сеанс начинается в 23 часа 05 минут. Промежутки времени между началом любых двух последовательных сеансов одинаковы. Когда начинается предпоследний, шестой сеанс?

Задача 4. О целых числах

Можно ли подобрать 4 целых числа так, чтобы все их попарные суммы составляли 6 последовательных целых чисел?

Задача 5. Продолжение предыдущей задачи

Можно ли подобрать 5 целых чисел так, чтобы все их попарные суммы составляли 10 последовательных целых чисел?

Задача 6. Часы и математика

Часовому мастеру принесли трое часов и попросили выверить их ход. Мастер включил секундомер и посмотрел на часы № 1 и № 2. За 11 минут хода часов № 1 часы № 2 отсчитали 10 минут. Потом он сравнил часы № 2 и № 3: за 12 минут 30 секунд хода часов № 2 часы № 3 прошли 12 минут. Посмотрев затем в течение 8 минут 15 секунд на часы № 1, мастер остановил секундомер, — он отсчитал ровно 30 минут. Определите, какие часы идут точно.

Задача 7. Шахматная фигура «Хромой король»

«Хромой король» может ходить так: или на одну клетку вверх, или на одну клетку вправо, или на одну клетку по диагонали влево вниз. Может ли «Хромой король», начиная из левого нижнего угла доски 8 × 8 клеток, обойти всю доску, побывав на каждой клетке ровно по одному разу?

Задача 8. Радиоактивные шары

Как с помощью индикатора радиоактивности обнаружить за семь измерений два радиоактивных шара, находящихся среди пятнадцати одинаковых шаров? Измерять радиоактивность можно у отдельно взятого шара или у группы шаров одновременно. Индикатор указывает на наличие радиоактивности, но не дает информации о количестве радиоактивных шаров в группе.

Б. АМИНЕВ,
Е. НОВОДВОРСКАЯ,
А. ОБРУБОВ,
Ф. ПЧЕЛИНЦЕВ,
Т. СТРУКОВ,
П. ЧУЛКОВ,
Е. ШАПАРИН,
г. Москва.

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР АРХИМЕДА
ИТОГИ ЗАОЧНОГО КОНКУРСА

Условия задач были опубликованы в газете «Математика» (№ 4/10).

В 2009/2010 учебном году в конкурсе приняли участие около 370 школьников из 40 регионов России, а также Республики Беларусь, Казахстана и Болгарии. Наибольшую активность в этом году проявили школьники из Москвы, Московской области, а также Челябинской области и Чувашии.

Каждому участнику конкурса отправлено письмо с результатами проверки. Победителями и призерами стали 50 участников турнира.

Победителям и призерам конкурса высланы дипломы и призы — сборник задач и решений этого конкурса, а также сборники, посвященные математическим регатам.

Если ответ не был получен, напишите, пожалуйста, по адресу: 121165, Москва, ул. Киевская, 24, редакция газеты «Математика», с пометкой на конверте «Турнир» или на электронную почту info@arhimedes.org.

Дополнительную информацию о Турнирах Архимеда можно получить на сайте www.arhimedes.org.

Победители и призеры

Диплом I степени

Баранов Петр (6-й класс, лицей № 165, г. Нижний Новгород);
Басимова Наталья (6-й класс, физико-математическая школа № 2007, Москва);
Богомолов Даниил (6-й класс, Ильичевская средняя школа, пос. Ильичево, Шушенский р-н, Красноярский край);
Вишнякова Нина (6-й класс, физико-математическая школа № 2007, Москва);
Колодяжная Юлия (7-й класс, центр образования № 109, Москва);

Костина Евгения (5-й класс, школа № 1, г. Елабуга, Республика Татарстан);
Мусаткина Дарья (6-й класс, лицей № 3, г. Чебоксары, Чувашская Республика);
Петров Степан (6-й класс, физико-математический лицей № 30, г. Санкт-Петербург);
Шеина Марина (7-й класс, гимназия № 5, г. Юбилейный, Московская обл.);
Мостовой Ярослав (7-й класс, школа № 9, Москва);
Николаева Дарья (5-й класс, школа № 464, Москва).

Диплом II степени

Александров Михаил (6-й класс, лицей математики и информатики, г. Саратов);
Анохин Александр (6-й класс, физико-математический лицей № 5, г. Долгопрудный, Московская обл.);
Бистерфельд Николай (6-й класс, школа № 8, г. Рязань);
Бугаев Сергей (7-й класс, школа № 1978, Москва);
Васянина Дарья (7-й класс, центр образования № 218, Москва);
Веселинов Михайлов Мартин (5-й класс, МГ «Баба Тонка», г. Русе, Болгария);
Воронина Юлия (7-й класс, школа № 111, г. Волгоград);
Воронов Влад (7-й класс, лицей № 13, г. Химки, Московская обл.);
Горбачёв Дмитрий (7-й класс, гимназия № 2, г. Саров, Нижегородская обл.);
Гордеева Татьяна (6-й класс, лицей № 3, г. Чебоксары, Чувашская Республика);
Евстигнеев Сергей (6-й класс, школа № 1106, Москва);
Зайдуллина Энджа (6-й класс, Новодемкинская средняя школа им. Назина Думави, с. Новое Демкино, Аксубаевский р-н, Республика Татарстан);
Кирпичёва Татьяна (6-й класс, лицей № 3, г. Чебоксары, Чувашская Республика);
Ковернинский Станислав (6-й класс, школа № 444, Москва);
Крюкова Екатерина (6-й класс, школа «Интеллектуал», Москва);
Купцов Евгений (6-й класс, лицей № 3, г. Чебоксары, Чувашская Республика);
Кучменко Екатерина (6-й класс, школа № 5, г. Ступино, Московская обл.);
Лосева Тамара (7-й класс, школа № 199, Москва);
Лурье Евгений (7-й класс, школа № 1522, Москва);
Меньшенин Вячеслав (6-й класс, кадетская школа-интернат № 7, Москва);
Мирская Юлия (7-й класс, школа № 1308, Москва);
Мишин Юрий (7-й класс, лицей № 36, г. Нижний Новгород);
Мосейчев Алексей (4-й класс, школа № 57, Москва);
Мустафин Александр (5-й класс, гимназия № 1514, Москва);
Огарок Пётр (6-й класс, школа № 179, Москва);
Одоевский Иван (6-й класс, лицей математики и информатики, г. Саратов);
Пацкан Иван (6-й класс, Ильичевская средняя школа, пос. Ильичево, Шушенский р-н, Красноярский край);
Пискунов Алексей (6-й класс, лицей № 4, г. Саранск, Республика Мордовия);
Поснов Сергей (6-й класс, школа № 444, Москва);
Сергеева Анастасия (6-й класс, Емёткинская средняя школа, д. Емёткино, Чувашская Республика);
Сиверс Александр (7-й класс, школа № 249, г. Санкт-Петербург);
Сотский Арсений (6-й класс, школа № 1189, Москва);
Тихоненко Илья (6-й класс, физико-математический лицей № 30, г. Санкт-Петербург);
Фадель Мария (7-й класс, школа № 32, г. Прокопьевск, Кемеровская обл.).
Фесюк Марина (5-й класс, физико-математическая школа № 2007, Москва);
Харатян Андрей (6-й класс, лицей № 1524, Москва);
Шувалова Анастасия (7-й класс, гимназия № 3, г. Королёв, Московская обл.);
Щевьева Любовь (7-й класс, школа № 1189, Москва);
Щевьева Надежда (5-й класс, школа № 1189, Москва);

Математические кружки

Первое место —
математический кружок «Лотос» учащихся физико-математической школы № 32 г. Астрахань (руководитель — А.В. Храмова).

Второе место —
математический кружок «Сигнум» учащихся 6–7-х классов Московского казачьего кадетского корпуса им. М.А. Шолохова (руководитель — С.А. Иванов).

Задачи

1. Восстановите пример:

ОГОГО + УГУГУ = УГУГУГ.

Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры.

2. Пять одинаковых на вид кубиков весят соответственно 1000, 1001, 1002, 1004 и 1007 г. За какое наименьшее число взвешиваний на электронных весах можно найти кубик весом 1000 г?

3. В некотором царстве 20% всех женщин замужем, 25% всех мужчин женаты, 20% населения составляют дети. Выясните, какой процент населения состоит в браке.

4. Рассеянный математик, переселившийся в новый район, забыл номер своей квартиры. Он лишь помнил, что номер двухзначный, является разностью квадратов двух чисел, меньшее из которых равно цифре десятков и вдвое больше числа единиц номера квартиры. Можно ли по этим данным восстановить номер квартиры?

5. Пентамино — фигура, составленная из пяти одинаковых квадратов, «склеенных» по стороне. Всего существует 12 различных видов пентамино (рис. 1).

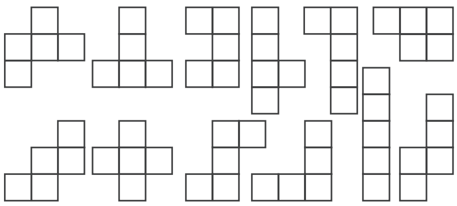


Рис. 1

Вася сумел составить из полного набора шесть фигур, изображенных на рисунке 2, причем каждую фигурку пентамино использовал ровно один раз. Как ему это удалось?

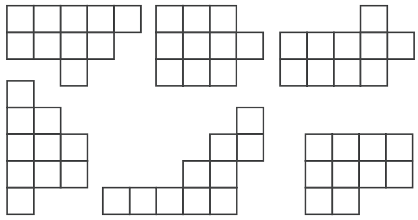


Рис. 2

6. Вася идет по шпалам железной дороги, возможно, не наступая на некоторые из них. Шпалы уложены так, что на любом стометровом участке ровно 200 шпал, причем расстояние между шпалами не меньше 30 см, но не больше 60 см, а длина Васиного шага не превышает 80 см. При какой укладке шпал Вася сделает наибольшее число шагов на 1 км пути, а при какой наименьшее?

7. На склад привезли 99 одинаковых полных бочек серной кислоты неизвестной (возможно, различной) концентрации. По условиям контракта необходимо, чтобы концентрация кислоты во всех бочках была одинакова. Как этого добиться, если в вашем распоряжении еще одна — пустая бочка и прибор, позволяющий переливать любое количество жидкости из бочки в бочку?

8. Сколько существует пар последовательных натуральных чисел, сумма цифр каждого из которых кратна 7?

Ответы и решения

1. 90909 + 10101 = 101010.

Решение. Заметим, что У = 1 (так как в каждом из слагаемых по пять цифр, а их сумма записывается шестью цифрами). То есть:

ОГОГО + 1Г1Г1 = 1Г1Г1Г.

Так как ГО + Г1 = 1Г, то либо Г + Г заканчивается на 1, либо Г + Г + 1 заканчивается на 1. Первый вариант невозможен, а из второго получим, что Г = 0 или Г = 5. В случае Г = 5 получаем, что О = 4, и этот случай не подходит. При Г = 0 однозначно получаем, что О = 9.

2. За три взвешивания.

Решение. Докажем, что за три взвешивания выделить кубик 1000 г можно. Сначала взвешиваем произвольно выбранную пару кубиков. Так как суммы весов двух любых кубиков уникальны, то по результату можно судить, есть ли среди этой пары искомый кубик. В противном случае он находится среди трех оставшихся кубиков. Далее возможны два случая:

а) искомый кубик — один из двух уже взвешенных кубиков. Тогда взвесим один из них и тем самым выявим искомый кубик;

б) если искомый кубик среди трех других кубиков. Тогда за два взвешивания мы можем наверняка найти искомый кубик, взвесив последовательно два кубика из трех.

Почему нельзя обойтись двумя взвешиваниями? Заметим, что за одно взвешивание мы разбиваем исходное множество кубиков на два подмножества и определяем, в какой из частей находится искомый кубик. Как бы мы ни разбивали множество на части, после первого взвешивания имеется множество, содержащее не менее трех кубиков, в котором может находиться искомый кубик. Из трех кубиков за одно взвешивание выделить искомый кубик невозможно.

Комментарий. Большинство участников приводили верный алгоритм, но забывали обосновать, что меньшим числом взвешиваний обойтись нельзя.

3. $17\frac{7}{9}\%$.

Решение. Пусть x — количество супружеских пар. Тогда $2x$ состоят в браке, $3x$ мужчин не женаты и $4x$ женщин не замужем, всего взрослых — $9x$, что составляет 80% населения. Следовательно, доля людей, состоящих в браке, составляет

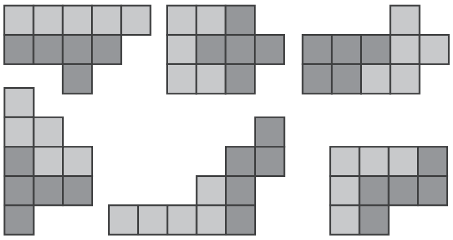
$$\frac{80\cdot 2}{9}=17\frac{7}{9}\%.$$

4. Да, можно.

Решение. Найдем все двузначные числа, в которых число десятков в два раза больше числа единиц. Это числа 21, 42, 63 и 84. Рассмотрим эти случаи последовательно:

1) $84 = x^2 - 8^2$, $84 + 64 = x^2$, $x^2 = 148$;
148 квадратом натурального числа не является;
2) $63 = x^2 - 6^2$, $63 + 36 = x^2$, $x^2 = 99$;
99 квадратом натурального числа не является;
3) $42 = x^2 - 4^2$, $42 + 16 = x^2$, $x^2 = 58$;
58 квадратом натурального числа не является;
4) $21 = x^2 - 2^2$, $21 + 4 = x^2$, $x^2 = 25$;
25 — квадрат числа 5, что удовлетворяет условию задачи. Следовательно, номер квартиры 21, и его можно восстановить по данным условия.

5. Например, так (см. рис.):



6. 1) Наибольшее число шагов получится, если шпалы уложены так, что расстояние между любыми двумя соседними шпалами равно 50 см;

2) наименьшее число шагов — если шпалы на каждых 100 метрах уложены так: на участке 40 м — через каждые 40 см, на следующем участке в 60 м — через каждые 60 см.

Решение. Будем считать, что расстояние между шпалами равно расстоянию между их «средними линиями». Наибольшее число шагов получится, когда Васе придется наступить на все шпалы. Это возможно, если расстояние между двумя соседними шпалами равно 50 см. В этом случае будет сделано 2000 шагов. Докажем, что наименьшее число шагов — 1500. Заметим, что Вася может перепрыгивать не более чем через одну шпалу, уменьшая тем самым число шагов. Такие шаги будем называть «длинными». Докажем, что на участке 100 м Вася сделает не более 50 «длинных» шагов. Предположим, что Вася перепрыгнул 51 шпалу за 51 «длинный» шаг (от 60 см до 80 см) и наступил на 51 шпалу. Можно считать, что Вася перепрыгивал шпалы в начале стометровки и прошел от 30,6 до 40,8 м. Дальше он шел, наступая на каждую шпалу, а их осталось $200 - 2\cdot 51 = 98$. Но расположить 98 шпал на участке длиной от 59,2 до 69,4 м так, чтобы расстояния между ними не превышали 60 см, невозможно. Следовательно, Вася сделал не более 50 «длинных» шагов и поэтому не мог сделать меньше 1500 шагов. Покажем, каким образом он мог сделать ровно 1500 шагов. Например: если на каждой стометровке шпалы на 40 м уложены через каждые 40 см, а на оставшихся 60 м — через каждые 60 см. В этом случае на участке в 1 км сделано 500 шагов в 80 см и 1000 шагов — в 60 см. Итого: 1500 шагов.

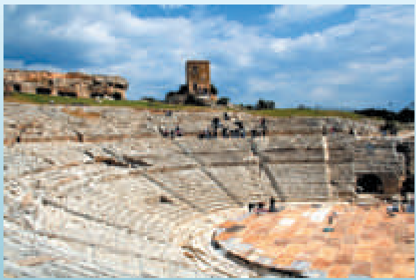
7. *Решение.* Если перелить содержимое всех бочек в одну емкость и перемешать, то получится кислота необходимой концентрации, но в нашем распоряжении нет емкости необходимого размера. Поэтому поступим следующим образом. Берём из каждой бочки $\frac{1}{99}$ содержимого, переливаем в пустую бочку. Получили одну бочку с кислотой требуемой концентрации и 99 бочек, каждая из которых наполнена на $\frac{98}{99}$. Далее: разливаем содержимое одной из бочек поровну в остальные бочки. Получили 98 полных и одну пустую бочку. Берём из каждой бочки $\frac{1}{98}$ содержимого, переливаем в пустую бочку. Получили вторую бочку с кислотой требуемой концентрации и 98 бочек, каждая из которых наполнена на $\frac{97}{98}$. Далее: разливаем содержимое одной из бочек поровну в остальные бочки. Получили 97 полных и одну пустую бочку. Берём из каждой бочки $\frac{1}{97}$ содержимого, переливаем в пустую бочку. Получили третью бочку с кислотой требуемой концентрации и 97 бочек, каждая из которых наполнена на $\frac{96}{97}$. Далее поступаем аналогично. Наконец, у нас 2 полных, 97 бочек с кислотой требуемой концентрации и одна пустая бочки. Берём из каждой полной бочки $\frac{1}{2}$ содержимого, переливаем в пустую бочку. Получили 98-ю бочку с кислотой требуемой концентрации и 2 бочки, каждая из которых наполнена на $\frac{1}{2}$. Сливаем их содержимое в одну бочку. В итоге — 99 бочек требуемой концентрации и пустая бочка.

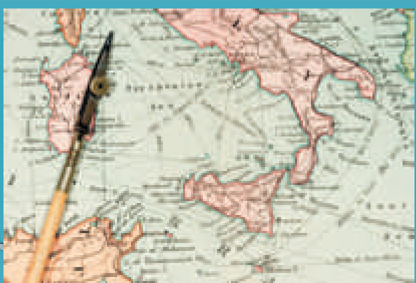
8. Бесконечно много.

Решение. Суммы цифр чисел 519 999 и 520 000 кратны 7 — первая пара. Допишем 7 девяток справа к первому числу, 7 нулей ко второму числу — получим еще одну пару. И так далее.

Г. ФИЛИППОВСКИЙ,
Киев

ЛЕММЫ АРХИМЕДА ИЗ СИРАКУЗ





> Внимательно читая сочинения Архимеда, перестаешь удивляться всем новейшим открытиям геометрии.
>
> *В.Г. Лейбниц*

Что мы знаем о жизни Архимеда? Весьма немного!.. Что родился в небогатой семье около 287 года до н.э. Что обучался в Александрии. Да, пожалуй, то, что в возрасте более 70 лет руководил в течение двух лет обороной родных Сиракуз на острове Сицилия от римских войск, возглавляемых Марцеллом. А дальше? А дальше — легенды, легенды, легенды!.. Которые свидетельствуют только о том, что Архимед был личностью легендарной!..

Но каким он был человеком?

Как ему удалось то, что ему удалось?

Вот это-то всякий раз ускользает, остается неким таинством, неразрешимой загадкой для потомков.

Как получилось, что незнатный юноша Архимед попал в Александрию — самое элитарное учебное заведение Эллады? Может быть потому, что царь Гиерон увидел в Архимеде будущего талантливого инженера для обороны управляемого им города?

Проучившись около двадцати лет в Александрии, достигнув серьезных успехов и признания, Архимед прерывает свои изыскания и возвращается на родину. Что заставило ученого в расцвете творческих сил покинуть храм науки? Требование Гиерона возвращать долги? Возможно. Так или иначе, но Архимед после возвращения сооружает машины для обороны города при любой осаде — с суши и с моря, для ближнего боя и дальнего.

Каким выдающимся военным инженером надо было быть, чтобы выполнить все это! Да так успешно, что спустя много лет римский полководец с горечью произнесет: «Что ж, придется нам прекратить войну против геометра, который... себе на потеху, нам на позор, поднимает вверх суда с моря...»

Мог ли при этом Архимед считать неблагородными, низменными занятия подобного рода, как полагает историк Плутарх (поскольку-де никаких сочинений об этом Архимед не оставил)?

Считаем, что нет, ибо представляется маловероятным трактат Архимеда, например, о машинах, бросающих суда на скалы, поднимающих эти суда крючьями. Ведь это военная тайна, секретные материалы... И если прав Плутарх, то как при этом быть с винтом Архимеда — предшественником всех последующих винтовых двигателей?

Дошедшие до нас сочинения Архимеда — также некое таинство. Ряд из них написаны в виде послания друзьям-математикам и начинаются примерно такими словами: «Архимед приветствует Досифея!»

В некоторых трактатах говорится об открытиях, но не дается доказательств, дабы «каждый математик имел удовольствие самостоятельно получить этот результат».

Занимаясь площадями и объемами, Архимед изобрел ***метод исчерпывания***, чем предвосхитил появление интегрального исчисления в работах Ньютона и Лейбница! Как могло случиться, что его идеи опередили время на 19 столетий!

В сохранившемся сочинении «Псаммит» («Исчисление песка») Архимед дает способ обозначения очень больших чисел. И в результате вычислений приходит к заключению, что число песчинок, которые могли бы заполнить Вселенную, не превышает 10^{63}. В то время общаться с такими числами!

Вновь дадим слово Архимеду: «...эти вещи множеству людей, не занимавшихся математикой, покажутся невероятными. Но те, кто в этом кое-что понимает и кто проследит изложенные соображения о расстояниях и величинах Земли, Солнца, Луны и всей Вселенной, в силу доказательства убедятся в справедливости этого».

Как же велика была магия личности Архимеда, что спустя полтора столетия после его гибели, Марк Туллий Цицерон — римский оратор, философ, политик — разыскивает могилу Архимеда по выбитым на могильном камне шару и цилиндру. С каким почтением и восхищением говорит Цицерон о муже Эллады, «отличавшемся наиболее глубоким умом», который «был поглощен радостями изобретательных устремлений — этим наилучшим наслаждением Души!..»

Многие сочинения Архимеда утеряны. Но многие и сохранились! По тому, как бережно обращались с ними средневековые арабские математики аль-Бируни, абу ибн Сина, Сабит ибн Корра и другие, нельзя не заметить их, в лучшем смысле слова, преклонения перед именем Архимеда!..

Да и с самими трудами Архимеда происходят таинственные вещи. В 1906 году датский филолог и математик И. Гейберг, изучая пергамент из библиотеки Иерусалимского монастыря, обнаружил под более поздним текстом монахов почти стертый древнегреческий текст. И это был текст Архимеда! В этом тексте, помимо известных сочинений, оказалось и очень важное, считавшееся утраченным, — «Метод». Вновь из глубины веков мы слышим голос Архимеда: «Некоторые вопросы выяснились для меня сначала с помощью механического ***метода***, после чего их надо было доказать геометрически. Ибо исследование упомянутым ***методом*** не может дать подлинного доказательства. Однако, разумеется, легче найти доказательство, если сперва с помощью этого ***метода*** получено представление о вопросе, чем искать доказательство, не зная заранее, в чем суть дела».

Плутарх (I в. н.э.) пишет: «Во всей геометрии нельзя найти более трудных и глубокомысленных задач, которые были бы решены так просто и ясно, как те, которыми занимался Архимед».

И все же, кем более всего был Архимед? Талантливым ученым? Выдающимся математиком? Гениальным защитником Сиракуз? Древние математики называли его ВЕЛИКИМ ГЕОМЕТРОМ!

Уникальный геометрический материал содержится в одном из сочинений Архимеда — «Книге лемм». Лемма — это вспомогательная теорема. Архимед стал автором и владельцем замечательной коллекции таких теорем. О некоторых леммах великого Архимеда мы и поведем наш дальнейший разговор.

1. Лемма о параллельных диаметрах

Пусть окружности ω и ω_1 касаются внутренним образом в точке K. При этом их диаметры AB и CD параллельны (рис. 1). Докажите, что точки K–D–B лежат на одной прямой.

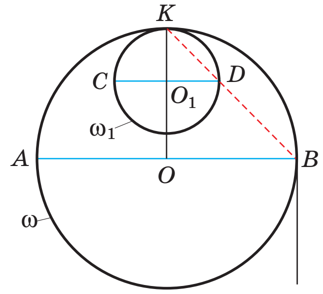


Рис. 1

Доказательство. Пусть имеет место внутреннее касание. Поскольку точка касания K и центры O_1 и O лежат на одной прямой, то достаточно показать, что $\angle O_1KD = \angle OKB$. А это верно. Действительно, $\angle KO_1D = \angle KOB$ (так как $CD \parallel AB$), а треугольники KO_1D и KOB — равнобедренные.

Аналогично рассматривается случай внешнего касания окружностей.

2. Лемма о касательных и секущей

Из точки K вне круга проведены к нему касательные KA и KB и секущая K–T–N (рис. 2). Провели хорду $BE \parallel KN$. Докажите, что AE делит хорду TN пополам.

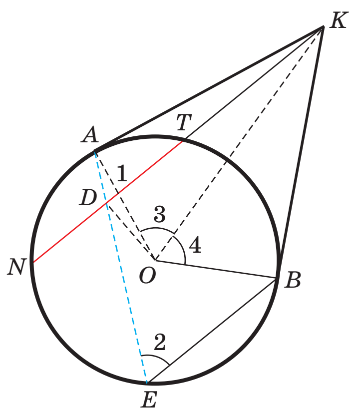


Рис. 1

Доказательство. Пусть $D = AE \cap NT$. Пусть также $\angle 1 = \angle 2 = \alpha$ ($KN \parallel BE$). Тогда $\angle AOB = 2\alpha$ — центральный (а $\angle 2 = \alpha$ — вписанный). Соединим O и K. Очевидно, что $\angle 3 = \angle 4 = \alpha$. Поскольку $\angle 1 = \angle 3$, то точки O–D–A–K лежат на одной окружности. А так как $\angle OAK = 90°$, то OK — диаметр этой окружности. Тогда и $\angle ODK = 90°$. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам. У нас $OD \perp NT$. Следовательно, $ND = DT$.

3. Лемма о перпендикулярных хордах

AB и CD — перпендикулярные хорды окружности ω, которые пересекаются в точке K (рис. 3). $AK = a$, $BK = b$, $CK = c$, $DK = d$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4R^2$, где R — радиус окружности ω.

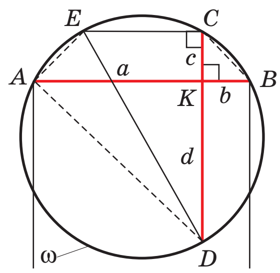


Рис. 3

Доказательство. Проведем $CE \parallel AB$. Поскольку $\angle ECD = 90°$, то ED — диаметр окружности ω. $CB^2 = b^2 + c^2$ (из прямоугольного треугольника CKB). При этом $CB = AE$ (дуги, заключенные между параллельными хордами, равны). $AD^2 = a^2 + d^2$ из прямоугольного треугольника AKD). Применим теорему Пифагора для треугольника EAD ($\angle EAD = 90°$ — вписанный, опирается на диаметр): $EA^2 + AD^2 = ED^2$, или $b^2 + c^2 + a^2 + d^2 = (2R)^2$, что равносильно решению задачи.

4. Лемма о перпендикуляре на диаметр

KA и KB — касательные к окружности ω с диаметром CD (рис. 4). AD и BC пересекаются в точке N. Докажите, что $KN \perp CD$.

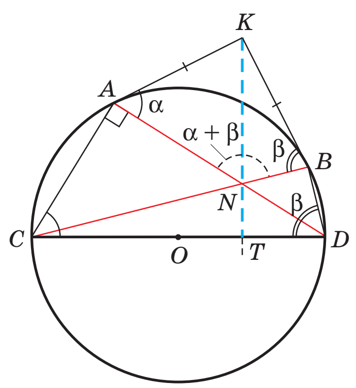


Рис. 4

Доказательство. Решим сначала задачу, которая поможет доказать лемму:

«В четырехугольнике $LMTQ$ $LM = LQ$, $\angle LMT = \alpha$, $\angle LQT = \beta$ и $\angle MTQ = \alpha + \beta$ (рис. 5). Докажите, что точки M, T, Q лежат на окружности с центром в точке L».

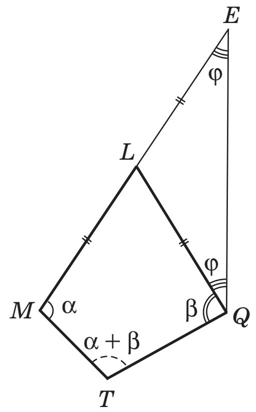


Рис. 5

Решение. Продлим ML на $LE = ML = LQ$. Тогда $\angle LEQ = \angle LQE = \varphi$ ($LE = LQ$) и в четырехугольнике $EMTQ$ сумма углов при вершинах E и T равна сумме углов при вершинах M и Q и равна $\alpha + \beta + \varphi$. Тогда $\alpha + \beta + \varphi = 180°$ и около $EMTQ$ можно описать окружность. Поскольку $LM = LE = LQ$, то L — центр этой окружности. Вернемся к рисунку 4. Пусть $\angle ACD = \angle KAD = \alpha$ (вписанный угол и угол между касательной и хордой). Пусть также $\angle BDC = \angle KBC = \beta$ (по аналогичной причине). Поскольку $\angle BCD = 90° - \beta$ и $\angle ADC = 90° - \alpha$, то из треугольника CND нетрудно сосчитать величину угла CND: $\angle CND = \alpha + \beta = \angle ANB$.

Тогда для четырехугольника $KANB$ имеем только что решенную *вспомогательную задачу*. Согласно этой задаче точка K — центр окружности, описанной около треугольника ANB. Отсюда $KN = KA$ и $\angle KNA = \angle KAN = \alpha$. Смежный с ним $\angle ANT = 180° - \alpha$. Следовательно, около четырехугольника $ACTN$ можно описать окружность ($180° - \alpha + \alpha = 180°$). Тогда и сумма углов CAN и CNT равна $180°$. Но $\angle CAN = 90°$. Значит, и $\angle CTN = 90°$.

5. Лемма о перпендикулярах из концов диаметра

Диаметр CD пересекает хорду AB. Из точек C и D к AB проведены перпендикуляры CN и DT. Докажите, что $AT = BN$ (рис. 6).

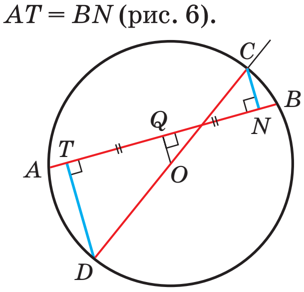


Рис. 6

Доказательство. Проведем из центра O отрезок $OQ \perp AB$. Тогда $AQ = QB$ (диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам). По теореме Фалеса нетрудно показать, что $QT = QN$ (покажите!). Отняв от равных отрезков равные, получим: $AT = BN$.

6. Лемма о пятиугольнике

Дан полукруг с диаметром AB и центром O. AC — сторона правильного пятиугольника, вписанного в круг. D — середина дуги AC (рис. 7). Из точки пересечения AC и BD на диаметр опущен перпендикуляр QN. Прямые CD и BA пересекаются в точке T. Докажите, что $TN = R$.

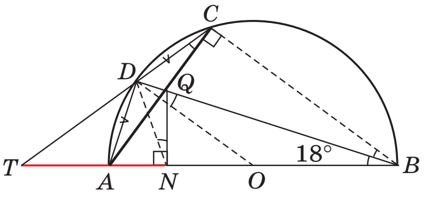


Рис. 6

Доказательство. Поскольку AC — сторона правильного пятиугольника, вписанного в окружность, то AD — сторона правильного вписанного десятиугольника. Тогда $\angle AOD = 36°$ (360° : 10). Значит, в треугольнике AOD $\angle ADO = \angle DAO = 72°$. Очевидно, что $\angle ABD = \angle DBC = 18°$. Треугольники QNB и QCB равны по гипотенузе и острому углу, следовательно, $BN = BC$. Тогда треугольники DNB и DCB равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $DN = DC$. При этом $DC = DA$. Значит, $DN = DA$. Теперь нетрудно показать, что треугольники DAT и DNO равны по стороне и двум прилежащим углам ($DN = DA$; $\angle DAT = \angle DNO$ — как смежные равным углам; $\angle ADT = \angle NDO = 36°$ (сосчитайте!)). Отсюда $TA = NO$ и $TN = AO = R$.

Еще несколько лемм Архимеда предлагаем доказать самостоятельно.

7. Лемма о центре окружности (современная формулировка)

Окружности ω и ω_1 пересекаются в точках A и B, причем центр O_1 окружности ω_1 лежит на ω (рис. 8).

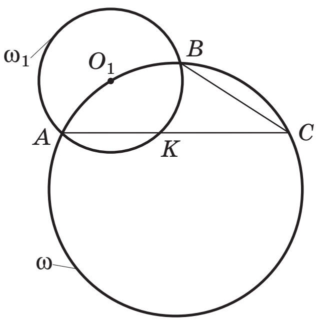


Рис. 8

Хорда AC окружности ω пересекает ω_1 в точке K. Докажите, что $KC = BC$.

8. Лемма о площади арбелона

Арбелон (пер. с греч. сапожный нож) — это фигура, ограниченная тремя полуокружностями, построенными на отрезках AD, DC и AC как на диаметрах (заштрихованная фигура на рис. 9). Докажите, что площадь арбелона равна площади круга, построенного на отрезке BD как на диаметре (где $BD \perp AC$).

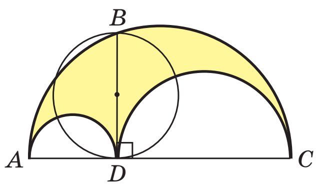


Рис. 9

9. Лемма о квадрате

Если окружность ω описана около квадрата, а окружность ω_1 в него вписана, то $S_\omega : S_{\omega_1} = 2 : 1$.

10. Лемма о сумме дуг перпендикулярных хорд

Хорды AB и CD окружности ω перпендикулярны (рис. 10). Докажите, что

$$\cup AC + \cup BD = \cup BC + \cup AD.$$

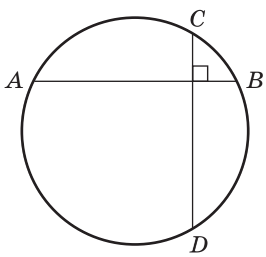


Рис. 10

11. Лемма о салионе

На отрезках AB, BC, CD, AD как на диаметрах построены полуокружности (на BC в противоположную сторону — рисунок 11). При этом $AB = CD$. Заштрихованная фигура называется *салион* (пер. с греч. солонка). Докажите, что площадь салиона равна площади круга, построенного на KN как на диаметре (KN совпадает с серединным перпендикуляром к AD).

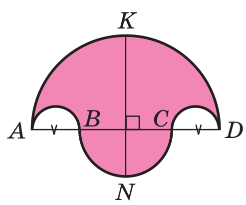
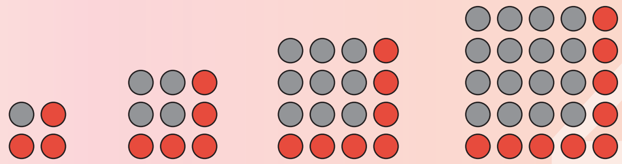


Рис. 11

КВАДРАТНЫЕ ЧИСЛА

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1024, 1089, 1156, 1225, 1296, 1369, 1444, 1521, 1600, 1681, 1764, 1849, 1936, 2025, 2116, 2209, 2304, 2401, 2500, …



Знаете ли вы, что…

Для любого натурального числа n, сумма первых n нечетных чисел равняется квадратному числу n^2:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

На рисунке хорошо видно, что идущие друг за другом квадратные гномоны образуют последовательность нечетных чисел, больших единицы. Поэтому пифагорейцам даже не нужно было доказывать это равенство, оно было очевидно из самого построения: каждый новый квадрат получался из старого прибавлением очередного нечетного числа.

Четыре различных квадрата не могут образовать арифметическую прогрессию. Арифметические прогрессии из трёх квадратов существуют — например: 1, 25, 49.

Сумму квадратов первых n натуральных чисел можно вычислить по формуле:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Каждое число может быть представлено как сумма четырех квадратов.

Суммы пар последовательных треугольных чисел являются квадратными числами.

Последняя цифра квадрата в десятичной записи равна 0, 1, 4, 5, 6 или 9 (квадратичные вычеты по модулю 10).

Две последние цифры квадрата в десятичной записи равны 00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89 или 96 (квадратичные вычеты по модулю 100).