МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКАЯ ГАЗЕТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

16–31 январь 2011 основана в 1992 г. mat.1september.ru

2

издательский дом

Первое сентября

МАТЕМАТИКА индексы подписки Почта россии - 79083 (инд.); - 79584 (орг.) Роспечать - 32031 (инд.); - 32598 (орг.)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Главный редактор: Артем Соловейчик (генеральный директор)
Коммерческая деятельность: Константин Шмарковский (финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов: Сергей Островский (исполнительный директор)
Реклама и продвижение: Марк Сартан
Мультимедиа, конференции и техническое обеспечение: Павел Кузнецов
Производство: Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение: Андрей Ушаков
Дизайн: Иван Лукьянов, Андрей Балдин
Педагогический университет: Валерия Арсланьян (ректор)

ГАЗЕТЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Первое сентября – Е. Бирюкова,
Английский язык – А. Громушкина,
Библиотека в школе – О. Громова,
Биология – Н. Иванова,
География – О. Коротова,
Дошкольное образование – М. Аромштам,
Здоровье детей – Н. Сёмина,
Информатика – С. Островский,
Искусство – М. Сартан,
История – А. Савельев,
Классное руководство и воспитание школьников – О. Леонтьева,
Литература – С. Волков,
Математика – Л. Рослова,
Начальная школа – М. Соловейчик,
Немецкий язык – М. Бузоева,
Русский язык – Л. Гончар,
Спорт в школе – О. Леонтьева,
Управление школой – Я. Сартан,
Физика – Н. Козлова,
Французский язык – Г. Чесновицкая,
Химия – О. Блохина,
Школьный психолог – И. Вачков

УЧРЕДИТЕЛЬ: ООО «ЧИСТЫЕ ПРУДЫ»
Зарегистрировано ПИ № 77-7241 от 12.04.01 в Министерстве РФ по делам печати
Подписано в печать: по графику 16.12.10, фактически 16.12.10 Заказ №
Отпечатано в ОАО «Чеховский полиграфический комбинат» ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: (499) 249-3138
Отдел рекламы: (499) 249-9870
Сайт: 1september.ru

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: (499) 249-4758
E-mail: podpiska@1september.ru

В НОМЕРЕ:

ТЕМА НОМЕРА: СТАТИСТИКА ЗНАЕТ ВСЕ

4 ПРОВЕРКА ЗНАНИЙ
Московские городские контрольные работы по теории вероятностей и статистике
И. Высоцкий, И. Ященко

11 ВЫСТАВКА РАБОТ
Для чего нужна статистика
Н. Прокофьева

18 ПРЕДЛАГАЮ КОЛЛЕГАМ
Новые возможности уроков математики при компьютерной поддержке
Г. Герасимова, Т. Чудновская, И. Молчанова

23 В КОПИЛКУ
Шарики с сюрпризом
В. Кротова

24 НА СТЕНД
Готовимся к ЕГЭ
Задача С2 – нахождение расстояний

26 ПРЕДЛАГАЮ КОЛЛЕГАМ
Букет из семи задач
Н. Авилов

27 ОТКРЫТЫЙ УРОК
Статистическая информация и формы ее представления
Н. Пахаева, Н. Шерстнева

31 КОМПЬЮТЕР НА УРОКЕ МАТЕМАТИКИ
Интеллект-карты в геометрии, в просторечии – шпаргалки
С. Бирюкова

35 ОЛИМПИАДЫ, КОНКУРСЫ, ТУРНИРЫ
Турнир Архимеда.
Московская математическая регата. 8 класс
А. Блинков, В. Гуровиц, А. Иванищук, Д. Прокопенко, П. Чулков, Д. Шноль

40 ЛЕКТОРИЙ
ЗАМЕчательныеТОЧКИ треугольника
С. Беляев

46 КНИЖНАЯ ПОЛКА
Книга с историей

МАТЕМАТИКА
Методическая газета для учителей математики
Основана в 1992 г.
Выходит два раза в месяц

Газета распространяется по подписке
Цена свободная Тираж 10 000 экз.
Тел. редакции: (499) 249-3460
E-mail: mat@1september.ru
Сайт: mat.1september.ru

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, И. Бокова, О. Макарова
Дизайн макета и обложки: И. Лукьянов
Корректор: Л. Громова
Верстка: Л. Кукушкина

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Роспечать: инд.–**32030**; орг.–**32594**
Почта России: инд.–**79073**; орг.–**79583**

НЕ БУМАГОЙ ЕДИНОЙ…

Л. РОСЛОВА

Как возросли в наш век скорости. И прежде всего, обмена информацией. Не успели мы провести модернизацию в газете, а уже идет обратная связь. И что приятно – наши идеи подхвачены. Посмотрите на фото на с. 39. Для проведения игры с первоклассниками по мотивам замечательной книги про Алису в стране чудес учитель использовала сделанную нами мультимедийную презентацию.

Конечно, новому многоцветному облику все рады. Но слышны вздохи и сожаления: и цена подписки возросла, и материалов стало поменьше. Да, инфляцию в стране пока не побороли, и зарплате учителя за ней, похоже, не угнаться. Увы. Но вот что за бо́льшие деньги получать подписчик стал меньше, решительно не соглашусь. И напомню, что теперь каждый четвертый номер газеты будет сопровождаться диском, на котором его обладатель найдет и уже упомянутые презентации к уроку, и иллюстративный материал, и тексты контрольных работ, и дозволенные к распространению программные продукты, и многое такое, о чем мы сами еще не догадываемся. Просто в силу новизны этой работы для нас самих. Причем найдет в виде, уже «готовом к употреблению» — можно брать и идти на урок. И не надо ничего набирать-рисовать, если времени нет. Но можно и изменить сначала, для себя подстроить — электронный носитель, в отличие от бумажного, это сделать позволяет.

Не далее как сегодня пришло по электронной почте письмо от одного читателя газеты со стажем, который с горечью описывает тот объем бумажной работы, которую необходимо выполнять сегодня учителю (и речь идет, как вы догадались, не о проверке тетрадей). Одна из таких работ — составление поурочного планирования. И предлагает он объявить конкурс, надеясь, что учителя будут рады поделиться своими наработками с коллегами. Мы не возражаем: конкурс — так конкурс. Готовы опубликовать лучшие, хорошо продуманные, удобные для работы (и отчетности) варианты планирования, прошедшие апробацию (учительскую и административную), разместить их на диске. Возможно, это будут коллективные работы. Почему нет? Авторы лучших материалов будут вознаграждены за труды подпиской на газету. Не забудьте указать учебник, по которому составляется планирование, и год издания (используйте те, что вышли после 2004 г.).

Фото Н.Авилова

И. ВЫСОЦКИЙ,
И. ЯЩЕНКО,
Москва

МОСКОВСКИЕ ГОРОДСКИЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКЕ

Учебный курс теории вероятностей и статистики для учащихся основной школы в Москве вводится с 2004 г. поэтапно. С 2007 г. этот относительно новый для российской школы раздел включен в московский базисный учебный план и изучается во всех московских школах. За пять истекших лет в Москве накоплен значительный методический опыт преподавания, сформировались основные черты школьной вероятности и статистики. В научных и методических кругах ведется активное обсуждение методик, целей и содержания обучения теории вероятностей и статистике.

Московский институт открытого образования в соответствии с приказом московского Департамента образования на протяжении трех последних лет осуществляет контроль над результатами изучения вероятностно-статистических тем в 7-х и 8-х общеобразовательных классах Москвы. Весенние городские контрольные работы МИОО по теории вероятностей и статистике уже стали традиционными для московских школ.

Многие учителя поняли, что теория вероятностей и статистика — тот самый раздел математики, который тесно связан с окружающими нас массовыми явлениями. Вероятность и статистика позволяют на деле осуществить связь школьной математики с жизнью. Авторы учебно-методических комплектов создали не просто очередной раздел математики, наполненный теоретическим материалом и задачами, а постарались построить преподавание вероятности и статистики от простых и естественных задач, акцентировать внимание учителя и учащихся на практических осмысленных примерах статистических рассуждений и вычислений.

Преподавание теории вероятностей и статистики очень вариативно в силу специфики материала. В разных школах преподавание данного предмета осуществляется по разным учебно-методическим комплектам. В зависимости от разных обстоятельств, школа может выбрать один из нескольких вариантов планирования, отводя на изучение вероятности и статистики от 18 до 34 часов в год.

Московские городские контрольные работы по теории вероятностей и статистике компонуются таким образом, чтобы содержание заданий соответствовало ядру курса — общим основным контролируемым элементам, не претендуя на большую детализацию, зависящую от конкретной программы.

Демонстрационные варианты работ, размещенные на сайте МИОО http://statgrad.mioo.ru, определяют основные ориентиры для учителей, родителей и учащихся, чтобы регламентировать порядок изучения тем, содержание или методику преподавания и дать представление об уровне требований, предъявляемых к подготовке учащихся в настоящее время.

Представляем вашему вниманию варианты контрольных работ для 7-го и 8-го классов, прошедших в мае 2010 г. На работу учащимся отводится 45 минут. Данные в заданиях, где требуются вычисления, адаптированы, поэтому все расчеты могут быть проведены и без калькулятора, однако учащимся в ходе работы *разрешено* пользоваться калькуляторами. Варианты публикуются с решениями, требованиями к выполнению заданий, рекомендациями по оцениванию и анализом наиболее значимых и типичных ошибок учащихся.

7-й класс

Критерии оценивания

Отметка «отлично» ставится за выполнение любых четырех из пяти заданий; отметка «хорошо» ставится за выполнение трех любых заданий, возможно, с одной вычислительной ошибкой при верном ходе рассуждений; отметка «удовлетворительно» – за выполнение двух любых заданий, возможно, с вычислительной ошибкой.

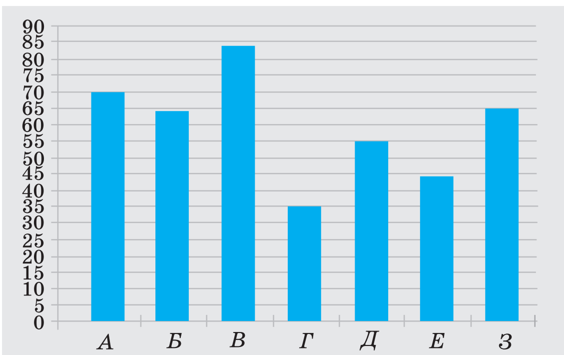
Вариант 1

1. Рейтинговое агентство проводило опрос среди покупателей: «Какой книжный магазин вам больше нравится?» Столбиковая диаграмма показывает рейтинги семи магазинов (в баллах) по результатам опроса.

По диаграмме определите:

а) Какой магазин получил наибольшее число голосов по результатам опроса?

б) Сколько магазинов набрало более 60 баллов?



2. На рисунке показаны три круговые диаграммы, отражающие содержание питательных веществ в трех разных продуктах.

а) Определите, в каком из этих продуктов содержание белков наибольшее.

б) Определите, каких питательных веществ больше всего в шоколаде.

3. В таблице указано количество проданной минеральной воды (в тыс. бутылок) в весенние и летние месяцы за три года (по данным компании-производителя).

а) Вычислите медиану данных за все летние месяцы.

б) Вычислите медиану данных за все весенние месяцы.

в) Дайте возможное объяснение тому, что найденные показатели существенно отличаются друг от друга.

	2007	2008	2009
Март	100	105	111
Апрель	104	109	109
Май	112	110	119
Июнь	119	126	130
Июль	120	125	121
Август	110	120	127

4. В лаборатории производится анализ крови. Содержание гемоглобина в крови вычисляется как среднее арифметическое результатов нескольких измерений. Таблица содержит результаты пяти измерений гемоглобина (г/л) в одной пробе крови пациентки.

Номер измерения	1	2	3	4	5
Содержание гемоглобина (г/л)	130	140	110	50	120

а) Найдите среднее арифметическое результатов измерений.

б) Найдите дисперсию измерений.

Выбрано правило: если квадрат отклонения некоторого значения от среднего арифметического превышает дисперсию больше чем в 3,5 раза, то это значение считается ненадежным (выбросом) и в дальнейшем не учитывается.

в) Определите, является ли значение 50 ненадежным в соответствии с выбранным правилом.

г) Найдите среднее арифметическое всех надежных значений.

д) Нормальное содержание гемоглобина в крови у женщин 120–150 г/л. Можно ли считать, что у данной пациентки нормальное содержание гемоглобина?

5. В школе два седьмых класса. В первом — 20 учеников, и их средний рост равен 159 см. Во втором — 30 учеников, их средний рост равен 154 см. Найдите средний рост всех семиклассников школы.

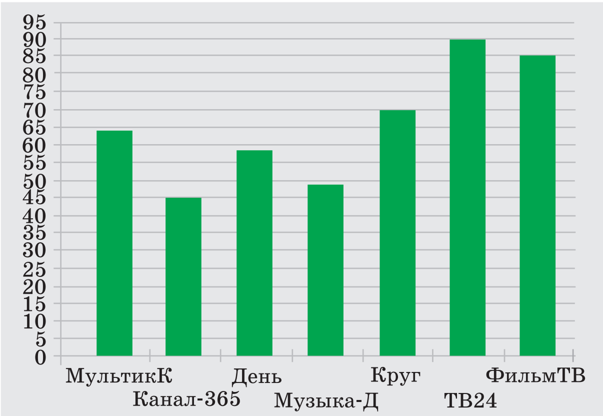
Вариант 2

1. Рейтинговое агентство проводило опрос среди телезрителей: «Какой телеканал Вам больше нравится?» На диаграмме показаны рейтинги семи телевизионных каналов (в баллах) по результатам опроса.

По диаграмме определите:

а) Какой канал получил наименьшее число голосов по результатам опроса?

б) Сколько каналов набрали менее 50 баллов?



2. Круговые диаграммы показывают распределение населения по группам крови в трех странах.

а) Определите, в какой из этих стран наибольшая доля людей с III группой крови.

б) Определите, какая группа крови наиболее распространена в Австралии.

3. В таблице указано количество проданных порций мороженого (в тыс. штук) в летние и осенние месяцы за три года (по данным компании-производителя).

а) Вычислите медиану данных за все летние месяцы.

б) Вычислите медиану данных за все осенние месяцы.

в) Дайте возможное объяснение тому, что найденные показатели отличаются друг от друга.

	2006	2007	2008
Июнь	802	822	843
Июль	817	899	915
Август	507	558	543
Сентябрь	450	495	500
Октябрь	225	248	254
Ноябрь	211	374	411

4. В лаборатории производится анализ крови. Содержание сахара в крови вычисляется как среднее арифметическое результатов нескольких измерений. Таблица содержит результаты пяти измерений содержания сахара (г/л) в одной пробе крови взрослого пациента.

Номер измерения	1	2	3	4	5
Содержание сахара (г/л)	120	180	110	90	100

а) Найдите среднее арифметическое результатов измерений;

б) Найдите дисперсию результатов измерений.

Выбрано правило: если квадрат отклонения значения от среднего арифметического превышает дисперсию больше чем в 3,5 раза, то это значение считается ненадежным (выбросом) и в дальнейшем не учитывается.

в) Определите, является ли значение 180 ненадежным в соответствии с выбранным правилом.

г) Найдите среднее арифметическое всех надежных значений.

д) Нормальное содержание сахара в крови взрослого 80–110 г/л. Можно ли считать, что у данного пациента нормальное содержание сахара в крови?

5. В школе два восьмых класса. В первом — 30 учеников, и их средний рост равен 162 см. Во втором — 20 учеников, их средний рост равен 157 см. Найдите средний рост всех восьмиклассников школы.

Решения заданий варианта 1, требования к выполнению заданий и рекомендации по оцениванию

1. *Возможное решение*. Самый высокий столбик соответствует магазину В.

Более 60 баллов набрали магазины А, Б, В и З. Всего 4 магазина.

Ответ: а) В; б) 4.

Задание на чтение столбиковой диаграммы. От учащихся не требуется ни пояснений, ни развернутых ответов. Отсутствие какой бы то ни было записи решения не является основанием для снижения отметки.

2. *Возможное решение.* Видно, что самый большой сектор соответствует белкам на диаграмме «Арахис».

Ответ: арахис.

Решение может опираться на прямое измерение или наглядное сравнение секторов. От учащихся не требуется ни пояснений, ни записи измерений величин секторов, ни вычислений или развернутых рассуждений.

3. *Возможное решение*. Расположим данные за летние месяцы по возрастанию: 110, 119, 120, 120, 121, 125, 126, 127, 130. Чисел девять. Медиана — пятое число в ряду. Оно равно 121. Теперь расположим по возрастанию данные за весенние месяцы: 100, 104, 105, 109, 109, 110, 111, 112, 119. Медиана равна 109.

Ответ: а) 121; б) 109; в) медианы могут отличаться потому, что весной холоднее и люди пьют меньше минеральной воды.

Ответ на пункт «в» может быть самым непредсказуемым. Например — отличие небольшое, потому что хотя летом воды пьют больше, но все разъехались на дачи и покупают воду в других магазинах. Или: продажи весной и летом отличаются, потому что весной покупателям вода этого завода понравилась, и летом они стали покупать ее больше. Главный критерий — рассуждение содержит возможное, правдоподобное, объяснение ситуации.

4. *Возможное решение.* а) Среднее арифметическое:

$$\frac{130+140+110+50+120}{5}=110.$$

б) Отклонения от среднего арифметического: 20, 30, 0, –60, 10. Квадраты отклонений: 400, 900, 0, 3600, 100. Дисперсия:

$$\frac{400+900+3600+100}{5}=\frac{5000}{5}=1000.$$

в) Квадрат отклонения числа 50 от среднего равен 3600. Так как

$$\frac{3600}{1000}=3,6>3,5,$$

то значение 50 ненадежное.

г) Среднее арифметическое надежных значений:

$$\frac{130+140+110+120}{4}=\frac{500}{4}=125.$$

д) Число 125 больше 120, но меньше 150. Поэтому можно считать, что содержание гемоглобина у пациентки в норме.

Ответ: а) 110; б) 1000; в) ненадежное; г) 125; д) да, можно.

Не будет ошибкой, если указаны абсолютные отклонения, то есть вместо –60 указано 60. Промежуточные вычисления могут быть расположены в таблице, записаны в столбик или любым другим удобным способом. На уроках статистики следует приучать учащихся к аккуратной и систематизированной записи вычислений. В первую очередь это необходимо, чтобы было легче проверять выкладки при поиске ошибок. Учащийся может вычислить дисперсию по формуле $S^2=\overline{x^2}-\bar{x}^2$ «Средний квадрат без квадрата среднего».

5. *Возможное решение.* Сумма ростов учащихся первого седьмого класса равна $20\cdot159=3180$ см. Сумма ростов учащихся второго седьмого класса: $154\cdot30=4620$ см. Тогда сумма ростов всех семиклассников равна 3180 + 4620 = 7800 см. Средний рост равен $\frac{7800}{50}=156$ см.

Ответ: 156 см.

Решение может быть записано одной выкладкой:

$$\frac{159\cdot20+154\cdot30}{20+30}=\frac{7800}{50}=156 \text{ см.}$$

Не следует считать ошибкой, если учащийся в ответе не указал единицы измерения — сантиметры. Однако в ходе работы над ошибками можно отметить этот недочет в работе.

Анализ значимых и типичных ошибок учащихся

Пояснение к анализу

Обычно анализ ошибок подразумевает указание процентной доли учащихся, допустивших ту или иную ошибку. Конечно, такие данные есть. Но понимая, что эти числа не являются абсолютно точными в силу случайной изменчивости разного рода, авторы не хотят, чтобы у читателя возникло искушение делать категоричные выводы из приблизительных данных. Поэтому таблицы с процентными данными не публикуются. Вместо этого ошибки поделены на несколько категорий по частоте их появления.

Очень редкая — ошибка встречается настолько редко, что данные о ее появлении статистически незначимы – они с высокой вероятностью могут объясняться погрешностью сбора или ввода данных.

Редкая — ошибка встречается в незначительном количестве.

Частая — таких ошибок много, но не настолько, чтобы можно было говорить об их массовом характере или системных просчетах в методике преподавания.

Массовая — ошибка, допущенная значительной частью учащихся, характерная для целых образовательных учреждений, свидетельствующая скорее об общих просчетах в методике или общих чертах учащихся, присущих им в силу психолого-возрастных свойств.

Если типы ошибок в задании не выделялись, анализ ошибок по такому заданию отсутствует.

Рейтинговое агентство проводило опрос среди покупателей: «Какой книжный магазин вам больше нравится?» Столбиковая диаграмма показывает рейтинги семи магазинов (в баллах) по результатам опроса.

По диаграмме определите:

1. а) Какой магазин получил наибольшее число голосов по результатам опроса?

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Вместо названия указан рейтинг	Очень редкая
б	Вместо названия указан номер столбика	Очень редкая

б) Сколько магазинов набрало более 60 баллов?

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Вместо количества магазинов указаны их названия или номера столбиков	Редкая

Комментарий. Учащиеся, указавшие названия магазинов вместо количества, вероятно, сделали это от излишней старательности. К сожалению, невнимание тоже нельзя списывать со счетов: в задаче четко спрашивалось о количестве. Может быть, имеет смысл дополнительно акцентировать внимание учащихся на формулировке вопроса.

3.

	2007	2008	2009
Март	100	105	111
Апрель	104	109	109
Май	112	110	119
Июнь	119	126	130
Июль	120	125	121
Август	110	120	127

В таблице указано количество проданной минеральной воды (в тыс. бутылок) в весенние и летние месяцы за три года (по данным компании-производителя).

а) Вычислите медиану данных за все летние месяцы.

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Не выделены месяцы нужного времени года	Очень редкая
б	Взяты месяцы не за все три года	Очень редкая
в	Ошибка в способе нахождения медианы (например, в качестве медианы указано число, стоящее посередине неупорядоченного набора)	Редкая

б) Вычислите медиану данных за все весенние месяцы.

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Не выделены месяцы нужного времени года	Очень редкая
б	Взяты месяцы не за все три года	Очень редкая
в	Ошибка в способе нахождения медианы (например, в качестве медианы указано число, стоящее посередине неупорядоченного набора)	Редкая

в) Дайте возможное объяснение тому, что найденные показатели существенно отличаются друг от друга.

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Текст бессвязный, не имеет отношения к рассматриваемому явлению	Очень редкая
б	Рассуждение имеет отношение к делу, но неправдоподобное или ничего не объясняющее	Редкая

Комментарии. Данные по ошибкам в заданиях 3(а) и 3(б) статистически устойчивы — мало рассеяны вокруг своего среднего значения. Косвенно это свидетельствует о надежности результатов.

Обычная ошибка, как показывает анализ работ, здесь состоит в том, что учащийся при вычислении медианы забывает упорядочить числовой набор и в качестве медианы указывает число, стоящее посередине неупорядоченного набора. Это чаще говорит о забывчивости и отсутствии твердого навыка, чем о том, что учащийся не умеет вычислять медиану или не понимает, что это такое.

Радует незначительное число ошибок в задании 3(в). Это говорит о том, что в большинстве случаев, учащиеся верно интерпретируют различие средних значений и могут выдвигать простейшие гипотезы.

4. В лаборатории производится анализ крови. Содержание гемоглобина в крови вычисляется как среднее арифметическое результатов нескольких измерений.

Таблица содержит результаты пяти измерений гемоглобина (г/л) в одной пробе крови пациентки.

Номер измерения	1	2	3	4	5
Содержание гемоглобина (г/л)	130	140	110	50	120

а) Найдите среднее арифметическое результатов измерений.

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Вместо среднего арифметического найдена полусумма данных	Очень редкая

б) Найдите дисперсию измерений.

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Учащийся вычисляет дисперсию по формуле $S^2=\overline{x^2}-\bar{x}^2$ (не является ошибкой)	Редкая
б	Ошибка при вычислении отклонений или квадратов отклонений	Частая

Комментарии. Формулой $S^2=\overline{x^2}-\bar{x}^2$, как показал анализ, пользуется примерно 4% учащихся Москвы. Это скорее говорит не об особенностях данных учащихся, а о том, что в 4% школ Москвы учителя предлагают школьникам эту формулу наряду с определением или вместо него. В этой связи можно высказать осторожное опасение: вычисление по указанной формуле не дает возможности учащемуся работать непосредственно с отклонениями, лишая вычисления интуитивно ясного смысла. С другой стороны, авторы работ далеки от того, чтобы запрещать пользоваться тем или иным методом. Мы можем лишь призвать учителей не упускать из виду осмысление учащимся производимых им вычислений.

Выбрано правило: если квадрат отклонения некоторого значения от среднего арифметического превышает дисперсию больше чем в 3,5 раза, то это значение считается ненадежным (выбросом) и в дальнейшем не учитывается.

в) Определите, является ли значение 50 ненадежным в соответствии с выбранным правилом.

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Учащийся не может найти или выбрать квадрат отклонения указанного значения	Частая
б	Учащийся не может вычислить отношение квадрата отклонения к дисперсии	Частая
в	Ошибка в сравнении десятичных дробей	Очень редкая
г	Верные вычисления и сравнение, но неверный вывод	Очень редкая

Комментарии. Многие учащиеся не смогли разобраться в новой для них модельной ситуации, когда после выполнения известного алгоритма (поиск дисперсии) нужно произвести дополнительные действия. Заметим, что эти учащиеся в совокупности составляют около трети всех тех, кто уже успешно вычислил дисперсию. Таким образом, результаты выполнения задания 4(в) показывают, что примерно треть семиклассников, успешно применивших изученный на уроках алгоритм, растерялись или испугались, не будучи в состоянии понять логику действий или собрать воедино сведения, изученные в разных разделах курса (статистика, отношение чисел, сравнение десятичных дробей), чтобы решить новую задачу.

г) Найдите среднее арифметическое всех надежных значений.

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Определено ненадежное значение, но не определены надежные	Частая
б	Ошибка при вычислении среднего арифметического	Частая

Комментарий. Непосредственный анализ работ учащихся показывает удивительное обстоятельство — многие, правильно определив ненадежное значение, не отбросили его в дальнейших расчетах, хотя в тексте задания имелось прямое указание поступить именно так. Снова сказывается естественное стремление семиклассника следовать отработанной схеме. В результате учащиеся вычисляют заново среднее арифметическое всех значений либо ошибаются при вычислении среднего оставшихся, продолжая делить сумму на число всех измерений. Это делают даже те, кто верно находит среднее арифметическое в задании 4(а). В результате доля благополучно добравшихся до верного ответа в 4(г) едва ли превосходит четверть всех участников работы.

д) Нормальное содержание гемоглобина в крови у женщин 120–150 г/л. Можно ли считать, что у данной пациентки нормальное содержание гемоглобина?

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Верные вычисления и сравнение, но неверный вывод	Массовая

Комментарий. Те учащиеся, кто сделал неверный вывод после верных вычислений, составляют больше трети тех, кто успешно справился с заданием 4(а–г). Это значительное количество. Рассмотрение работ показывает характерную ошибку — вывод делается с помощью среднего арифметического всех измерений, хотя среднее надежных измерений благополучно найдено. Возможно, эта ошибка частично объясняется некоторым внутренним конфликтом — на какое из двух средних опираться? Те, кто не заметил указание, что ненадежные значения не учитываются, могли вполне осознанно сделать вывод, опираясь на среднее всех измерений и не дав себе труда подумать о логической последовательности произведенных вычислений. Исходя из этого, можно предположить, что значительное число учащихся не дочитывает условие до конца или плохо понимает прочитанное.

5. В школе два седьмых класса. В первом — 20 учеников, и их средний рост равен 159 см. Во втором – 30 учеников, их средний рост равен 154 см. Найдите средний рост всех семиклассников школы.

Код ошибки	Описание ошибки	Характеристика
а	Найдено среднее арифметическое двух средних	Массовая

Комментарий. Эта задача справедливо помещена в конец работы, как самая трудная. Если сравнить число учащихся, верно решивших ее, с числом тех, кто решил задания 4(б) и даже 4(в), становится видно, что эта задача действительно сложная. Успешно справляется с нею тот, кто понимает суть усреднения, а не просто умеет вычислять среднее по формуле или по правилу. Ошибка — нахождение среднего арифметического двух средних — характерна для трети всех, кто приступил к решению данной задачи. Вероятно, есть смысл решать подобные задачи при подготовке к контрольной работе и включить их в список учебных задач при изучении тем описательной статистики.

Продолжение следует.

Н. ПРОКОФЬЕВА,
г. Сыктывкар,
Республика Коми

ДЛЯ ЧЕГО НУЖНА СТАТИСТИКА

В январе 2009 года, в день празднования 90-летия органов государственной статистики Республики Коми, в г. Сыктывкаре была организована конференция исследовательских работ учащихся по статистике.

В своих работах учащиеся провели ряд исследований, которые помогли получить представление о возможностях описания и обработки данных с помощью различных средних характеристик, приобрели навык работы со статистическими данными в виде таблиц, диаграмм, графиков. Выполнение исследовательских проектов помогло учащимся ответить на вопрос «Для чего нужна статистика?», а кроме того, узнать что-то новое об одноклассниках, окружающих их, школьной жизни.

Представляем вашему вниманию два проекта, которые были представлены на конференции.

Перепись школьного населения

Авторы: Наталья Передня, Анна Черных (9«Б» класс, средняя школа № 24).
Руководитель: В.И. Матюшева.

Перепись населения — это процесс сбора, обобщения, оценки, анализа и публикации демографических, экономических и социальных данных, относящихся по состоянию на определенное время ко всем лицам в стране или четко ограниченной ее части.

История переписи населения

Первые переписи населения были проведены в 1790 г. в США, в 1800 г. в Швеции и Финляндии, в 1801 г. в Англии, Дании, Норвегии и Франции.

Россия имеет богатый опыт учета населения, история которого весьма интересна. Хотя в Демографическом энциклопедическом словаре и в энциклопедическом словаре «Народонаселение» указывается, что начало учета населения в нашей стране относится к IX в., но первый более или менее организованный учет населения на Руси восходит к середине XIII в. и связан с необходимостью выплаты дани монгольским завоевателям. По мнению ученых, монголы по крайней мере четырежды проводили перепись населения в Русской земле: в 1246 г. в южной Руси, в 1255–1259 гг. в Суздальской земле, в 1257–1259 гг. и в 1273 г. в Новгородской области. Татарские чиновники приезжали «по число», которое определялось или соглашением всех жителей, или, если соглашение не было достигнуто, самими чиновниками, которые ездили по улицам и «писали» дома. В 1275 г. князь Василий Ярославский сам отвез дань в орду, татарские «численники» перестали приезжать на Русь для переписей населения, учитывать население стали сами русские князья.

С конца XV в. сначала в Новгородской земле, а затем повсюду в Московском государстве получает распространение новый вид учета — так называемое «сошное письмо» (систематизированный свод сведений, составляемых периодически или путем непрерывных наблюдений над соответствующим объектом). В отличие от монгольских переписей, этот вид учета оставил множество документов, древнейшим из которых являются Новгородские писцовые книги (конец XV в.). Уже с середины XVI в. переписи становятся практически постоянными.

Первая Всероссийская перепись населения была проведена в феврале 1897 г. В основе этой переписи лежал проект известного русского географа, путешественника и статистика П.П. Семенова-Тян-Шанского. Учитывалось 3 категории населения: наличное, постоянное (оседлое) и приписное. Из-за низкой грамотности населения большую часть форм заполняли счетчики.

Первая Всесоюзная перепись населения была проведена по состоянию на 17 декабря 1926 г. Она охватывала все население страны. Руководили проведением В.Г. Михайловский и О.А. Квиткин. Перепись 1926 г. проводилась путем опроса населения, хотя допускалось и самоисчисление. Продолжалась перепись 7 дней в городских поселениях и 14 дней в сельской местности. Учитывалось наличное население (по личным листкам), а в городах семейная карта давала возможность получить сведения и по постоянному населению. Впервые весьма подробно была изучена семья. Это, пожалуй, единственная перепись населения, итоги которой были полностью опубликованы в 56 томах в 1928–1933 гг.

Вторая Всесоюзная перепись населения первоначально намечалась на декабрь 1933 г. Ее данные должны были отразить изменения в численности, составе и размещении населения СССР по сравнению с 1926 г. Но в связи с неразумной финансовой политикой ряд густонаселенных районов был охвачен голодом, и перепись решили отложить. И только в январе 1937 г. удалось добиться ее проведения.

Еще одна всесоюзная перепись населения была проведена по состоянию на 15 января 1959 г. Заполнение бланков производилось методом опроса. Затем проводился сплошной контрольный обход в течение 10 дней. Был установлен единый срок переписи в городах и сельских местностях, более подробно были изучены характеристики образования. Впервые был применен выборочный метод при разработке материалов о семьях.

Перепись населения 1979 г. проведена по состоянию на 17 января. Она производилась путем опроса. Затем в течение нескольких дней инструкторы-контролеры проводили выборочную проверку 25% опрошенного населения. В переписи населения 1979 г. была применена принципиально новая форма переписного листа, который впервые в отечественной практике был одновременно и носителем информации для ввода ее в ЭВМ.

В 1985 г. было проведено выборочное социально-демографическое исследование. Его итоги были опубликованы в крайне незначительном объеме. По сравнению с предыдущей переписью населения, в переписные листы были включены новые вопросы: о месте рождения, об окончании ПТУ, о жилищных условиях. Кроме того, вопрос об отношении к главе семьи заменен вопросом об отношении к члену семьи, записанному первым; вопрос о возрасте заменен указанием места, числа и года рождения, а вопрос о продолжительности проживания дополнен подпунктом «из какого населенного пункта прибыл». Разработка материалов и полная публикация итогов были закончены в 1990 г.

В 1994 г. в России была проведена микроперепись. Ее основные результаты были опубликованы. Но при этом индивидуальные записи были сохранены на электронном носителе и в настоящее время доступны для независимых исследователей.

Последняя перепись населения состоялась в 2002 г. И по ее итогам нам известно, что в России проживает 145,2 млн человек. Несмотря на все сложности, постоянное население страны увеличивается.

На сегодняшний день Россия по численности населения занимает седьмое место в мире, после Китая — 1 млрд 285 млн человек, Индии — 1 млрд 25 млн человек, США — 286, Индонезии — 215, Бразилии — 173 и Пакистана — 146 млн человек.

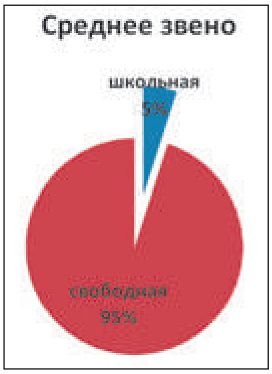
Изучив историю переписи населения, мы задались целью провести перепись учащихся нашей школы. Для начала мы выяснили количество учеников, их оказалось не так уж много.

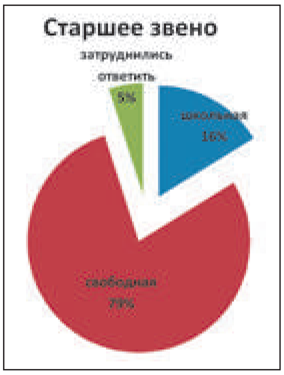
Общее количество составило 670 человек, из них 285 младших школьников и 385 учеников составляют среднее и старшее звено.

Мы долго думали, какие вопросы задать нашим ученикам, и решили, что вопросы должны быть связаны не только со школой, но и с обычными повседневными занятиями учеников, их увлечениями.

Нами был проведен опрос среднего и старшего звена учащихся школы. В нем приняли участие 142 человека. Они ответили на 5 вопросов, а мы обработали результаты, сравнили и сделали свои выводы.

1. Какую форму вы хотите носить: школьную или свободную?

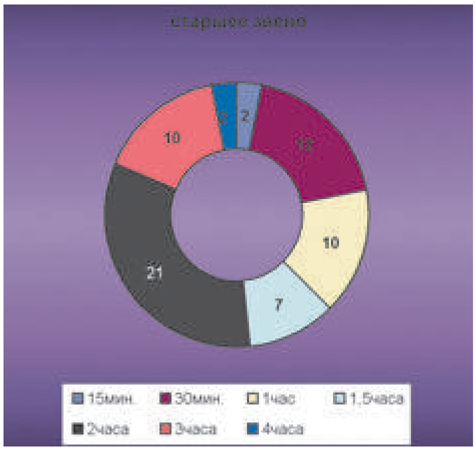




Вывод. Подавляющее большинство учащихся предпочитают носить свободную форму, школьную форму хотят носить не многие, в основном старшеклассники.

2. Сколько времени вы затрачиваете на выполнение домашнего задания?

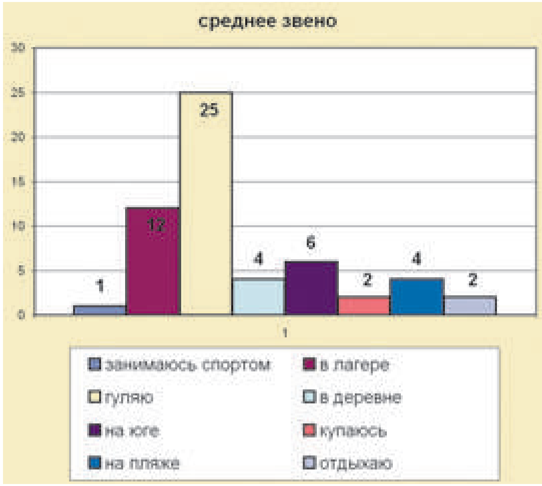
Ответы распределились следующим образом:

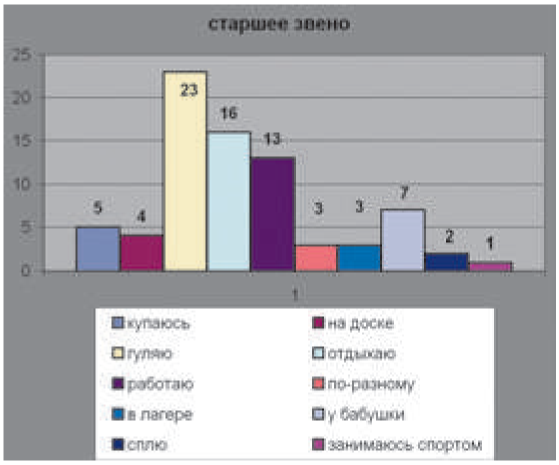


Вывод. В основном все учащиеся делают уроки 2 часа, что очень радует. Кто-то тратит 4 часа на выполнение домашних заданий, а кому-то хватает и 15 минут.

3. Как вы обычно проводите летние каникулы?

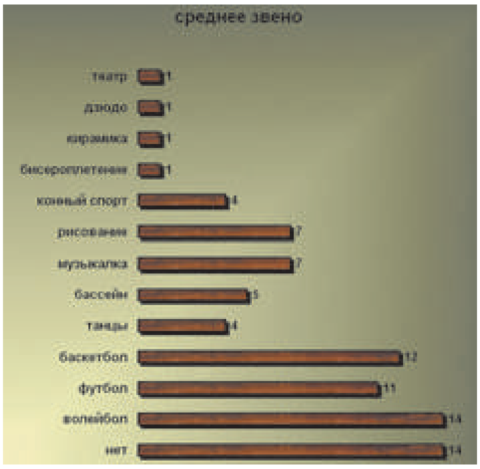
Ответы распределились следующим образом:





Вывод. В среднем звене ученики во время каникул обычно просто гуляют, отдыхают в детских лагерях или ездят на море, а старшеклассники еще и работают. Но есть и такие, которые все каникулы спят.

4. Какие кружки и секции вы посещаете?



Вывод. Ученики среднего звена чаще посещают различные кружки и секции по сравнению со старшим звеном. А заниматься ребята предпочитают в спортивных секциях нашей школы.

5. Как вы проводите свободное время?

Вывод. В основном и в старшем, и в среднем звене ученики в свободное время предпочитают гулять или сидеть за компьютером.

Заключение

Проведя перепись учащихся в нашей школе, мы пришли к выводу:

Во-первых, предпочтения детей со временем меняются. Если ученики среднего звена отдают предпочтение кружкам по интересам: рисование, пение и т.д., то старшеклассники стараются отдавать все свое свободное время учебе.

Во-вторых, в связи с увеличением нагрузки в старшем звене увеличивается время выполнения домашнего задания учениками.

В-третьих, ученики нашей школы в свободное время предпочитают гулять или сидеть за компьютером.

В-четвертых, учащиеся как среднего звена, так и старшего очень любят выглядеть привлекательно. Стили их разнообразны, но основной – свободный, то есть носи что хочешь и как хочешь.

По итогам нашей работы мы убедились, что неплохо было бы проводить такие переписи «школьного населения» регулярно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харченко Л.П., Досиженкова В.Г., Ионин В.Г.* Статистика: Учебное пособие. — Перераб. и доп. — М.: ИНФРА-М, 2001.

2. Энциклопедический словарь «Народонаселение».

3. *Елисеева И.И, Юзбашев М.М.* История переписи населения в России. — Ресурсы интернет: www.krd.ru.

4. Общая теория статистика: учебник / под. ред. И.И. Елисеевой. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Финанасы и статистика, 2004.

5. *Шмойлова Р.А., Манашкин В.Г., Садовникова А.А., Шувойлова Е.Б.* Теория статистики: учебник / под ред. Р.А. Шмойловой. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Финансы и статистика, 2003.

Какие мы? Сколько нас?

Авторы: Екатерина Шеффер, Ксения Максимова (9 «Б» класс, средняя школа № 33).
Руководители: Т.А. Потолицына, Н.А. Карпова.

Введение

Статистика (от латинского — «состояние») — это наука, изучающая, обрабатывающая и анализирующая количественные данные о самых разнообразных массовых явлениях в жизни. Виды статистики: экономическая, демографическая, финансовая, налоговая, биологическая, метеорологическая, математическая.

Статистика имеет многовековую историю. Уже в Древнем мире велся статистический учет населения. Однако произвольные толкования статистических данных, отсутствие строгой научной базы статистических прогнозов позволили в конце XIX в. английскому премьер-министру Б. Дизраэли не без основания заметить: «Есть три вида лжи: просто ложь, наглая ложь и статистика».

Роль статистики в нашей жизни настолько значительна, что люди, часто не задумываясь и не осознавая, постоянно используют элементы статистики не только в трудовых процессах, но и в повседневном быту. Работая и отдыхая, делая покупки, знакомясь с другими людьми, принимая какие-то решения, человек пользуется определенной системой имеющихся у него сведений, сложившихся вкусов и привычек, фактов, систематизирует и сопоставляет эти факты, анализирует их, делает выводы и принимает определенные решения, предпринимает конкретные действия. Можно сделать вывод, что каждый человек обладает статистическим мышлением, способностью к анализу и синтезу информации об окружающем нас мире.

Всякое статистическое исследование начинается с целенаправленного сбора информации об изучаемом явлении или процессе. Этот этап называется этапом статистического наблюдения. Статистические исследования различаются по видам и по источникам сведений. Мы использовали единовременный вид статистического наблюдения, то есть наблюдение, проводимое без соблюдения строгой периодичности.

Для своего исследования мы выбрали способ статистического наблюдения «опрос», то есть наблюдение, при котором ответы на вопросы формуляра наблюдения записываются со слов опрашиваемого.

Для обобщения и систематизации данных, полученных в ходе статистического наблюдения, их разбивают на группы по какому-либо признаку и результаты сводят в таблицы и диаграммы.

Чтобы выяснить, какой он — среднестатистический ученик, нами был составлен тест, содержащий 7 вопросов. В опросе участвовали ученики с 5-го по 9-й класс.

В ходе работы нами были использованы следующие статистические характеристики:

Мода ряда чисел — число, наиболее часто встречающееся в данном ряду.

Размах ряда чисел — разность между наибольшим и наименьшим из чисел ряда.

Среднее арифметическое ряда чисел — отношение суммы этих чисел к числу слагаемых.

Медиана ряда чисел — медиана соответствующего упорядоченного ряда.

Без чего невозможен учебно-воспитательный процесс? Без союза семьи и школы. В центре этого союза находится субъект — УЧЕНИК.

Какими качествами, на ваш взгляд, обладает современный ученик? Мы представляем вашему вниманию исследовательский труд на тему «Среднестатистический ученик средней школы № 33».

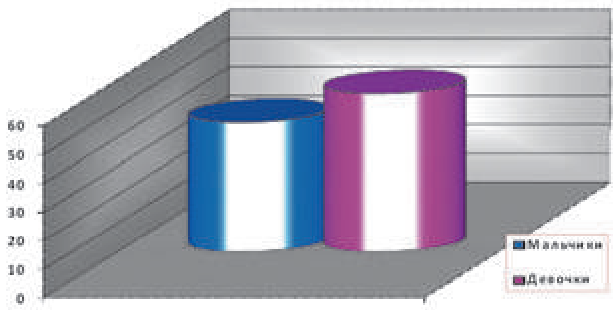
Цель проекта: составить портрет среднестатистического ученика.

Задачи проекта: проанализировать физиологические параметры; качество знаний; приоритетные предметы; уровень общения.

1. Краткая характеристика учащихся

В анкетировании участвовали ученики с 5-го по 9-й класс. В опросе участвовали 263 ученика, из них 145 девочек (55%) и 118 мальчиков (45%). Соотношение мальчиков и девочек показано на диаграмме.

Вывод. Большинство учащихся СОШ № 33 — девочки (55%).

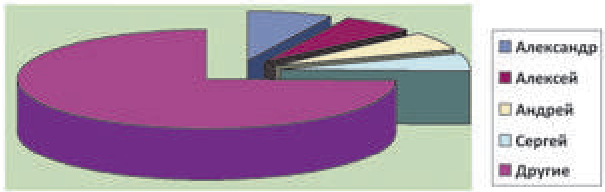


2. Рейтинг имен

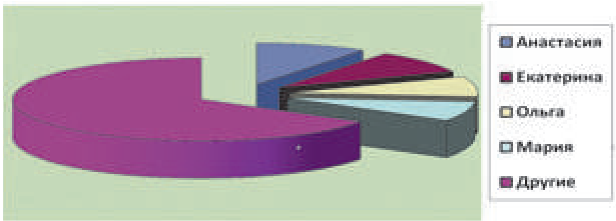
Часть респондентов не указали свои настоящие имена, а некоторые отказались назвать свое имя, поэтому рейтинг получился не совсем точным.

Вот «горячая четверка» наиболее популярных мужских имен:

Вывод. Самое распространенное имя среди мальчиков — Александр (7,2%).



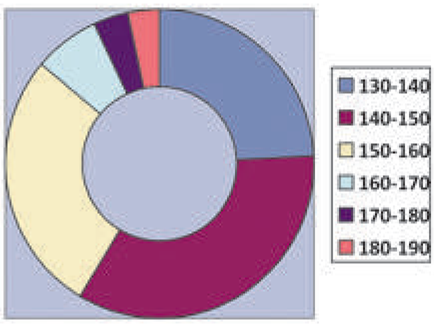
А вот «горячая четверка» наиболее популярных женских имен:

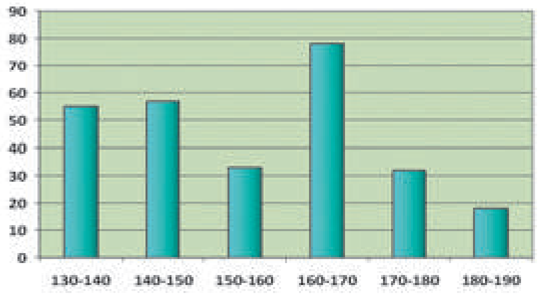


Вывод. Самое распространенное имя среди девочек — Анастасия (9,5%).

3. Мы растем

Рост (см)	Количество	Относительная частота
130–140	54	0,21
140–150	58	0,22
150–160	31	0,12
160–170	71	0,3
170–180	34	0,13
180–190	15	0,02





Среднее арифметическое (средний рост): 159 см.

Размах: 190 – 130 = 60.

Мода: 162.

Медиана: 158.

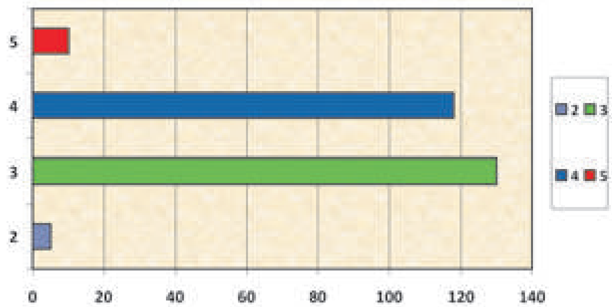
Вывод. Большинство учащихся имеют рост 160–170 см.

4. Наша успеваемость в I четверти

Среднее арифметическое (средний балл): 3,54.

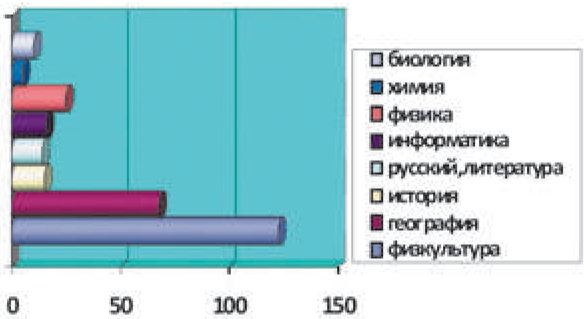
Мода: 3,5.

Успеваемость	Абсолютная частота	Относительная частота
«Отлично»	10	0,04
«Хорошо»	118	0,45
«Удовлетворительно»	130	0,49
«Неудовлетворительно»	5	0,02



Вывод. Большинство учащихся учатся хорошо.

5. Ваш любимый школьный предмет



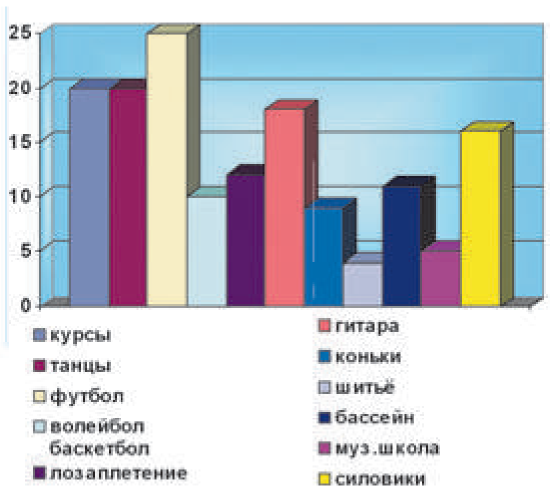
Предмет	Абсолютная частота	Относительная частота
Физкультура	123	0,46
География	68	0,25
История	15	0,05
Русский язык, Литература	14	0,05
ОИВТ	16	0,06
Физика	25	0,09
Химия	5	0,01
Биология	10	0,03

Вывод. Статистика показывает, что любимым предметом у большинства учащихся является физкультура (46%).

6. Занятость в кружках и секциях

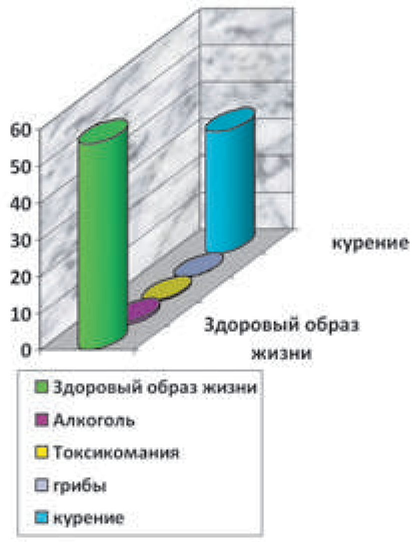
Кружки, секции	Абсолютная частота	Относительная частота
Курсы	20	0,08
Танцы	20	0,08
Футбол	25	0,10
Волейбол, баскетбол	10	0,04
Лозоплетение	12	0,04
Гитара	18	0,07
Конькобежный спорт	9	0,04
Шитье	4	0,02
Бассейн	11	0,04
Музыкальная школа	5	0,02
Силовые виды спорта	16	0,06
Нигде	110	0,41

Вывод. Большинство учащихся СОШ № 33 посещают кружки и секции — 153 чел. (59%).



7. Вредные привычки

Привычки	Абсолютная частота	Относительная частота
Курение	86	0,33
Употребление алкоголя	26	0,1
Токсикомания	1	0,004
Употребление грибов (галлюциногенные)	4	0,016
Здоровый образ жизни	146	0,56



Вывод. 33% — курящие учащиеся; 56% — учащиеся, ведущие здоровый образ жизни.

Заключение

На основании исследовательской работы мы получили среднестатистический портрет ученика со следующими характеристиками:

1. Пол — женский.
2. Имя — Анастасия.
3. Рост — 159 см.
4. Средняя оценка — «4».
5. Любимый предмет — физкультура.
6. Ведет здоровый образ жизни.
7. Увлекается футболом.
8. Свободное время проводит с друзьями.

Статистическое наблюдение — интересная и занимательная область математики. Материалы статистики используются практически везде, но ошибки нередки. Однако исследовательская деятельность вызвала у нас интерес, и мы хотели бы продолжить работу в данном направлении.

Г. ГЕРАСИМОВА,
Т. ЧУДНОВСКАЯ,
И. МОЛЧАНОВА,
Москва

НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ УРОКОВ МАТЕМАТИКИ ПРИ КОМПЬЮТЕРНОЙ ПОДДЕРЖКЕ

Важнейшей задачей современной системы образования является формирование совокупности универсальных учебных действий (УУД), обеспечивающих компетенцию «научить учиться», а не только освоение учащимися конкретных знаний и навыков в рамках отдельного учебного предмета. Это новая ключевая задача школы, но ее нельзя назвать неожиданной для учителей, которым свойственны забота об образовании и воспитании своих учеников и стремление к овладению новыми эффективными методиками обучения. В рамках статьи мы познакомим читателей с нашим опытом привлечения компьютерных средств для формирования УУД в процессе овладения математическими знаниями.

Малые компьютерные средства, к которым, в частности, относят научные и графические калькуляторы, — одно из важнейших направлений развития информатизации в школе. Нередко именно с помощью калькуляторов, а не компьютеров ведут обучение в развитых странах Западной Европы, США и Японии учителя математики, физики и других учебных предметов. Специализированные компактные устройства становятся основным средством применения информационных технологий в образовании.

Начиная с 2004 года наш округ начал участвовать в международном научно-методическом проекте «Школьный калькулятор» с использованием калькуляторов фирмы CASIO. Из материалов, опубликованных в газете «Математика», мы узнали, что в этом проекте также участвуют учителя Ярославля, Рыбинска, Хабаровска и др. регионов нашей страны. Наши коллеги отмечали, что использование калькулятора непосредственно в учебном процессе позволяет повысить качество обучения.

И все же, как и многие учителя математики, сначала мы с недоверием отнеслись к тому, чтобы внедрять в наших школах калькуляторы. Главным аргументом «против» было то, что ребята разучатся вычислять как письменно, так и устно. Но, обсудив проблему с учителями физики и химии, мы нашли аргументы «за».

Аргументы «за»:

— начиная с 7-го класса, то есть когда навыки счета у учащихся сформированы и арифметика является уже прикладным предметом для дальнейшего изучения математики, калькулятор ускорит и упростит выполнение расчетных задач;

— все учащиеся обеспечиваются одинаковыми калькуляторами, что важно в процессе обучения работе с ними, так как модели калькуляторов разных фирм обладают порой разными настройками для выполнения некоторых операций, и учитель не имеет возможности разобраться с калькулятором каждого ученика;

— калькулятор CASIO позволяет экономить время при вычислениях, так как имеется возможность записать все числовое выражение, значение которого нужно найти; кроме того, в нем предусмотрены различные функции, которых нет в других калькуляторах: исправление ошибок в нужном месте введенного числового (либо буквенного) выражения, редактирование выражений, работа с таблицами, статистические расчеты;

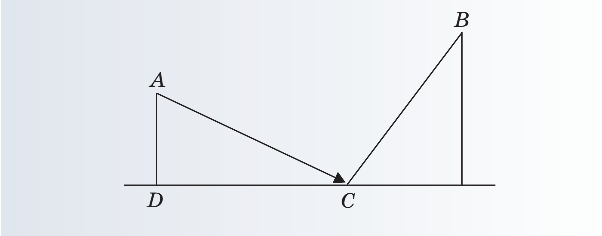
— можно увеличить количество рассматриваемых на уроке задач, в их числе задачи с реальными данными, и доводить их решение до интерпретации ответа;

— можно размножить идентичные варианты проверочных работ, так как учитель будет иметь возможность подготовить нужное количество задач, не затрачивая много времени на вычисления.

Это то, с чем мы решили вступить в проект. Учителя — участники эксперимента проходили повышение квалификации на курсах, организованных МИОО в методическом центре Западного окружного управления Департамента образования г. Москвы. Ежегодно проводились конференции, семинары, круглые столы в школах округа, на которых участники эксперимента рассказывали о своем опыте. Часть материалов из опыта работы учителей нашего округа опубликована в газете «Математика» [1].

Рассмотрим теперь два примера, которые раскрывают новые возможности уроков математики при использовании калькуляторов. *Первый пример* из опыта учителей Л.В. Дрябжинской и И.В. Ивановой (СОШ № 1003), в котором рассматривается, как калькулятор помог решить задачу физического содержания благодаря возможности представить рассматриваемую в задаче зависимость в виде таблицы либо в виде графика.

Задача. Из пункта A нужно добежать с пустым ведром до реки, зачерпнуть воды и принести ее в пункт B. Река на этом участке течет по прямой. Расстояния от пунктов A и B до реки равны 30 м и 50 м соответственно. Расстояние между основаниями перпендикуляров, проведенных из пунктов A и B к берегу реки, равно 100 м. Скорость движения с пустым ведром 5 м/с, а с полным — 2 м/с. За какое минимальное время можно это сделать?



Обозначив расстояние DC через x, получим функцию $f(x)$ для расчета времени:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+900}}{5}+\frac{\sqrt{(100-x)^2+2500}}{2}.$$

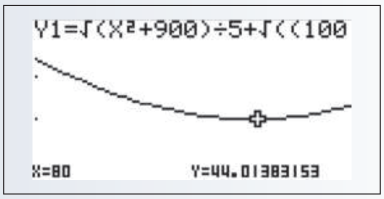


Рис. 1

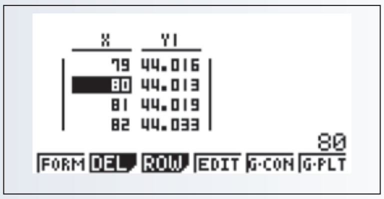


Рис. 2

На экране калькулятора появится таблица, по показаниям которой учащиеся определят наименьшее время и оптимальное расстояние (рис. 1). Этот же результат подтверждается графически (рис. 2).

При решении подобных задач ребята учатся исследовать зависимость, наблюдая за изменением значений функции в зависимости от изменения значений аргумента, делать вывод и использовать его для ответа на вопросы задачи.

Второй пример — из опыта изучения теории вероятностей и статистики. Здесь исключение вычислительных ошибок позволило точнее проанализировать данные, полученные в результате статистических исследований, повысить интерес учащихся к предмету, так как фактор неудачи, связанный с вычислениями, ослабевал или исчезал совсем. В дни Московского образования на ВВЦ учитель Т.М. Чудновская (СОШ № 12) показала мастер-класс по методике использования калькуляторов CASIO на уроках математики. Приведем фрагмент ее выступления.

Как любому учителю, мне хотелось сделать свои уроки по статистике в 7-м классе интересными и полезными для ребят. Поскольку за два года до официального введения теории вероятностей и статистики в 7–9-х классах этот курс я проводила в 10-х классах, то оказалось, что задач, предлагаемых в учебнике, недостаточно — оставалось время, так как на уроках использовался калькулятор. И еще хотелось, чтобы данные, которые мы будем анализировать, были получены в результате социологического опроса. То есть передо мной встала проблема, как расширить круг задач в дополнение к имеющимся в учебнике.

В то время я являлась классным руководителем как раз 7-го класса. Мы участвовали в международном конкурсе «Соревнование классов, свободных от курения», который проходил в течение шести месяцев (мы заняли 9-е место среди 250 школ). Задачи, которые я предложила детям, были как раз связаны с этим соревнованием, и интерес к ним был поддержан жизненной необходимостью.

Фрагмент урока

Цели:

— дать представление о том, как можно описать числовой набор с помощью статистических характеристик;

— помочь учащимся осознать влияние, которое они испытывают при принятии решения;

— сформировать навыки вычисления статистических характеристик с помощью научного калькулятора.

Постановка проблемы. Каждый человек испытывает внешние воздействия во всех жизненных ситуациях. Каждый получает внешнюю информацию и ведет внутренний поиск, при этом анализируя то и другое. Человек встает перед проблемой: осуществить собственный выбор или подчиниться чьему-либо влиянию. То, что и как мы выбираем, зависит от многих причин. На наш выбор могут влиять: сверстники, кумиры, средства массовой информации и собственные ценности (собственное мнение, взгляды, убеждения).

Я предложила своему классу заполнить таблицу, которую взяла из методического пособия «Соревнование классов, свободных от курения» под редакцией Н.В. Мартынцовой. В ней задается ряд задач, которые можно разбирать при изучении различных тем курса статистики.

Заполнение таблицы «Что влияет на мой выбор».

В таблице 1 перечислены некоторые варианты выбора, который ребята постоянно осуществляют, и некоторые факторы, которые оказывают влияние на их выбор. Учащимся нужно отметить в каждой графе, насколько баллов (от 0 до 10) тот или иной фактор влияет на их выбор. Максимальный балл в каждой колонке —120.

При изучении темы «Вычисления в таблицах» после заполнения таблицы я попросила ребят суммировать по столбцам степень влияния каждого фактора. Мы обсудили, влияние какого фактора оказалось наиболее сильным для каждого ученика.

Далее суммировали результаты по каждому фактору для всего класса. Для этого составили новую таблицу. В качестве примера возьмем группу из 15 человек. Из результатов подсчета в таблице 2 можно сделать вывод о том, влияние какого фактора наиболее сильно, а какого — наименее сильно для данной группы детей в 7-м классе. (А через два года те же ученики стали девятиклассниками и заполнили такую же таблицу. Теперь можно сравнить результаты (табл. 3)и проанализировать, что произошло за 2 года.)

Пример заполнения таблицы «Что влияет на мой выбор» :

Таблица 1

	Родители	Друзья	Учителя	Мода	Кумиры	Реклама	Мои ценности
Какую я выбираю музыку	1	7	1	8	5	7	6
Какие я читаю журналы	1	9	1	7	4	8	7
Какие книги читаю	3	4	9	5	4	5	6
Как я провожу свое свободное время	4	6	1	5	5	5	9
Мое решение курить или не курить	9	8	8	3	3	0	5
Какую выбрать прическу	2	3	8	7	2	0	8
Какие смотреть фильмы	2	8	1	7	6	6	6
Как вести себя на публике	5	7	5	2	4	0	8
Как вести себя у друга дома	5	8	1	1	1	0	9
Как отдыхать	5	2	1	1	3	3	5
Как одеваться	6	8	5	10	4	5	6
Чем я питаюсь	7	2	4	0	0	2	6
Итого	**50**	**72**	**45**	**56**	**41**	**41**	**81**

Таблица 2

№ уч-ся	Родители	Друзья	Учителя	Мода	Кумиры	Реклама	Мои ценности
1	58	26	37	33	20	22	107
2	49	18	27	10	17	19	70
3	57	26	14	18	14	7	111
4	40	57	8	40	46	15	111
5	44	32	5	43	26	14	72
6	44	55	17	39	31	9	92
7	84	55	21	83	78	57	69
8	74	37	19	62	53	78	64
9	55	47	44	18	3	24	112
10	75	49	33	59	65	52	82
11	55	7	24	2	17	0	76
12	80	9	42	12	22	15	102
13	58	71	51	54	56	53	63
14	80	63	57	57	45	40	90
15	69	33	38	9	18	32	114
Итого	**922**	**585**	**437**	**539**	**511**	**437**	**1335**

Таблица 3

№ уч-ся	Родители	Друзья	Учителя	Мода	Кумиры	Реклама	Мои ценности
1	45	50	26	30	33	22	94
2	60	48	32	38	28	26	95
3	42	19	26	20	18	16	79
4	47	45	30	31	53	37	99
5	74	63	37	40	39	34	98
6	57	71	37	12	22	12	119
7	39	33	35	18	20	21	109
8	69	43	27	36	37	34	86
9	49	26	31	20	15	32	75
10	53	91	32	40	57	26	102
11	89	55	57	42	21	39	91
12	88	52	54	44	19	34	96
13	73	36	38	13	17	22	113
14	72	57	38	19	30	33	87
15	101	41	40	44	34	62	112
Итого	**958**	**730**	**540**	**447**	**443**	**420**	**1455**

Каждый из полученных столбцов таблицы представляет собой числовой набор, полученный в результате социологического опроса. Каждый из этих наборов можно описать с помощью статистических характеристик.

Для анализа возьмем столбец «Друзья» (7-й класс):

26, 18, 26, 57, 32, 55, 55, 37,
47, 49, 7, 9, 71, 63, 33.

Найдем среднее арифметическое этого набора чисел:

$$(26 + 18 + 26 + 57 + 32 + 55 + 55 + 37 + 47 + 49 + 7 + 9 + 71 + 63 + 33) : 15 = 39.$$

Среднее арифметическое ряда чисел показывает, в каком месте числовой прямой группируются эти числа. Оно является в некотором смысле «центром» рассматриваемого набора чисел.

Чтобы получить представление о поведении числового набора, надо знать характеристики разброса, показывающие, насколько значения набора различаются между собой, как сильно они «разбросаны» вокруг средних. Самой простой такой характеристикой является размах. Найдем: наименьшее значение —7, наибольшее значение — 71, размах (71 – 7 = 64).

Размах очень просто вычисляется, но не всегда несет достоверную информацию, так как на его величину может влиять какое-то одно значение статистического ряда. Поэтому в реальных статистических исследованиях чаще используют другую характеристику разброса, которая сложнее вычисляется, но меньше подвержена таким колебаниям.

Узнаем, как числа нашего набора расположены по отношению к своему среднему арифметическому, т.е. найдем отклонение каждого числа от среднего:

$$26 - 39 = -13,$$
$$18 - 39 = -21,$$
$$57 - 39 = 18,$$
$$32 - 39 = -7 \text{ и т.д.}$$

Получаем новый набор чисел, который состоит из отклонений:

$$-13, -21, 18, -7, 16, -2, 8, 10, -32, -30,$$
$$32, 24, -6, -13, 16.$$

Если число меньше среднего, то его отклонение отрицательно, если число больше среднего, то его отклонение положительно. По набору отклонений можно судить о том, насколько разнообразны числа в наборе. Если отклонения малы, то числа в наборе расположены близко к среднему арифметическому. А если среди отклонений есть большие по модулю, то числа в наборе сильно разбросаны. Основное свойство отклонений: сумма отклонений чисел от среднего арифметического этих чисел равна нулю. Проверим:

$$-13 + 18 - 21 - 7 + 16 - 2 + 8 + 10 - 32 - 30 +$$
$$+ 32 + 24 - 6 - 13 + 16 = 0.$$

Чтобы судить о разбросе, принято складывать не сами отклонения, а их квадраты. Квадраты отклонений неотрицательны, поэтому сумма квадратов отклонений зависит только от абсолютных величин отклонений, а не от их знаков. Чем больше отклонения чисел от среднего арифметического, тем больше будет сумма квадратов отклонений. Чтобы мера разброса чисел не зависела от их количества в наборе, берут среднее арифметическое квадратов отклонений. Эту величину называют дисперсией.

Найдем дисперсию нашего числового набора. Для этого вычислим среднее арифметическое квадратов отклонений, которые были найдены в нашей задаче:

$$(18^2 + (-13)^2 + (-21)^2 + (-7)^2 + 16^2 + (-2)^2 + (-32)^2 + 8^2 +$$
$$+ (-30)^2 + 10^2 + 32^2 + (-6)^2 + 24^2 + (-13)^2 + 16^2) : 15 =$$
$$= 5392 : 15 \approx 359{,}5.$$

Вычислив квадратный корень из дисперсии $\sqrt{359,5} \approx 19$, получим стандартное (или среднее квадратичное) отклонение числового набора. В вычислениях мы использовали калькулятор. Заметим, что в научном калькуляторе CASIO есть функция, позволяющая проще вычислить дисперсию, и эту возможность мы использовали при анализе данных.

Опыт работы показал, что ребятам интересно обсуждать данные, полученные в результате социологического опроса, в котором они участвовали сами. Предложенная для разбора таблица «Что влияет на мой выбор» может быть проанализирована более глубоко при отработке умений и навыков нахождения различных статистических характеристик. Например, отвечая на вопрос «Какую выбрать прическу?», можно рассмотреть и проанализировать влияние друзей, родителей, учителей, моды. При этом составляются четыре числовых набора из данных всех учеников класса. Находятся все статистические характеристики. А затем идет анализ полученных результатов, и ребята видят, влияние какого фактора наиболее сильно. При этом формируются умения сотрудничать и работать в группе, что, безусловно, важно в развитии личности каждого из учеников.

В настоящее время учителя нашего округа отмечают, что использование калькулятора непосредственно в учебном процессе позволяет повысить качество обучения за счет снятия технической сложности в задачах, связанных с расчетами по формулам, с построением графиков и пр., что позволяет привлечь дополнительный, интересный учащимся материал и при постановке задач активизировать такие умственные операции, как наблюдение, прогнозирование и т.п.

Мы убедились, что возможность применять калькулятор на уроках математики способствует формированию тесной связи получаемых в школе знаний с практикой и реальными жизненными проблемами учащегося. Это инициирует учебные действия самого учащегося, воспитание у него качеств, необходимых для решения не только математических задач. Заметно развитие у ребят познавательных учебных действий, коммуникационных взаимодействий. Этому во многом содействует включение содержания изучаемого материала в контекст решения актуальных практико-ориентированных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журова Т.В., Зотова В.И.* Расчеты на каждый день // Математика, 2007, № 10.

2. *Серова З.Н.* Особенности применения калькуляторов в курсе математики 5–6 классов // Математика, 2007, № 21.

3. *Захарова О.Н.* Калькулятор помогает исследовать функции //Математика, 2008, № 2.

В. КРОТОВА,
пос. Снегири,
Московская обл.

ШАРИКИ С СЮРПРИЗОМ

Положительный эмоциональный настрой учащихся к предстоящим занятиям представляет мощный стимул для обеспечения условий, способствующих повышению мотивации и продуктивности результатов обучения учащихся математике. Это требует от учителя поиска методических средств для организации процесса обучения математике, которые позволили бы активизировать учебную деятельность учащихся. Я использую для этого «шарики с сюрпризом»: обычные воздушные шарики, в которые вкладываю записки с интересными, нестандартными задачами. Задачи, как правило, не связаны с изучаемым материалом и представляют собой задачи, решение которых с методической точки зрения обусловлено потребностью развития интеллектуальных качеств учащихся.

В качестве таких задач могут быть использованы задачи на установление закономерностей, на переливания, на составление различных комбинаций данных, на преобразование исходных данных и т.д. Например:

Фото автора

1. Имеются два сосуда вместимостью 3 л и 5 л. Как с помощью этих сосудов налить из крана 4 л воды?
2. Найдите сумму всех натуральных чисел от 1 до 100.
3. Продолжите последовательности чисел:
   а) 1, 2, 3, 5, 8...;
   б) 1, 1, 2, 3, 5, 8...

В шариках могут содержаться не только задачи (в этом и состоит особенность их названия «шарики с сюрпризом»), но и определенные задания. Например: «На следующем уроке будут отвечать учащиеся, фамилии которых начинаются на буквы «А», «С», «Ш»», «Сделать математическую зарядку», или самое приятное «Всем по конфетке».

При использовании на уроках «шариков с сюрпризом» необходимо учитывать ряд моментов.

• Работа с шариками начинается только после того, как выполнены все поставленные задачи и подведены итоги урока. Это условие активизирует учебную деятельность учащихся.

• Выбор шарика предоставляется конкретным учащимся. Либо самым активным, либо тем, кто лучше всего справились с домашним заданием, либо учащимся, у которых самые аккуратные тетради и т.д. Категории должны каждый раз меняться для того, чтобы все учащиеся класса приняли участие в выборе.

Задачи, которые содержатся в шарике, решаются в классе коллективно. Если задача достаточно трудная и кто-то из учащихся раньше остальных справился с решением, то можно выставить ему оценку в журнал.

Если не остается времени на решение задачи, то можно перенести работу на следующий урок или предложить учащимся выполнить решение дома.

В КОПИЛКУ

23

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

ЗАДАЧА С2 – НАХОЖДЕНИЕ РАССТОЯНИЙ

С. Вальковский

Задания типа С2 делятся на два основных вида: на нахождение углов и на нахождение расстояний. Рассмотрим основные методы решения задач на **нахождение расстояний**.

Определение. Расстоянием между множествами точек называется кратчайшее из возможных расстояний между точками этих множеств.

Нахождение расстояний возможно между точками, прямыми и плоскостями в любых комбинациях. Всего получается шесть возможных комбинаций, однако нахождение расстояний между двумя точками — задача не очень интересная с точки зрения стереометрии, ее мы рассматривать не будем. Нахождение расстояния между прямой и плоскостью имеет смысл лишь тогда, когда они параллельны (в противном случае это расстояние равно нулю). Но если они параллельны, достаточно взять любую точку на прямой и найти расстояние от нее до плоскости — это расстояние и будет искомым. Аналогично и с нахождением расстояний между плоскостями. Поэтому имеет смысл рассматривать расстояния от точки до прямой или плоскости, а также расстояние между прямыми.

Расстоянием от точки до прямой (плоскости) называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую (плоскость).

Расстоянием между прямыми называется длина отрезка общего перпендикуляра к этим прямым, заключенного между этими прямыми..

Обратите внимание!

Один балл начисляется за верное описание (построение) отрезка, который требуется найти. Второй — за верно проведенные вычисления и правильный ответ.

1. Расстояние между прямыми

Чтобы найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми, необходимо **через одну прямую провести плоскость, параллельную второй, и найти расстояние от второй прямой до этой плоскости**.

Пример. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро равно 1. Найдите расстояние от прямой AB_1 до прямой BC.

2. Расстояние от точки до прямой

Чтобы найти расстояние от точки до прямой, необходимо **опустить из точки перпендикуляр на данную прямую**. Однако зачастую для решения задачи делать этого не нужно — ***достаточно найти треугольник с вершиной в исходной точке, а противоположной стороной на исходной прямой***. Тогда искомое расстояние есть высота этого треугольника.

3. Расстояние от точки до плоскости

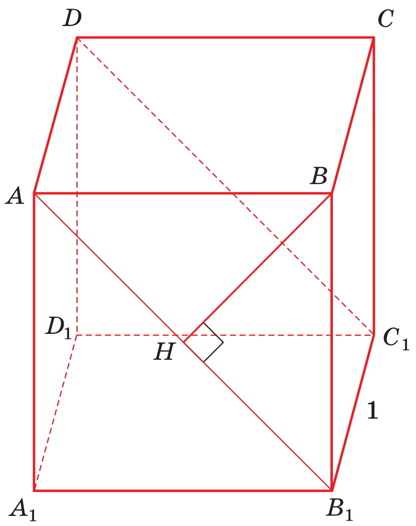
Чтобы найти расстояние от точки до плоскости, необходимо **опустить перпендикуляр из данной точки на эту плоскость**. Чаще всего для этого ***удобно воспользоваться теоремой о трех перпендикулярах***.

Пример. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковые ребра равны 1, а стороны основания — $\sqrt{2}$. Найдите расстояние от вершины пирамиды S до плоскости CMN, где M и N — середины ребер SA и SB соответственно.

Решение. Сначала заметим, что треугольник SMN равнобедренный, значит, его высота SH попадает в середину H отрезка MN.

Поскольку $SH \perp MN$, по теореме о трех перпендикулярах, **проекция точки S на плоскость CMN будет лежать на перпендикуляре**

Решение. Заметим, что **плоскость AB_1C_1D проходит через первую прямую и параллельна второй** (так как в ней есть прямая AD, параллельная BC). Таким образом, ***достаточно найти расстояние от любой точки BC до плоскости AB_1C_1D.***



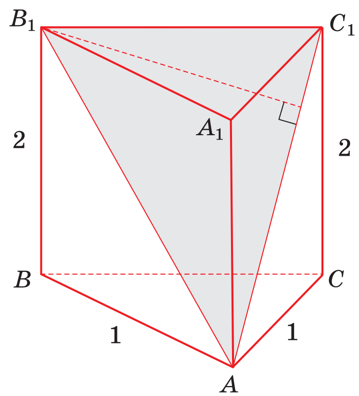
Проведем в треугольнике ABB_1 высоту BH. Она лежит в грани куба, то есть перпендикулярна ребру B_1C_1, а также перпендикулярна AB_1, следовательно, перпендикулярна и плоскости AB_1C_1D.

Таким образом, BH и есть искомая величина, а она равна высоте равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом 1, то есть $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ высота равна 2, сторона основания равна 1. Найдите расстояние от точки B_1 до прямой AC_1.

Решение. Заметим, что **искомое расстояние — высота треугольника AB_1C_1, проведенная из вершины B_1.** Чтобы найти ее, можно, например, найти площадь треугольника и разделить на половину стороны AC_1.



По теореме Пифагора для треугольника B_1BA $B_1A=\sqrt{5}$, аналогично, $C_1A=\sqrt{5}$, а $B_1C_1=1$ по условию.

Таким образом, высота треугольника AB_1C_1, проведенная из вершины A, равна

$$\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{19}}{2},$$

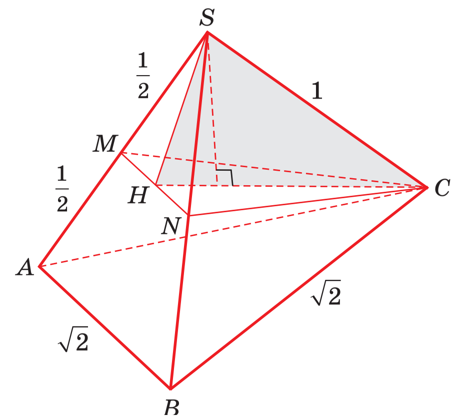
а его площадь — $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{19}}{2}=\frac{\sqrt{19}}{4}$. Тогда высота, проведенная из вершины B_1, равна

$$\frac{\sqrt{19}}{4}:\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}}$.

к MN, проведенном в этой плоскости через точку H.

Заметим, что $CM=CN$, то есть CH, как медиана равнобедренного треугольника CMN, и будет этим перпендикуляром. Значит, нужно найти высоту треугольника SCH, опущенную из вершины S.



Боковые грани пирамиды — прямоугольные треугольники. Так как отрезок SC перпендикулярен двум прямым плоскости SAB, то он перпендикулярен и всей плоскости. Значит, треугольник CSH — тоже прямоугольный. В нем

$$SH=\frac{\sqrt{2}}{4},\quad CH=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Тогда по формуле для высоты прямоугольного треугольника искомая высота равна

$$\frac{SC\cdot SH}{CH}=\frac{1\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{3\sqrt{2}}{4}}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

ИНДЕКСЫ ПОДПИСКИ | Почта России - 79083 (инд.); - 79584 (орг.) | Роспечать - 32031 (инд.); - 32598 (орг.)

Н. АВИЛОВ,
ст. Егорлыкская,
Ростовская обл.

БУКЕТ ИЗ СЕМИ ЗАДАЧ

Задача В каждом из семи правильных шестиугольников все отмеченные точки являются серединами проведенных отрезков. Докажите, что в каждом правильном шестиугольнике закрашен правильный треугольник (рис.1).

Решение. Здесь семь задач, и каждую из них можно решать отдельно, но есть общий подход ко всем сразу, основанный на следующей задаче: Равносторонние треугольники OAB и OCD имеют общую вершину O. Точки M и L – середины их сторон AB и CD, точки K и N — середины отрезков AD и BC. Докажите, что треугольники MNK и KLN — равносторонние (рис.2).

Докажем, что треугольник MNK — равносторонний. Проведем отрезки AC и BD (рис.3). Тогда треугольники AOC и BOD равны по двум сторонам и углу между ними: $AO = BO$, $CO = DO$, $\angle AOC = \angle BOD$. Эти углы равны потому, что каждый из них равен $\angle AOD + 60°$. Из равенства этих треугольников следует, что $AC = BD$, и треугольник OAC при повороте вокруг точки O на $60°$ совместится с треугольником OBD, а отрезок AC с отрезком BD; таким образом, угол между этими отрезками равен $60°$.

Отрезки MN и MK являются средними линиями треугольников ABC и ABD с равными основаниями AC и BD соответственно, значит, $MN = MK$. Из того, что угол между отрезками AC и BD равен $60°$, следует, что угол между соответственно параллельными им отрезками MN и MK тоже равен $60°$, то есть $\angle KMN = 60°$, поэтому треугольник MNK равносторонний.

Доказательство того, что треугольник KLN тоже равносторонний, — аналогично.

Чтобы решить задачи букета, нужно в каждом шестиугольнике выделить два правильных треугольника с общей вершиной и отметить середины отрезков, согласно основной задаче. Как это сделать, показано на рисунке 4. Отмеченные точки являются вершинами равносторонних треугольников, данных в условии задачи.

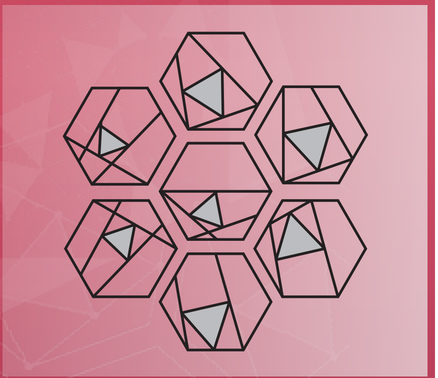


Рис. 1

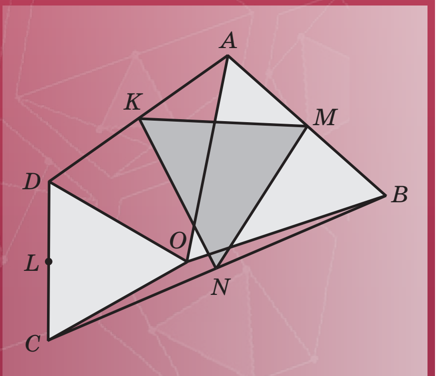


Рис. 2

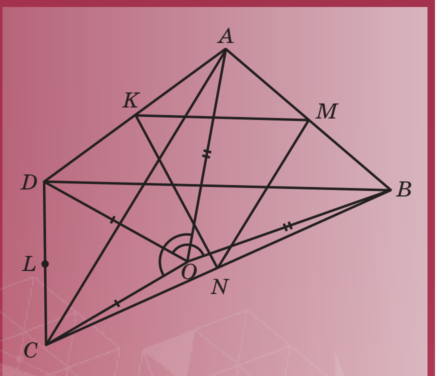


Рис. 3

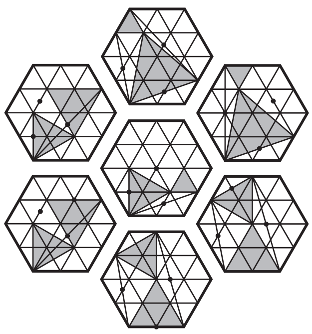


Рис. 4

26

Н. ПАХАЕВА,
Н. ШЕРСТНЕВА,
с. Турочак,
Республика Алтай

Тема урока:

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАЦИЯ
И ФОРМЫ ЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Цели урока:
— формирование навыков проведения сбора и обработки данных, построение диаграмм;
— развитие умения сравнивать, выявлять закономерности, обобщать.

Фото О. Ефремовой

Ход урока

Актуализация знаний

«Статистика знает все. Известно, сколько какой пищи съедает в год средний гражданин республики… Известно, сколько в стране охотников, балерин… станков, собак всех пород, велосипедов, памятников, маяков и швейных машинок… Как много жизни, полной пыла, страстей и мысли глядит на нас со статистических таблиц!» — утверждали Ильф и Петров в своем знаменитом романе «12 стульев».

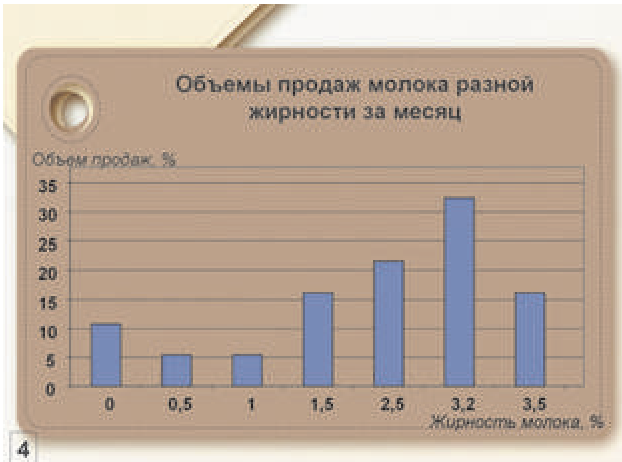
Тема нашего урока «Статистическая информация и формы ее представления».

Представим, что мы с вами работаем в статистическом центре. Основными задачами центра являются сбор, хранение информации, выработка прогнозов, оценка их достоверности. Но ни одна из этих задач недостижима без обработки данных. Поэтому сегодня мы повторим основные термины, применяемые в статистике, и способы обработки информации, представленные в удобном наглядном виде.

В любом учреждении должны быть подразделения или отделы. Назовем каждую группу отделом. Всего у нас четыре отдела. Выберите начальников отделов, которые будут вести учет и распределение работы.

В статистическом центре рабочий день начинается с планерки. Проведем обзор основных терминов и понятий.

У вас на столах карточки с определениями, на доске — основные понятия статистики.



Задание 1. Соотнесите данное определение с соответствующим понятием.

Статистика (состояние) — наука, занимающаяся обработкой и анализом количественных данных о разнообразных явлениях.

Общий ряд данных (генеральная совокупность) — множество всех возможных результатов измерения.

Выборка (статистический ряд) — множество результатов реально получившихся в данном измерении.

Варианта — значение одного из результатов измерения.

Ряд данных (ранжированный ряд) — значения всех результатов измерений, перечисленные по порядку.

Репрезентативная выборка — представительная.

Кратность варианты — количество повторений выборки.

$$\textbf{\textit{Частота варианты}} = \frac{\text{кратность}}{\text{объем выборки}}.$$

Полигон частот — график распределения частот или кратностей.

Гистограмма — столбчатая диаграмма.

Задание 2. Определите, является ли репрезентативной выборка (слайд 3).

а) Число автомобильных аварий в июне, если необходимо составить статистический отчет по авариям в городе за год.

б) Городские жители при подсчете числа автомобилей на душу населения в стране.

в) Люди в возрасте от 40 до 50 лет при выяснении рейтинга молодежной телепрограммы

Задание 3. Фирма «Алтайская буренка» производит молоко разной жирности. Объемы продаж за месяц сведены в диаграмме (слайд 4).

а) Определите наиболее популярный сорт молока.

б) Сколько тысяч литров продано полностью обезжиренного молока?

в) Как вы думаете, на что следует обратить внимание производителя молока в следующем месяце?

Задание 4. Работниками телевидения был проведен опрос среди молодежи с целью определения времени просмотра телевизионных программ. Всего было опрошено 1000 человек. Зависимость числа зрителей от времени суток показана на гистограмме (слайд 5).

а) В какие периоды времени число зрителей превышает 500 человек?

б) Сколько человек в среднем смотрят телевизор в течение часа в период с 16 до 19 часов?

в) Как бы вы использовали данные этого опроса, если бы были главным редактором молодежной программы?

Проверка домашнего задания

(*Защита проектов, выполненных учащимися*)

А теперь каждый отдел должен представить отчет о проделанной работе по плану:

1. Генеральная совокупность.
2. Случайная выборка.
3. Ранжированный ряд.
4. Представление информации (таблицы, диаграммы).

Вывод, предложение по исследуемому вопросу.

Комментарий. На первом уроке по данной теме учащимся было предложено объединиться в группы по четыре человека и выбрать тему исследования:

- Сколько свободного времени у учащихся 9–11-х классов?
- Как часто вы посещаете библиотеку?
- Почему вы курите?
- Сколько сигарет вы выкуриваете за день?

Используя диаграмму (слайд 6), ответьте на вопросы:

Сколько учащихся нашей школы посещает библиотеку?

Учащиеся каких классов являются частыми посетителями библиотеки? Почему?

На диаграмме (слайд 7) представлена зависимость смертности от количества выкуриваемых сигарет. Какое предположение можно сделать?

Работа в группах

Продолжаем работу нашего статистического центра. Каждый отдел получит свое задание. Начальникам отделов необходимо распределить объем работы между работниками, следить за ходом выполнения заданий, а по окончании представить отчеты о проделанной работе и оценить вклад каждого.

Задание 1. Даны результаты успеваемости учащихся 9«В» класса по геометрии за I полугодие: оценку «5» получили трое учащихся; «4» — шестеро; «3» — семеро; «2» — нуль учащихся. Постройте таблицу распределения выборки и полигон распределения кратностей.

7

Задание 1

Успеваемость по геометрии за I полугодие

Варианта	«5»	«4»	«3»	«2»
Кратность варианты	3	6	7	0

8

9

Задание 2

Кратность варианты. Частота варианты

Варианта	1	2	3	4	5	6	Всего вариант = 6
Кратность варианты	3	6	15	21	12	3	Сумма = 60 (объем выборки)
Частота варианты	0,05	0,1	0,25	0,35	0,2	0,05	Сумма = 1

10

	1	2	3	4	5	
Варианта (интервалы цен)	от 0 до 1000	от 1000 до 2000	от 2000 до 3000	от 3000 до 4000	от 4000 до 5000	Всего вариант = 5
Кратность варианты	7	16	5	1	1	Сумма = 30 (объем выборки)
Частота варианты	0,23	0,53	0,16	0,04	0,04	

Варианта (оценка)	«2»	«3»	«4»	«5»	Всего вариант = 4
Кратность варианты	2	22	12	4	Сумма = 4 (объем выборки)
Частота варианты	0,05	0,55	0,3	0,1	Сумма = 1
Частота (%) варианты	5	55	30	10	Сумма = 100%

Задание 2. Заполните таблицу, зная, что объем выборки равен 60.

Варианта (значение ряда)	1	2	3	4	5	6	Всего 6 вариант
Кратность варианты	3		15		12		Сумма = (объем выборки)
Частота варианты		0,1		0,35		0,05	Сумма =

Задание 3. В отделе «Бытовая техника» в течение дня произведен учет стоимости проданного товара: 1200, 1110, 2300, 890, 320, 1200, 560, 1340, 1400, 1050, 1050, 4700, 3200, 2900, 2100, 2450, 890, 1110, 1200, 1200, 2300, 1050, 1400, 1200, 890, 320, 1320, 890, 1100,1050. Представьте данные в виде интервальной таблицы, разбив на интервалы: от 0 до 1000; 1000–2000; 2000–3000; 3000–4000; 4000–5000; вычислите кратность и частоту варианты. Постройте гистограмму кратности. Какой интервал цен оказался наиболее популярным?

Задание 4. Среди учащихся 9-х классов была проведена контрольная работа. Результаты контрольной работы представлены в виде таблицы.

Варианта (отметки)	«2»	«3»	«4»	«5»	Всего вариант
Кратность варианты	2	22	12	4	Сумма =
Частота варианты					Сумма =
Частота (%) варианты					Сумма =

Заполните таблицу и постройте круговую диаграмму частот.

Подходит к концу рабочий день, подведем итоги нашей работы. Проверим, насколько вы справились с заданиями (слайды 8–14).

Итог урока

Насколько успешно потрудился каждый из вас, нам доложат начальники отделов. (*Выставляются отметки в группах каждому.*) Внесем данные о заработанных оценках в компьютер и составим круговую диаграмму.

Ответьте на вопросы:

1. Что нового вы узнали о статистике?
2. Какое место занимает статистика в жизни?
3. Зачем необходимо проводить исследования?
4. Зачем нужно обрабатывать результаты исследования?

(*Круговая диаграмма полученных отметок за урок проецируется на экран.*)

С. БИРЮКОВА,
Москва

ИНТЕЛЛЕКТ-КАРТЫ В ГЕОМЕТРИИ,

В ПРОСТОРЕЧИИ — ШПАРГАЛКИ

Геометрию преподавать труднее, чем алгебру. Я думаю, с этим согласны все учителя математики. Это и понятно. В алгебре накопленные знания легко выстраиваются в цепочку: линейные уравнения – линейные неравенства – квадратные уравнения – квадратные неравенства и так далее. Другие факты «обвивают» эту цепочку, и получается вполне компактная структура. В геометрии же число теорем и определений, необходимых для решения задач, настолько велико, что структура разрастается в ветвистое дерево, на ветвях которого вместо листьев «висят» тексты, связь между которыми в сознании ученика не всегда сохраняется. И тексты эти никак не хотят укладываться в головах учащихся. А вот рисунки и символы запечатлеваются гораздо легче.

Лет семь назад я попыталась изобразить теоремы графически, то есть создать карту памяти, где каждой теореме, аксиоме, определению соответствует картинка-ярлык. Моей задачей было создать «дерево геометрии», охватываемое одним взглядом.

Сначала учащиеся рисовали в тетради ярлыки доказанных теорем и пользовались шпаргалкой, чтобы вспомнить нужную теорему при решении задачи. Работа напоминала примерку одежды: приложил одно платье — не подошло... другое... третье... Ура! оказалось впору. Но успокаиваться было рано. Количество теорем росло, каждый раз рисовать их на доске становилось все труднее и труднее. Я стала делать шпаргалку в электронном виде в форме таблицы, отдельно заполняя строки с аксиомами, определениями и теоремами. У такой шпаргалки был ряд существенных недостатков:

- Уже к восьмому классу таблицу невозможно стало проецировать на экран целиком.
- Дети рисовали свои шпаргалки на листах бумаги, которые постоянно теряли.
- Теоремы было трудно группировать, приходилось переделывать всю таблицу.

Тогда я поняла, что для решения проблем более всего подходит составление ментальных карт или, как их еще называют, интеллект-карт. Ментальные карты позволяют графически отображать информацию, вносить динамику и разнообразие в записи при помощи цвета и выделения, указывать взаимосвязи между отдельными элементами. Информацию легко пополнять.

Следующим этапом стало использование программы «Живая геометрия», в которой и выполнялись рисунки (рис. 1), тем более что мы перешли к работе с задачами именно в этой программе, а уроки геометрии стали проходить в компьютерном классе.

Одно из достоинств ментальной карты, выполненной в электронном виде, заключается в том, что каждый учитель легко может поправить или дополнить её, исходя из своих нужд и нужд своих учеников. Кроме того, учащиеся дома на своих компьютерах могут структурировать её так, как им удобно.

Но это не решило проблему запоминания текста теорем. Поэтому была создана таблица-шпаргалка с формулировками. Аксиомы в ней выделяются красным цветом, определения – синим, а теоремы – зелёным (признаки) и бордовым (свойства). Приведу фрагмент таблицы, относсящейся к теме «Треугольники».

Как осуществляется работа?

В компьютеры учащихся загружается схема, выполненная в программе «Живая геометрия», и таблица-шпаргалка. Для решения задач я создала электронный документ, состоящий из двух страниц. На первой странице дан текст задачи, здесь же ученики выполняют чертеж (рис. 2).

Затем учащиеся копируют чертеж и помещают его на вторую страницу (рис. 3). После чего подбирают по схеме ярлыки теорем, которые используются ими при решении задачи. И, наконец, записывают решение на первой странице.

Очень удобно проводить самостоятельные работы. Тексты можно раздавать индивидуально. Для проверки ученики «сбрасывают» свою работу на мой компьютер по локальной сети. Ошибки можно исправлять прямо в тексте решения красным цветом. При наличии времени решение задач можно проверить в конце урока.

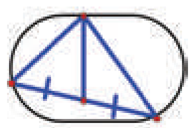
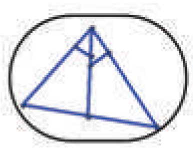
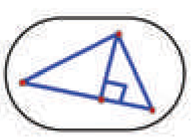
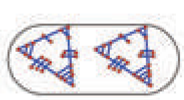
Во время устной или фронтальной работы схема проецируется на экран проектора.

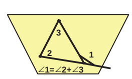
В заключение могу сказать, что учащиеся работают с интересом, у них появляется возможность действовать и находить варианты решений. В зависимости от того, с каким классом работает учитель, в схему можно включать более сложные теоремы, а также и задачи, формулировки которых часто используются. Каждый учитель легко может найти и другие варианты расположения материала.

Более подробно об этой работе вы можете узнать на моем сайте sbiryukova.narod.ru., где есть и другие материалы, которые, я надеюсь, будут интересны учителям математики.

ЛИТЕРАТУРА

Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия, 7–9 классы. — М.: Мнемозина, Московский учебник, 2007.

	Треугольники
	Медиана треугольника – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.
	Биссектриса треугольника – отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющей вершину с точкой противолежащей стороны.
	Высота треугольника – отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой противолежащей стороны или её продолжения и перпендикулярный этой стороне.
	Каковы бы ни были треугольник и луч на плоскости, существует треугольник, равный данному, у которого первая вершина совпадает с вершиной луча, вторая лежит на луче, а третья расположена в заданной полуплоскости относительно луча.
	Два треугольника называются равными, если стороны одного из них соответственно равны сторонам другого и углы, заключённые между ними, равны.

	Признаки равенства треугольников
	1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.
	2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то треугольники равны.
	3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то треугольники равны.
	Угол, смежный с каким-нибудь углом треугольника, называется внешним углом треугольника.
	Внешний угол треугольника больше каждого его внутреннего угла, не смежного с ним.
	Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним.

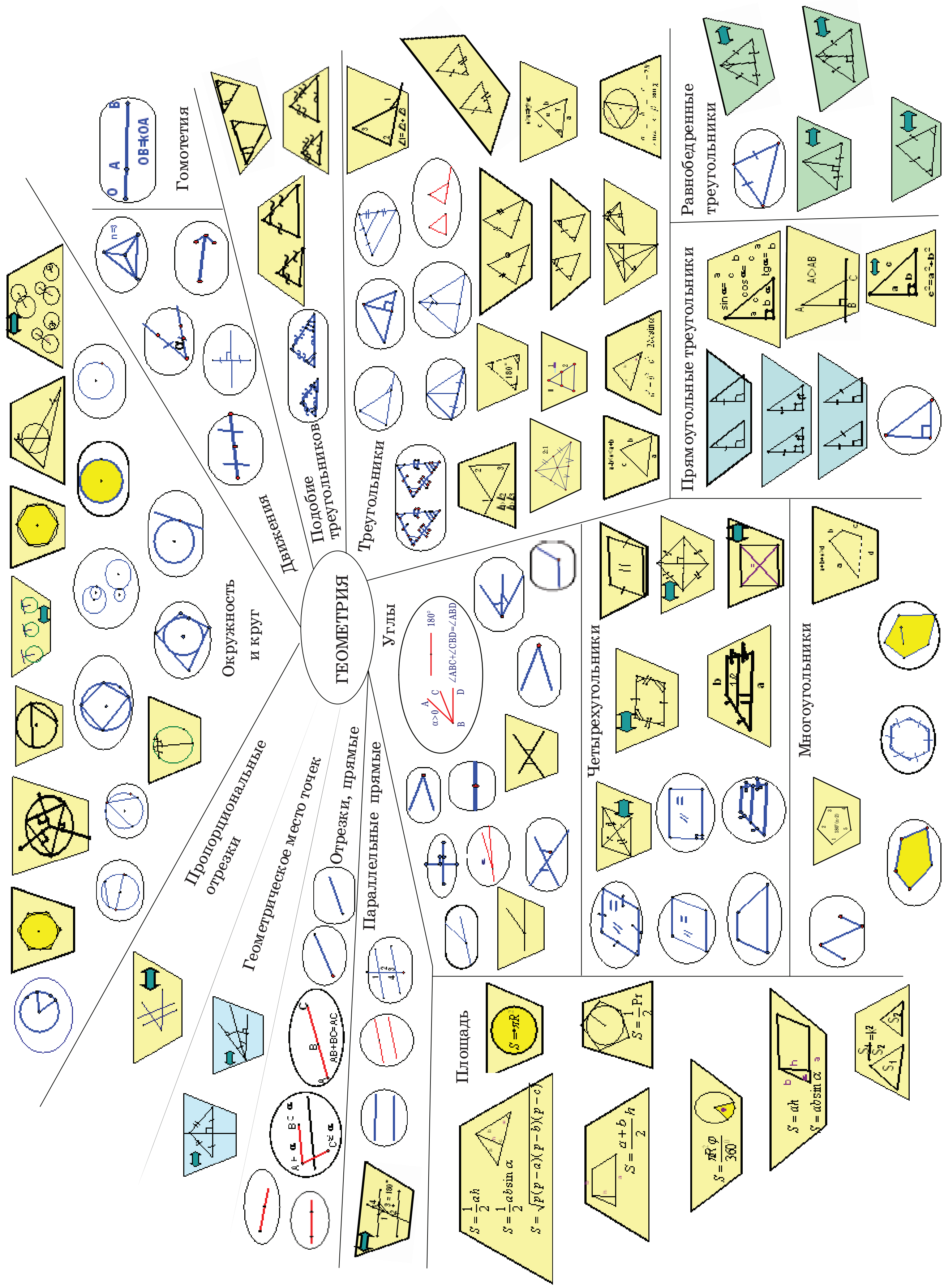
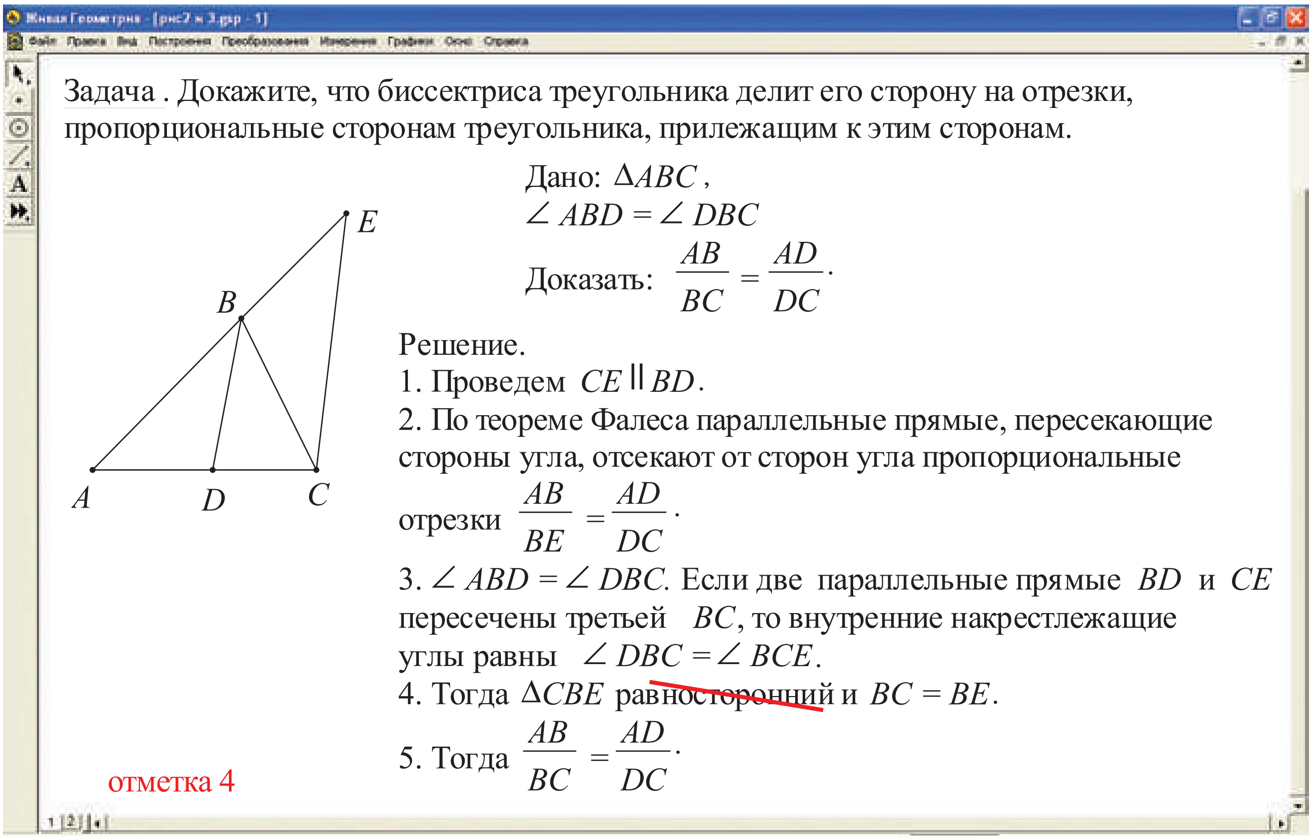

ГЕОМЕТРИЯ
Гомотетия
Движения
Подобие треугольников
Треугольники
Равнобедренные треугольники
Прямоугольные треугольники
Многоугольники
Четырехугольники
Углы
Площадь
Параллельные прямые
Отрезки, прямые
Геометрическое место точек
Пропорциональные отрезки
Окружность и круг

Рис. 1



Живая Геометрия - [рис2 и 3.gsp - 1]

Файл Правка Вид Построения Преобразования Измерения Графики Окно Справка

Задача . Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные сторонам треугольника, прилежащим к этим сторонам.

Дано: ΔABC,
$\angle ABD = \angle DBC$

Доказать: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$.

Решение.

1. Проведем $CE \parallel BD$.
2. По теореме Фалеса параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки $\dfrac{AB}{BE} = \dfrac{AD}{DC}$.
3. $\angle ABD = \angle DBC$. Если две параллельные прямые BD и CE пересечены третьей BC, то внутренние накрестлежащие углы равны $\angle DBC = \angle BCE$.
4. Тогда ΔCBE ~~равносторонний~~ и $BC = BE$.
5. Тогда $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$.

отметка 4

Рис. 2

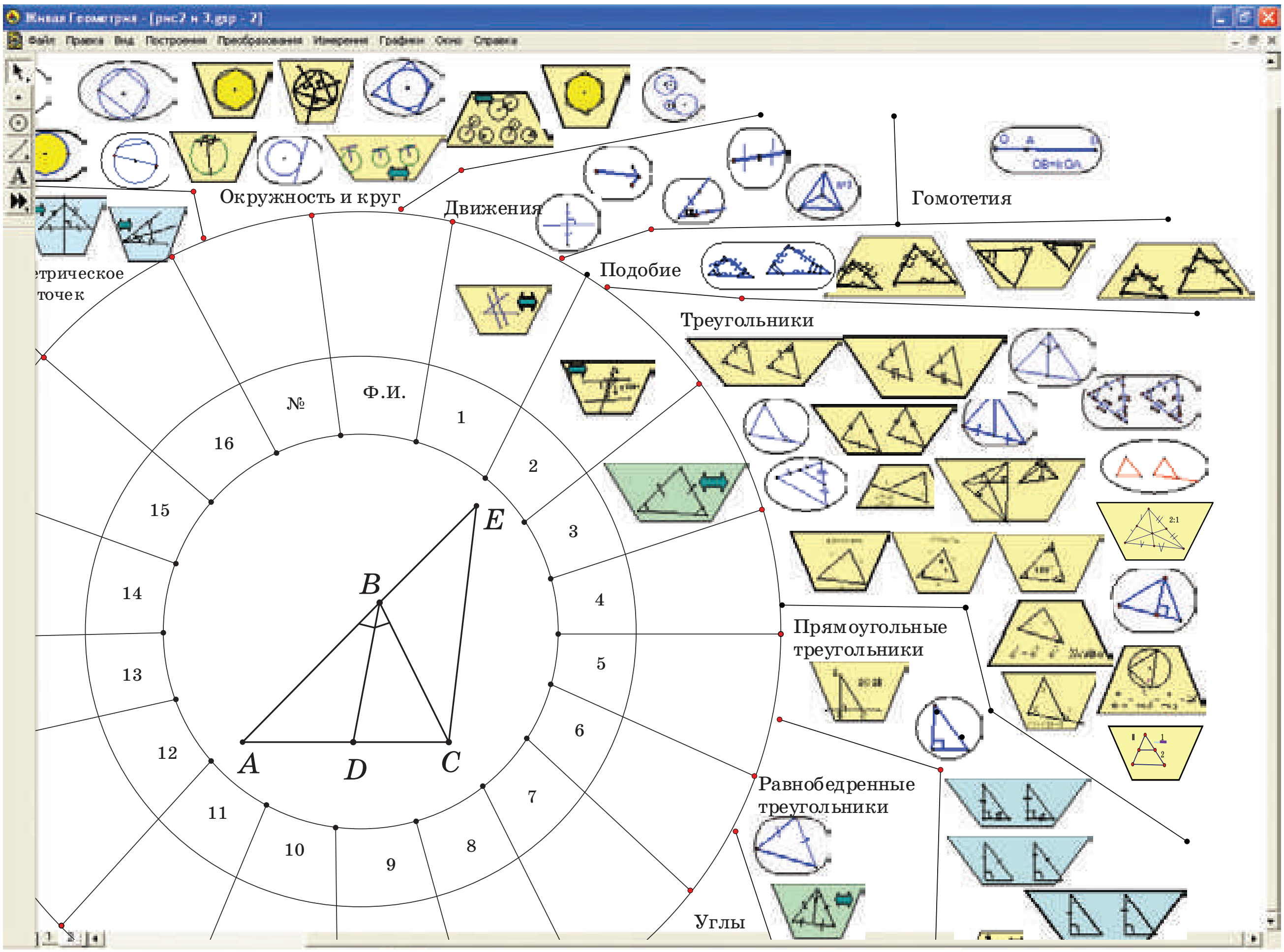


Рис. 3

А. БЛИНКОВ,
В. ГУРОВИЦ,
А. ИВАНИЩУК,
Д. ПРОКОПЕНКО,
П. ЧУЛКОВ,
Д. ШНОЛЬ,
г. Москва.

ТУРНИР АРХИМЕДА

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РЕГАТА

16 января 2010 года в Московском городском дворце детского (юношеского) творчества состоялась Математическая регата 8-х классов, в которой приняли участие 83 команды из Москвы, Долгопрудного, Костромы, Санкт-Петербурга, Переславля, Ступино и Черноголовки.

По сложившейся традиции Московских регат каждый участник и руководитель команды по окончании регаты получал небольшую брошюру с условиями и решениями задач только что прошедшей регаты.

Дипломами и призами (математической литературой) были награждены 14 команд, показавших лучшие результаты. Дипломов первой степени удостоились две команды физико-математических школ из Москвы: № 2007 и № 853.

Полные итоги регаты опубликованы на сервере МЦНМО (http://www.mccme.ru/olympiads). Там же можно найти материалы регат предыдущих лет, которые ежегодно публикуются и на страницах приложения «Математика». Подробно о том, как проводятся математические регаты, и материалы всех прошедших регат – см. «Московские математические регаты» (сост.: А.Д. Блинков, В.М. Гуровиц, Е.С. Горская. М.: МЦНМО, 2007).

Как обычно, часть заданий придумывалась авторами специально для этой регаты, а остальные являются математическим фольклором или взяты из популярной математической литературы. Тексты решений опубликованы в том виде, в котором они готовились для работы жюри.

Условия задач

Первый тур

(*10 минут; каждая задача — 6 баллов*)

1.1. Вычислите (*не используя калькулятор*):

$$\sqrt{2009\cdot 2011+1}.$$

1.2. Определите вид четырехугольника, в котором каждая диагональ разбивает его на два прямоугольных треугольника. Ответ объясните.

1.3. С полудня до полуночи Кот Ученый спит под дубом, а с полуночи до полудня рассказывает сказки. На дубе он повесил плакат: «Через час я буду делать то же самое, что делал два часа назад». Сколько часов в сутки эта надпись верна?

Второй тур

(*15 минут; каждая задача — 7 баллов*)

2.1. Найдите предпоследнюю цифру в десятичной записи числа

$$S = 2009^{2008} + 2009^{2009}.$$

2.2. В треугольнике ABC длины сторон попарно различны. На сторонах AB и AC угла BAC выбираются точки M и N соответственно так, что $AM = AC$ и $AN = AB$. Отрезок MN пересекается со стороной BC в точке A_1.

Аналогично, на сторонах угла ABC выбираются точки K и L так, что $BK = BC$ и $BL = BA$, B_1 — точка пересечения KL и AC. Точка C_1 на стороне AB также определяется аналогично. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

2.3. Имеются три слитка с массами 1, 2 и 3 кг. Процентное содержание золота в разных слитках — разное (но неизвестно). Каждый слиток надо разделить на три части и изготовить из них три новых слитка с теми же массами (1, 2 и 3 кг) так, чтобы процентное содержание золота во всех новых слитках стало одинаковым (независимо от того, каким оно было в исходных кусках). Объясните, как это можно сделать.

Третий тур

(*20 минут; каждая задача — 8 баллов*)

3.1. Разложите число $2^{202} + 1$ на два множителя, каждый из которых не меньше миллиона.

3.2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC биссектриса BL вдвое больше высоты AD. Найдите углы треугольника.

3.3. После окончания учебного года Миша решил вырвать из своего учебника математики все листы, на которых сумма номеров страниц (на обеих сторонах листа) является квадратом целого числа, а Гриша собрался удалить все листы, на которых эта же сумма является кубом целого числа. Кто из них нанесет учебнику больший ущерб?

Четвертый тур

(*25 минут; каждая задача — 9 баллов*)

4.1. Сравните x и z, если известно, что $x + yzt = y + ztx = z + txy = t + xyz$ и $x > y$, $z > t$.

4.2. В треугольнике ABC медиана AM равна высоте BH. Кроме того, равны углы MAB и HBC. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

4.3. Найдите все натуральные числа, которые можно представить в виде суммы двух взаимно простых чисел, отличных от 1.

Решения задач

1.1. 2010.

$$\sqrt{2009\cdot 2011+1}=\sqrt{(2010-1)\cdot(2010+1)+1}=$$

$$=\sqrt{2010^2-1+1}=\sqrt{2010^2}=2010.$$

1.2. Прямоугольник.

Пусть $ABCD$ — искомый четырехугольник (рис. 1).

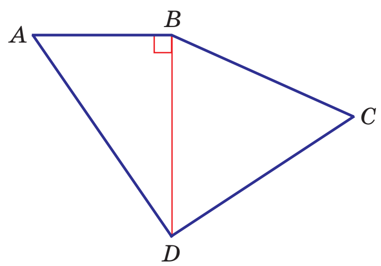


Рис. 1

Рассмотрим одну из его диагоналей, например BD. По условию треугольник ABD – прямоугольный. Докажем, что прямым может быть только угол с вершиной A. Действительно, если, например, угол ABD — прямой, то угол ABC — тупой, что противоречит условию, так как треугольник ABC — уже не прямоугольный. Аналогично, в любом из треугольников, получающихся при разбиении, прямой угол лежит напротив диагонали четырехугольника. Следовательно, вершинами прямых углов являются вершины четырехугольника, то есть $ABCD$ — прямоугольник.

1.3. 18 часов.

Выясним промежутки времени, в которые надпись неверна. Они начинаются за час до того момента, когда Кот меняет вид деятельности, и продолжаются еще 2 часа после этого момента. Таким образом, надпись неверна с 11 до 14 часов и с 23 часов до 2 часов, то есть 6 часов в сутки. В остальное время надпись верна, значит, она верна 18 часов в сутки.

2.1. 1.

1. Так как $2009^{2008} + 2009^{2009} = 2009^{2008}(1 + 2009) = 2009^{2008}\cdot 2010 = 2009^{2008}\cdot 2000 + 2009^{2008}\cdot 10$, то предпоследняя цифра числа S совпадает с последней цифрой числа 2009^{2008}.

2. Последняя цифра числа 2009^{2008} совпадает с последней цифрой числа 9^{2008}. Так как $9^{2008} = 81^{1004}$, то последняя цифра этого числа — 1.

Следовательно, предпоследняя цифра числа S тоже 1.

2.2. Из условия задачи следует, что $\Delta AMN = \Delta ACB$ ($AM = AC$, $AN = AB$, угол A — общий, рис. 2),

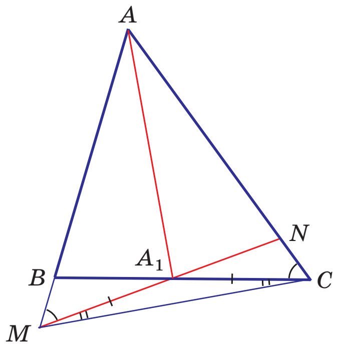


Рис. 2

следовательно, $\angle AMN = \angle ACB$. Кроме того, из равнобедренного треугольника AMC получим, что $\angle AMC = \angle ACM$. Следовательно, $\angle A_1MC = \angle A_1CM$, значит, треугольник A_1CM — также равнобедренный: $MA_1 = CA_1$ Тогда $\Delta AMA_1 = \Delta ACA_1$ (по трем сторонам), откуда следует, что $\angle BAA_1 = \angle CAA_1$, то есть AA_1 — биссектриса угла CAB. Аналогично доказывается, что BB_1 и CC_1 — биссектрисы треугольника ABC. Следовательно, эти три отрезка пересекаются в одной точке (*центре окружности, вписанной в треугольник* ABC).

Комментарий. Отметим, что приведенное рассуждение показывает, что прямая AA_1 является осью симметрии угла BAC.

2.3. Каждый слиток можно разделить в отношении 1 : 2 : 3 и сплавить вместе меньшие части кусков, средние и большие.

Суммарная масса кусков — 6 кг. Так как масса первого сплава составляет $\frac{1}{6}$ часть от этой суммы, масса второго сплава — $\frac{1}{3}$ часть, а масса третьего сплава — $\frac{1}{2}$, то новые слитки будут иметь требуемые массы. Объяснить, почему содержание золота в новых слитках станет одинаковым, можно по-разному.

Способ I (арифметический). Массы второго и третьего сплавов больше, чем масса первого сплава, в 2 и в 3 раза соответственно. При этом во второй сплав из каждого первоначального слитка взято в 2 раза больше золота, чем в первый сплав, а в третий сплав из каждого слитка взято в 3 раза больше золота, чем в первый.

Способ II (алгебраический). Пусть доля золота в первом слитке равна x, во втором — y, а в третьем — z. Тогда в сплаве, состоящем из меньших кусков, содержание золота равно:

$$\frac{\frac{1}{6}\cdot 1\cdot x+\frac{1}{6}\cdot 2\cdot y+\frac{1}{6}\cdot 3\cdot z}{1}=\frac{x+2y+3z}{6}.$$

В сплаве, состоящем из средних кусков, содержание золота равно:

$$\frac{\frac{1}{3}\cdot 1\cdot x+\frac{1}{3}\cdot 2\cdot y+\frac{1}{3}\cdot 3\cdot z}{1}=\frac{x+2y+3z}{6}.$$

В сплаве, состоящем из больших кусков, содержание золота равно:

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot y+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot z}{1}=\frac{x+2y+3z}{6}.$$

Комментарий. Можно доказать, что способ, приведенный в ответе, — единственный (от школьников этого не требуется).

3.1. $2^{202} + 1 = (2^{101} + 2^{51} + 1)(2^{101} - 2^{51} + 1)$.

Пусть $2^{50} = x$, тогда исходное выражение примет вид $4x^4 + 1$. Разложим на множители это выражение:

$$4x^4 + 1 = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^2 = (2x^2 + 1)^2 - (2x)^2 = (2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1).$$

Таким образом,

$$2^{202} + 1 = (2^{101} + 2^{51} + 1)(2^{101} - 2^{51} + 1),$$

что и требовалось, поскольку

$$2^{101} + 2^{51} + 1 > 2^{101} - 2^{51} + 1 > 2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} > 1000^2 = 1\,000\,000.$$

3.2. Два угла по 36° и угол 108°.

Способ I. Пусть $\angle ABC = 2\alpha$. Проведем отрезок DE параллельно BL (точка E — на стороне AC, рис. 3).

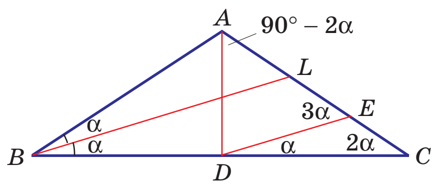


Рис. 3

Тогда угол AED — внешний для треугольника EDC, значит, $\angle AED = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$. По теореме Фалеса, точка E — середина отрезка CL, то есть DE — средняя линия треугольника LBC. Следовательно,

$$DE=\frac{1}{2}BL=AD,$$

то есть треугольник ADE — равнобедренный. Тогда $\angle AED = \angle EAD = 90° - 2\alpha$. Таким образом, $90° - 2\alpha = 3\alpha \Leftrightarrow \alpha = 18°$. Следовательно,

$$\angle ABC = \angle ACB = 2\alpha = 36°,\ \angle BAC = 108°.$$

Способ II. Отметим на луче AD такую точку E, что $ED = AD$, тогда $AE = BL$ (рис. 4).

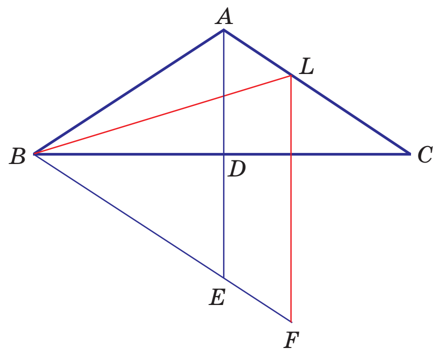


Рис. 4

Так как высота AD является также и медианой треугольника ABC, то получившийся четырехугольник $ABEC$ — ромб. Через точку L проведем прямую LF, параллельную AE (F — точка ее пересечения с прямой BF). По построению $ALFE$ — параллелограмм, следовательно, $LF = AE = BL$, то есть треугольник BLF — равнобедренный. Пусть $\angle LBC = \alpha$, тогда

$$\angle ACB = \angle ABC = 2\alpha,$$
$$\angle DAC = \angle LFB = \angle LBF = 3\alpha.$$

Из прямоугольного треугольника DAC получим, что $2\alpha + 3\alpha = 90°$, то есть $\alpha = 18°$. Следовательно, $\angle ABC = \angle ACB = 36°$, $\angle BAC = 108°$.

3.3. Если в учебнике не меньше чем 7 листов, то больший ущерб нанесет Гриша, иначе — ущерба не будет.

На каждом листе одна страница имеет нечетный номер, а другая — четный, причем нечетное число меньше четного. Запишем нечетное число в виде $2n - 1$, где n — натуральное число, тогда четное будет равно $2n$. Сумма номеров страниц на одном листе равна $4n - 1$. Докажем, что число такого вида (имеющее остаток 3 при делении на 4) не может быть квадратом целого числа. Действительно, если число k — четное, то есть $k = 2m$ (m — целое), то $k^2 = 4m^2$, значит, его квадрат делится на 4 без остатка. Если же число k нечетно, то есть $k = 2m - 1$, то

$$k^2 = (2m - 1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 4(m^2 - m) + 1,$$

значит, его квадрат имеет остаток 1 при делении на 4. Таким образом, Миша в любом случае не вырвет из учебника ни одного листа. При этом, $13 + 14 = 27 = 3^3$, то есть если в учебнике хотя бы 7 листов, то Гриша наверняка сможет вырвать седьмой лист с номерами страниц 13 и 14.

Комментарий. Отметим, что кубы нечетных чисел имеют тот же остаток при делении на 4, что и сами числа, так как

$$(4m \pm 1)^3 = 64m^3 \pm 48m^2 + 12m \pm 1 =$$
$$= 4(16m^3 \pm 12m^2 + 3m) \pm 1.$$

Поэтому следующий лист учебника, который сможет вырвать Гриша, — восемьдесят шестой, поскольку $7^3 = 343 = 171 + 172$.

4.1. $x = z$.

Способ I. 1. Преобразуем первое равенство:

$$x + yzt = y + ztx \Leftrightarrow x - y = zt(x - y).$$

Так как $x \neq y$, то $zt = 1$.

2. Аналогично, из последнего равенства:

$$z + txy = t + xyz \Leftrightarrow z - t = xy(z - t).$$

Так как $z \neq t$, то $xy = 1$.

3. Поскольку $x > y$ и $xy = 1$, то $0 < y < 1$ или $y < -1$. Аналогично, $z > t$ и $zt = 1$, значит, $0 < t < 1$ или $t < -1$. Следовательно, $yt \neq 1$.

4. Преобразуем еще одно данное равенство:

$$x + yzt = z + txy \Leftrightarrow (x - z) - yt(x - z) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - z)(1 - yt) = 0.$$

Так как $yt \neq 1$, то $x = z$.

Способ II (*для тех, кто уже знаком с квадратными уравнениями*). Заметим, что $zt \neq 0$, иначе из первого равенства следует, что $x = y$. Аналогично, $xy \neq 0$, иначе из последнего равенства следует, что $z = t$. Таким образом,

$$x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0,\ t \neq 0.$$

Пусть

$$x + yzt = y + ztx = z + txy = t + xyz = A,$$
$$xyzt = B,$$

тогда

$$\begin{cases} x + \dfrac{B}{x} = A, \\ y + \dfrac{B}{y} = A, \\ z + \dfrac{B}{z} = A, \\ t + \dfrac{B}{t} = A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - Ax + B = 0, \\ y^2 - Ay + B = 0, \\ z^2 - Az + B = 0, \\ t^2 - At + B = 0. \end{cases}$$

Следовательно, числа x, y, z и t являются корнями одного и того же квадратного уравнения $p^2 - Ap + B = 0$. Так как квадратное уравнение имеет не более двух корней, а по условию $x > y$ и $z > t$, то $x = z$ и $y = t$.

4.2. Из условия задачи следует, что HM — медиана прямоугольного треугольника BCH, проведенная к гипотенузе, следовательно,

$$HM = \frac{1}{2}BC = BM.$$

Тогда треугольник BMH — равнобедренный, значит, $\angle MHB = \angle HBC$. Используя также, что $\angle HBC = \angle MAB$ (по условию), получим, что $\angle MHB = \angle MAB$. Таким образом, отрезок BM виден из точек A и H под одинаковыми углами, поэтому точки A, B, M и H лежат на одной окружности. Так как прямой угол AHB — вписанный, то AB – диаметр этой окружности, тогда вписанный угол AMB — также прямой. Следовательно, медиана AM треугольника ABC является также и его высотой, поэтому треугольник ABC — равнобедренный: $AB = AC$. Кроме того, равны прямоугольные треугольники AMC и BHC ($AM = BH$, угол C — общий). Следовательно, $AC = BC$. Таким образом, треугольник ABC — равносторонний, что и требовалось.

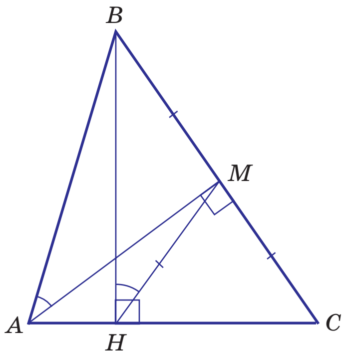


Рис. 5

4.3. Все натуральные числа, кроме 1, 2, 3, 4 и 6.

Рассмотрим сначала нечетные числа. Очевидно, что числа 1 и 3 указанным способом представить нельзя. Пусть N — нечетное и $N \geq 5$. Тогда $N = 2k + 1 = k + (k + 1)$, где k — натуральное и $k \geq 2$. Так как любые два последовательных натуральных числа взаимно просты, то все указанные N удовлетворяют условию. Рассмотрим четные числа. Непосредственной проверкой убеждаемся, что числа 2, 4 и 6 нельзя представить в указанном виде. Остальные четные числа можно разбить на две группы: числа, кратные 4, то есть $N = 4k$, и числа, не кратные 4, то есть $N = 4k + 2$ (k – натуральное и $k \geq 2$).

В первом случае $N = 4k = (2k + 1) + (2k - 1)$, причем НОД$(2k + 1; 2k - 1) =$ НОД$(2k - 1; 2) = 1$.

Во втором случае $N = 4k + 2 = (2k + 3) + (2k - 1)$, причем НОД$(2k + 3; 2k - 1) =$ НОД$(2k - 1; 4) = 1$.

Комментарий. Для нечетных чисел, начиная с 5, возможно также и другое представление, удовлетворяющее условию: если $k \geq 2$, то

$$N = 2k + 1 = 2 + (2k - 1).$$

Добрый день, уважаемая редакция газеты «Математика»!

Мы с ребятами из 6 «Б» класса, занимающимися в клубе «Эрудит», провели урок-игру для первоклассников, посвященную Л. Кэрроллу. Игру проводили Чеширский Кот, Шляпа, Гусеница, Пиковая Дама, Кролик и две Алисы — настоящая и из Зазеркалья. Спасибо Е. Гетьман и А. Калимовой, приславшим статью под названием «Вечер, посвященный Льюису Кэрроллу» (№18). Мы решили в течение года провести ряд игр «математика + литература». Я перечитала книгу «Алиса в стране чудес», открыв для себя Кэрролла-математика, прочитала его книгу «Логическая игра», познакомила детей с игрой «дублеты» и с письмами Л. Кэрролла к детям.

Члены клуба «Эрудит» с первоклассниками и их учителем Т.М. Горбатовой

Автор: Е.Н. Кальней, учитель математики средней школы № 5, г. Искитим Новосибирской обл.

С. БЕЛЯЕВ,
Москва

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Пьеса для *k*-мерного геометрического театра в 5 действиях с прологом и эпилогом

Весь мир — театр!
В нем женщины, мужчины — Все актеры.
Вильям Шекспир

Действующие лица:
Ортоцентр — точка пересечения высот треугольника;
Инцентр — центр вписанной окружности треугольника;
Эксцентр — центры вневписанных окружностей треугольника.

Пролог

В некотором царстве, в некотором государстве жил-был добрый волшебник. Звали его Игорь Федорович Шарыгин. В его удивительной книге — учебнике геометрии — был небольшой раздел о трех ролях одной замечательной точки. Речь шла об Ортоцентре. В геометрическом театре Игоря Федоровича, которым владели еще Адам Ар и Ева Клид, Ортоцентр был очень уважаемым актером. Он умел играть сразу три роли одновременно! Другие актеры — Инцентр и все три Эксцентра — ему даже немного завидовали. Ведь их-то роли были Ортоцентру по плечу — каждого он мог заменить и каждым он мог быть. Когда Игорь Федорович это обнаружил, — а он был не только очень добрым, но и чрезвычайно справедливым волшебником, — он решил придумать и для других замечательных точек такую пьесу, в которой они могли бы заменять одна другую, и никто не был бы обижен. А что из этого вышло, мы сейчас узнаем.

Действие 1. Когда $I = H$?

Прямая линия — дело рук человеческих.
Окружность — творение Бога.
Антонио Гауди

Все актеры геометрического театра были замечательными. Даже Медианы, водящие большую дружбу с мэтром Центроидом — древним, дряхлым стариком, появившимся в труппе по рекомендации самого Фалеса, — и те умели делить пополам и делиться в отношении 2 : 1. Завидное и редкостное свойство. А чего стоил строптивый нрав вечных спутниц Инцентра — Биссектрис?! Их тесная дружба с примадонной театра — несравненной Окружностью — была всем известна: почти в каждом представлении геометрического театра (представления зрители называли задачами, а самые важные постановки — теоремами) Биссектрисы не желали участвовали без ее помощи. Инцентр как-то раз назвал Окружность «вспомогательной», но все понимали, что правильнее было бы назвать ее «основной». Так было и сейчас: для написания новой роли для Инцентра пришлось позвать на помощь Окружность, чтобы хоть как-то обуздать своенравие Биссектрис.

Задача о шествии углов. Доказать, что ортоцентр является инцентром ортотреугольника.

Кратко: $H = I_H$.

Решение. Пусть AH_1, BH_2 и CH_3 — высоты треугольника ABC, треугольник $H_1H_2H_3$ — ортотреугольник (рис. 1,*а*). Так как треугольник AH_1B — прямоугольный, то $\angle H_1AB = 90° - \angle B$. Заметим, что четыре точки — A, H_2, H и H_3 — лежат на одной вспомогательной окружности (два прямых угла AH_2H и AH_3H опираются на ее диаметр). Следовательно, $\angle H_3H_2H = \angle HAH_3 = 90° - \angle B$.

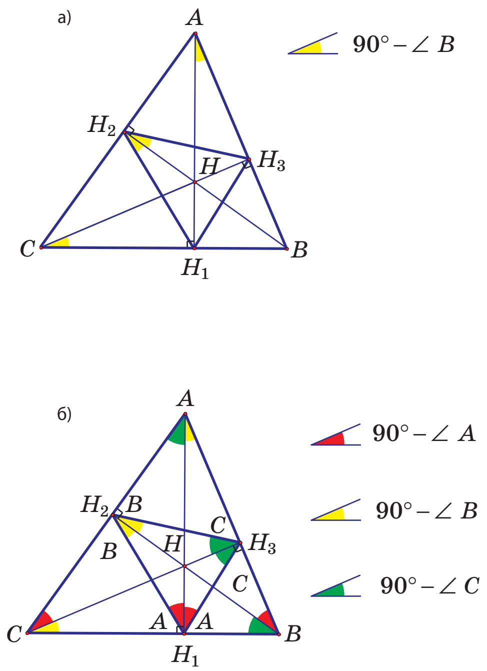


Рис. 1

Аналогично, треугольник CH_3B — прямоугольный, значит, $\angle H_3CB = 90° - \angle B$. Заметим, что четыре точки — C, H_2, H и H_1 — лежат на другой вспомогательной окружности (два прямых угла CH_2H и CH_1H опираются на ее диаметр). Следовательно, $\angle H_1H_2H = \angle HCH_1 = 90° - \angle B$.

Итак, высота BH_2 является биссектрисой ортотреугольника $H_1H_2H_3$. Аналогично показывается, что остальные высоты являются биссектрисами углов ортотреугольника (рис. 1,*б*), то есть ортоцентр треугольника ABC является инцентром ортотреугольника.

Кратко запишем это так: $H = I_H$.

«Но это же одна из ролей Ортоцентра», — заметит внимательный читатель. Действительно, как и всякая другая значительная роль, роль для Инцентра создавалась непросто. Игорю Федоровичу пришлось прибегнуть не только к методу вспомогательной окружности, но и к преобразованию своего друга, доброго волшебника Мар-Афрема, которого в миру звали... Ефремов, а он был рассеянным волшебником и часто путал имена. И вот однажды...

Задача о преобразовании Мар-Афрема. Доказать, что инцентр является ортоцентром экс-треугольника $I_aI_bI_c$ с вершинами в эксцентрах.

Кратко: $I = H_{\text{ext}}$.

Решение. Рассмотрим рисунок к предыдущей задаче и сотрем имена всех точек. Дальше, «по рассеянности», назовем бывшие точки H_1, H_2 и H_3 точками A, B и C. Как тогда мы должны назвать бывшие точки H, A, B и C? Из предыдущей задачи ясно, что бывшая точка H является инцентром нового треугольника ABC, то есть ее нужно назвать I.

Так как стороны бывшего треугольника ABC являются биссектрисами внешних углов ортотреугольника, то стороны старого треугольника являются биссектрисами внешних углов для нового треугольника ABC. Как известно, эти биссектрисы пересекаются в эксцентрах. Следовательно, при преобразовании Мар-Афрема мы имеем такую картину: треугольник ABC, для которого построен экстреугольник, — треугольник с вершинами в центрах вневписанных окружностей. Естественно обозначить вершины экстреугольника I_a, I_b и I_c (рис. 2).

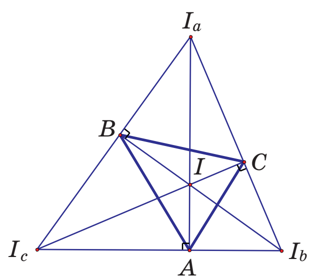


Рис. 2

Но тогда очевидно, что инцентр I треугольника ABC является ортоцентром треугольника $I_aI_bI_c$.

Кратко запишем так: $I = H_{\text{ext}}$.

Действие 2. Когда $H = I_a$

Однако «по рассеянности» можно расставить имена точек на том же рисунке еще и другим способом (рис. 3). Тогда для тупоугольного треугольника ABC «самая верхняя» точка на этом чертеже будет ортоцентром. Однако для ортотреугольника $H_1H_2H_3$ эта точка будет уже центром вневписанной окружности. Итак, для тупоугольного треугольника ортоцентр является эксцентром.

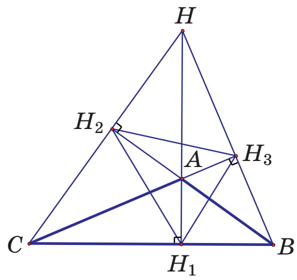


Рис. 3

Кратко полученный факт запишем так:

$H = (I_a)_H$, $\angle A$ — тупой.

Это и есть третья роль точки H.

Действие 3. Когда $H = O$

Когда-то давным-давно, когда Королевство ГеометриятреугольникаиокружностиI только создавалось, его великие творцы Адам Ар и Ева Клид начертили самый первый треугольник и провели самую первую прямую через вершину треугольника параллельно противоположной его стороне. Именно эта прямая гораздо позднее будет названа в честь Евы Клид прямой Евклида. И многие поколения жителей передавали из уст в уста притчу, что именно это построение прямой Евклида дало еще одно имя королевству: Евклидовагеометриятреугольникаиокружности, и позволило создать Еве первую (по порядку и значимости) пьесу для геометрического театра, которая называлась: «Теорема о сумме углов треугольника», и стала одной из первых в капитальном труде Евы «*LMN*».

С появлением мудреца Фалеса настала эра Подобия. С рождением Пифа А'Гора началась Метрическая эпоха. Репертуар геометрического театра обогащался новыми постановками (зрители упорно называли их задачами или теоремами), один за другим появлялись великие артисты: Центроид, протеже Фалеса; Ортоцентр и Инцентр. Королевство переживало расцвет, и на входе в него даже красовалась надпись: «Не знающие Геометрию — не допускаются».

Но все приходит в упадок. На много веков было забыто и искусство замечательных актеров. Должен был родиться кто-то, кто дал бы театру вторую жизнь. И такой человек появился — им стал могущественный добрый волшебник Эй Лер. По количеству красивых пьес Эй Леру не было равных. Именно он научил актеров играть сразу несколько ролей (и впервые провел три прямые Евклида одновременно).

Задача 1. Ортоцентр треугольника ABC является центром описанной окружности его треугольника Евклида.

Кратко можно записать: $H = O_E$.

Решение. Проведем через вершины треугольника три прямые, параллельные противолежащим сторонам. Пусть эти три прямые Евклида пересекаются в точках A_0, B_0 и C_0 (рис. 4).

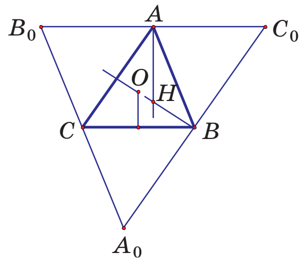


Рис. 4

Тогда стороны треугольника ABC — средние линии треугольника $A_0B_0C_0$, то есть треугольники ABC и $A_0B_0C_0$ подобны с коэффициентом подобия 2.

Какой точке треугольника $A_0B_0C_0$ соответствует точка O — центр описанной около треугольника ABC окружности? Точка O является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC. Следовательно, ей соответствует точка пересечения серединных перпендикуляров треугольника $A_0B_0C_0$. Но эти перпендикуляры к сторонам A_0B_0, B_0C_0 и C_0A_0 перпендикулярны и сторонам треугольника ABC. Следовательно, искомая точка — ортоцентр H треугольника ABC. Именно эта точка служит центром окружности, описанной около треугольника Евклида $A_0B_0C_0$.

Кратко запишем это так: $H = O_E$.

Применение преобразования Мар-Афрема позволяет поменять ролями Ортоцентр и Центр описанной окружности.

Задача 2. Центр описанной окружности треугольника ABC является ортоцентром его срединного треугольника.

Кратко можно записать: $O = H_M$.

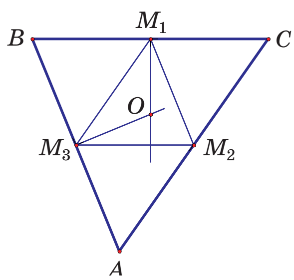


Рис. 5

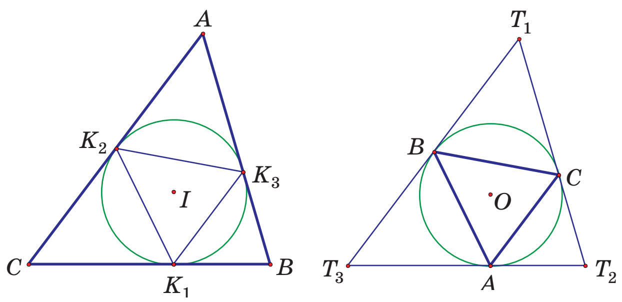
Решение. Так как серединные перпендикуляры к сторонам треугольника ABC перпендикулярны и его средним линиям, то эти перпендикуляры являются высотами срединного треугольника $M_1M_2M_3$ с вершинами в серединах сторон треугольника ABC.

Действие 4. Когда $O = I$

Осталось обучить ролям друг друга центры вписанной и описанной окружностей.

Задача 3. Инцентр треугольника ABC является центром окружности, описанной около K-треугольника. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, является инцентром его тангенциального треугольника.

Кратко можно записать: $I = O_K$, $O = I_T$.



Решение. Эти факты сразу следуют из определений.

Определение 1. K-треугольник — это треугольник, вершины которого являются точками касания со сторонами треугольника ABC вписанной в него окружности.

Определение 2. Тангенциальный треугольник — это треугольник, образованный касательными к вписанной окружности треугольника, проведенными через вершины этого треугольника.

Следует отметить, что K-треугольник и тангенциальный треугольник связаны преобразованием Мар-Афрема.

Действие 5. Тайна трилистника, или Теорема Мансиона

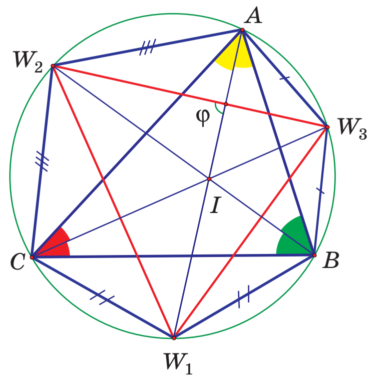
Сцена 1. Задача о шестиугольнике

У Игоря Федоровича в его учебнике «Геометрия, 7–9» есть задача (8.1, № 6(п)).

Задача 4. Шестиугольник $AW_3BW_1CW_2$ вписан в окружность. Известно, что

$$AW_3 = W_3B,\ BW_1 = W_1C,\ CW_2 = W_2A.$$

Докажите, что диагонали AW_1, BW_2 и CW_3 этого шестиугольника пересекаются в одной точке. Оказывается, что точка их пересечения для каждого из треугольников ABC и $W_1W_2W_3$ является известной вам замечательной точкой. Какой?



Решение. Так как равны хорды CW_1 и BW_1, то равны и дуги CW_1 и BW_1. Следовательно, $\angle BAW_1 = \angle CAW_1$, то есть диагональ AW_1 шестиугольника является биссектрисой угла BAC. Значит, три диагонали — AW_1, BW_2 и CW_3 — являются биссектрисами треугольника ABC и, естественно, пересекаются в одной точке — инцентре этого треугольника.

Интересно выяснить, какой замечательной точкой является этот инцентр для треугольника $W_1W_2W_3$. Для этого посчитаем угол φ между AW_1 и W_2W_3. Это угол с вершиной внутри окружности, и поэтому он равен полусумме дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями:

$$\varphi = \frac{\cup CW_1 + \cup CW_2 + \cup AW_3}{2} = \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{2} = 90^\circ.$$

Таким образом, $AW_1 \perp W_2W_3$, то есть биссектрисы треугольника ABC являются высотами треугольника $W_1W_2W_3$ (треугольника W). Кратко полученный результат можно сформулировать так:

$$I = H_W.$$

Понятно, что наличие еще одной роли у Инцентра — это неспроста. Нарисуем рисунки для утверждений $I = H_W = H_{ext}$ на одном чертеже и рассмотрим отдельно четырехугольники CW_2IW_1 и $BICI_a$.

Сцена 2. Самая эмоциональная теорема геометрии

Теорема трилистника:

$$CW_1 = IW_1 = BW_1.$$

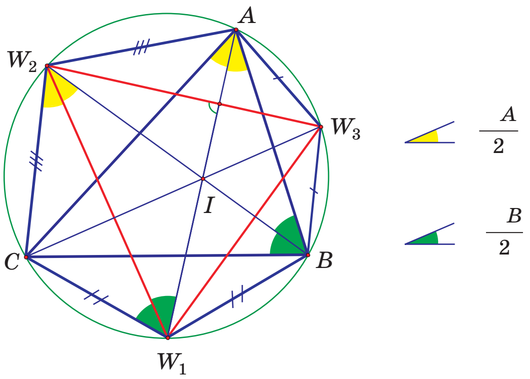
Доказательство. Так как

$$\angle CW_2W_1 = \angle CAW_1 = \frac{\angle A}{2} = \angle BAW_1 = \angle BW_2W_1$$

и

$$\angle AW_1W_2 = \angle ABW_2 = \frac{\angle B}{2} = \angle CBW_2 = \angle CW_1W_2,$$

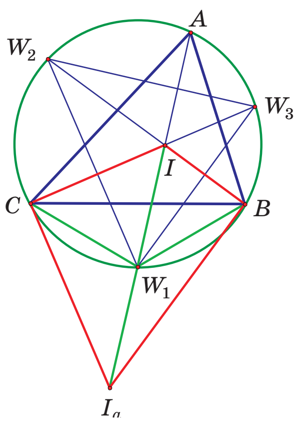
то по общей стороне W_1W_2 и двум прилежащим углам треугольники CW_1W_2 и IW_1W_2 равны. Следовательно, $CW_1 = IW_1$. Аналогично, $BW_1 = IW_1$. И все!



Сцена 3. Теорема Мансиона

Рассмотрим теперь четырехугольник $BICI_a$. Так как у него есть два прямых угла ($\angle ICI_a$ и $\angle IBI_a$), то он является вписанным, причем отрезок II_a является диаметром описанной окружности. Покажем, что центр этой окружности совпадает с точкой W_1, это и будет означать, что отрезок II_a делится точкой W_1 пополам.

Теорема Мансиона. Отрезок II_a делится точкой W_1 пополам.



Доказательство. Треугольник IW_1B — равнобедренный (теорема трилистника), следовательно,

$$\angle W_1IB = \angle W_1BI.$$

Значит,

$$\angle W_1BI_a = \angle IBI_a - \angle W_1BI = 90° - \angle W_1BI = = 90° - \angle W_1IB.$$

Но

$$\angle II_aB = 90° - \angle W_1IB$$

(свойство углов прямоугольного треугольника).

Следовательно, углы при основании BI_a треугольника W_1BI_a равны, то есть он является равнобедренным. Итак, $W_1I_a = W_1B$. Но по теореме трилистника $W_1B = W_1I$, значит, $W_1I = W_1I_a$, то есть точка W_1 делит отрезок II_a пополам.

Сцена 4. Ее Величество аналогия

Теорема Мансиона позволяет утверждать, что экстреугольник и треугольник W подобны с коэффициентом подобия 2. Хорошо помнить, что ортотреугольник и треугольник N, вершины которого симметричны ортоцентру относительно сторон, также подобны с коэффициентом 2. Неожиданная и приятная аналогия!

Однако аналогия есть не только в коэффициенте подобия рассматриваемых треугольников, но и в способе доказательства этих фактов.

Лемма. Точки, симметричные ортоцентру относительно сторон треугольника, лежат на описанной окружности.

Доказательство. Действительно,

$$\angle H_1AB = \angle H_3CB = 90° - \angle B.$$

Но углы H_1AB и BCN_1 опираются на одну дугу, поэтому

$$\angle BCN_1 = \angle H_1AB = 90° - \angle B = \angle H_3CB.$$

Аналогично, $\angle H_2BC = \angle CBN_1$; значит, треугольники BCH и BCN_1 равны по стороне и прилежащим углам. Отрезки HH_1 и H_1N_1 являются равными высотами в равных треугольниках. Равенство $HH_1 = H_1N_1$ и означает утверждение леммы.

Задача 5. Доказать одинаковыми способами, что

$$\Delta\, I_aI_bI_c \overset{2}{\sim} \Delta\, W_1W_2W_3 \;(\text{ext-}\Delta \overset{2}{\sim} \Delta\, W),$$

$$\Delta\, N_1N_2N_3 \overset{2}{\sim} \Delta\, H_1H_2H_3 \;(\Delta\text{-}N^2 \overset{2}{\sim} \text{орто-}\Delta).$$

Решение. 1. ext-$\Delta \overset{2}{\sim} \Delta\, W$.

По теореме Мансиона имеем:

$$IW_1 = W_1I_a,\; IW_2 = W_2I_b,\; IW_3 = W_3I_c.$$

Значит, стороны треугольника W являются средними линиями треугольников II_aI_b, II_bI_c и II_cI_a.

2. $\Delta\text{-}N^2 \overset{2}{\sim}$ орто-Δ. По доказанной лемме имеем:

$$HH_1 = H_1N_1,\; HH_2 = H_2N_2,\; HH_3 = H_3N_3.$$

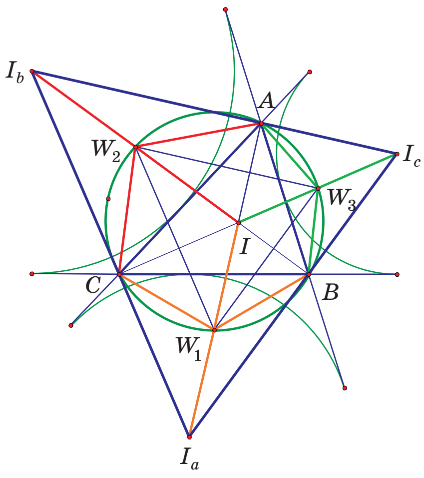
Значит, стороны ортотреугольника являются средними линиями треугольников HN_1N_2, HN_2N_3 и HN_3N_1.

Сцена 5. Тайна трилистника и четырехлистник

Какую же тайну скрывал трилистник? Оказывается, у трилистника есть стебелек:

$$CW_1 = IW_1 = BW_1 = I_aW_1.$$

Можно подумать, что теорема трилистника — это на самом деле теорема четырехлистника. Однако это не так.



Традиционно теоремой четырехлистника называется следующее утверждение.

Теорема четырехлистника. Доказать, что

$$DC = DB = DI_b = DI_c,$$

где D — точка, диаметрально противоположная точке W_1.

Решение. Прежде всего отметим, что так как угол IAI_b прямой, то он опирается на диаметр описанной окружности, и этот диаметр есть DW_1. Следовательно, точки A и D лежат на прямой I_bI_c.

По теореме Мансиона $I_bW_2 = W_2I$, $I_cW_3 = W_3I$, то есть отрезок W_2W_3 является средней линией треугольника II_bI_c, значит, W_2W_3 параллелен I_bI_c (что еще раз доказывает, что треугольники $I_aI_bI_c$ и $W_1W_2W_3$ подобны с коэффициентом подобия 2). Из этой параллельности получаем:

$$\angle DI_aB = \angle W_3W_2B = \frac{\angle C}{2}.$$

Так как $\angle ADB = \angle ACB = \angle C$, то по теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle DBI_b = \angle ADB - \angle DI_bB = \angle C - \frac{\angle C}{2} = \frac{\angle C}{2},$$

то есть треугольник DBI_b — равнобедренный, то есть $DB = DI_b$. Равенство $DB = DC$ очевидно, а равенство $DC = DI_b$ доказывается аналогично. Итак, $DC = DB = DI_b = DI_c$.

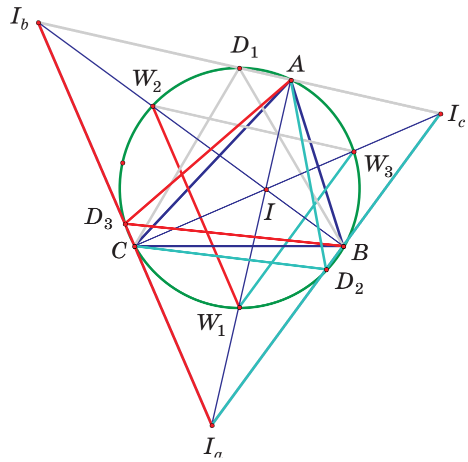
Сцена 6. Последняя роль

Три четырехлистника при полном параде:

Так как точки D_1, D_2, D_3 являются серединами сторон экстреугольника, то описанная около треугольника ABC окружность является окружностью девяти точек для экстреугольника (как известно, срединный треугольник и ортотреугольник имеют общую описанную окружность — окружность девяти точек). А значит, у точки O — центра этой окружности — есть еще одна роль:

$$O = E_{\text{ext}}:$$

центр описанной окружности является точкой Эйлера (центром окружности девяти точек) экстреугольника. Тот факт, что исходный треугольник ABC является ортотреугольником для своего экстреугольника, пожалуй, в напоминании не нуждается.



Эпилог

В далеком-далеком Королевстве Сангаку, что в Японии, достижения добрых волшебников почитали так сильно, что рисунки к их пьесам вывешивались на досках на всеобщее обозрение. Понадеемся, что список ролей актеров k-мерного театра не заденет взыскательного вкуса волшебников Сангаку, и вывесили на их строгую оценку еще одну доску:

	I	H	O
I	–	$H_W = H_{\text{ext}}$	O_K
H	I_H	–	O_E
O	I_T	H_M	–

Интересно, может ли центроид (точка пересечения медиан) играть эти роли?

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. *Ефремов*. Новая геометрия треугольника. — Одесса: Типография Бланкоиздательства М. Шопергауэра, 1902.

2. С.И. *Зетель*. Новая геометрия треугольника. — М.: Учпедгиз, 1963.

3. *Шарыгин И.Ф.* Геометрия, 7–9 класс. Учебник для общеобразовательных учебных заведений. — 5-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2001.

4. *Кушнир И.А.* Триумф школьной геометрии. Учебное пособие для 7–11 классов. — К.: Наш час, 2005.

КНИГА С ИСТОРИЕЙ

Голубев В.И., Ерганжиева Л.Н., Мосевич К.К. Построение треугольника. — М.: Бином, Лаборатория знаний, 2008. — 247 с. — (Математическое мышление).

В книге читателю впервые предлагается полное и подробное описание построения треугольника по его основным элементам. История ее создания такова.

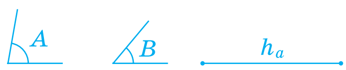
В 1937 году в двух номерах журнала «Математика в школе» была опубликована удивительная по содержанию и полноте изложения статья В.Б. Фурсенко под названием «Лексикографическое изложение конструктивных задач геометрии треугольника». Автор этой статьи (на основе изучения многочисленной литературы на русском, французском и английском языках) предлагает читателю описание построения остроугольного треугольника по трем его элементам, предъявляя во всех случаях условия, при которых решение поставленной задачи возможно. Более 70% задач были представлены на суд читателя впервые.

К сожалению, информация об указанной статье и ее содержание, как показала практика многочисленных встреч авторов со школьниками и учителями, мало кому известны. Именно поэтому, учитывая общепризнанную роль задач на построение в овладении школьным курсом геометрии, у авторов и возникло желание познакомить широкую читательскую аудиторию со всеми основными задачами на построение треугольника.

В пособии подробно описаны решения 178 задач на построение треугольника по материалам указанной выше статьи, а также кратко изложены идеи решения 67 задач, встречающихся в различных современных сборниках задач и учебниках и не попадающих под классификацию В.Б. Фурсенко.

77. Построить треугольник по двум углам и высоте, проведенной из вершины одного из этих углов.

Дано:



Анализ. Пусть $\triangle ABC$ построен. Заметим, что вершина A находится на стороне угла B на расстоянии h_a от другой стороны этого угла. Положение вершины C треугольника найдем на пересечении сторон углов A и B.

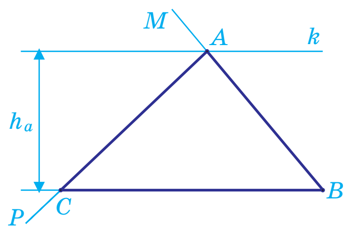
Построение возможно, если $\angle A + \angle B < 180°$.

Построение.

П 9 1. Угол $MBN = \angle B$.

П 5 2. Прямая $k \parallel BN$ на расстоянии h_a от BN. A — точка пересечения прямой k и BM.

П 9 3. Угол $BAP = \angle A$. C — точка пересечения лучей AP и BN. $\triangle ABC$ — искомый.



ТРЕУГОЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, …

1	2	**3**	4	5	**6**	7	8	9	**10**	11	12	13	14	**15**	16	17	18	19	20
2	4	**6**	8	**10**	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
3	**6**	9	12	**15**	18	**21**	24	27	30	33	36	39	42	**45**	48	**51**	54	57	60
4	8	12	16	20	24	**28**	32	**36**	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
5	**10**	**15**	20	25	30	35	40	**45**	50	**55**	60	65	70	75	80	85	90	95	100
6	12	18	24	30	**36**	42	48	54	60	**66**	72	**78**	84	90	96	102	108	114	**120**
7	14	**21**	**28**	35	42	49	56	63	70	77	84	**91**	98	**105**	112	119	126	133	140
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	**120**	128	**136**	144	152	160
9	18	27	**36**	**45**	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	**153**	162	**171**	180
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	**120**	130	140	150	160	170	180	**190**	200
11	22	33	44	**55**	**66**	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220
12	24	36	48	60	72	84	96	108	**120**	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240
13	26	39	52	65	**78**	**91**	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260
14	28	52	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280
15	30	**45**	60	75	90	**105**	**120**	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320
17	34	**51**	68	85	102	119	**136**	**153**	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340
18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	303	321	339	360
19	38	57	76	95	114	133	152	**171**	**190**	209	228	247	266	285	304	323	339	358	380
20	40	60	80	100	**120**	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400

Впервые таблица Пифагора примерно в том же виде, в каком ее печатают на обложках школьных тетрадей, но в ионийской нумерации, появилась в сочинении неопифагорейца Никомаха Геразского «Введение в арифметику» (I–II вв. н.э.). И по его словам, таблица восходит «к самому Пифагору». Еще более древние таблицы умножения обнаружены на месопотамских глиняных табличках — их «возраст» около 5 тысяч лет.

Таблицу Пифагора можно расширять вправо и вниз до бесконечности, соблюдая единственное условие: каждое число таблицы есть произведение номера строки и номера столбца, в которых оно стоит. Эта таблица скрывает в себе много замечательных математических закономерностей, поиск которых способен превратиться в увлекательное занятие, сулящее немало сюрпризов. К поиску можно привлечь компьютер. Каждое число таблицы изобразим точкой (или клеткой) координатной плоскости монитора и в соответствии со свойствами чисел окрасим точки каким-либо цветом. На рисунке в квадрате 20 × 20 красным цветом выделены треугольные числа, которые, как известно, задаются формулой $\frac{1}{2}n(n+1).$

Можно решить задачу о нахождении суммы всех чисел расширенной таблицы Пифагора, заключенных в квадрат со стороной n. Оказывается, она равна $\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$, а это — квадрат n-го треугольного числа. Покажем это.

Сумма чисел первой строки равна 1 + 2 + 3 + ... + n = $\frac{1}{2}n(n+1)$, то есть n-му треугольному числу. Сумма чисел второй строки в 2 раза больше, чем сумма чисел первой строки, третьей строки — в 3 раза больше и так далее. Поэтому сумма всех чисел таблицы Пифагора будет равна

$$1\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+\ldots+n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(1+2+3+\ldots+n)=\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2.$$

Вот так красиво можно решать скучную, на первый взгляд, задачу.

Н. Авилов