МАТЕМАТИКА

основана в 1992 г.

МЕТОДИЧЕСКАЯ ГАЗЕТА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

№1, 1–15 январь 2011

mat.1september.ru

№ 1

Числа Фибоначчи

издательский дом

Первое сентября

индексы подписки | Почта россии - 79083 (инд.); - 79584 (орг.) | Роспечать - 32031 (инд.); - 32598 (орг.)

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЯ»
Главный редактор: Артем Соловейчик (генеральный директор)
Коммерческая деятельность: Константин Шмарковский (финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов: Сергей Островский (исполнительный директор)
Реклама и продвижение: Марк Сартан
Мультимедиа, конференции и техническое обеспечение: Павел Кузнецов
Производство: Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение: Андрей Ушаков
Дизайн: Иван Лукьянов, Андрей Балдин
Педагогический университет: Валерия Арсланьян (ректор)

ГАЗЕТЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА:
Первое сентября – Е. Бирюкова,
Английский язык – А. Громушкина,
Библиотека в школе – О. Громова,
Биология – Н. Иванова,
География – О. Коротова,
Дошкольное образование – М. Аромштам,
Здоровье детей – Н. Сёмина,
Информатика – С. Островский,
Искусство – М. Сартан,
История – А. Савельев,
Классное руководство и воспитание школьников – О. Леонтьева,
Литература – С. Волков,
Математика – Л. Рослова,
Начальная школа – М. Соловейчик,
Немецкий язык – М. Бузоева,
Русский язык – Л. Гончар,
Спорт в школе – О. Леонтьева,
Управление школой – Я. Сартан,
Физика – Н. Козлова,
Французский язык – Г. Чесновицкая,
Химия – О. Блохина,
Школьный психолог – И. Вачков

УЧРЕДИТЕЛЬ: ООО «ЧИСТЫЕ ПРУДЫ»
Зарегистрировано ПИ № 77-7241 от 12.04.01 в Министерстве РФ по делам печати
Подписано в печать: по графику 2.12.2010, фактически 2.12.2010 Заказ №
Отпечатано в ОАО «Чеховский полиграфический комбинат»
ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Телефон/ факс: (499) 249-3138
Отдел рекламы: (499) 249-9870
Сайт: 1september.ru

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: (499) 249-4758
E-mail: podpiska@1september.ru

В НОМЕРЕ:

МАТЕМАТИКА
Методическая газета для учителей математики
Основана в 1992 г.
Выходит два раза в месяц

Газета распространяется по подписке
Цена свободная Тираж 10 000 экз.
Тел. редакции: (499) 249-3460
E-mail: mat@1september.ru
Сайт: mat.1september.ru

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. Рослова
Отв. секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, И. Бокова, О. Макарова
Дизайн макета и обложки: И. Лукьянов
Корректор: Л. Громова
Верстка: Л. Кукушкина

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ:
Роспечать: инд.–**32030**; орг.–**32594**
Почта России: инд.–**79073**; орг.–**79583**

ВСТРЕЧАЕМ ГОД КРОЛИКА

Л. РОСЛОВА

Кролики — это не только ценный мех, но и… числа Фибоначчи.

Ох уж эти пресловутые кролики — классический пример того, что математика пронизывает все наше пространство и все стороны жизни, соединяя в единое целое. В истории было не раз, когда из отдельного эпизода, сущей безделицы, рождались новые разделы математики. Когда б вы знали, из какого сора… Из этого же ряда, например, задача Эйлера о кенигсбергских мостах, которая легла в основу нового раздела математики — топологии.

Увидеть закономерности в многообразии явлений природы и социальной жизни и описать на специфическом, формальном языке — это один из путей развития математики. Но разглядеть что-то новое в том, что привычно, что видишь ежедневно, взглянуть свежим взглядом под силу личности неординарной.

Лауреат Филдсовской премии 2010 года
Станислав Смирнов

Лишний раз убедилась в этом, слушая на съезде учителей математики, который прошел в конце осени, яркое выступление лауреата Филдсовской премии этого года Станислава Смирнова. Если бы надо было назвать самое яркое впечатление месяца, да что месяца, наверное, и года, я бы, не задумываясь, назвала впечатление от его выступления. Восторг — вот основное чувство. Он рассказывал о своих «кроликах» ярко, эмоционально, с блеском, но при этом понятно для совершенно неподготовленного уха. Как жаль, что нет (или есть?) записи этого выступления, что его не смогли услышать все учителя и все ученики. Чтобы понять, что математика современна, интересна, загадочна, что она пронизывает наш мир, надо лишь научиться видеть эти невидимые нити и вплетать их в понятную нам языковую ткань.

Некоторые задаются вопросом: российский Смирнов математик или швейцарский. А Эйлер: российский или швейцарский? Разве это принципиально. Есть личности планетарного масштаба, их трудно удержать в рамках государственных границ, да и не нужно, ведь их деятельность — на пользу всей современной цивилизации. А что остается простым гражданам? Учителям? Чувство гордости за то, что в России еще не разучились учить математике, за нашу систему математического образования.

Бедные кролики, они так никогда и не узнают, к чему привело их бездумное размножение, каким высотам человеческой мысли они послужили отправной точкой…

ПРОЕКТ

РЕЗОЛЮЦИЯ ВСЕРОССИЙСКОГО СЪЕЗДА УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова,
28–30 октября 2010 г.

Всероссийский съезд учителей математики созван по инициативе ректора Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова академика В.А. Садовничего и призван возродить традиции Первого и Второго всероссийских съездов преподавателей математики (1911–1912 гг. и 1912–1913 гг.) и Первой Всероссийской конференции «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков» (2000 г.).

На съезд прибыли 1218 участников из 75 субъектов Российской Федерации и из других государств: Белоруссии, Украины, Азербайджана, Армении, Казахстана, Узбекистана, Туркмении, Монголии, Финляндии, Швейцарии, Сирии, Израиля, США. В работе съезда приняли участие учителя школ, преподаватели вузов и ученые-математики, специалисты по педагогике и методике преподавания математики, руководители образовательных учреждений и представители органов управления образованием.

В адрес съезда поступили 365 тезисов, на заседаниях 5 секций съезда заслушано в общей сложности 189 докладов, работали 10 круглых столов. В дискуссиях были высказаны различные мнения по актуальным вопросам математического образования в России.

Все участники съезда объединены идеей консолидации учительского и преподавательского математического сообщества на благо возрождения и развития математического образования и математической науки в России XXI века.

1. Съезд подчеркивает, что **математическое образование** есть:

• **важнейший и необходимый компонент** развития личности, представляющий собой не только способ общения и взаимодействия с окружающими, но и основу подготовки к будущей профессии, интеллектуального и творческого развития, понимания законов мироздания;

• **стратегический ресурс** инновационного развития России, что многократно доказано отечественным и всемирным историческим опытом;

• **благо,** на которое имеет право каждый человек и которое Российское государство должно гарантировать каждому своему гражданину.

2. Съезд обеспокоен **существенным снижением уровня** математической подготовки выпускников средней школы, что ставит под удар способность России к воспроизводству высококвалифицированных кадров, ее технологическую и информационную модернизацию, наукоемкое и инновационное развитие.

3. Съезд подчеркивает, что прямое **влияние** на снижение качества математического образования оказывают:

• **сокращение** числа часов, отводимых на изучение математики, особенно в начальной школе;

• **совмещение** в ЕГЭ итоговой аттестации и вступительного испытания;

• непосредственное использование результатов ЕГЭ при оценке работы учителя, а также недостатки при введении новой системы **оплаты** его труда.

4. Съезд считает важным:

• **повысить государственный статус** учителя, включая улучшение условий его труда и повышение заработной платы, модернизацию системы оценки его труда и значительное упрощение системы отчетности, формирование отношения к профессии учителя как к государственной миссии;

• рассматривать **математическое образование** в средней школе как важнейшую общественную и государственную функцию, которую осуществляет и отдельно взятый учитель, и все педагогическое сообщество в целом, а ответственность за исполнение которой несут государственные органы образования;

• поддерживать и укреплять **систему высшего педагогического образования**, повышая качество подготовки в педагогических вузах, усиливая в них изучение школьного курса математики и соответствующую методическую подготовку.

5. Съезд считает необходимым создание постоянно действующей **Ассоциации преподавателей и учителей математики**, задачами которой должны стать:

• **консолидация** учителей и преподавателей математики, создание условий для их профессионального общения и обмена опытом;

• активное **участие в разработке и обсуждении** стратегических проблем математического образования;

• **общественный мониторинг** состояния математического образования в целом по стране и на местах.

С этой целью съезд поручает организационному комитету сформировать **инициативную группу** будущей Ассоциации преподавателей и учителей математики.

6. Съезд считает недопустимым сокращение **числа часов**, отводимых на изучение математики в школе, — это число, напротив, должно быть увеличено с учетом отечественных традиций и мировых тенденций математического образования.

7. В связи с введением **ЕГЭ по математике** съезд:

• выражает озабоченность тем, что перечень реально изучаемых в школах вопросов программы по математике **фактически сужается** только до вопросов, фигурирующих в заданиях ЕГЭ;

• предлагает **отделить** в ЕГЭ итоговую аттестацию от вступительных испытаний;

• просит Министерство образования и науки Российской Федерации принять решение об официальной **публикации вариантов ЕГЭ прошлых лет;**

• считает целесообразным применять **дифференцированный подход** при проведении ЕГЭ по математике для различных групп выпускников;

• считает нужным создание **специальных условий** (в том числе с использованием компьютера) для выполнения заданий ЕГЭ лицами с ограниченными возможностями.

8. Съезд считает необходимым, чтобы при подготовке и утверждении новых образовательных **стандартов**:

• была исключена неоправданная **поспешность;**

• были обеспечены широкая профессиональная **экспертиза**, общественное **обсуждение** всех вводимых стандартов и их апробация;

• был четко обозначен и конкретизирован в виде задач **минимальный объем** необходимых знаний и умений учащихся, учитывающий их реальные возможности.

Съезд отмечает, что введенный в действие образовательный стандарт начального образования нуждается в существенной **доработке**.

9. Съезд предлагает:

• провести профессиональное обсуждение **содержания школьного математического образования** на общенациональном уровне с участием Ассоциации преподавателей и учителей математики;

• сохранить изучение **алгебры, геометрии и информатики** как отдельных предметов с отдельными оценками в аттестате;

• сохранить обязательный экзамен по математике в 9-х и 11-х классах, а также восстановить устный экзамен по геометрии;

• законодательно закрепить сохранение возможности **углубленного изучения математики** в 8–11-х классах, включая его повышенное финансирование.

10. Съезд считает необходимым:

• развитие сложившейся системы работы с **одаренными детьми** в области математики — движения энтузиастов: ученых, преподавателей вузов, учителей школ, руководителей кружков;

• сохранение **духа математических олимпиад** как праздников творчества и науки;

• создание системы государственной **поддержки** работы с одаренными детьми на федеральном уровне;

• обеспечение внимательного подхода к детям, обладающим **ограниченными возможностями** здоровья.

11. При введении **новых учебников** по математике съезд считает необходимым:

• проведение их компетентной общественной **экспертизы;**

• проведение продолжительной и массовой их **апробации**, предшествующей замене на них грифа «Допущен» грифом «Рекомендован».

Съезд отмечает большую работу по качественной экспертизе учебников математики, проделанную комиссией Российской академии наук.

12. Съезд:

• подтверждает востребованность **инициативы МГУ** имени М.В. Ломоносова по проведению всероссийских съездов учителей-предметников на регулярной основе;

• постановляет созвать **следующий** Всероссийский съезд учителей математики **через 3–5 лет** и поручает организационному и программному комитетам настоящего съезда провести для этого необходимую подготовительную работу;

• обращается в МГУ имени М.В. Ломоносова с предложением стать одним из **координаторов** всестороннего обсуждения хода модернизации школьного образования в рамках программы «МГУ — школе».

13. Съезд призывает всех математиков России принять активное участие в открытом обсуждении **закона «Об образовании»** и выразить свою профессиональную и гражданскую позиции.

14. Съезд обращается с предложением к Московской городской думе рассмотреть вопрос об увековечивании в Москве памяти автора первого учебника математики России **Л.Ф. Магницкого.**

15. Съезд приглашает педагогические и методические издания, а также все средства массовой информации к **сотрудничеству в распространении** идей и документов съезда в учительской среде, а также к обсуждению предложений по реальному позитивному реформированию отечественного математического образования.

16. Съезд поручает организационному комитету съезда опубликовать **настоящую резолюцию** в сети Интернет и профильных изданиях, а также подготовить и издать все материалы съезда в электронном и печатном виде.

17. Съезд поручает организационному комитету съезда направить **настоящую резолюцию** во все образовательные учреждения России, органы управления образованием субъектов Российской Федерации, Министерство образования и науки Российской Федерации, Правительство Российской Федерации и Администрацию Президента Российской Федерации.

И.Н. Сергеев, председатель программного комитета съезда, профессор,
И.Ю. Самоненко, секретарь съезда

Результаты опроса участников Всероссийского съезда учителей математики

Опрос был проведен в день открытия съезда, 28 октября. Анкета разработана ИКИО совместно с программным комитетом съезда. Всего было собрано 570 заполненных анкет. Анкета содержала блок так называемых вопросов объективных данных, на основе которых можно составить портрет участника съезда, и блок содержательных вопросов, при помощи которых мы попытались изучить мнение респондентов по нескольким ключевым проблемам преподавания математики в нашей стране.

Коллективный портрет участников съезда

1. Педагогическое образование имеют 72,7% опрошенных, математическое — 52,7%, инженерно-техническое или естественнонаучное — 7,9%. Суммарно получается более 100%, так как некоторые респонденты имеют 2 и более высших образований.

2. Большинство участников съезда — 80,7% — работают в учреждениях общего среднего образования (школе, гимназии и т.д.), 2,3% — в учреждениях начального или среднего профессионального образования, 18,6% — в вузах. В органах управления образованием работают 2,6% участников съезда.

3. 90,7% участников съезда — учителя, преподаватели, 17,9% — руководители, заместители руководителя учреждения, администраторы, 9,1% — методисты.

4. 93,2% — преподают математику, 8,6% — преподают информатику, 2,5% — физику, 6,5% — другие предметы, не преподают только 1,8% респондентов.

5. Имеют стаж работы более 25 лет — 39,1%, 21–25 лет — 19,3%, 11–20 лет — 32,4%, 6–10 лет — 4,6%, не более 5 лет — 3,0%.

6. Половина участников съезда — 50,3% — преподают в общеобразовательных школах, лицеях, гимназиях; в математических классах общеобразовательных школ, лицеев, гимназий преподают 37,3%; в математических, физико-математических школах — 10%; в сельских малокомплектных школах — 2,1%; не работают в школе — 7,5%.

7. Участникам съезда был задан вопрос: **«Как, по вашему мнению, изменился статус учителя за последние 10 лет?»**

— «Понизился» — так думают 71,3% опрошенных;

— «Повысился» — 12,1%;

— считают, что статус остался прежним, — 11,6%.

8. **Коллективное мнение о целях математического образования в школе:**

— на первом месте — интеллектуальное развитие и возбуждение интереса к исследованиям;

— на втором — формирование мировоззрения и понимание законов мироздания;

— затем: подготовка к будущей профессии, возможность общаться и взаимодействовать с окружающими;

— и только потом подготовка к поступлению в вуз.

9. На вопрос о том, **как за последние 10 лет изменился уровень школьного образования в стране**, 69,2% ответили, что уровень понизился; уровень не изменился — 4%; повысился — 10,3%. Затруднились ответить 5,1%.

10. **Способствует ли ЕГЭ улучшению преподавания математики в средней школе России?**

— «Да», — считают 17,5%;

— «Нет, не способствует», — 70,1%;

— затруднились ответить 12,4%.

11. **Способствует ли ЕГЭ повышению качества набора студентов в вузы?**

— «Да, способствует», — 13,5%;

— «Нет, не способствует», — 73,5%;

— затруднились ответить 13%.

12. **Каким должен быть статус ЕГЭ по математике?**

— Обязательный выпускной экзамен, проводимый по нескольким параллельным уровням (например, базовому и профильному) — 35,9%;

— обязательная часть вступительных экзаменов в вузы при условии, что вузы имеют право проводить свои дополнительные вступительные испытания, — 24,9%;

— необязательный выпускной экзамен — 17,9%;

— ЕГЭ вообще нужно отменить — 16,3%;

— обязательный вступительный экзамен в вузы — 15,4%;

— обязательный выпускной экзамен — 15,2%;

— необязательный вступительный экзамен — 8,6%;

— затруднились ответить на этот вопрос 3,0%.

13. Вот что думают участники съезда **о содержании, процессе подготовки и обсуждении новых стандартов школьного образования по математике:**

— ко всему, что связано с новыми стандартами, в целом положительно относятся 14,9% респондентов;

— считают, что подготовленный вариант пригоден для открытого профессионального обсуждения, но оно практически не ведется, — 29,4%;

— 7,4% уверены, что подготовленный вариант нельзя принять даже за основу;

— самая большая группа опрошенных считает, что прежде чем готовить стандарт, нужно обсудить и утвердить его концепцию, — 41,0%;

— ничего не известно о новом стандарте 6,1% участникам съезда;

— затруднились ответить на этот вопрос 9,6%.

14. **Какие из разделов математики следует преподавать в школе в большем, какие — в меньшем, а какие — в прежнем объеме?**

По мнению участников съезда три раздела математики — «Решение геометрических задач» (71,8%), «Решение текстовых задач арифметическим методом (62,2%) и «Задачи с параметрами» (62,5%) — должны преподаваться в большем объеме. При этом практически отсутствуют респонденты, которые считают, что объем преподавания «Решения геометрических задач» и «Решение текстовых задач» слишком велик и его надо уменьшить.

Большая часть респондентов считают, что объем изучения следующих разделов надо оставить без изменения: «Аксиоматика геометрии», «Производная и ее применение», «Предел последовательности, функции», «Решение уравнений, неравенств, систем», «Элементы теории множеств», «Элементы логики», «Тригонометрия», «Элементы аналитической геометрии», «Элементы комбинаторики», «Элементы теории вероятностей и статистики».

Разделы «Комплексные числа» и «Интеграл и его применение» стоят несколько особняком: большая часть опрошенных уверена, что объем преподавания этих разделов нужно сохранить, примерно треть — что их нужно преподавать, но в меньшем объеме.

1

2

ВПЕЧАТЛЕНИЯ О ВСЕРОССИЙСКОМ СЪЕЗДЕ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Впечатления разнополярны. Тут и радость, смешанная с изумлением, основанным на самом факте проведения съезда, и определенное разочарование, горечь и обида за тех учителей, голос которых не был (да и вряд ли мог быть) услышан.

Впечатление первое, официальное. Разумеется, и в самых что ни на есть во-первых, нужно поблагодарить МГУ им. М.В. Ломоносова и организаторов за их решимость решить крайне непростую задачу проведения съезда и, собственно, за решение, предъявленное всем нам. Мероприятие подобного масштаба (более тысячи участников) было проведено на удивительно достойном уровне, а текст резолюции съезда точен, ясен и тщательно взвешен и с политической, и с прагматической точек зрения.

Но тут же возникают вопросы другой полярности. Почему в таком, очевидно общегосударственном, истинно всероссийском деле участие самого государства имело почти нулевую меру? По существу, государство было представлено только на открытии съезда в лице министра образования и науки А.А. Фурсенко, содержание выступления которого, мягко говоря, было лишь инвариантом самого выступающего. Ни на одной из секций, ни на закрытии съезда представителей министерства замечено не было.

В то же время сказать, несомненно, было что. Для меня, например, большим откровением стала прозвучавшая, как бы между прочим, благодарность, высказанная заместителем мэра Москвы Л.И. Швецовой министру, за те усилия, в результате ко-

3

4

1. А. Фурсенко
2. В. Садовничий
3. С. Смирнов
4. Н. Андреев

торых экзамен по математике все еще является общенациональным. К благодарностям следует присоединиться, сказать искреннее и отдельное спасибо, но стоит и точно понять, что значит, несмотря на все произнесенные и написанные панегирики математике как «стратегическому ресурсу развития России», в обязательности экзамена по этой самой математике есть столь серьезные сомнения, что министру приходится персонально с ними бороться. Вообще-то с этого места хотелось бы поподробнее...

Всегда считал, что у меня нет особых иллюзий относительно качества современного отечественного школьного образования. На мой взгляд, процентов 30 выпускников не знают вообще ничего (и не только, да и не столько, по математике), а многие учителя поправляют мою оценку так: «Да что Вы, Павел Владимирович, только 30% хоть что-то знают...» Беседы на съезде с учителями, работающими «на земле», подтверждают, как теперь модно выражаться, этот «тренд». Отсюда и основные ощущения. С одной стороны, блеск и мраморный шик новейших зданий МГУ, барабанный бой (пусть и абсолютно верных) славословий в адрес математики на открытии съезда, постоянные камлания про движение «по пути инноваций». С другой стороны, по словам одного учителя из Талдомского района Тверской области, ощущение падения, и падения столь стремительного, что падающие даже не успевают услышать самый свист падения.

Впечатление второе, профессиональное. Из частных, чисто профессиональных положительных впечатлений — поразительно ясный, увлекательный и «по-западному» презентативный доклад Станислава Смирнова, нового нашего (или швейцарского?) лауреата Филдсовской премии.

Впечатление третье, эмоциональное. Чувства переполняли, и привычных возможностей разговорного языка зачастую не хватало. Кто-то из выступавших на секциях ударялся в сплошной официоз с подготовленными слайд-презентациями. Кто-то пытался передать на «нормальном» языке все, что накипело, и это выходило еще хуже. Попробую использовать столь же универсальный, как и математический, язык — поэзию. Вот цитаты, которые я вспомнил во время заседания секции № 4, но в кипении разных обсуждений не смог озвучить.

...Мне другие мерещатся тени,
Мне другая поет нищета.
Переплетчик забыл о шагрени,
И красильщик не красит холста,
Златобит молоток свой забросил,
Златошвейная кончилась нить.
Наблюдать умиранье ремесел —
Все равно, что себя хоронить...

А. Тарковский

...Это дерево сосна,
И судьба сосны ясна...

Ю. Минералов

...Крепко тесное объятье.
Время — кожа, а не платье.
Глубока его печать.
Словно с пальцев отпечатки,
С нас — его черты и складки,
Приглядевшись, можно взять.

А. Кушнер

Ну, и для финала,

...Трагическое миросозерцанье
Тем плохо, что оно высокомерно.

А. Кушнер

П.В. Семенов,
Москва

Проходивший 28–30 октября в МГУ Всероссийский съезд учителей математики, несомненно, должен был бы стать знаковым событием в российском образовании XXI столетия. Знаковым и для учителей математики, и для руководителей всех уровней нашего образования. Но это событие не было «замечено» ни СМИ, ни телевидением. К тому же заключительное заседание съезда, на котором единогласно была принята резолюция, не почтили своим вниманием и присутствием наши государственные деятели, вероятно ввиду занятости и нехватки времени на обсуждение вопросов этого «злополучного» школьного математического образования.

Но, тем не менее, коллектив математиков МГУ и ректор МГУ, академик Садовничий Виктор Антонович заслуживают огромного уважения и благодарности за тот титанический труд по организации и проведению съезда, воистину патриотический порыв в раскрытии величия роли математики для будущего России, о чем поведали наши великие отечественные математики в своих докладах на пленарных заседаниях. Хочется верить, что «и сможет собственных Платонов и быстрых разумом Невтонов российская земля рождать», как говорил великий Михаил Васильевич Ломоносов.

Достойно сожаления совершенно загадочное, необъективно корпоративное предоставление (распределение) времени на сообщения докладчикам. Все-таки более чем 20-минутные доклады об УМК, которые уже много лет используются в школьном образовании, были совершенно неуместны. Съезд не должен быть пунктом для рекламных докладов!

Разброс тематик докладов выступающих в секции свидетельствует о том, что не были четко сформулированы цель, тактика и стратегия съезда.

Нужно ли было включать в повестку работы секции доклады, содержание которых отражало определенные разделы и главы диссертаций на соискание ученой степени кандидата (доктора) педагогических наук? Таких докладов было предостаточно, они «были видны невооруженным глазом». Ведь съезд математиков не научная конференция соискателей ученых степеней, а собрание опытных практиков для обсуждения возникших проблем и путей их решения.

Следует отметить малое количество докладов, в которых затрагивались бы проблемы изучения геометрии в средней и высшей школе. К сожалению, те 3–5 минут, которые предоставлялись автору для доклада по геометрии, были недостаточны для раскрытия сущности содержания этого доклада. Отрадно, что в резолюции съезда отмечается о большой роли геометрии в становлении творческой личности.

Совершенно справедливы ряд критических замечаний участников съезда в адрес организации, подготовки и проведения ЕГЭ, его негативной роли на развитие логической, графической культуры учащихся.

Е.В. Потоскуев,
г. Тольятти

Работа учителя складывается из тысяч мелочей, каждая из которых, как небольшой фрагмент причудливой мозаики педагогического успеха, образует индивидуальный почерк учителя. Очень трудно бывает узнать об этих мелочах у коллеги, еще труднее бывает понять, что у тебя тоже есть то, чем ты можешь поделиться.

В новейшей истории еще не было такой возможности, чтобы в одном месте собралось более

1000 учителей математики со всех уголков России, чтобы не только обсудить наболевшие проблемы, но и узнать о педагогических и методических находках своих коллег.

Возможность — это ключевое слово, характеризующее сиюминутную ценность, которую получили учителя. Возможность увидеть рубежи современной науки, возможность узнать о педагогическом опыте и наследии, возможность побывать в современных лабораториях, возможность услышать мнение ученых мирового уровня, возможность обсуждать и ставить проблемы на конференциях и круглых столах, возможность попробовать в действии современные технические средства обучения, возможность оказаться услышанным и влиять на содержание резолюции съезда. Все эти возможности стали реализованными благодаря прошедшему съезду.

Но в работе ценен не только сиюминутный успех. На съезде обсуждались и вопросы, которые ориентировали учителя на будущее, в том числе и в вопросах проведения итоговой аттестации, ГИА и ЕГЭ, в вопросах новых государственных стандартов, в вопросах создания государственной поддержки одаренных детей, в вопросах порядка апробации новых учебников, и главным было то, что все это обсуждалось, а не констатировалось как свершенное.

Каждый из учителей, побывавших на съезде, ушел с него не только с чувством сопричастности к происходящему, но и с материалами съезда, позволяющими более глубоко и детально познакомиться с опытом коллег, с материалами к поиску новых путей в работе с нашими учениками. До следующего съезда работы хватит, а следующий будет скоро...

П.И. Самсонов,
Москва

Прошедший съезд учителей математики оставил довольно много как положительных, так и отрицательных впечатлений. На секции, посвященной углубленному изучению математики, несколько выступавших разными словами выразили одну и ту же мысль: современный «математический» класс — это в основной своей массе просто нормальный класс тридцатилетней давности. Класс, в котором принято учиться и ученики которого в состоянии хорошо усвоить ***основную*** программу по математике. Класс, где на фоне общего падения уровня школьного образования удается удержать планку — за счет концентрации нормальных учеников и увеличения часов математики. Выпускник такого класса в состоянии дальше осваивать программу по математике технического вуза, а это уже стало редкостью. Преподаватели вузов часто в отчаянии от уровня пришедших к ним первокурсников. В некоторых институтах уже происходит подстройка под реальный уровень студентов: в первом семестре там читают ликбез по школьной программе.

Массовые математические классы, очевидно, востребованы всем обществом: в них хотят отдать своих детей нормальные родители, в них хотят работать учителя (не только математики), такие классы являются последней надеждой негуманитарных вузов. На фоне этой очевидной профессионалам картины мне показались очень тревожными рассказы моих коллег о том, что профильные математические классы в их городах часто и с пристрастием проверяются начальством и при выявленных недостатках закрываются. Делается это, как им объяснили, прежде всего в целях экономии.

И стало мне интересно посчитать, можно ли много наэкономить, закрывая профильные математические классы? Результатами такого подсчета мне и захотелось поделиться с читателем.

Проделаем этот подсчет вместе. В этом году в России было меньше 900 000 выпускников. Увеличим это число в бо́льшую сторону: будем считать, что в России по одному миллиону десятиклассников и одиннадцатиклассников (вместе 2 миллиона). Разумно считать, что пятая часть из них может учиться в «массовых математических» классах, описанных выше. Итого — 400 000 учеников. Будем считать, что средняя наполняемость математического класса 20 человек (в городах, конечно, больше). Значит, нужно открыть 20 тысяч математических классов. В каждом классе к базовым 4 часам по математике прибавим еще 3 часа (7 часов математики — да это мечта каждого учителя!). Итого — 100 часов в год на класс нужно прибавить. Сколько стоит один час? Это посчитать трудно, в разных регионах и у разных учителей он стоит по-разному. Давайте исходить из того, что в математических классах работают учителя с высшей квалификационной категорией. Положим, что их час стоит 200 рублей. При этом предположении ставка (18 часов в неделю, то есть 80 часов в месяц) будет равна 16 000 рублей. Для многих учителей высшей категории такая ставка — это же мечта. При таких наших предположениях мы получаем, что дополнительные часы в одном классе стоят 20 000 рублей. А во всех классах по всей России 400 миллионов рублей. Все ли мы учли? А учебники? Сильно изменить картину учебники не могут: они уже написаны и изданы. Вместо обычного учебника ученик получает учебник для углубленного изучения математики. А проверка тетрадей? А предпрофильные классы и кружки? Хорошо, накинем еще 25% найденной суммы. Получаем ***полмиллиарда*** рублей в год. Давайте сравним эту сумму, например, с дорожным строительством. И школьное математическое образование, и строительство дорог — это вложение в будущее страны, так что такое сравнение имеет некоторый смысл. Строительство 1 (прописью: *одного*!) километра двухполосной дороги в России стоит в среднем около 250 млн р. Итак, внимание: углубленное обучение математике ***по всей России в год*** стоит столько же, сколько строительство 2 км дороги! А если сравнить с ценой магистрали Москва – Санкт-Петербург, то столько же, сколько стоит ***полкилометра*** такой трассы.

Вернемся к съезду учителей математики. На пленарных заседаниях в день открытия было сказано немало пафосных слов о том, что качественное школьное математическое образование является необходимой основой интеллектуальной, технической и военной самостоятельности нашей страны. При этом советником президента А.В. Дворковичем было добавлено, что, к сожалению, Россия пока не является достаточно богатой страной, чтобы сильно увеличить финансирование школьного образования. Приятную возможность сделать выводы я предоставляю читателю.

Д. Шноль
Москва

Итак, съезд учителей математики состоялся. Впереди анализ работы съезда и работа по созданию Ассоциации преподавателей математики. Но уже сейчас можно сказать о первых впечатлениях участника съезда.

То, что в работе съезда приняли участие более 1200 преподавателей математики из 75 субъектов РФ, большинство из которых прибыли на съезд по собственной инициативе и за свой счет, говорит о том, что учителя математики и преподаватели высшей школы обеспокоены существующим положением со школьной математикой и выражают готовность способствовать улучшению данного состояния. Отрадно, что организатором съезда стал МГУ, а в оргкомитет вошли видные ученые-математики. Учителя математики увидели, что их тревоги и ожидания разделяют выдающиеся математики и преподаватели ведущих вузов, что результаты работы школы все же волнуют кого-то в нашем государстве.

Лично на меня большое впечатление произвело взвешенное руководство съездом Виктора Антоновича Садовничего. Он сумел увести съезд от стихии митингов, от лозунгов и демагогии, придал ему весомость и конструктивную направленность.

Впервые на столь представительном форуме было отмечено существенное снижение уровня математической подготовки выпускников средней школы. То, о чем учителя математики говорили в узком кругу, было заявлено с высокой трибуны и нашло отражение в проекте резолюции съезда.

В рамках съезда была предпринята попытка разобраться в причинах падения уровня школьного математического образования в стране. К числу значимых факторов, повлиявших на снижение уровня математического образования выпускников школы, безусловно, относится снижение числа часов на преподавание математики. К сожалению, ЕГЭ, со всеми его недостатками и издержками, стал для всех раздражающим фактором номер один, козлом отпущения за все грехи школьного образования. Это стало удобно для всех, кто критикует школу. Но падение математической подготовки выпускников школы началось задолго до введения ЕГЭ. ЕГЭ лишь обнажил удручающую картину и вместо старых породил новые проблемы. Я являюсь сторонником ЕГЭ и одновременно непримиримым критиком сегодняшней его формы проведения. Но сводить падение уровня образования лишь к ЕГЭ — это, по меньшей мере, неразумно. И хотя ЕГЭ далеко не идеальная форма проведения итоговой аттестации и вступительных испытаний. Но, что взамен? Вернуться к системе «сам учу, сам себя оцениваю»? Да, ЕГЭ по математике, в сегодняшнем виде, не оказывает положительного влияния на преподавание математики в средней школе, но надо искать пути улучшения ЕГЭ, некоторые из них указаны в резолюции съезда. Со своей стороны предлагаю:

1. В рамках ЕГЭ развести итоговую аттестацию и вступительные экзамены. Результаты ЕГЭ должны влиять на итоговую оценку в аттестате, и совершенно недопустимо, когда выпускник, набравший всего три первичных балла, становится студентом технического вуза.

2. Ранняя публикация демоверсии КИМ ЕГЭ оказывает негативное воздействие на изучение математики в старшей школе. Это удобно лишь составителям различных пособий по подготовке к ЕГЭ, среди которых, к сожалению, и авторы КИМ.

3. Несоответствие банка задач ЕГЭ программе изучения математики в 10–11-х классах противоречит идее итоговой аттестации выпускников школы.

4. Необходимо незамедлительно решить вопрос о глушении мобильной связи в пунктах проведения ЕГЭ и оборудования их системами видеонаблюдения. Право, учителям надоело выслушивать упреки в коррупции при проведении ЕГЭ.

5. Минимальный объем необходимых знаний и умений учащихся, который выносится на итоговую аттестацию, должен быть описан в виде банка задач. Надеюсь, что будущая Ассоциация преподавателей математики примет активное участие в его разработке.

Безусловно, ведущие вузы, такие как МГУ, МФТИ и некоторые другие, должны иметь право вводить дополнительные вступительные испытания для абитуриентов. Требует улучшения и система организации и проведения олимпиад для выпускников. Увы, такие олимпиады часто используются не для поиска талантливых выпускников, а для обеспечения возможности помочь «своим» поступить в вуз.

Конечно же, нужна Ассоциация преподавателей математики, через которую будет звучать, и, надеюсь, будет услышан, голос учителя математики. Одним словом, преподаватели математики школ и вузов — объединяйтесь!

В рамках проводимой реформы образования продолжается негласное выдавливание из школы сложившейся системы углубленного изучения математики. Так, в Тульской области утвержден региональный учебный план, согласно которому на изучение математики в любой школе с 5-го по 9-й класс оставлено 5 часов, а на школьный компонент (из которого и можно было добавить часы для углубленного изучения математики) в 7-м классе оставлено 0 часов, в 8-м классе — 1 час, в 9-м классе — 2 часа. О какой «углубленке» может идти речь?! Поэтому актуальным является предложение съезда о законодательном закреплении возможности углубленного изучения математики в 8–11-х классах.

Образование превратилось в бизнес, а там, где властвует выгода и деньги, уже не до качества знаний. Если школьное образование — государственная задача, то издание всей учебной литературы должно быть взято под контроль. Давно пора обратить внимание и на стоимость учебников: учителю уже страшно заходить в любимый магазин «Педагогическая книга».

И все-таки, извечные вопросы «Кто виноват?» и «Что делать?» требуют ответа. И пока мы не ответим на них, падение уровня образования продолжится. И его не остановит ни новое поколение стандартов, ни компьютеризация, ни другие инновации, вводимые чиновниками от образования, а для ответа на эти вопросы нужна государственная воля.

Хочется надеяться, что состоявшийся съезд станет звонком, который будет услышан.

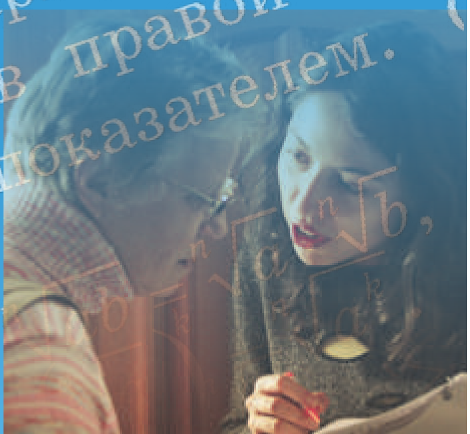
А. Валентьев,
г. Ефремов, Тульская обл.

Л. СЛУЦКИЙ,
Москва

ДАВАЙТЕ ПОГОВОРИМ НЕ О ЕГЭ

Когда маленькие дети приходят в школу, их глаза светятся. Они хотят узнать от взрослых много нового, интересного. Они уверены, что впереди счастливая дорога к знаниям. Всматриваясь в унылые и равнодушные лица старшеклассников на многих уроках, невольно задаешь себе вопрос: «Кто погасил их лучезарные взгляды? Почему пропало желание и стремление?»

Ш. Амонашвили



Эти слова были написаны достаточно давно. Попробуем ответить на эти вопросы с позиции современного учителя математики. Действительно, жизнь сильно изменилась, а вместе с ней изменились цели и задачи образования, а значит, и школа, и ученики, и учителя. Впрочем, долгое время наше математическое образование не желает меняться. Ведь не может же измениться математика ни как наука, ни как преподаваемый предмет. Но нужна ли она в таком объеме нынешнему прагматичному поколению, главный вопрос которого: «А зачем нам это нужно?». У большинства современных детей нет проблем с компьютерной грамотностью, но есть большие проблемы с логическим мышлением, пространственным воображением, мотивацией. Но ведь никто не собирается делать на это скидку! Мы по-прежнему утверждаем учебные планы, верстаем программы, определяем базовые уровни, а главное — всеобщие стандарты, которые не соответствуют ни среднему уровню современных учеников, ни целям и задачам математического образования в условиях изменившейся жизни.

Может быть, убрать математику из перечня обязательных предметов? Изучать и сдавать ее по выбору? Зачем нам она? Все равно мало кто ее понимает, и вообще, пригодится ли она в жизни? Многие говорят, что нет! Дискуссия на эту тему сильно затянулась. Я не собираюсь опять в нее вступать и доказывать, что основы математики необходимы в системе образования на всех ее этапах, так как она (математика!), прежде всего, конструкция логического мышления человека. Речь о другом. Мы живем в 2010 году, при этом структура, программа и большинство учебных пособий по математике «живут» в семидесятых-восьмидесятых годах прошлого века, когда (еще раз повторяю!) перед математическим образованием ставились совершенно другие задачи.

Конечно, предпринимаются попытки пересмотреть (хоть частично) содержание. Например, введены основы теории вероятностей и математической статистики. Делаются попытки увеличить количество простых задач с практическим содержанием, а также задач, связанных с различного рода стратегиями. Успешны ли эти эксперименты? Пообщавшись со многими учителями, посетив уроки, отчетливо убеждаюсь, что как часть общеобразовательной программы — неуспешны. У большинства детей недостаточно знаний и интеллектуального потенциала. В головах царит хаос и разруха. И нет времени на отработку простых вопросов арифметики и алгебры, без которых дальнейшее изучение математики вообще невозможно.

Что касается геометрии, то здесь разговор особый. Давным-давно я услышал историю о том, как ученика седьмого класса спросили: что они делали на уроке геометрии. Ученик ответил так: «Учитель нарисовал на доске два равных треугольника и целый урок доказывал, что они равны!». В те времена я, конечно, покатил бы бочку на учителя. Он, конечно, делает что-то не то. Боюсь, что сейчас почти каждый семиклассник ответит так же. И дело тут не в методике. Недавно мы приглашали на совещание МО учителей нашего округа одного из разработчиков новой концепции в преподавании геометрии. В ее основу лягут, прежде всего, элементарные наглядные представления. Цель — овладение элементарными компетенциями. Такого рода задачами наполнены пособия по подготовке к первой части ЕГЭ. Действительно, чтобы найти площадь многоугольника, изображенного на клетчатой бумаге, необязательно знать какие-то формулы. Достаточно разбить фигуру на прямоугольники или прямоугольные треугольники. Аналогично можно найти расстояние от точки до прямой, построив его чисто визуально. И так далее и тому подобное. Вот такая вот бездоказательная математика. То же и в стереометрии. Нарисовали «кубик» и поехали находить разные углы и расстояния. Минимум теории, максимум практики и наглядных представлений.

Теперь наглядно представим! У нас два часа геометрии в неделю (в лучшем случае)! Урок первый тире двадцатый (10 недель!) рисуем кубики и делаем однообразные упражнения, забросив действующие учебники и программы куда подальше. А что мы пишем в журнале? Что положено было писать с 1977 года, например: «Скалярное произведение векторов. Нахождение угла между векторами». Это должны освоить наши ученики по программе. Итак, мы живем в нереальном мире и по-прежнему реализуем и перевыполняем программу XXVI съезда КПСС в математическом образовании: думать одно, говорить другое, делать третье, записывать четвертое, изучать пятое, а главное — составлять длинные и бессмысленные отчеты в электронном виде для администрации и родителей! Получается, что учителям школ дана негласная команда о замене программы по математике на изучение вопросов, которые вроде еще могут освоить учащиеся старших классов. Например: сколько сырков по цене 7 р. 50 к. можно купить на 700 р.? Кстати, если действительно строго следить за использованием микрокалькуляторов, то выяснится, что мало кто получит правильный ответ. Ведь надо правильно поделить в столбик с остатком!

При этом в аттестат может быть поставлена любая отметка! А кто проверит? В школах, где действительно учат математике, выдаются аттестаты с такими же отметками. Но ведь аттестаты не имеют значения? Тогда плевать на все, кроме деления с остатком. Круг замкнулся. Да, что-то сильно неладно в нашем королевстве кривых зеркал. Безусловно, наше математическое образование серьезно больно. Но никто не собирается всерьез лечить это заболевание. В лучшем случае придумываются временные обезболивающие средства, от которых через некоторое время больному становится еще хуже. Например, ЕГЭ. Сколько же потрачено сил и денег на его разработку и внедрение. Сколько же развернулось полемики! Правильно это или неправильно? И вот спорят до хрипоты и в прессе, и на телевидении, перемешивая при этом все проблемы в одну кучу. Ну прямо «Западники» и «Славянофилы»! Не собираюсь эту полемику сейчас продолжать, скажу, что итоговая аттестация в любом ее виде не решает тех проблем, что повисли тяжелым грузом на плечах школы и с которыми ей справиться в нынешних условиях не под силу.

Недавно с высокой трибуны было сказано, что в высшие учебные заведения можно будет поступать не только на основании результатов ЕГЭ. Вроде правильно. Правда, коррупцию на олимпиаде вуза допустить проще, чем на ЕГЭ. Но это уже другой вопрос. Прервал мои размышления один из моих учеников лицея, в котором я делал выпуск в этом году. Он не шибко занимался математикой и физикой. Уровень его знаний, с моей точки зрения, был достаточно низким. Вроде бы он занимался с репетиторами, но результата не было видно. В конце первого семестра он обратился ко мне с просьбой поставить ему четверки, если это возможно, потому что это ему крайне необходимо. «Работай!» — ответил я по привычке и задумался: «А зачем ему это нужно?». Разъяснения я получил очень быстро. Оказывается, он будет поступать в МВТУ им. Баумана через какую-то систему проектов, и наличие хорошей отметки в аттестате является необходимым условием. Ну прямо кандидатский минимум! Какой же проект может сотворить троечник? И какой же будет потенциал МВТУ?

Вершиной новаторских идей в образовании «по выходу из кризиса» является следующая гениальная идея. Оказывается, в новом понимании учитель это не тот, кто дает знания ученикам. Главной его задачей является создание информационного пространства, в котором благодарные ученики не покладая рук будут трудиться с утра до вечера, сидя дома или в интернет-кафе. В конечном итоге мы придем к дистанционному обучению, как к единственно правильному и прогрессивному. Все это я слышал собственными ушами от внешне вполне респектабельных людей. Остап Бендер и не предполагал, что его проект «Новые Васюки» станет настолько актуальным в Российском образовании XXI века.

Господа! По моему «слабоумному» разумению учителя с тридцатилетним стажем и методиста, дистанционное обучение годится только для сильно мотивированных учащихся (Сколько их даже в гимназиях и лицеях?), а также для детей-инвалидов. На сегодняшний день нам нужен учитель, причем человек, а не киборг, от личности которого зависит, захочет ли и сможет ли ученик заниматься преподаваемым предметом. И нам пока от этого никуда не уйти. При этом я ни в коем случае не против использования новых технологий в обучении. Как раз успешному овладению учителями этими методами уделяется много внимания в нашем Юго-Западном округе.

Итак, мы плавно подошли к вопросу «что делать?».

Выскажу банальную, но необходимую мысль: надо перестать друг друга обманывать. Перестать трясти паровоз, делая вид, что мы едем, перестать оперировать бессмысленными цифрами, а честно признать, что сегодня далеко не все учащиеся, выходящие из начальной школы, способны успешно усваивать программу по математике, которая заявлена. Давайте проведем независимое тестирование сначала «на входе». Дальнейшие действия понятны, а главное — адекватны концепциям ЕГЭ и ГИА-9. С одной группой учащихся (на сегодняшний день достаточно многочисленной) занимаемся по условному уровню «А», который соответствует приобретению элементарных компетенций. Уверяю вас, что для многих и это совсем не мало. Можно и нужно учить задачам на проценты, давать элементарные геометрические представления, учить решать несложные практические задачи (в том числе и с избыточным условием), давать основы алгебры и статистики. Уже есть разработанные пошаговые методики, модульные программы. Необходимо учитывать, что количество детей, для которых русский язык не является родным, с каждым годом становится все больше, следовательно, необходимы учебные пособия с несколько более упрощенными, а порой и совсем схематичными формулировками задач. И это не простое дело. Эта группа учащихся требует постоянных тренировок и повторения. Уверяю вас, что содержательной работы хватит до одиннадцатого класса включительно. Никогда не забуду, как, будучи молодым специалистом, работал в пятом классе. В начале марта я пришел к своему наставнику — грамотному и опытному учителю — и сказал: « Я всю программу уже прошел».

И он мне ответил: «Молодец! Пройди еще раз!». Значит, будем решать большое количество различных задач и постоянно повторять. Вот, скажем, русский язык в старшей школе лишь повторяют, а после этого сдают ЕГЭ. (Почему же по математике для этой группы учащихся должно быть не так?) И при этом никакие права учащихся не нарушаются. Все получают текущие и итоговые оценки любого достоинства, но мы не опускаем ниже плинтуса престиж предмета, так как присутствует уточнение, например: оценка «5» по уровню «А». Ежегодное, по возможности — независимое, тестирование позволит выделять учащихся, желающих и имеющих возможность перейти на другой уровень, условно названный «В». Программа, соответствующая этому уровню, должна соответствовать той программе по математике, которая существует сегодня для общеобразовательных классов. Учителя математики, думаю, согласятся со мной в том, что незначительная часть нынешних выпускников девятых и одиннадцатых классов способна освоить в полном объеме этот курс! На сегодняшний день этот уровень вполне соответствует возможности успешной сдачи экзамена в форме ЕГЭ (или «АнтиЕГЭ!») на уровне требований технического вуза или вуза, где математика не является профилирующим предметом, но учитывается. Аналогично, успешная сдача ГИА-9 на таком уровне должна позволять поступать на базе основной школы в престижные колледжи, связанные, например, с информационными технологиями или экономического профиля. И наконец, остается группа учащихся мотивированных и одаренных. Они изучают математику по уровню «С». Это и есть программа, примерно соответствующая нынешним программам для математических и профильных классов. Уж тут-то система хорошо разработана и пока еще есть кому работать. Было бы желание и стремление.

Эта схема известна и реализуется успешно (а может, и не всегда) в системе образования некоторых европейских стран. Переход к подобной системе, конечно, требует серьезных размышлений над деталями и нюансами для того, чтобы в очередной раз не наломать дров. Ясно одно, что так дальше продолжаться не может. К нулю мы уже пришли. Нижний порог преодоления неуспешности при сдаче ЕГЭ мы определяем по трем (!) правильно выполненным заданиям. И при этом еще достаточно большой процент «неудовлетворительно». Дальше начнется отрицательный результат обучения, это когда на вопрос «Сколько сырков по цене 7 р. 50 к. можно купить на 700 р.?» будут отвечать: «А сколько вам надо?». А это уже хуже, чем «неудовлетворительно».

МАТЕМАТИКА
(извлечение)

КРАТКИЙ ИТОГОВЫЙ АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОТЧЕТ

О РЕЗУЛЬТАТАХ ПРОВЕДЕНИЯ ЕДИНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА В 2010 ГОДУ

Второй год единый государственный экзамен проходит в штатном режиме. Массовое участие выпускников средних образовательных учреждений в ЕГЭ по общеобразовательным предметам придает его итогам особое значение. Результаты ЕГЭ становятся основным источником информации об уровне общеобразовательной подготовки школьников, о тенденциях развития общего образования в Российской Федерации. Использование массива данных о результатах ЕГЭ в сочетании с широким спектром контекстной информации, имеющейся в распоряжении органов управления образованием всех уровней, дает основания для принятия определенных управленческих решений в сфере общего образования.

Основные результаты ЕГЭ 2010 г. по математике представлены в таблице 1 (с.18). Приведенные данные характеризуют как общеобразовательную подготовку участников единого экзамена 2010 г., так и динамику роста результатов в сравнении с экзаменом 2009 г.

Если судить по представленным цифрам, то результаты по математике 2010 г., за исключением числа стобалльников, практически не изменились в сравнении с 2009 г. Но поскольку модель КИМ кардинально изменилась, непосредственное сопоставление результатов 2010 г. и 2009 г. представляется некорректным.

По всем предметам процент выпускников прошлых лет, принимавших участие в ЕГЭ 2010 г. и не преодолевших минимальную границу ЕГЭ, значительно выше, чем данный показатель среди выпускников текущего года. Полные данные представлены в таблице 2. В связи с этим при интерпретации результатов ЕГЭ целесообразно отдельно анализировать результаты выпускников текущего года и прошлых лет, особенно если данные используются для оценки качества образования или принятия различных управленческих решений.

Некоторые данные о выполнении заданий с развернутым ответом по общеобразовательным предметам приведены на рисунке 1.

Наиболее значительно изменились результаты ЕГЭ по математике. На 15% возросла доля участников, приступивших к выполнению заданий 2-й части по математике, на 14% — доля участников, частично или полностью выполнивших эти задания. Вероятно, такие изменения связаны, прежде всего, с изменением структуры работы, в которой в 2010 г. полностью отсутствовали задания с выбором одного ответа из четырех предложенных вариантов, а остались только задания с кратким и развернутым ответом.

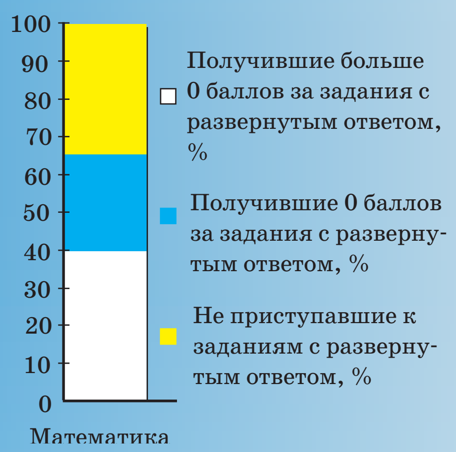


Рис. 1.
Данные о выполнении заданий с развернутым ответом ЕГЭ 2010 г.

Таблица 1

Результаты ЕГЭ 2010 года (май-июнь)

Предмет	Доля всех участников ЕГЭ, %[1]	2010 год		2009 год		Доля участников, не набравших мин. кол-во баллов ЕГЭ, %[2]	2010 год		2009 год	
		Средний тестовый балл	Стандартное отклонение	Средний тестовый балл	Стандартное отклонение		Число 100-балльников	Доля 100-балльников, %	Число 100-балльников	Доля 100-балльников, %
Математика	94,6 (94,4)	44,0	15,2	44,1	15,5	5,2 (6,8)	159	0,02	314	0,03

[1] В скобках приведены данные 2009 г.

[2] В таблице представлены результаты до пересдачи экзаменов по русскому языку и математике выпускниками, не набравшими минимальный балл ЕГЭ. В скобках приведены данные 2009 г.

Таблица 2

Процент выпускников текущего года и прошлых лет, не преодолевших минимальный порог ЕГЭ по общеобразовательным предметам

Предмет	Процент выпускников текущего года, не преодолевших минимальный порог	Процент выпускников прошлых лет, не преодолевших минимальный порог
Математика	1,9%	23,6%

Экзамен по математике являлся одним из двух обязательных экзаменов. По результатам его проведения ФЦТ было получено 830 449 бланков регистрации участников экзамена. Основную массу участников составили выпускники общеобразовательных школ. Среди них 790 285 выпускников текущего года, что составило 95,4%.

Результаты проведения ЕГЭ 2010 г. по математике соответствуют целям и задачам, которые были поставлены при разработке новой модели КИМ. Предложенная в 2010 г. модель ЕГЭ по математике, содержание и структура КИМ дают возможность достаточно полно проверить комплекс основных знаний и умений по предмету.

По данным на 15 июля 2010 г., на экзамене 2010 г. 100 баллов получили 159 человек, 97 баллов — 232 человека, 95 баллов — 341 человек, 92 балла — 449 человек и 90 баллов — 632 человека. Это свидетельствует о том, что количество выпускников, набравших 90 и более баллов, существенно выросло, и профильные вузы могут лучше понять, с каким уровнем знаний к ним идет абитуриент.

Набрали ниже минимального балла по ЕГЭ по математике около 50 тыс. экзаменуемых, что в процентном отношении (5,2%) ниже, чем в 2009 г. (6,8%). Можно уверенно сказать, что это выпускники, у которых отсутствуют базовые математические компетенции: умение анализировать условие задания, решать простейшие практические задачи, базовые знания по курсу математики. При этом 15% выпускников набрали не более 5 первичных баллов, то есть имеют весьма низкий уровень знаний по математике. Анализ выполнения заданий ЕГЭ этой категорией экзаменуемых показывает слабую сформированность базовых математических компетенций. На уровне образовательных учреждений следует уделять больше внимания своевременному выявлению учащихся, имеющих слабую математическую подготовку, выявлять доминирующие факторы, определяющие неуспешность, а для учащихся, имеющих мотивацию к ликвидации пробелов в своих знаниях, организовывать специальные профильные группы. Отметим, что полное решение проблем, порождающих неуспешность при обучении математике, только силами образовательных учреждений невозможно — во многих случаях проблемы носят социальный характер.

Выпускникам с удовлетворительным уровнем подготовки (примерно треть от общего числа участников ЕГЭ), набравшим менее 8 первичных баллов, нецелесообразно продолжать образование в вузах, имеющих, в соответствии с государственными стандартами, в своих учебных планах математическую составляющую.

Наибольшую группу (47,2%) составили экзаменуемые с хорошим уровнем подготовки. Они владеют математикой на уровне требований современной жизни, потенциально готовы к продолжению образования в вузах, предъявляющих невысокие требования к уровню математической подготовки абитуриентов.

Введение в структуру КИМ 6 задач с развернутым ответом (вместо 5) привело к усилению акцента на формирование умения записывать решение задачи, а также к более обоснованному выявлению участников экзамена с отличным уровнем подготовки, что дает возможность дифференцировать выпускников, готовых продолжать изучение математики в высшей школе.

В целом по стране около 61% участников ЕГЭ 2010 г. приступали к выполнению заданий с развернутым ответом, т.е. записывали свои решения. При этом 34,8% получили ненулевые баллы за выполнение заданий части 2, что свидетельствует о достижении определенного уровня математической подготовки значительным числом выпускников. (В 2009 г. последний показатель равнялся 19,9%.) 18% участников ЕГЭ набрали не менее 13 первичных баллов, т.е. получили большее количество баллов, чем максимально возможное за выполнение первой части КИМ. Это участники с отличным уровнем подготовки по математике, их процент заметно увеличился (12,86%) по сравнению с 2009 г. (5,97%).

Введение в структуру КИМ 2010 г. практико-ориентированных заданий способствовало выявлению и оценке качества имеющихся у участников ЕГЭ общекультурных и коммуникативных математических умений, необходимых человеку в современном обществе. Кроме того, оно было оправдано и с прагматической точки зрения — среди других тематических составляющих экзамена именно эти задания оказались наиболее успешно решаемыми всеми группами выпускников. Однако неудовлетворительные результаты выполнения практико-ориентированных заданий значительным числом выпускников требуют существенной корректировки преподавания математики на базовом уровне, повышения роли практико-ориентированных заданий при изучении всего курса математики.

Результаты решения геометрических задач (5 из 18 заданий КИМ 2010 г.) показали заметное усиление внимания участников экзамена к подготовке по разделу «Геометрия». Задачи с кратким ответом по геометрии активно и довольно успешно решались всеми участниками ЕГЭ. При этом общий уровень геометрической и особенно стереометрической подготовки выпускников попрежнему остается низким. В частности, имеются проблемы не только вычислительного характера, но и связанные с недостатками в развитии пространственных представлений выпускников, а также с недостаточно сформированными умениями правильно изображать геометрические фигуры, проводить дополнительные построения, применять полученные знания для решения практических задач.

Наиболее сложными в 2010 г. оказались задания по разделу «Функции и начала математического анализа». Это связано с традиционно невысоким уровнем подготовки по этому разделу и формализмом в преподавании начал анализа. В то же время в экзаменационной работе содержалось три задания по данному разделу, требовавших неформального понимания смысла производной функции и простейших методов математического анализа.

Составление вариантов КИМ с использованием открытого банка заданий с кратким ответом способствует демократизации процедуры экзамена, повышает эффективность подготовки к экзамену. Значительный объем заданий банка препятствует прямому «натаскиванию» на решение конкретных заданий.

Вместе с тем приходится констатировать, что в условиях однократного и одноуровневого государственного экзамена по математике невозможно одинаково точно измерить уровень подготовки участников всех групп, объективно разнящихся между собой целым рядом свойств. Это одна из причин, по которым предоставляется целесообразным рассмотреть, в соответствии с рекомендациями комиссии при Президенте РФ, а также с учетом международного опыта, вопрос о разделении в перспективе в рамках ЕГЭ по математике экзаменов базового и профильного уровня.

Общая тенденция увеличения в структуре КИМ ЕГЭ по математике объема заданий с развернутым ответом и усиление их значения делает еще более актуальной проблему отбора и адекватной подготовки членов региональных предметных комиссий по проверке выполнения заданий с развернутым ответом. Представляется разумной идея о государственной сертификации региональных экспертов после прохождения ими соответствующего обучения.

В целом ЕГЭ по математике 2010 г. показал, что значительная часть выпускников осваивают курс математики средней (полной) школы, овладевают математическими компетенциями, необходимыми в обычной жизни и для продолжения образования по выбранной профессии. Выявленные проблемы преподавания математики в школе допускают возможность их эффективного решения в среднесрочной перспективе.

ШЕСТОЙ ЗАОЧНЫЙ КОНКУРС УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Конкурс, в котором учитель может проверить свои профессиональные качества, проводится газетой «Математика» совместно с Московским центром непрерывного математического образования.

Что требуется от участников конкурса? Обычные учительские навыки — умение решать задачи и находить ошибки в решениях. О результатах 2010 года также читайте с № 20/2010.

Что дает участие в конкурсе? Все участники конкурса, решившие хотя бы одну задачу (то есть заработавшие за ее решение не менее 10 баллов), получают свидетельство участника. А победители конкурса, как и в предыдущие годы, будут награждены дипломами газеты «Математика» и учебно-методической литературой по математике.

В 2010 г. победители и призеры конкурса были поощрены двумя замечательными книгами, предоставленными издательствами «Дрофа» и «Бином»:

Голубев В.И., Ерганжиева Л.Н., Мосевич К.К. Построение треугольника. — М.: Бином, 2008.

Башмаков М.И. Математика в кармане «Кенгуру». — М.: Дрофа, 2010.

Большое спасибо за это руководителям и методистам издательств.

Кроме того, победители традиционно будут приглашены к участию в очном конкурсе или интернет-туре, которые пройдут в Москве в сентябре 2011 года.

Что нужно делать? Вам предлагается выполнить 9 заданий, разбитых на два блока: математический (задания 1–5) и методический (задания 6–9).

Работы (не ксерокопированные и не сканированные) с пометкой «На конкурс» следует выслать к нам в редакцию по адресу: редакция газеты «Математика», Издательский дом «Первое сентября», ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165. Срок отправки работ — до 1 мая 2011 года (по почтовому штемпелю).

Вместе с работой необходимо выслать заполненный бланк заявки.

Допускаются к участию и коллективные работы.

Всем участникам конкурса будет обеспечена анонимность участия и объективность проверки.

Приглашаем вас к участию в конкурсе и желаем успеха!

Заявка участника шестого заочного конкурса учителей математики

Форма участия	Индивидуальная / коллективная	
Фамилия		
Имя		
Отчество		
Домашний адрес	Индекс	
Телефон		
Адрес электронной почты		
Место работы		
Должность		
Недельная нагрузка в этом учебном году		

I. Математический блок

Решите задачи (№ 1–5).

1. На рынке продавали раков: больших — по 5 рублей, маленьких — по 3 рубля, а также жаб — по рублю. Иван и Степан купили себе раков на одинаковые суммы денег, причем Иван купил больших и маленьких раков поровну, а Степан — вдвое меньше больших раков, чем маленьких. Иван расплатился одной сторублевой купюрой, а Степан — несколькими десятирублевыми. У продавца не оказалось мелких денег, поэтому он выдал сдачу Ивану опять же раками, а Степану — жабами. Сколько всего животных унесли приятели с рынка?

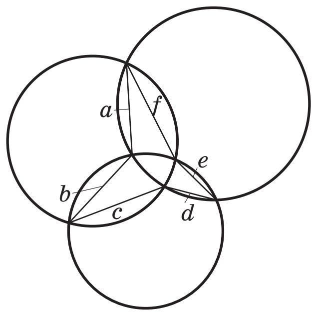
2. В стране 2011 городов. Какое наименьшее количество авиалиний потребуется, чтобы из любого города добраться в любой другой, делая не более двух пересадок?

3. В основании пирамиды $PABCD$ расположен четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 6$, $\angle ABC = 60°$, $\angle BCD = \angle DAC = 30°$. Каждая боковая грань пирамиды образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем пирамиды.

4. Докажите, что для любых действительных чисел a, b и c выполняется неравенство

$$|a| + |b| + |c| + |a + b ++ c| \geq$$
$$\geq |a + b| + |b + c| + |c + a|.$$

5. Даны три попарно пересекающиеся окружности, в которых последовательно соединены точки их попарного пересечения. Длины получившихся хорд равны a, b, c, d, e и f. Найдите и обоснуйте равенство, связывающее между собой данные длины хорд.



II. Методический блок

В текстах, предложенных в № 6 и № 7, могут содержаться математические ошибки (причем как в «ответах», так и в «решениях»). Укажите все ошибки. Если «решение» неверно, то приведите верное решение. В № 8 даны четыре решения одной задачи, предложенные учащимися. Оцените каждое из решений: верное оно или нет, какие в нем есть ошибки и недочеты. В задании

№ 9 требуется провести аналитический обзор учебной литературы.

6. «Задача». Рассматриваются все треугольники ABC, у которых фиксированы длина стороны AB и сумма длин двух других сторон. У какого из этих треугольников высота, проведенная к стороне AB, имеет наибольшую длину?

«Ответ»: такого треугольника не существует.

«Решение». Так как $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot h$ и длина AB — фиксирована, то высота h имеет наибольшую длину, если S_{ABC} принимает наибольшее значение. Поскольку $S_{ABC} = pr$ и полупериметр p данного треугольника зафиксирован, то S_{ABC} — наибольшая, если наибольшее значение принимает радиус r окружности, вписанной в данный треугольник. Но $r=(p-AB)\operatorname{tg}\frac{\angle ACB}{2}$, значит, r принимает наибольшее значение при наибольшем значении тангенса указанного угла.

Угол $\alpha=\frac{1}{2}\angle ACB<90°$, функция $\operatorname{tg}\alpha$ на промежутке (0; 90°) возрастает от 0 до $+\infty$, то есть наибольшего значения тангенса не существует, значит и треугольника с наибольшей длиной высоты также не существует.

7. «Задача». Два артиллериста стреляют по воробью. Один попадает с вероятностью 0,2, другой — с вероятностью 0,6. В результате залпа из двух пушек в цель попал только один снаряд. Какова вероятность того, что промахнулся первый артиллерист?

«Ответ»: $\frac{1}{3}$.

«Решение». Первый артиллерист промахивается с вероятностью 0,8, а второй – с вероятностью 0,4. Поэтому вероятность промаха первого в два раза выше, чем вероятность промаха второго. Поскольку в цель попал только один снаряд, то сумма вероятностей промахов первого и второго равна 1. Следовательно, первый промахнулся с вероятностью $\frac{1}{3}$.

8. В самостоятельной работе для 10-го класса было дано следующее дополнительное задание: «Найдите все значения x, для которых выполняется равенство $\operatorname{arctg} x^{-1} = \operatorname{arcctg} x$». Учитель получил четыре различных решения, которые приведены ниже.

Решение Коли. Найдем тангенсы от каждой части равенства:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} x^{-1}\right)=\frac{1}{x};$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)}=\frac{1}{x}.$$

Значит, исходное равенство выполняется при всех значениях x, кроме нуля.

Решение Оли. Найдем котангенсы от каждой части равенства:

$$\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg} x^{-1}\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} x^{-1}\right)}=x;$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x.$$

Значит, исходное равенство выполняется при всех значениях x.

Решение Саши. Так как

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} x^{-1}\right)=\frac{1}{x},$$

а

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}$$

— не существует (выражение $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не имеет смысла), то равенство не выполняется ни при каких значениях x.

Решение Маши. Заметим сначала, что $x\neq 0$. Воспользуемся затем определениями обратных тригонометрических функций. Пусть $\operatorname{arctg} x^{-1} = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{x}$, где $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arcctg} x = \beta$, тогда $\operatorname{ctg}\beta = x$, где $0 < \beta < \pi$. Следовательно, $\operatorname{ctg}\alpha = x = \operatorname{ctg}\beta$. Так как на промежутке $(0; \pi)$ функция котангенс убывает, то каждое свое значение она принимает только при одном значении аргумента, то есть $\alpha = \beta$. Значит, исходное равенство верно при всех значениях x, кроме нуля.

9. В различных школьных учебниках последовательность изучения тем различна. Это, в частности, касается отдельных тем первого раздела стереометрии «Параллельность и перпендикулярность в пространстве». В некоторых учебниках сначала изучается параллельность прямой и плоскости, затем — параллельность плоскостей, после чего — перпендикулярность прямой и плоскости и перпендикулярность плоскостей. В других — сначала перпендикулярность, а затем параллельность (при этом параллельность плоскостей предшествует параллельности прямой и плоскости).

Сделайте обзор последовательности изучения этих тем и их приложений, рассмотрев как можно больше школьных учебников (в том числе для профильного и углубленного изучения), и оцените с методической точки зрения «плюсы и минусы» каждой из этих систем изложения материала.

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

ЗАДАЧА С2 – СТЕРЕОМЕТРИЯ ДЛЯ ВСЕХ

С. Вальковский

Часть «С» Единого государственного экзамена содержит две задачи по геометрии. Задача С2 — по стереометрии, она оценивается в 2 первичных балла (из 30 возможных) и при этом не слишком сложна для решения.

Чаще всего задание состоит в вычислении отрезков или углов, связанных с многогранниками или телами вращения, поэтому необходимо обратить внимание на следующие объекты: **прямая, плоскость, прямая призма, прямоугольный параллелепипед, пирамида, конус, цилиндр**. Одним из основных фактов, используемых в решении задач этой категории, является **теорема о трех перпендикулярах (ТЗП)**. Кроме того, не обойтись без знания таких основных фактов планиметрии, как **теорема Пифагора, теорема косинусов, признаки равенства и признаки подобия треугольников**.

Обратите внимание!

Один балл начисляется за верное описание (построение) угла (расстояния), которое требуется найти. Второй — за верно проведённые вычисления и правильный ответ.

Теорема о трёх перпендикулярах. Прямая a, лежащая в плоскости α, перпендикулярна наклонной b к этой плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна (ортогональной) проекции прямой b в плоскость α.

Задания типа С2 делятся на два основных вида: на **нахождение углов** и на **нахождение расстояний**. Ниже описаны основные методы решения задач первого типа.

1. Угол между прямыми

Определение. Углом между скрещивающимися прямыми в пространстве называется угол между двумя прямыми, параллельными данным, лежащими в одной плоскости.

Чтобы найти угол между прямыми a и b, необходимо **провести вспомогательную прямую c, параллельную одной из них (например, a), через какую-нибудь удобную точку на другой прямой**. Получившаяся прямая c и прямая b лежат в одной плоскости, и угол между ними равен искомому.

Пример. Основанием прямой четырех-

2. Угол между прямой и плоскостью

Определение. Углом между (пересекающимися) прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее (ортогональной) проекцией на эту плоскость.

Чтобы найти угол между прямой a и плоскостью α нужно **построить точку A пересечения прямой и плоскости, а затем из какой-нибудь удобной точки прямой a опустить перпендикуляр в плоскость α (чаще всего — руководствуясь ТЗП), получив таким образом проекцию AO**. Угол между a и AO и является искомым.

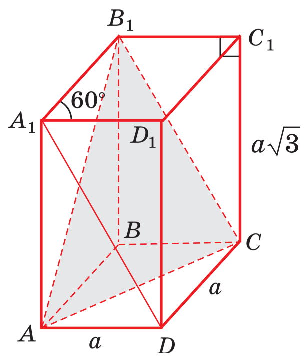
3. Угол между плоскостями

Определение. Углом между (пересекающимися) плоскостями называется угол между прямыми пересечения этих плоскостей с плоскостью, перпендикулярной прямой их пересечения.

Для нахождения угла между плоскостями требуется **найти их общую прямую a, выбрать на ней удобную точку A, после чего в каждой из плоскостей восстановить в точке A перпендикуляры к прямой a**. Угол между этими перпендикулярами будет искомым.

Пример. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. Длины всех боковых ребер равны 3, точка M — середина ребра AS. Через прямую BM параллельно диагонали AC проведена плоскость. Определите величину острого угла (в градусах) между этой плоскостью и плоскостью SAC.

угольной призмы является ромб с углом в 60°. Найдите острый угол между большей диагональю нижнего основания и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани, если отношение высоты призмы к стороне ее основания равно $\sqrt{2}$.



Решение. Пусть основаниями призмы являются ромбы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Тогда если $AD = a$, то большая диагональ основания (AC) соединяет вершины углов в 60° и равна $a\sqrt{3}$, а боковые стороны призмы равны $a\sqrt{2}$.

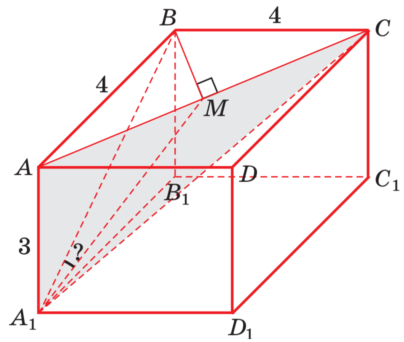
Боковые грани в таком случае — прямоугольники, диагонали которых, по теореме Пифагора, тоже равны $a\sqrt{3}$.

Мы хотим найти **угол между AC и A_1D**. Заметим, что диагональ B_1C параллельна диагонали A_1D, но при этом имеет с прямой AC общую точку C. **Таким образом, искомый угол равен углу между AC и B_1C,** которые являются сторонами треугольника AB_1C и обе равны $a\sqrt{3}$.

Между тем AB_1 тоже равна $a\sqrt{3}$, так как и она является диагональю боковой грани призмы. Получается, что нам необходимо найти угол в равностороннем треугольнике, который, как известно, равен 60°.

Ответ: 60°.

Пример. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью AA_1C и прямой A_1B, если $AA_1 = 3$, $AB = 4$, $BC = 4$.



Решение. Заметим, что точка A_1 — общая для прямой и плоскости. Таким образом, достаточно **опустить перпендикуляр на плоскость из произвольной точки прямой A_1B.** Интуитивным выбором является точка B.

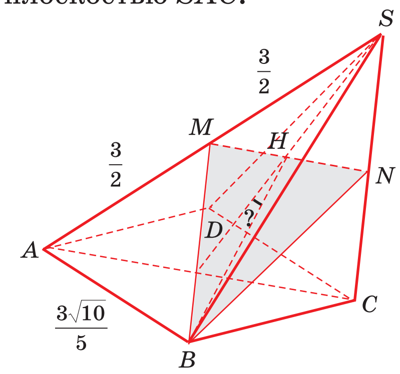
BD и AC перпендикулярны, как диагонали квадрата $ABCD$, а прямая A_1A перпендикулярна BD, поскольку она перпендикулярна всей плоскости $ABCD$. Следовательно, ***по признаку перпендикулярности прямой и плоскости,*** прямая BD перпендикулярна всей плоскости A_1AC (так как она перпендикулярна двум ее прямым: AC и A_1A).

Пусть M — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Тогда $BM = 2\sqrt{2}$, а **искомый угол — это угол между BA_1 и A_1M.**

Из прямоугольного треугольника BA_1M: его синус равен отношению BM к A_1B, то есть $\frac{2\sqrt{2}}{5}$, а значит, сам угол равен $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

стью и плоскостью SAC.



Решение. Прямая l, проходящая через точку M параллельно AC, лежит в обеих плоскостях по условию, то есть является их общей прямой. **Осталось лишь построить к ней по перпендикуляру в каждой из плоскостей.**

Пусть N — середина ребра SC (она лежит на прямой l). В плоскости SAC перпендикуляром будет прямая SH, где H — середина MN (так как пирамида — правильная). В плоскости BMN перпендикуляром будет прямая BH — медиана, а значит, и высота равнобедренного треугольника MBN. Следовательно, **осталось найти величину угла BHS.**

По теореме Пифагора, высота пирамиды равна $\sqrt{9-\frac{9}{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, значит, $SH = \frac{3\sqrt{5}}{5}$. Заметим, что $\cos\angle SAB = \frac{\sqrt{10}}{10}$, применив теорему косинусов к треугольнику BAM, найдем, что $BM = BN = \frac{9\sqrt{5}}{10}$. Отсюда, по теореме Пифагора, $BH = \frac{3\sqrt{10}}{5}$. Применив теорему косинусов к треугольнику SBH, найдем, что $\cos\angle SHB = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то есть $\angle SHB = 135^\circ$, а искомый угол равен $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

Ответ: 45°.

ИНДЕКСЫ ПОДПИСКИ | Почта России - 79083 (инд.); - 79584 (орг.) | Роспечать - 32031 (инд.); - 32598 (орг.)

Н. ЛЕВИНТОВА,
Е. КАЛИНИНА,
Москва

КАК ПОМОЧЬ ВЫПУСКНИКАМ ИЗБЕЖАТЬ ОШИБОК НА ЕГЭ

Почему выпускники школы так боятся Единого государственного экзамена? Понятно волнение тех, кто хочет получить максимально высокий балл: они боятся допустить ошибку и получить низкую оценку, не соответствующую уровню их знаний. Понятно волнение и тех одиннадцатиклассников, которые, не гонясь за высоким баллом итоговой аттестации, боятся получить оценку ниже критической и остаться вовсе без аттестата. Меньше других волнуются те, кто математику с азов не любил, никогда не стремился ее познать и теперь из-за нее, проклятой, еще и без аттестата рискует остаться. Эти ученики дошли до последнего класса школы в безмятежном состоянии благодаря, мягко говоря, странностям системы образования, которая приучила многих школьников получать завышенные оценки по всем предметам. Не будем сейчас исследовать причины этих странностей, но согласимся, что принцип «три пишем, два в уме», действовавший в последние десятилетия, привел к атрофированию чувства ответственности у детей, не мотивированных своими родителями и учителями на учение. Единый государственный экзамен явился для них, да и для остальных старшеклассников, шоковой терапией, которая не столько лечит, сколько наказывает нынешних экзаменующихся. Хотя бы из страха наказания самые нерадивые выпускники тоже хотят получить заветный «выходной» балл. Поэтому в помощи педагогов при подготовке к ЕГЭ нуждается абсолютное большинство учащихся, заканчивающих среднюю школу.

Несколько слов о ЕГЭ по математике

Наше отношение к ЕГЭ менялось, меняется и будет меняться. В одном мы уверены: государственная аттестация выпускников школы нужна. Можно обсуждать, в какой форме и по каким правилам должна проводиться эта аттестация, кто должен ее организовывать, кто и как оценивать, как интерпретировать и использовать ее итоги... Но ее цель — получение объективных результатов обучения — устраивает большинство учителей. И будет очень жаль, если, согласно проекту федеральных стандартов образовательных систем второго поколения, этот экзамен перестанет быть обязательным для всех выпускников общеобразовательных школ.

В последнее время все больший интерес вызывает содержание ЕГЭ по математике. Сопоставляя требования к результатам обучения государственного стандарта первого поколения (и проекта ФГОС второго поколения) со спецификацией демоверсий последних двух лет, следует отметить, что заданий практико-ориентированных в демоверсии ЕГЭ-2010 четыре: B1, B2, B5 и B10, из которых B10, предлагающее рассмотреть неравенство, традиционно сложнее для учащихся. Если принять во внимание, что «проходным баллом» в 2009 году было 4 успешно выполненных задания, а в 2010-м — три, то становится понятным, что компетентность выпускника школы в области математики констатируется в том случае, когда семнадцатилетний гражданин продемонстрирует свою способность рационально тратить деньги на обеспечение своей жизни, выбирая оптимальные варианты траты, а также способность анализировать информацию, представленную в различных видах: текстовом, табличном, графическом. Таким образом, учеников (после ознакомления с заданиями B1–B12) можно напутствовать словами: «Ребята, государство хочет, чтобы, выйдя из школы, вы не пропали в этой жизни. Не проявите себя на экзамене дураками и лохами (да простится нам употребление не вполне принятых слов), и вы получите аттестат о среднем образовании». Грубовато, но вполне понятно нашим старшеклассникам, которым весной 2011 г. придется штурмовать крепость под названием ЕГЭ.

Советы тем, кто ориентируется более чем на 3 верно выполненных задания, и тому, кто хочет помочь в этом своим ученикам

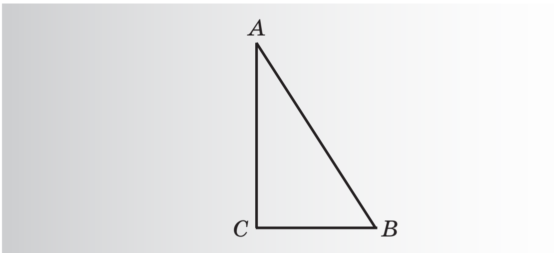
Кто умеет решать, тот боится ошибиться

Любой учитель знает, что самой распространенной и трудно устранимой является ошибка из-за невнимательности. Не внушая детям ложных надежд на то, что от этой ошибки можно избавиться путем заклинаний вроде «Будь внимательнее. Внимательно читай. Внимательно решай. Внимательно записывай ответ» и т.п., считаем, что подобные наставления сродни призывам бороться самому с собой, — предлагаем ребятам развивать в себе привычку ***проверять каждый шаг*** и ***умение находить ошибку в записи решения***.

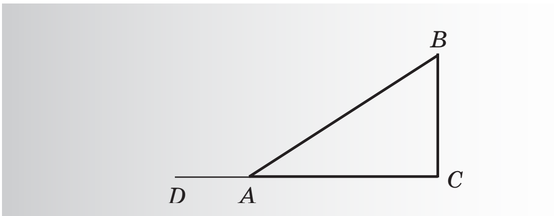
Хорошим упражнением для развития способности обнаруживать ошибки является парная взаимопроверка самостоятельной работы. Но более эффективным средством оказалась проверка работы ученика, выполненная учителем без исправления и подчеркивания ошибок. При этом указывается задание, в котором сделана ошибка. Эту работу, в зависимости от уровня внимательности учащегося, можно разбить на этапы: на первом указывается строка, в которой сделана ошибка, на втором — блок строк записи решения задания, содержащий ошибку, на третьем — только задание. Эта трудоемкая для учителя работа возможна, если учащихся с большим дефицитом внимания достаточно мало, примерно 2–4 на класс.

Чтение и осмысление текстов

Проблема искоренения ошибок из-за невнимательности смыкается с проблемой функциональной грамотности — гораздо более серьезной проблемой образования. Речь идет не о простом умении читать, а об умении извлекать для дальнейшего пользования информацию, представленную текстом, то есть об универсальном учебном умении. Ясно, что для этого, в первую очередь, требуется внимание. Вот пример задания B4 ЕГЭ-2010: в нескольких вариантах этого задания дается практически один и тот же рисунок:



или



Но текст задания в разных вариантах различен.

Вариант 1. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $30°$, $AB=\sqrt{3}$. Найдите AC.

Вариант 8. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $30°$. Найдите синус угла BAD.

Вариант 9. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, угол A равен $60°$, $BC=\sqrt{3}$. Найдите AC.

Нас удивило, что ошибки в выполнении этого задания нашими учениками были связаны не с незнанием теории, а именно с невнимательным прочтением текста задания: решив первую задачу, следующую они решали с помощью тех же действий, не видя различий в условиях и в заданиях.

Аналогичная ситуация возникает при подготовке к выполнению заданий B2, где требуется проанализировать данные, представленные графически. Многим учителям известна эта проблема: длинные тексты, поясняющие зависимости между данными и их графическую интерпретацию, ученики не только не любят осмысливать, но даже дочитывать до конца. Иными словами, подготовка к ЕГЭ в виде решения различных вариантов одного задания лучше всего настраивает учащихся на осмысленное отношение к тексту и развивает их внимание.

О самопроверке

Когда-то проверка была обязательной частью решения. Привычка проверять решение формировалась в начальной школе путем предъявления требования к завершению решения проверкой. За невыполнение проверки снижалась оценка. Но именно тотальность применения проверки и погубила этот прием, вытеснила из сознания ребят истинный смысл этой работы. Когда, работая с пятиклассниками, пытаешься требовать от них проверки решения задачи, то потом не знаешь, смеяться или сердиться, читая ошибочное решение и такую же ошибочную проверку, где, не утруждая себя вычислениями, а просто соблюдая заученную форму проверки по типу обратного действия, ученики одно за другим «выполняют требования» учителя. Чтобы решить проблему, показываем ребятам несколько способов проверки, одновременно отменив снижение оценки за ее отсутствие. Эта отмена — во-первых, восстанавливает справедливости, так как проверку можно рекомендовать, но не требовать выполнять ее письменно, если, конечно, проверка не является частью решения, как, например, при отборе посторонних корней; во-вторых, проверка должна стать привычкой, а не отпиской в угоду учителю. Сказать, что педагогические усилия в этом направлении быстро приводят к успеху, нельзя. Объясняется это теми же причинами, что лежат в основе общего неуспеха в преподавании математики: долгие годы успешность обучения измерялась школьной отметкой, не совпадающей с объективной оценкой результатов обучения в силу своей многофункциональности. Следствием этого явления было снижение до минимума волевого характера обучения, то есть низкий уровень мотивации к обучению наших учащихся и их ответственности за результаты обучения. Обучение ради отметки сводило на нет все попытки учителей придать целенаправленность и осмысленность процессу обучения.

Разделим способы проверки на математические и житейские.

Начнем с ***житейских***. Ребятам они нравятся за простоту исполнения и за то, что обращаются не к математическим знаниям, а к здравому смыслу. (Их еще они называют проверкой на правдоподобие. Этот прием замечательно описан в книге Д. Пойа «Математика и правдоподобные рассуждения».)

1. *«Три с половиной землекопа»*. Способ заключается в том, что, получив ответ, ученик должен проверить его на правдоподобие. Землекопов должно быть целое число; скорость автомобиля, движущегося на большом отрезке пути, не может равняться 1 км/ч или 5 км/ч; температура воздуха не может равняться 10 000 °С. Таких примеров можно найти множество.

2. *Сравнение данных и найденных величин*. Ответ может показаться правдоподобным, но не соответствовать данным. Например, собственная скорость теплохода не может быть меньше скорости течения реки. Масса товара в упаковке должна быть больше его массы без упаковки (брутто больше нетто). Время в пути с остановкой больше времени в пути тем же способом по тому же маршруту, но без остановки. Налог не может быть больше стоимости. И тому подобное.

3. *Прикидка*. Этот способ проверки решения текстовых задач больше всего подходит разумным ребятам, которые не любят просто репродуцировать то, что сказал учитель, а обязательно делают по-своему. Такой ученик, еще до решения задачи, прикинет, что может получиться, а уже потом применит первые два способа. Прикидку делают с различными целями:

— определить порядок искомой величины: расход бензина не должен превышать объема бака (если в задаче не говорится о его пополнении); количество съеденных одним человеком пирожков не может быть более 10, скорее, 1–3; разумная цена батона хлеба примерно от 10 до 30 р., но не 300 р. — и так далее;

— определить промежуток, содержащий искомую величину: температура воздуха на улице обычно принадлежит промежутку от –20 до +20 градусов, возраст школьника — от 6–7 до 17–18 лет; зарплата строителя — от 5 до 50 тыс. р. и т.п.;

— определить знак искомой величины: расстояние, скорость и масса положительны, температура может быть отрицательной, отрицательным может быть баланс (разность между доходами и расходами предприятия);

— определить вид ответа: сколько величин требуется найти; что написать в ответе: число или слово;

— возможны и другие критерии определения ожидаемого вида искомой величины, такие, как установление принадлежности к определенному подмножеству действительных чисел, соответствие наименования и т.п.

Математические способы. Не ставим перед собой цели дать обзор всех способов выполнения проверки конкретных заданий. Это грандиозная проблема. Мы говорим о способах самопроверки и формировании у учащихся привычки их применять.

Как формировать? Например, хорошо бы предварять решение задания прикидкой результатов решения или хотя бы ставить вопросы о возможном результате еще до того, как будут рассмотрены различные методы решения данного задания. Если эту работу делать систематически, то навык самопроверки сформируется.

1. Решение несколькими способами. Если считать лучшим способом проверки правильности решения повторное выполнение задания, то лучше выполнить решение другим способом, дабы не наступать на одни и те же грабли, то есть не повторять одну и ту же ошибку. И здесь опять приходится ударяться в ностальгические воспоминания, когда при проверке домашнего задания на уроке учитель обязательно задавал вопрос: «А кто решил эту задачу другим способом?». И бывало, что увлекаешься сама и увлекаешь детей поиском наибольшего числа способов решения. Особенно интересно было «сталкивать» в одной задаче аналитический, графический и координатный методы. Это если их делить по способу задания функции. Но можно прибегнуть и к другим интерпретациям. Что касается заданий ЕГЭ, то наиболее плодотворна работа по поиску различных способов решения геометрических заданий С2 и С4 и задания с параметром С5. Среди работ выпускников 2010 г. были решения С2 и С4 и синтетическим, и координатным, и векторным способами. Такой вариативный подход служит и самопроверке, и, следовательно, уверенности в правильном решении, и способствует выбору оптимального способа решения, который говорит о математическом вкусе и математической культуре выпускника. В общем, будучи убежденными сторонниками решения заданий различными способами, мы постоянно внушаем ученикам мысль о полезности этого занятия.

2. Прикидка значения ответа и подбор частных решений. Тригонометрические уравнения школьного курса приучили учащихся к значениям тригонометрических функций в пяти точках: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ и π. Поэтому ученик обретет больше уверенности в себе, если предварительно выяснит, не является ли какое-либо из этих чисел решением задания. То же самое можно сказать и о других заданиях, в которых полезно предварительно попробовать «угадать» простенькое значение переменной вроде 0, ± 1 и др.

3. Прикидка вида ответа. Самый простой пример: решая квадратное уравнение, мы знаем, что число корней не более двух. Интересно делать прикидку при решении некоторых систем уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=7, \\ x+y=-2. \end{cases}$$

Эта система симметрична относительно x и y, поэтому если она имеет решение $(x_0;\, y_0)$, то обязательно будет иметь и еще одно решение: $(y_0;\, x_0)$;

4. Прикидка числа решений чаще всего делается графическим способом:

$$\begin{cases} y=6-\dfrac{2}{x}, \\ y=x-2,7. \end{cases}$$

Графиком первого уравнения является гипербола, а второго — прямая. Графики имеют не более двух общих точек. Соответственно, столько же будет и решений системы.

5. Область допустимых значений. Признавая привычку находить область допустимых значений данной математической модели до начала ее решения культурной, не согласны с требованием обязательности этого нахождения. Достаточно привести пример, в котором поиск ОДЗ намного превышает объем самого решения.

Решите уравнение

$$\sqrt{\left(1,69x^2-0,546x-32,76\right)}=1,3x+0,21.$$

Решая это уравнение возведением обеих частей в квадрат, получаем линейное уравнение, корнем которого является $x = -30$. Проверка показывает, что это число не является корнем исходного уравнения.

С другой стороны, нахождение ОДЗ определяет один из способов решения и бывает очень полезным в простых или «закрученных» заданиях, где сама ОДЗ сводится к единственному значению:

а) $\sqrt{4-0,3x}=3x-40;$

в) $\operatorname{arctg}\sqrt{\cos x-1}=\sin\dfrac{x}{2\pi}.$

6. Свойства функций. Так же, как и при выполнении заданий, при самопроверке полезно бывает вспомнить о свойствах функций.

Рассмотрим задание С1 одного из вариантов тренировочного ЕГЭ:

$$\sqrt{2}\sin x=\sin y,$$
$$\sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\cos$$

Заметив, что знаки синусов и косинусов двух чисел совпадают, делаем вывод о том, что x и y принадлежат одной четверти. Значения переменных, равные $\frac{\pi n}{2}$, где n — целое, легко отбрасываются. Заметив до боли знакомые $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, попробуем подобрать (см. п. 2) значение синусов и косинусов x и y. В ближайшей попытке, предположив, что $\sin x = \frac{1}{2}$, а $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, получаем в качестве подарка

$$\sin y = \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Получив частный результат, можно продолжить поиски остальных решений.

Еще одно задание из части 2 ЕГЭ, С4. Решите неравенство $2^{\log_4(25x^4-10x^2+1)} > 4x$. Заметив, что в левой части неравенства дана положительная при всех допустимых x и четная функция, а в правой – хорошо знакомая нечетная функция прямой пропорциональности, делаем вывод, что в случае существования общих точек искать их нужно в первой координатной четверти. А неположительные x из области определения несомненно являются решениями неравенства. Так что, еще не решая неравенства, мы уже прикинули результат.

Закончим этот раздел перечислением нелепых ошибок, довольно часто встречающихся в работах учащихся:

$$2 \cdot 3 = 5, \qquad 2 + 3 = 6, \qquad a^{-1} = -a,$$

$$\frac{1}{2} = 1,2, \qquad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{7}, \qquad \frac{1}{a} = a,$$

$$a \cdot a = 2a, \qquad a + a = a^2, \qquad (-1)^2 = -1^2;$$

если об этих досадных опечатках сказать школьникам заранее, объяснив различие в записях, то, возможно, память учащихся в нужный момент воспроизведет увиденное ранее и ошибка не будет сделана.

Вычисления

Одно из положительных проявлений ЕГЭ — это повышение культуры вычислений. Запрет на применение калькулятора, который вначале был воспринят нашими учениками как «понарошечная» угроза, вскоре — под влиянием рассказов тех, кто уже прошел испытание ЕГЭ, стал реальностью. Но к этому времени проблемы с вычислениями достигли такого уровня, что после тестирования в начале 10-го класса по теме «Вычисления» программу ликвидации пробелов для значительного числа предвыпускников пришлось начать с восстановления навыков письменного сложения. Знание таблицы умножения тоже требовало доработки. И те, кто ставит перед собой более серьезную задачу, чем перевалить за борт школьного корабля, повторяли таблицу и заново учились складывать в столбик и делить уголком.

Примерный вариант тестовой работы по теме «Вычисления»

Цель работы: выявление индивидуальных пробелов в вычислительных навыках учащихся.

Проверка навыков сложения, вычитания, умножения и деления в выполнении действий:

— с натуральными числами;

— с десятичными дробями;

— с обыкновенными дробями;

— с рациональными числами;

частные случаи умножения и деления на числа вида 10^n, где $n \in \boldsymbol{Z}$; порядок действий.

1. Выполните действия:

а) $234 + 9847$; б) $67\,890 - 9812$;
в) $3054 \cdot 608$; г) $687\,018 : 402$.

2. Запишите результаты действий:

а) $45{,}93 \cdot 10$; б) $45{,}93 : 100$;
в) $45{,}93 \cdot 0{,}0001$; г) $45{,}93 : 0{,}1$.

3. Найдите значение выражения:

а) $0{,}188 + 3{,}5$; б) $60{,}09 - 4{,}3$;
в) $1{,}067 \cdot 0{,}6$; г) $324 : 1{,}8$

4. Выполните действия над дробными числами:

а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; б) $\frac{3}{20} - \frac{2}{15}$; в) $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{15}$;
г) $\frac{2}{3} : \frac{5}{9}$; д) $5 + \frac{2}{3}$; е) $44 : \frac{11}{4}$.

5. Вычислите:

а) $2\frac{7}{8} + 0,23$; б) $5,76 : 2\frac{2}{5}$;
в) $0{,}14 + (-45)$; г) $-63 : (-0{,}7)$;
д) $-2 : 4 - \left(-2,25 : \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

6. Найдите значение данного выражения:

$$43 - 3 \cdot (6{,}9 - (-3{,}9)) : (-0{,}36).$$

Программу преодоления индивидуальных трудностей пришлось писать для каждого ученика и работать над техникой вычислений весь десятый класс. Результаты работы соответствовали мере ответственности, осознаваемой каждым учеником. В 11-м классе подобную работу планируем осуществить по навыкам решения уравнений и неравенств, а также по темам «Решение треугольников», «Параллельность и перпендикулярность в пространстве» и «Нахождение величин углов на плоскости и в пространстве».

Обобщение и систематизация

При подготовке учащихся к ЕГЭ полезны уроки, на которых происходит обобщение и систематизация приемов и методов решения того или иного типа задач. За годы учебы ученики накопили определенный опыт решения задач, и полезным оказывается именно обмен этим опытом. Так, ученики обычно не испытывают затруднений при нахождении значений синуса, косинуса и тангенса, зная стороны прямоугольного треугольника. Однако при выражении сторон треугольника через эти величины возникают проблемы. Те, кто плохо освоил, как, например, найти гипотенузу через катет и острый угол, охотно пользуются при этом пропорцией.

Особенно трудным для запоминания является материал по тригонометрии, начиная с таблицы значений тригонометрических функций для некоторых углов и заканчивая свойствами тригонометрических функций и различными формулами тригонометрии. К сожалению, намечается тенденция «вытеснения» тригонометрии (и не только) из курса алгебры 9-го класса. Так, в учебнике Ю.Н. Макарычева и др. «Алгебра, 9» 2010 г. издания полностью отсутствует глава «Тригонометрические выражения и их преобразования» и существенно переработана глава «Степень с рациональным показателем». Этот материал, видимо, предполагается изучать в 10–11-х классах. Но согласно существующим программе и планированию курса алгебры и начал анализа 10–11-го классов, этот материал не может быть изучен в полном объеме и на должном уровне понимания из-за элементарной нехватки учебного времени. Он требует кропотливой и неспешной работы учителя и вдумчивости и аккуратности от учеников. Считаем, что тригонометрию хотя бы до формул приведения включительно необходимо изучать в 9-м классе. При этом обязательно учить учащихся осознанно пользоваться тригонометрическим кругом, как «универсальной шпаргалкой», на которой записана вся необходимая информация по свойствам тригонометрических функций, необходимая ученику. Умение пользоваться тригонометрическим кругом очень важно при решении задачи С1 в любом ее виде (уравнение, система уравнений и т.п.), так как позволяет ученику видеть множество решений и успешно отбрасывать посторонние корни, если они есть. Так же подробно изучаем в 10-м классе тему «Тригонометрические неравенства», изображая множество решений неравенства на тригонометрическом круге. Это позволяет перестроить учеников при решении задачи С1 с записи корней тригонометрического уравнения с помощью общей формулы к форме записи с помощью совокупности, предварительно изобразив множество корней на круге. Процесс нахождения по значению синуса, косинуса или тангенса соответствующих им значений переменной не вызывал особых затруднений у учащихся, даже если эти значения находились не в I координатной четверти.

То же самое можно сказать и о теме «Степень с рациональным показателем». Изучение ее в 9-м классе дает возможность при ее обобщении в 11-м уделить внимание приемам и методам преобразований, что, несомненно, развивает математическую культуру учащихся.

Введение в курс математики элементов теории вероятностей и статистики призвано приблизить школьный курс математики к решению разнообразных задач, с которыми каждый человек сталкивается в своей повседневной жизни. Это, конечно, правильно и своевременно. Хотелось бы только, чтобы это происходило ВМЕСТЕ, а не ВМЕСТО изучения отдельных тем алгебры или геометрии. Знания, которые ученик получает в течение своей школьной жизни, не должны, на наш взгляд, опускаться до уровня применения их при расчете стоимости расхода бензина или количества обоев, нужных для оклейки комнаты. Красоту и гармонию математики, равно как и любой другой области знания, можно постичь, накопив немалый объем этих самых знаний.

Подводя итог написанному, укажем еще на один аспект экзаменационной работы, влияющий на результат: время. Многие выпускники, не выдерживая нервного напряжения, завершают работу раньше отведенного времени. В таком случае запоздалые озарения: «Решать-то нужно было не так» или «Ответ-то должен был быть иным» — весьма нередки и огорчительны. Поэтому стараемся научить учащихся хронометрировать свою работу. Вместе прикидываем, сколько времени должно уйти на выполнение каждого задания и на его проверку, выделяем как отдельный этап проверку всей работы. Определяем тактику поведения при нехватке времени, планируем время на внимательное прочтение каждого задания и на прочтение всей работы в целом. Даже время на 5-минутный отдых отводим в момент тупикового состояния поиска решения, или между частями, или между решением и последней проверкой.

Успех на экзамене зависит, прежде всего, от ответственного отношения к нему самого учащегося. Но систематическая работа учителя должна убедить учеников в том, что они способны преодолеть даже чрезвычайные трудности, что секрет успеха — в спокойной и систематической работе, которая в базовой части посильна абсолютно каждому молодому человеку, способному обучаться в общеобразовательной школе.

В. ПЫРКОВ,
г. Батайск,
Ростовская обл.

МАТЕМАТИКИ — ЮБИЛЯРЫ 2011 ГОДА

175 лет

Сергей Александрович РАЧИНСКИЙ

(6 мая 1836 – 23 сентября 1888)

Русский деятель в области народного просвещения. Доктор естественных наук, профессор Московского университета. На протяжении своей деятельности построил более 20 начальных школ, 4 из которых содержал полностью. В 1868 г. организовал в своем имении начальную школу, где и учительствовал, стремясь развить у крестьянских детей математические способности, вызвать у них интерес к математике. Это отражено на известной картине бывшего ученика этой школы Н.П. Богданова-Бельского «Устный счет», где изображен С.А. Рачинский на уроке математики.

Н.П. Богданов-Бельский «Устный счет»

Школа Рачинского стала лабораторией школьного образования; для обмена опытом в нее приезжали учителя со всей России. Татевская средняя школа работает в настоящее время, при ней создан музей Рачинского. Опыт работы своих школ Рачинский обобщил в книге «Сельская школа» (1902 г.). Его перу принадлежат и специальные учебные пособия по математике: «Арифметические забавы», «Геометрические забавы» (1901 г.); «1001 задача для умственного счета» (1899 г.). Эпистолярное наследие Рачинского, по мнению его биографа Н. Горбова, составляет свыше 150 томов. Ниже приведены несколько задач для устного счета из сборников Рачинского.

1. Путем устных вычислений найдите быстро результат выражения
$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}.$$

2. Сосчитать в уме, сколько будет квадрат 84.

3. Мать для приданого своей дочери с самого ее рождения откладывала ежегодно столько аршин холста, сколько ей лет. Когда дочери минуло 20 лет, из этого холста сшили рубашки, и на каждую пошло 7 аршин. Сколько рубашек?

4. Двум бабам было заказано по одинаковому числу аршин холста. Одна ткет в день 12 аршин, другая — 9. Вторая кончила свою работу 5-ю днями позже, чем первая. По сколько аршин им было заказано?

5. В начале года я купил 12 пачек конвертов. Написал я в году 237 писем, и у меня осталось 2 пачки и 13 конвертов. Сколько было конвертов в пачке?

6. Стояли березы, летели галки. На каждую березу село по галке, и осталось 5 галок. Потом на каждую березу село по 2 галки, и осталось 5 берез без галок. Сколько галок, сколько берез?

1275 лет

АЛКУИН

(736 – 19 мая 804)

Ирландский ученый, монах, сыгравший выдающуюся роль в развитии просвещения, культуры и математики в Европе. В 780 году по приглашению Карла Великого переехал во Францию и стал придворным учителем, а впоследствии главным советником и другом короля. Принимал активное участие в основании университетов в Париже и Павии. По его настоянию были открыты начальные школы в Германии и Франции. Для популяризации математики составлял задачи в форме загадок и шуток, которые дошли до нас в его сочинении «Задачи для изощрения ума юношей». Приведем некоторые из них.

1. Через реку надо перевезти троих: волка, козу и кочан капусты; на лодке, кроме перевозчика, может поместиться только один из трех. Как перевезти их, чтобы коза не могла съесть капусту, а волк не мог съесть козу?

2. 100 модиев (1 модий ≈ 8,7 л) зерна разделили между сотней людей, среди которых были мужчины, женщины и дети. Каждый мужчина получил 3 модия, каждая женщина — 2 модия, а каждый ребенок — половину модия. Сколько могло быть мужчин, женщин и детей?

3. Некто, умирая и оставляя жену в ожидании ребенка, завещал, чтобы его имущество было разделено таким образом: если родится сын, то выдать две трети имущества сыну, а одну треть вдове, а если родится дочь, то выдать две трети вдове, а одну треть дочери. После смерти завещателя у его жены родилась двойня: сын и дочь. Как разделить наследство?

4. Три наследника получили 21 винную бочку: 7 полных, 7 — наполненных до половины и 7 пустых. Найдите способы разделить наследство так, чтобы каждый получил равное количество вина и бочек.

1175 лет

Сабит ибн КОРА

(836 – 18 декабря 901)

Арабский математик, астроном, медик и философ, представитель багдадской математической школы. Перевел «Начала» Евклида на арабский язык и написал к ним комментарии; ознакомил арабских ученых с сочинением Архимеда «О правильном семиугольнике». Занимался тригонометрией и теорией чисел, в частности дружественными числами; обосновал теорию составных отношений. В геометрии ему принадлежат попытки доказательства пятого постулата Евклида; вычислил площадь параболического сегмента и объем параболоида вращения. В трактате «Книга о сечениях цилиндра и его поверхности» рассмотрел различные виды сечений цилиндра, вычислил площади эллипса и сегмента эллипса, исследовал наибольшие и наименьшие сечения цилиндра, а также доказал ряд теорем о площади части поверхности цилиндра, заключенной между двумя плоскими сечениями. Рассмотрим несколько предложенных им задач:

1. Найдите сумму квадратов n первых нечетных чисел:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2.$$

2. Если числа

$$p = 3 \cdot 2^n - 1,\ q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$$

и

$$r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1 \text{ —}$$

простые, покажите, что числа A и B будут дружественные, если $A = 2^n pq$, а $B = 2^n r$. Дружественной называют пару чисел, каждое из которых равняется сумме собственных делителей другого числа.

575 лет

РЕГИОМОНТАН

(16 июня 1436 – 6 июля 1476)

Псевдоним немецкого математика и астронома Иоганна Мюллера. Внес значительный вклад в развитие тригонометрии. В «Пяти книгах о треугольниках всех видов» тригонометрия впервые в Европе трактовалась как самостоятельная, независимая от астрономии, наука. Удачное изложение тригонометрических вопросов привело к применению алгебры при решении геометрических задач. Составил таблицы синусов для каждой минуты дуги с точностью до седьмого десятичного знака и таблицы тангенсов через каждый градус. Приведем несколько задач из его сочинений.

1. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

2. В треугольнике разность двух боковых сторон 3, высота 10 и разность отрезков основания, образуемых высотой, 6. Найдите стороны треугольника.
3. Найдите радиус круга, описанного около треугольника, если даны его стороны.
4. Найдите число, которое при делении на 17, 13 и 10 дает соответственно остатки 15, 11 и 3.
5. Решите уравнения:

а) $\dfrac{x}{10-x}+\dfrac{10-x}{x}=25;$

б) $16x^2 + 2000 = 680x$.

350 лет
Де Гийом ЛОПИТАЛЬ
(1661 – 2 февраля 1704)

Французский математик, член Парижской АН. Изучал математику под руководством И. Бернулли. Основные исследования относятся к математическому анализу и геометрии. Издал первый печатный учебник по дифференциальному исчислению – «Анализ бесконечно малых для исследования кривых линий» (1696 г.); в нем есть так называемое правило Лопиталя о нахождении предела дроби, числитель и знаменатель которой стремятся к нулю. Его перу принадлежит «Аналитический трактат о конических сечениях и об их применении для решения уравнений как в определенных, так и в неопределенных задачах» (1707 г.). Предложил одно из решений задачи о брахистохроне.

275 лет
Жозеф Луи ЛАГРАНЖ
(25 января 1736 – 10 апреля 1813)

Французский математик и астроном. Он учился, а затем преподавал в Артиллерийском училище, в 18 лет став профессором. По рекомендации Эйлера 23-летний Лагранж становится членом Берлинской АН, президентом которой его избирают уже через 7 лет. Фридрих II приглашал Лагранжа в Берлин так: «Необходимо, чтобы величайший геометр Европы проживал вблизи величайшего из королей». Позже он становится членом Парижской АН и принимает активное участие в создании метрической системы мер.

Круг научных исследований Лагранжа был необычайно широк, а его сочинения составляют 14 томов. В математическом анализе Лагранж дал формулу остаточного члена ряда Тейлора, формулу конечных приращений и интерполяционную формулу, ввел способ множителей для решения задачи отыскания условных экстремумов. В области дифференциальных уравнений создал теорию особых решений и разработал метод вариации произвольных постоянных. В алгебре построил теорию уравнений, обобщением которой является теория Галуа, нашел способ приближенного вычисления корней алгебраического уравнения с помощью непрерывных дробей, метод отделения корней алгебраических уравнений, метод исключения переменных из системы уравнений (составление результанта), разложение корней уравнений в *ряд Лагранжа*. В теории чисел с помощью непрерывных дробей он решил неопределенные уравнения 2-й степени с двумя неизвестными, доказал периодичность разложений квадратичных иррациональностей в непрерывные дроби. Ниже приведены несколько задач, предложенных Лагранжем.

1. Докажите, что если три простых числа образуют арифметическую прогрессию, то разность этой прогрессии кратна 6 (исключение представляет случай, когда одно из этих чисел 3).
2. Проверьте тождество:

$$\left(A^2+B^2+C^2\right)\cdot\left(A_1^2+B_1^2+C_1^2\right)-\left(AA_1+BB_1+CC_1\right)^2 =$$
$$= (AB_1 - A_1B)^2 + (AC_1 - A_1C)^2 + (BC_1 - B_1C)^2.$$

3. Дано уравнение

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Покажите, что подстановкой $y=x+\dfrac{1}{x}$ можно свести решение этого уравнения к решению двух квадратных уравнений, корни которых и будут корнями данного.

4. Докажите, что всякое натуральное число можно представить в виде суммы четырех квадратов целых чисел.

225 лет
Пьер БАЗЕН
(13 января 1786 – 29 сентября 1838)

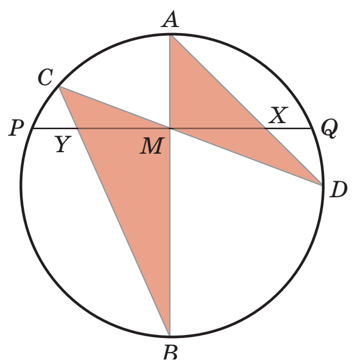
Французский математик, механик, педагог, инженер-строитель, почетный член Петербургской АН. С 1810-го профессор Института

Корпуса инженеров путей сообщения, в 1824–1834 гг. — его директор. Автор около 30 проектов мостов в Санкт-Петербурге и его пригородах, набережных, эллингов, гаваней, шоссе и других объектов. Спроектировал конструкции перекрытий Зимнего дворца, Александринского театра (не осуществлены) и Троицкого собора. Руководил строительством Обводного канала, зданий Сената и Синода, Шлиссельбургских шлюзов, гидросооружений Охтинского порохового завода. В 1824–1827 гг. разработал проект защиты Санкт-Петербурга от наводнений. Основные труды по математическому анализу, геометрии, механике. Написал ряд учебников по математике и механике для русской высшей технической школы.

225 лет
Вильямс Джорж ГОРНЕР
(1786 – 22 сентября 1837)

Английский математик-алгебраист и учитель. Преподавательскую деятельность начал с 18 лет, в 23 года открыл собственную школу в Бате. Известен благодаря предложенному способу приближенного решения алгебраических уравнений при помощи схемы, часто называемой схемой Руффини–Горнера. Этот способ по идее совпадает с методом тянь-юань, применявшимся в XIII в. китайским математиком Чжу Шицзе. «Подмена» авторства объясняется тем, что соотечественник Горнера, известный математик и логик Де Морган в своих многочисленных статьях часто упоминал этот метод со ссылкой на него.

В 1815 г. в английском мужском журнале «Gentleman's Dairy» Горнер предложил следующую задачу:



Задача о бабочке. Пусть через точку M, являющуюся серединой хорды PQ некоторой окружности, проведены две произвольные хорды AB и CD той же окружности. Пусть хорды AD и BC пересекают хорду PQ в точках X и Y. Докажите, что M является серединой отрезка XY.

200 лет
Эварист ГАЛУА
(26 октября 1811 – 30 мая 1832)

Французский математик, исследования которого оказали исключительное влияние на развитие алгебры.

Математическое дарование Галуа проявилось очень рано. Книгой, пробудившей интерес юноши к математике, были «Начала геометрии» Лежандра. Содержание книги, рассчитанной на 2 года учебы, он усвоил за 2 дня. Затем Галуа в течение нескольких дней прочел «Решение численных уравнений» Лагранжа. К моменту окончания лицея он уже вел самостоятельную исследовательскую работу по математике и к 18 годам получил многие основные результаты теории, впоследствии названной его именем.

В 1830 г. поступил в Высшую нормальную школу, но через год был исключен из нее по политическим мотивам, так как входил в тайное республиканское общество «Друзья народа». За публичное выступление против королевского режима дважды подвергался тюремному заключению. В возрасте 20 лет был убит на дуэли.

Накануне дуэли в письме к другу Галуа изложил свои основные открытия с просьбой передать их Якоби и Гауссу. Это письмо было опубликовано вскоре после его смерти, однако из-за новизны идей и сжатости изложения открытия Галуа долгое время не получали признания. Все его работы были разобраны и опубликованы в 1846 г. Лиувиллем. В одной из них он исследовал старую проблему, решение которой с XVI в. не давалось лучшим математикам: найти общее решение уравнения произвольной степени, то есть выразить его корни через коэффициенты, используя только арифметические действия и радикалы. В 1870 Жордан написал книгу о теории подстановок, в предисловии к которой отметил, что его работы – лишь толкование рукописей Галуа.

За свою короткую жизнь Галуа успел сделать открытия, ставящие его на уровень крупнейших математиков XIX в. Решая задачи по теории алгебраических уравнений, он заложил основы современной алгебры, создав стройную теорию и введя такие фундаментальные понятия, как группа, подгруппа, нормальный делитель, поле, расширение.

200 лет
Людвиг Отто ГЕССЕ
(22 апреля 1811 – 4 августа 1874)

Немецкий математик, член Баварской АН. Основные труды по геометрии (аналитической, проективной, дифференциальной), линейной алгебре и вариационному исчислению.

Для изучения кривых 3-го порядка Гессе ввел кривую, названную его именем. В своих работах применял однородные пространственные координаты и пришел к инвариантному определителю (гессиану) из вторых частных производных однородной функции. Этот определитель имеет много приложений в геометрии чисел. Гессе дал одну из интерпретаций геометрии Лобачевского, перенес на сферические конические сечения теоремы Паскаля и Брианшона; развил теорию инвариантов и детерминантов; занимался геометрической интерпретацией алгебраических преобразований.

175 лет
Василий Андрианович ЕВТУШЕВСКИЙ
(6 мая 1836 – 23 сентября 1888)

Русский методист-математик, редактор журнала «Народная школа» (1878–1882), сотрудник многих педагогических журналов. Был одним из создателей высших женских курсов. Неоднократно руководил съездами народных учителей.

Разработал методику элементарной математики на основе самостоятельной работы учащихся, занимательности и соответствия их возрасту, а также программы и уроки по пропедевтическим курсам арифметики, алгебры и геометрии, построенные на основе концентрического изучения математики.

Сочинения Евтушевского, особенно его «Методика арифметики» (1872 г.) и «Сборник арифметических задач» (1871 г.), выдержавшие многочисленные издания и разошедшиеся более чем миллионным тиражом, имели важное значение в истории отечественного школьного математического образования. В основу этих работ он положил свой многолетний опыт и результаты изучения методики преподавания за границей (методика Грубе). Вместе с Глазыриным издал «Методику приготовительного курса алгебры» (1876 г.) и к ней небольшой сборник задач.

В 1879 г. был избран председателем Педагогического общества. Педагогические взгляды Евтушевского вызвали многочисленные обсуждения, которые во многом способствовали развитию интереса к методике преподавания математики в России.

Приведем несколько задач из сборника Евтушевского для учащихся 5–7-х классов.

1. Отец желает разделить между своими тремя несовершеннолетними сыновьями 11 795 р. так, чтобы каждый из сыновей обладал одинаковым капиталом по достижении совершеннолетия (21 года). Старшему сыну сейчас 13 лет, среднему — 11 лет, а младшему — 9 лет. Какой капитал должен положить отец на имя каждого из сыновей в банк, платящий простые 5% годовых?

2. Сколько нужно взять фунтов кофе, по 46 к. фунт, по 42 к. и по 60 к., чтобы составить без прибыли и убытка 46 фунтов смеси, ценою по 50 к. за фунт?

3. У женщины были две золотые сережки равного веса 48-й пробы и кольцо 84-й пробы; сережки весили 1 зол. 14 долей и кольцо тоже 1 зол. 14 долей. Одну сережку она потеряла, а остальные вещи отдала мастеру и велела из всего золота сделать брошку. Какой пробы выйдет брошка?

4. 12 работников за 5 дней, занимаясь ежедневно по 10 часов, могут засеять 240 десятин под клевер и люцерну. Сколько дней нужно 15 работникам, чтобы, ежедневно занимаясь по 11 часов, засеять 264 десятины под клевер и люцерну?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баврин И.И., Фрибус Е.А.* Старинные задачи: Книга для учащихся. — М.: Просвещение, 1994.

2. *Боголюбов А.Н.* Математики, механики. — Киев: Наукова думка, 1983.

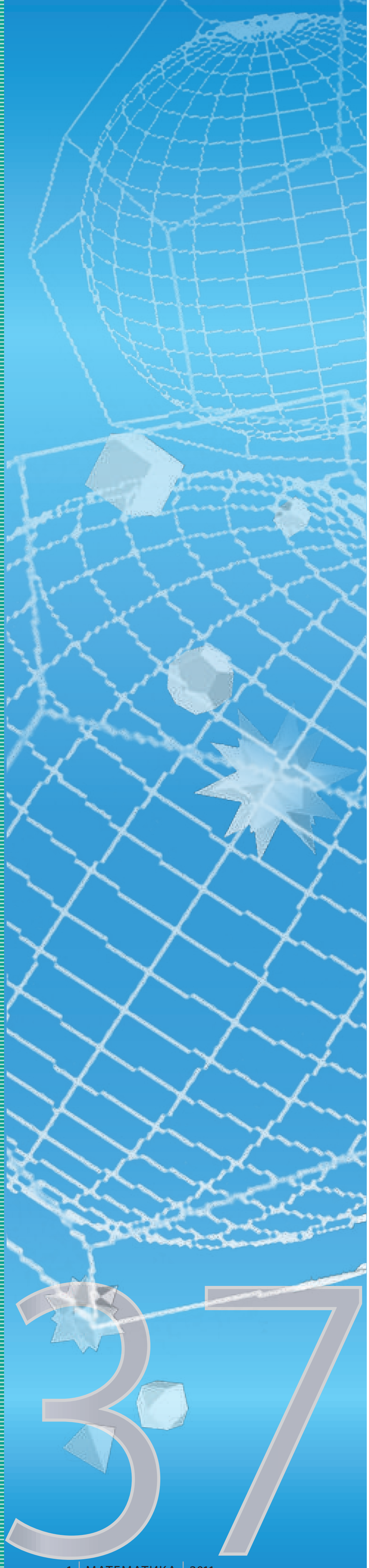
3. *Бородин А.И., Бугай А.С.* Выдающиеся математики. — Киев: Радянська школа, 1987.

4. *Земляков А.Н.* Введение в алгебру и анализ: культурно-исторический дискурс. Элективный курс. — М.: Бином, 2007.

5. *Малаховский В.С.* Избранные главы истории математики. — Калининград: Янтарный сказ, 2002.

6. *Попов Г.Н.* Сборник исторических задач по элементарной математике. — М.–Л.: ОНТИ, 1938.

7. *Чистяков В.Д.* Старинные задачи по элементарной математике. — Минск: Вышейшая школа, 1978.



VII ОЛИМПИАДА ПО ГЕОМЕТРИИ ИМЕНИ И.Ф. ШАРЫГИНА

ЗАОЧНЫЙ ТУР

Для кого предназначена олимпиада

Приводим условия задач заочного тура Седьмой Геометрической олимпиады им. И.Ф. Шарыгина.

В олимпиаде могут участвовать школьники 8–11-х классов. В списке задач, приведенном ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов (на момент проведения олимпиады) она предназначена. Впрочем, можно решать также задачи и для более старших классов (решенные задачи для младших классов при подведении итогов не учитываются).

Срок отправления

Решения задач на русском языке должны быть посланы не позднее 1 апреля 2011 года.

Как и куда выслать работу

Решения следует присылать по электронной почте в форматах *.pdf*, *.doc* или *.ipg* на адрес geomolymp@mccme.ru. При этом нужно соблюдать следующие правила.

1. Каждую работу следует присылать отдельным письмом с уведомлением о получении. Объем письма не должен превышать 10 Мб.

2. Если работа содержится в нескольких файлах, желательно присылать их в виде архива. Если объем работы слишком большой, разбейте ее на несколько архивных файлов и пошлите каждый отдельным письмом.

3. В теме письма нужно написать «Работа на олимпиаду им. Шарыгина», а в тексте привести следующие сведения об участнике:

— фамилия, имя, отчество;
— полный почтовый адрес с индексом, телефон, e-mail;
— класс, в котором сейчас учится школьник;
— номер и адрес школы;
— ФИО учителей математики и/или руководителей кружка.

Если у вас нет возможности прислать работу в электронном виде, пришлите ее простой бандеролью (или принесите сами) в обычной тетради, по адресу: **119002, Москва Г-002, Большой Власьевский пер., д. 11, МЦНМО, на олимпиаду им. Шарыгина.** На обложке тетради укажите все сведения, перечисленные в пункте 3.

Как оформлять решение

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем написать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая аккуратные чертежи. Если задача на вычисления, в конце ее решения должен быть отчетливо выделенный ответ. Пишите аккуратно, ведь вы же заинтересованы в том, чтобы вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если вы пользуетесь в решении какой-то известной теоремой или фактом, приведенным в задаче из школьного учебника, можно просто на это сослаться (чтобы было понятно, какую именно теорему или факт вы имеете в виду). Если же вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Можно (хотя и необязательно) указать в работе, какие задачи вам понравились. Жюри будет интересно узнать ваше мнение.

Ваши работы будут тщательно проверены, и вы получите (не позднее конца мая 2011 г.) ответ жюри. Победители заочного тура — учащиеся 8–10-х классов будут приглашены на финальный тур, который состоится летом 2011 г. в г. Дубна под Москвой. Победители заочного тура — выпускники школ получат грамоты оргкомитета олимпиады.

Условия задач

1. (*8-й класс*) Существует ли выпуклый семиугольник, который можно разрезать на 2011 равных треугольников?

2. (*8-й класс*) В треугольнике ABC со сторонами $AB = 4$, $AC = 6$ проведена биссектриса угла A. Из вершины B опущен на эту биссектрису перпендикуляр BH. Найдите MH, где M — середина BC.

3. (*8-й класс*) В треугольнике ABC $\angle A = 60°$. Серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекает прямую AC в точке C_1. Серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает прямую AB в точке B_1. Докажите, что прямая B_1C_1 касается окружности, вписанной в треугольник ABC.

4. (*8-й класс*) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA', BB', CC'. Известно, что в треугольнике $A'B'C'$ эти прямые также являются биссектрисами. Верно ли, что треугольник ABC равносторонний?

5. (*8-й класс*) В треугольнике ABC проведен серединный перпендикуляр к стороне AB до пересечения с другой стороной в некоторой точке C'. Аналогично построены точки A' и B'. Для каких исходных треугольников треугольник $A'B'C'$ будет равносторонним?

6. (*8-й класс*) Даны две единичные окружности ω_1 и ω_2, пересекающиеся в точках A и B. На окружности ω_1 взяли произвольную точку M, а на окружности ω_2 — точку N. Через точки M и N провели еще две единичные окружности, ω_3 и ω_4. Обозначим повторное пересечение окружностей ω_1 и ω_3 через C, повторное пересечение окружностей ω_2 и ω_4 — через D. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

7. (*8–9-е классы*) На сторонах AB и AC треугольника ABC выбрали точки P и Q так, что $PB = QC$. Докажите, что $PQ < BC$.

8. (*8–9-е классы*) Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90°$), касается сторон AB, BA, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. A_2, C_2 — точки, симметричные точке B_1 относительно прямых BC, AB соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2, C_1C_2 пересекаются на медиане треугольника ABC.

9. (*8–9-е классы*) Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Касательные, проведенные к описанным окружностям треугольников CHB и AHB в точке H, пересекают прямую AC в точках A_1 и C_1 соответственно. Докажите, что $A_1H = C_1H$.

10. (*8–9-е классы*) В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. На боковой стороне CD выбрана точка M, а на основаниях BC и AD — точки P и Q так, что отрезки MP и MQ параллельны диагоналям трапеции. Докажите, что прямая PQ проходит через точку O.

11. (*8–10-е классы*) Вневписанная окружность прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$) касается стороны BC в точке A, а прямой AC — в точке A_2. Прямая A_1A_2 пересекает (первый раз) окружность, вписанную в треугольник ABC, в точке A'; аналогично определяется точка C'. Докажите, что $AC \parallel A'C'$.

12. (*8–10-е классы*) Пусть AP и BQ — высоты данного остроугольного треугольника ABC. Постройте циркулем и линейкой на стороне AB такую точку M, чтобы $\angle AQM = \angle BPM$.

13. а) (*8–10-е классы*) Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников, вершины которых лежат на сторонах данного треугольника (по одной вершине внутри каждой стороны).

б) (*11-й класс*) Найдите геометрическое место центров тяжести тетраэдров, вершины которых лежат на гранях данного тетраэдра (по одной вершине внутри каждой грани).

14. (*9-й класс*) В треугольнике ABC высота и медиана из вершины A образуют (вместе с прямой BC) треугольник, в котором биссектриса угла A является медианой, а высота и медиана из вершины B образуют (вместе с прямой AC) треугольник, в котором биссектриса угла B является биссектрисой. Найдите отношение сторон треугольника ABC.

15. (*9–10-е классы*) Дана окружность с центром O и радиусом 1. Из точки A к ней проведены касательные AB и AC. Точка M, лежащая на окружности, такова, что четырехугольники $OBMC$ и $ABMC$ имеют равные площади. Найдите MA.

16. (*9–10-е классы*) Дан треугольник ABC и прямая l. Прямые, симметричные l относительно AB и AC, пересекаются в точке A_1. Точки B_1, C_1 определяются аналогично. Докажите:

а) что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке;

б) эта точка лежит на описанной около треугольника ABC окружности;

в) точки, построенные указанным способом для двух перпендикулярных прямых, диаметрально противоположны.

17. (*9–11-е классы*) а) Существует ли треугольник, в котором наименьшая медиана длиннее, чем наибольшая биссектриса?

б) Существует ли треугольник, в котором наименьшая биссектриса длиннее, чем наибольшая высота?

18. (*9–11-е классы*) На плоскости проведены n прямых общего положения, то есть никакие две прямые не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Эти прямые разрезали плоскость на несколько частей. Какое

а) наименьшее;

б) наибольшее

количество углов может быть среди этих частей?

19. (*9–11-е классы*) Существует ли неравнобедренный треугольник, у которого медиана, проведенная из одной вершины, биссектриса, проведенная из другой, и высота, проведенная из третьей, равны?

20. (*9–11-е классы*) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD. Докажите, что $ABCD$ — вписанный тогда и только тогда, когда $IM : AC = IN : BD$.

21. (*10–11-е классы*) На окружности с диаметром AC выбрана произвольная точка B, отличная от A и C. Пусть M, N — середины хорд AB, BC, а P, Q — середины меньших дуг, стягиваемых этими хордами. Прямые AQ и BC пересекаются в точке K, а прямые CP и AB — в точке L. Докажите, что прямые MQ, NP и KL пересекаются в одной точке.

22. (*10–11-е классы*) Из вершины C треугольника ABC проведены касательные CX, CY к окружности, проходящей через середины сторон треугольника. Докажите, что прямые XY, AB и касательная в точке C к окружности, описанной около треугольника ABC, пересекаются в одной точке.

23. (*10–11-е классы*) Дан треугольник ABC и прямая l, пересекающая BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Точка A' — середина отрезка, соединяющего проекции A_1 на AB и AC. Аналогично определяются точки B' и C'.

а) Докажите, что A', B' и C' лежат на некоторой прямой l'.

б) Докажите, что если l проходит через центр описанной окружности треугольника ABC, то l' проходит через центр его окружности девяти точек.

24. (*10–11-е классы*) Дан остроугольный треугольник ABC. Найдите на сторонах BC, CA, AB такие точки A', B', C', чтобы наибольшая сторона треугольника $A'B'C'$ была минимальна.

25. (*10–11-е классы*) Три равных правильных тетраэдра имеют общий центр. Могут ли все грани многогранника, являющегося их пересечением, быть равными?

Работа над ошибками

Уважаемые читатели!

В № 20/2010 в статье П. Севрюкова «Тригонометрические подстановки в алгебраических уравнениях» были допущены две опечатки.

На странице 14, пример 1: приведенное симметрическое уравнение должно иметь вид

$$\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)+2\left(t+\frac{1}{t}\right)+2-\frac{1225}{144}=0.$$

На странице 15, пример 2, следует читать: «Последнее уравнение распадается на два.

1. $\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\varphi\right)=0$.

Исправления выделены полужирным шрифтом.

Приносим свои извинения автору и читателям.

ОЛИМПИАДЫ, КОНКУРСЫ, ТУРНИРЫ В 2011 ГОДУ

(ПО СОСТОЯНИЮ НА 1 ДЕКАБРЯ 2010 ГОДА)

Мероприятия	Классы	Дата проведения	Место проведения	Контакты	Предполагаемое участие газеты
Заочный математический конкурс	6–8	В течение года	Москва	(499) 241-12-37 zmk@mccme.ru www.mccme.ru/zmk	
Математическая регата	8	15.01	Москва	(495) 976-19-85 А.Д. Блинков blinkov@mccme.ru	
Зимний Турнир Архимеда	6–7	24.01	Москва	(495) 716-29-35 П.В. Чулков chulkov@logic.ru	
Олимпиада по геометрии памяти И.Ф. Шарыгина	8–11	Январь — заочная, март — очная, июль — финал	Москва (март), Дубна (июль)	(499) 241-12-37 А.А. Заславский	Публикация заданий заочного тура
Всероссийская олимпиада школьников. Региональный этап	9–11	25.01 – 26.01	По регионам		
Барнаульский турнир математических боев	8–11	29.01 – 31.01	Барнаул	(3852) 60-41-57 Д.Н. Оскорбин oskorbin@yandex.ru	
Математический праздник	6–7	13.02	Москва (МГУ)	(499) 241-12-37 www.mccme.ru/matprazdnik matprazdnik@mccme.ru	Обзор
37-й Уральский турнир юных математиков	8–11	14.02 – 20.02	Киров	(8332) 35-15-03 И.С. Рубанов sms@extedu.kirov.ru www.cdoosh.kirov.ru/kubok/uraltur	Обзор
XI Школьные Харитоновские чтения	9–11	24.02 – 27.02	Саров, Нижегородская обл.	(83130) 2-72-98 rh.read@expd.vniief.ru	Обзор
Устная математическая олимпиада	6–7	06.03	Москва	(499) 241-12-37 http://olympiads.mccme.ru/ustn	
Международный математический Турнир городов. Весенний тур	8–11	28.02 — базовый, 14.03 — сложный	Москва и др.	(499) 241-12-33 www.turgor.ru	
Математическая регата	10	26.02	Москва	(495) 976-19-85 А.Д. Блинков blinkov@mccme.ru	Разбор задач
Московская математическая олимпиада	8–11	Фев.–март — заочный тур, 13.03 — очный	Москва (МГУ)	www.mccme.ru/mmo/ mmo@mccme.ru	Обзор
Международный конкурс-игра «Кенгуру»	3–10	17.03	По регионам	(812) 233-38-51 А.И. Плоткин kenguru.SP.ru	Разбор задач

Мероприятия	Классы	Дата проведения	Место проведения	Контакты	Предполагаемое участие газеты
Новосибирский турнир математических боев	7–9	28.03 – 30.03	Новосибирск	А.И. Щетников pythagor@ngs.ru	
III Математическая олимпиада имени Леонарда Эйлера	8	Март – апрель	Киров, Москва, Омск, Санкт-Петербург	И.С. Рубанов http://matol.ru/ info@matol.ru	Обзор
Всероссийская олимпиада школьников. Заключительный этап	9–11		Майкоп	(495) 408-64-36 Н.Х. Агаханов	Информация, победители
Весенний Турнир Архимеда	5, 6	02.04, 03.04	Москва	(495) 976-19-85 А.Д. Блинков blinkov@mccme.ru	
Устная олимпиада по геометрии	8–11	10.04	Москва	(499) 241-12-37 http://olympiads.mccme.ru/ustn/	
Математическая регата	7	23.04	Москва	(495) 976-19-85 А.Д. Блинков blinkov@mccme.ru	Разбор задач
XII Колмогоровские чтения	9–11	03.05 – 07.05	Москва (СУНЦ)	(495) 449-38-03 math@pms.ru	Обзор
IV Математический фестиваль «Золотое руно»	6–8	6.06 – 14.06	Гагры, Абхазия	(861) 215-18-17 И.В. Федоренко crdo-bernoulli.ru	
16-я Международная олимпиада школьников «Туймаада»	8–11	Июль	Якутск	guas@mail.ru guas@ag3200.spb.edu www.guas.info	
Летняя конференция Турнира городов	8–11	Август	Не определено	(499) 241-12-37 olympiads.mccme.ru/ktg	
Пятый Южный математический турнир	6–11	20.09 – 28.09	ВДЦ «Орленок»	(8772) 52-72-50 Д.К. Мамий dmami@yandex.ru	Обзор
34-й Турнир им. М.В. Ломоносова	6–11	Сентябрь	Москва	(499) 241-12-37 turlom@mccme.ru	
XXII Российский фестиваль юных математиков	8–11	11.10 – 18.10	Сочи	(861) 215-18-17 И.В. Федоренко fiv@kubannet.ru	
Международный атематический Турнир городов. Осенний тур	8–11	Октябрь	Москва	(499) 241-12-37 www.mccme.ru/olympiads/turgor	
Математическая регата	9	Октябрь	Москва	(495) 976-19-85 А.Д. Блинков blinkov@mccme.ru	Разбор задач
Московский открытый турнир математических боев	8–11	Октябрь – декабрь	Москва	(499) 241-12-37 matboi@mccme.ru	
Математическая регата	11	Ноябрь	Москва	(495) 976-19-85 А.Д. Блинков blinkov@mccme.ru	Разбор задач
38-й Уральский турнир юных математиков	9–11	Начало ноября	Не определено	(8332) 35-15-03 И.С. Рубанов sms@extedu.kirov.ru www.cdoosh.kirov.ru/kubok/uraltur	
15-й Кубок памяти А.Н. Колмогорова	9–11	Начало декабря	Не определено	И.С. Рубанов www.cdoosh.kirov.ru/kubol/ kolmogor	Обзор

Г. ФИЛИППОВСКИЙ,
Киев

ДЕСЯТЬ НОВОГОДНИХ МАРШРУТОВ БАРОНА МЮНХГАУЗЕНА

Единственный достоверный портрет барона Мюнхгаузена, 1752 г. Барон изображен в парадном мундире ротмистра Кирасирского полка наследника Великого князя Петра Федоровича

Таким изобразил барона Мюнхгаузена Гюстав Доре (1832–1883). Ротмистр русской армии и талантливый рассказчик к тому времени превратился в объект для насмешек

Карл Фридрих Иероним фрайхерр фон Мюнхгаузен (1720–1797) — потомок немецкого рода, чья родословная уже в его времена тянулась через семь веков. Даже на Руси эта фамилия была известна еще в XVI в. Иеронимус Мюнхгаузен (в русских документах его называли Минихгоузин) попал в Россию как паж герцога Брауншвейгского, мужа наследницы престола Российской империи. С девятнадцати лет он в кавалерии — в элитном Брауншвейгском кирасирском полку. Воевал против Османии, участвовал в походе на Бендеры. В 1750 г. Мюнхгаузен произведен в ротмистры, после чего оставил службу и выехал на родину, в маленький городок Боденвердер. Именно здесь отставной русский ротмистр рассказывал гостям после охоты свои необычайные истории.

В 1781 г. в печати появились «Рассказы господина М-х-з-н», в предисловии к которым сказано: «Вблизи Г-вера живет весьма остроумный г-н М-х-з-н, пустивший в оборот род замысловатых историй, авторство которых приписывают ему». Кто записал истории и кто передал их в редакцию — неизвестно. Через четыре года в Оксфорде вышло анонимное «Повествование барона Мюнхгаузена о его чудесных путешествиях и походах в России». Имя автора узнали много лет спустя: Р.Э. Распе (1737–1794), литератор. Уже в 1786 г. появился немецкий перевод: «Удивительные путешествия, походы и веселые приключения барона Мюнхгаузена, на воде и на суше, которые он обычно рассказывал за бутылкой вина в кругу друзей». Его автор — Г.А. Бюргер (1747–1794), приват-доцент Гёттингенского университета, поэт и философ. Так началась мюнхгаузениада. Распе и Бюргер стали классиками.

Рассказывают, что ротмистр фон Мюнхгаузен был в ярости, что книги о нем изданы без его дозволения, да еще открыто использовано его древнее имя. Он намеревался отыскать творцов печатной мюнхгаузениады, вызвать их на дуэль, притянуть к суду и просто отлупить. Но авторы до его кончины оставались неизвестными.

В оформлении статьи использованы иллюстрации Г. Доре.

Я, барон Карл Фридрих Иероним фон Мюнхгаузен, скромно скажу о себе, что не люблю я окольных путей. Если идти, то напрямик. При всем уважении к окружностям, параболам, гиперболам я предпочитаю прямую линию. Моя страсть — путешествия, особенно новогодние. Люблю погостить у старых добрых друзей, встретить с ними Новый год! И добираюсь я к друзьям самым коротким, то есть прямым путем. Свой маршрут к дорогому моему сердцу *Леонарду Эйлеру* я, конечно, *назвал прямой Эйлера*. После посещения профессора *Симсона* в Шотландии мой путь был назван *прямой Симсона*. А путешествие в Кембридж для научных бесед под новогодней луной с сэром *Ньютоном* предопределило появление *прямой Ньютона*. По дорогам Германии спешил я на верном коне к своему тезке — *Карлу Фридриху Гауссу*, «королю всех математиков», и после встречи с ним Нового года на математической карте мира, как вы понимаете, сразу же засверкала *прямая Гаусса*!..

Однако порой я не прочь встретить Новый год самостоятельно — в интересующей меня точке земного шара или Вселенной. И по-прежнему моим маршрутом остается исключительно *прямая линия*. О некоторых своих новогодних путешествиях я с удовольствием поведаю читателю.

Маршрут 1. Однажды, находясь в ортоцентре H остроугольного Бермудского треугольника ABC, я должен был выплыть из него на паруснике. Путь лежал через середину M_1 его стороны BC. Встретить наступающий Новый год я предполагал в безопасной бухте Q — точке, диаметрально противоположной вершине A. Докажите, что путь $H - M_1 - Q$ пролегал по прямой линии.

Доказательство. Пусть прямая QM_1 пересекает высоту AH_1 в точке K (рис. 1).

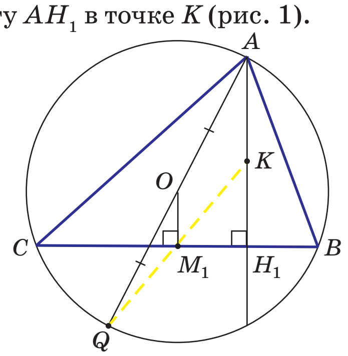


Рис. 1

Очевидно, OM_1 — средняя линия в треугольнике AKQ, то есть $OM_1 = \frac{1}{2}AK$. С другой стороны, $OM_1 = \frac{1}{2}AH$ — известный факт геометрии треугольника. Следовательно, $K \equiv H$ и $H - M_1 - Q$ — одна прямая.

Маршрут 2. Как-то раз, покорив накануне Нового года гору Джомолунгму, я стал спускаться с вершины A к палатке I, находящейся в инцентре треугольника ABC. Чуть отдохнув там и согревшись чаем, я продолжил спуск в базовый лагерь Q — центр описанной окружности треугольника BIC. В точке Q мы встретились с Дедом Морозом, который, как и я, только-только спустился на Землю. Докажите, что $A - I - Q$ — одна прямая.

Доказательство. Отрезок AI, совпадающий с биссектрисой угла A, продлим до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC в точке K (рис. 2).

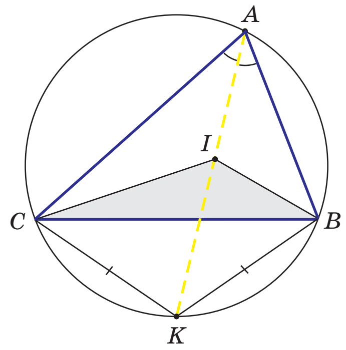


Рис. 2

Известно, что $KI = KB = KC$ — так называемая «терема трилистника» (докажите ее!). Тогда K — центр описанной окружности треугольника BIC и $K \equiv Q$. Следовательно, $A - I - Q$ — одна прямая.

Маршрут 3. Прокладывая по карте маршрут в Лапландию Q — на родину Деда Мороза, я увидел, что медиана AM_1 треугольника ABC пересекает некоторую тропу BN в точке T (рис. 3).

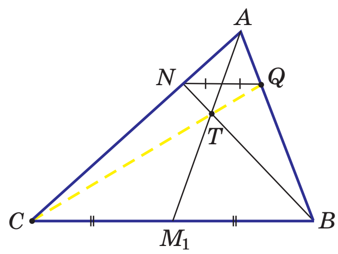


Рис. 3

А вот тропинка NQ, параллельная стороне BC, ведет уже прямо в Лапландию. Докажите, что двигаясь по прямой CT, я непременно попаду в Лапландию Q и встречу там Новый год. Другими словами, что $C - T - Q$ — одна прямая.

Доказательство. Поскольку $NQ \parallel BC$, то $BQNC$ — трапеция. *По свойству трапеции* точка пересечения продолжений боковых сторон, точка пересечения диагоналей и середины осно-

ваний лежат на одной прямой. Тогда $C-T-Q$ — одна прямая, так как она совпадает с одной из диагоналей трапеции $BQNC$.

Маршрут 4. Однажды летел я на ядре встречать Новый год в созвездии Южный Треугольник. Там горели три яркие звезды A, B, C и три звездочки поменьше — K, N, T, они лежат на пересечении продолжений биссектрис углов A; B; C с окружностью, описанной около треугольника ABC (рис. 4).

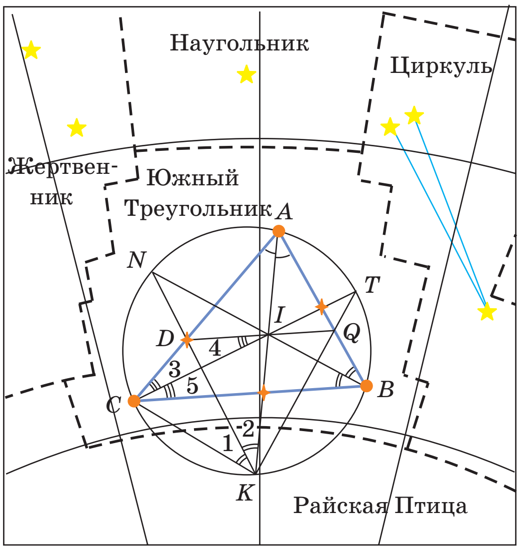


Рис. 4

Известно, что $D = KN \cap AC$ и $Q = KT \cap AB$. Встречу ли я Новый год в Q, если полечу на ядре из D по прямой линии через инцентр I? (Докажите, что $D-I-Q$ — одна прямая.)

Доказательство. $KI = KC$ («теорема трилистника») и $\angle 1 = \angle 2$ (вписанные, опираются на равные дуги CN и NA). Тогда треугольники KDI и KDC равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $CD = DI$ и $\angle 4 = \angle 3 = \angle 5$. Следовательно, $DI \parallel BC$. Аналогично показывается, что $QI \parallel BC$. Таким образом, $D-I-Q$ — одна прямая.

Маршрут 5. Мне так понравилось в созвездии Южный Треугольник, что и следующий Новый год я отмечал там же. Все те же знакомые звезды A, B, C, K, N, T. Тот же инцентр I. Я нахожусь в точке O — центре описанной окружности треугольника ABC (рис. 5). Докажите, что, взяв направление OI, я смог отметить Новый год в точке Q пересечения медиан треугольника KNT, или что $O-Q-I$ — одна прямая.

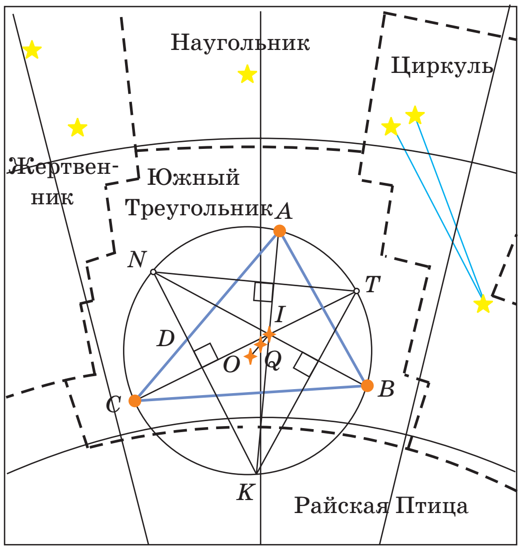


Рис. 5

Доказательство. Очевидно, что точка O — центр описанной окружности и для треугольника KNT. Поскольку точка I — ортоцентр треугольника KNT (докажите!), то $O-Q-I$ является *прямой Эйлера* в треугольнике KNT. Напомним, что этой прямой принадлежит центр описанной около треугольника окружности, точка пересечения его медиан (центроид) и его ортоцентр.

Итак, $O-Q-I$ — одна прямая.

Маршрут 6. Как-то в канун Нового года поиску бенгальских огней я предпочел охоту на бенгальского тигра (конечно, фотоохоту). Оптика у меня была отличная, и любая точка X описанной окружности треугольника ABC зеркально отражалась относительно сторон треугольника в точки K, N и Q (рис. 6). Тигр же скрывался в ортоцентре H треугольника ABC... И все-таки Новый год мы встретили вместе, сфотографировавшись в обнимку! Почему? Да потому, что точки $K-N-H-Q$ лежат на одной прямой. Докажите!

Доказательство. Пусть X_1, X_2, X_3 — проекции точки X на стороны BC, AC и AB соответственно. Поскольку $X_1-X_2-X_3$ — *прямая Симсона* точки X описанной окружности треугольника ABC, то, очевидно, $K-N-Q$ — одна прямая («удвоенный» Симсон, как я люблю говорить). Покажем, что и ортоцентр H принадлежит этой прямой. Соединим K и H, Q и H. Так как $\angle H_1HH_3 = 180° - \angle B$, то остается показать, что $\angle 1 + \angle 2 = \angle B$. Уверен, читатели сделают это самостоятельно.

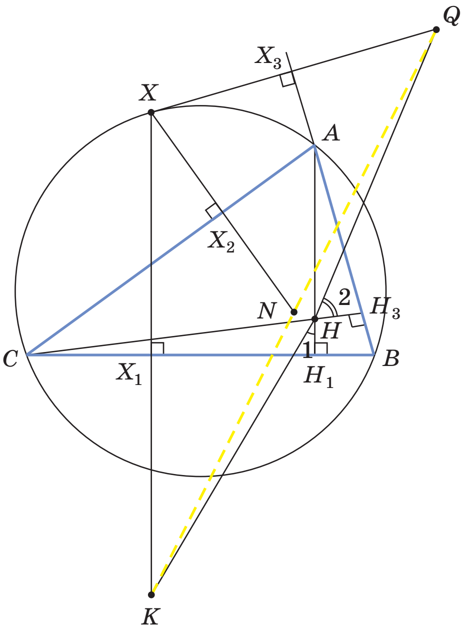


Рис. 6

Маршрут 7. Долгое время я лелеял мечту провести хотя бы один Новый год в самом центре Вселенной — точке Q. Предварительные расчеты показали, что центр Вселенной находится внутри треугольника ABC. Более точные вычисления определили местонахождение точки Q внутри трапеции $AKNB$ ($KN \parallel AB$) — рисунок 7.

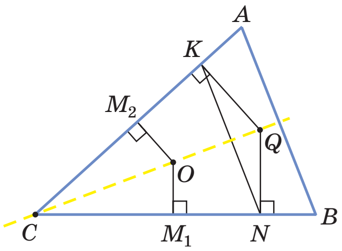


Рис. 7

Перпендикуляр к AC в точке K и перпендикуляр к BC в точке N пересекаются как раз в искомой точке Q. Я же нахожусь в вершине C и беру курс на O — центр описанной окружности треугольника ABC. Смогу ли я встретить Новый год в точке Q — центре Вселенной? (Верно ли, что $C - O - Q$ — одна прямая?)

Доказательство. Проведем из O перпендикуляры OM_1 и OM_2 соответственно на стороны BC и AC треугольника ABC. Очевидно, M_1 — середина BC и M_2 — середина AC. Четырехугольники CM_2OM_1 и $CKQN$ гомотетичны с центром гомотетии в точке C. При этом O и Q — соответственно гомотетичные точки. Следовательно, $C - O - Q$ — одна прямая.

Маршрут 8. Особенно острые ощущения у меня остались от Нового года, который я провел в точке Q — *точке Зарождения всех метелей и вьюг*. Ну и холод там, скажу я Вам!.. Но ничего, выдержал, и теперь у меня круглый год румяные щеки. Хотите туда попасть? Пожалуйста! На высоте AH_1 треугольника ABC как на диаметре строим окружность ω, которая пересекает AC и AB в точках K и N соответственно. Касательные к ω в этих точках пересекаются в искомой точке Q. Вы должны выйти из вершины A и держать курс на M_1 — середину BC. Ей богу, $A - M_1 - Q$ — одна прямая (рис. 8). Докажите!

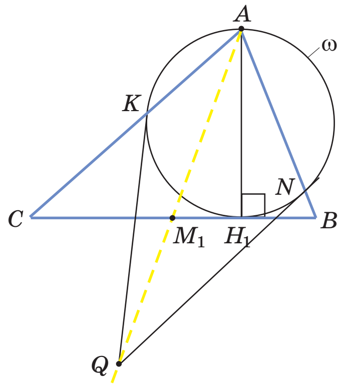


Рис. 8

Доказательство. Проведем через Q прямую параллельно BC. Она пересекает прямые AB и AC в точках E и F соответственно (рис. 9).

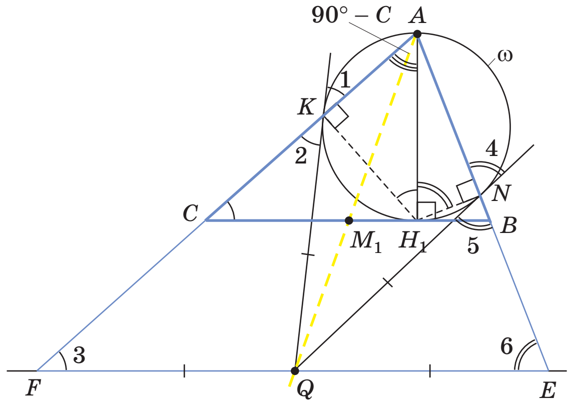


Рис. 9

Тогда $\angle AKH_1 = \angle ANH_1 = 90°$ (вписанные, опирающиеся на диаметр окружности ω). Поскольку $\angle CAH_1 = 90° - \angle C$, то $\angle AH_1K = \angle C$. Тогда и $\angle 1 = \angle C$ (угол между касательной и хордой), и $\angle 2 = \angle 1 = \angle C$ (вертикальные). Поэтому $KQ = QF$ ($\angle 2 = \angle 3 = \angle C$). Аналогично показывается, что $\angle 4 = \angle 5 = \angle 6 = \angle B$ и $NQ = QE$. Но касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны ($QK = QN$). Значит, $QE = QF$, или Q — середина EF. Становится очевидным, что прямая AQ проходит через M_1 — середину BC.

Прошу прощения, но я совсем забыл рассказать вам о своем надежнейшем древнегреческом друге — *Менелае*. Зная мою азартную, рискованную натуру, он не раз выручал меня в экстремальных ситуациях, помогая встретить Новый год целым и невредимым. Расскажу о двух случаях.

Маршрут 9. Знаете песенку «Бьют часы 12 раз...»? Так вот, когда я был молодым, не очень рассудительным и находился в вершине A треугольника ABC, то решил, что надо добраться до огромной башни Q с часами, встать под молоточками часового механизма, и когда они хорошенько стукнут тебя ровно 12 раз, тогда и наступит Новый год. К счастью, в точке T меня увидел Менелай. Он-то и объяснил мне, кто кого бьет...

Замечу, что T — точка касания вневписанной окружности со стороной BC. K и N — точки касания этой же окружности с продолжениями сторон AC и AB соответственно, Q — точка пересечения прямых BK и CN (рис. 10). Докажите, что $A - T - Q$ — одна прямая.

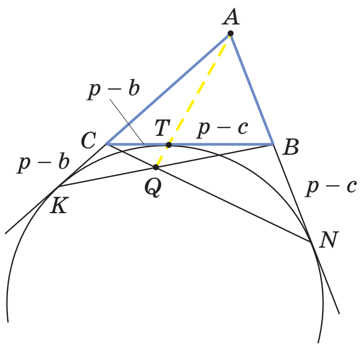
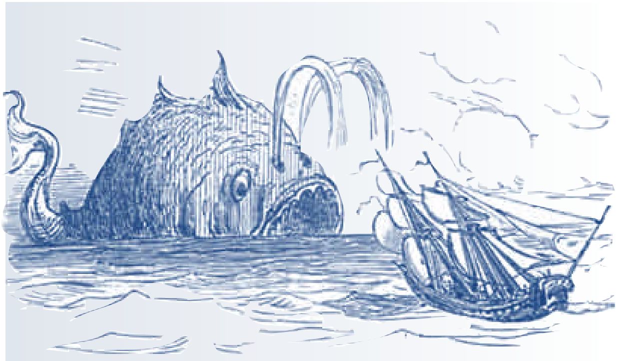


Рис. 10

Доказательство. Нетрудно показать, что $CT = CK = p - b$, а $BT = BN = p - c$, где $b = AC$, $c = AB$, а p — полупериметр треугольника ABC.



По теореме Менелая для треугольника CAN и секущей $K - Q - B$ имеем:

$$\frac{AB}{BN}\cdot\frac{NQ}{QC}\cdot\frac{CK}{KA}=1. \qquad (1)$$

Если для треугольника CBN и трех точек A, T, Q соотношение

$$\frac{CT}{TB}\cdot\frac{BA}{AN}\cdot\frac{NQ}{QC}=1, \qquad (2)$$

то по обратной теореме Менелая это и будет означать, что $A - T - Q$ — одна прямая.

А то, что соотношение (2) действительно равно 1, следует из того, что оно в точности равно соотношению (1), — *проверьте*!

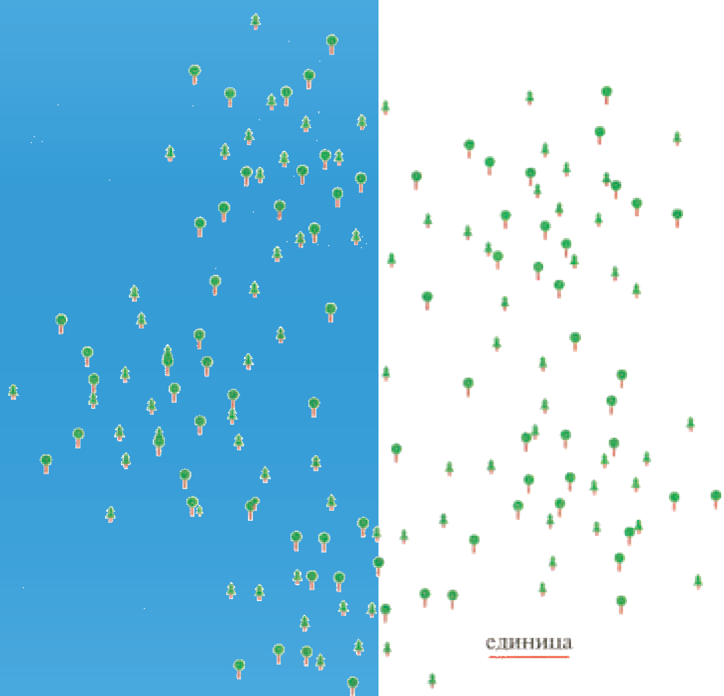
Маршрут 10. Всегда мечтал встретить Новый год возле *Елки исполнения заветных желаний*. Я знал, что она находится в точке Q — середине AK, где K — точка касания со стороной BC вписанной в треугольник ABC окружности. Я же находился в тот миг в точке M_1 — середине BC — и не имел понятия, куда скакать моей доброй лошади. И снова выручил Менелай, сказав, что надо взять курс на инцентр I. Благодаря ему я действительно добрался до точки Q. Теперь все мои заветные желания легко исполняются! Докажите *самостоятельно*, что $M_1 - I - Q$ — одна прямая.

ПОЗНАТЬ РАДОСТЬ ОТКРЫТИЯ

Башмаков М.И. Математика в кармане «Кенгуру». Международные олимпиады школьников. — М.: Дрофа, 2010.

Роза Петер писала: «Никакая другая область, кроме математики, не может предложить в столь большой степени самую значительную человеческую радость — радость открытия». И эту радость поиска и открытия читатель найдет в книге М.И. Башмакова, в которой собраны несколько сотен интересных задач — от самых простых до очень трудных. Вот лишь одна из задач.

Задача. В лесу барона Мюнхаузена растут елки и березы, причем на расстоянии ровно 1 км от каждой елки растет в точности 5 берез. Барон утверждает, что в его лесу елок больше, чем берез. Может ли такое быть?



На рисунке воспроизведен именно такой лес — он сделан с помощью компьютера на основе решения задачи.

Чтобы действительно получить радость от решения задач, надо много поработать: попытаться разобраться в тех математических целях, которые стоят за этими задачами, потренироваться в решении простых задач, попробовать понять решения трудных, с которыми не удалось справиться самостоятельно. Именно поэтому цель книги — пригласить читателя войти в мощный поток человеческой мысли, увлечь его занятием математикой.

Автор выбрал 24 темы, которые представляют, на его взгляд, важнейшие математические идеи, доступные школьнику. Каждая тема начинается с небольшого рассказа об этих идеях и о тех людях, с именами которых связано их зарождение и развитие. Расположение тем не является строго последовательным — они независимы друг от друга и с ними можно знакомиться в любом порядке. Предложенные задачи также не очень однозначно привязаны к обсуждаемой теме.

В книге использованы как задачи, традиционно предлагаемые на занятиях школьных математических кружков и относящиеся к «золотому фонду» занимательной математики, так и задачи, предлагавшиеся на конкурсах «Кенгуру». В каждую тему включены 2–3 действительно трудные задачи, к которым даны подробные решения.

ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 77, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10 946, 17 711, 28 657, 46 368, 75 025, 121 393, 196 418, 317 811, 514 229, 832 040...

Задача. Пусть в огороженном месте имеется пара кроликов (самка и самец) в первый день января. Эта пара кроликов производит новую пару кроликов в первый день февраля и затем в первый день каждого следующего месяца. Каждая новорожденная пара кроликов становится зрелой уже через месяц и затем через месяц дает жизнь новой паре кроликов. Возникает вопрос: сколько пар кроликов будет в огороженном месте через год, то есть через 12 месяцев с начала размножения?

Количество пар кроликов по месяцам представляет собой ряд названный по имени автора задачи — Леонардо Пизанского, прозванного Фибоначчи, в котором каждое следующее число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1},\ n \in \boldsymbol{N}.$$

С начала XIX в. работы, посвященные числам Фибоначчи, начали «размножаться как фибоначчиевы кролики». Эти числа привлекли внимание математиков своей особенностью возникать в самых неожиданных местах. Например, замечено, что волны Эллиота, описывающие колебания котировок ценных бумаг, являются огибающими маленьких волн, те, в свою очередь, еще более мелких, а количество мелких колебаний в периоде более крупного соответствует ряду Фибоначчи. Если вы разберетесь с числами Фибоначчи и волнами Эллиота, то можете разбогатеть, играя на бирже ценных бумаг.

Найдены и явления природы, в которых эта последовательность играет немаловажную роль. Одно из них — филлотаксис (листорасположение) — правило, по которому располагаются, например, семечки в соцветии подсолнуха. Семечки упорядочены в два ряда спиралей, один из которых идет по часовой стрелке, другой — против.

Эти числа можно найти при подсчете количества лучей, отражающихся от двух зеркал, в количестве вариантов маршрутов переползания пчелы от одной соты к другой, во многих математических играх и фокусах.

Наиболее замечательное свойство ряда Фибоначчи состоит в том, что отношение двух последовательных членов ряда попеременно то больше, то меньше отношения золотого сечения и с возрастанием номера члена ряда разность между его отношением к предыдущему члену ряда и отношением золотого сечения стремится к нулю.