О.В.Митина, И.Б.Михайловская

Факторный анализ для психологов

УДК 316.6(075.8)
ББК 88.5
М 662

Рекомендовано кафедрой общей психологии факультета психологии Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова

Рецензенты:

Измайлов Ч.А. — доктор психологических наук, профессор
Гусев А.Н. — кандидат психологических наук, доцент

Митина О.В., Михайловская И.Б.
М 662 Факторный анализ для психологов. — М.: Учебно-методический коллектор «Психология», 2001. — 169 с.

ISBN—5—93692—026-7

Авторы пособия подробно и в доступной форме разъясняют читателю общие принципы и процедурные тонкости использования факторного анализа в психологическом исследовании. В книге разбираются проблемы, связанные с выделением и интерпретацией факторов, и даются конкретные примеры факторно-аналитических исследований. Книга содержит систему учебных задач и упражнений по линейной алгебре и факторному анализу.

Книга предназначена для студентов-психологов, но ее с интересом прочтут также опытные исследователи и преподаватели психологических и математических дисциплин.

ISBN—5—93692—026-7

ВВЕДЕНИЕ

В отличие от представителей естественных наук (физиков, химиков, биологов, медиков), озабоченных измерением веса (молекулы, атома, планеты, живой клетки, человека), давления (газа, пара или крови), температуры (в атомном реакторе или у больного), использующих для этого приборы (линейку, тонометр, термометр) и получающих данные в соответствующих единицах (граммах, миллиметрах или градусах), психологи чаще всего должны осмысливать (понимать, описывать, измерять) какие-то более общие, абстрактные характеристики, часто ими самими придуманные, существующие гипотетически: интроверсия, альтруизм, интеллект. Как, например, можно измерить степень любви одного человека к другому? С помощью какого прибора? По какой шкале? В каких единицах?

С точки зрения психолога-психометрика *любовь* — это латентная (глубинная) характеристика, которую нельзя увидеть как таковую, но можно оценить на основе измерения явно выраженных (наблюдаемых) переменных. Например, можно выделить некоторые акты поведения и интерпретировать их как проявления любви. Если кто-то кому-то дарит цветы, интересуется его проблемами, читает его записки, смеется над его шутками, жертвует чем-то ради него и т.д., то можно допустить, что в данном случае переменную «любовь» следует «оценить со знаком плюс». Точно так же можно подобрать простые наблюдаемые характеристики для изучения альтруизма, понимания и т.д. Вообще идентификация глубинных измерений по наблюдаемым характеристикам (поступкам) происходит в психологических исследованиях любого уровня: индивида (например, выраженность нейротизма), личности (*IQ*), межличностного взаимодействия (лидерство), общества в целом (идеология, моральные нормы).

При этом исходят из гипотезы, что абстрактные понятия можно описать через более простые (наблюдаемые), поскольку эти абстрактные понятия объясняют наблюдаемые корреляции между простыми переменными. Например, постулат о существовании чего-то такого, называемого «любовью», определяет корреляции между поступками в различных ситуациях, *связываемых* с проявлениями любви. Стоит обратить внимание на выделенное слово «связываемых»: *кем, где, когда, как*? Задумав измерить какую-либо латентную переменную, исследователь (психолог-экспериментатор) составляет список характеристик (наблюдаемых переменных), свидетельствующих о проявлениях латентной переменной. Этот список чаще всего составляется на основании его гипотезы (например, о том, что чувство любви проявляется в каких-то очевидных и общепринятых поступках). Тут необходимо, конечно же, учитывать социокультурный контекст, ибо «узаконенные» (нормативные) способы проявления тех или иных чувств в разных обществах совершенно различны (достаточно вспомнить до сих пор бытующую русскую поговорку: «Бьет, значит любит»). Поскольку для оценки используются измерения по нескольким переменным-параметрам, то говорят о латентном конструкте — *факторе.*

Понятие «конструкт» ввел Дж.Келли (1955), рассматривавший персональные (личностные) конструкты не только как форму упорядочения опыта, но и как образование, опосредствующее восприятие и осознание действительности. Этот термин применяется и к общественному сознанию, впитавшему в себя личностные конструкты (например, на уровне идеологии, морали, общественных норм, определяющих функционирование и развитие всего общества в целом). Можно говорить о групповых конструктах, присущих представителям какой-то специальности и связанных с определенной профессиональной картиной мира.

Для обработки данных, полученных в ходе эксперимента, широко используются различные методы многомерной статистики. Наиболее распространенный из них — факторный анализ — статистическая процедура, используемая для выявления относительно небольшого количества глубинных (явно не наблюдаемых) конструктов, которые можно использовать для представления отношений между многочисленными наблюдаемыми переменными.

Точный момент возникновения метода факторного анализа определить достаточно трудно. Если отсчитывать его историю от изобретения Ф.Гальтоном коэффициента корреляции, то это середина 1880-х гг. Работая с антропометрическими данными, Пирсон в 1901 г. выдвинул идею «главных осей», но рождение факторного анализа как метода исследования связывают с публикацией в 1904 г. статьи Спирмэна «Объективное определение и измерение общего интеллекта». На основе статистического анализа тестов Спирмэн выдвинул двухфакторную теорию интеллекта, описываемого в терминах одного общего (генерального) фактора, присущего всем измерениям интеллекта, и целой серии специфических факторов, привносимых каждым из используемых тестов. Однако концепция одного генерального фактора оказалась несостоятельной, и дальнейшее развитие теории привело к появлению многофакторного анализа Тэрстоуна, т.е. к тому, что мы называем факторным анализом сегодня. Теперь общепринято рассматривать баллы в батареях тестов способностей (наблюдаемые переменные) как линейные комбинации факторов, выражающих вербальные навыки, математические способности и скорость восприятия.

Во время Второй мировой войны факторный анализ широко применялся различными военными службами

США в связи с решением проблем квалификационных проверок, классификации и распределения личного состава. Довольно скоро появились работы, посвященные применению факторного анализа в исследовании темперамента (*Guilford, Zimmerman*, 1956), должностной морали (*Roebuck*, 1958), в разработке методик клинической терапии (*Lorr, McNair*, 1964; *McNair*, 1964), при выявлении психологических особенностей *«public relations»* (*Schubert*, 1962; *Thurstone, Degan*, 1951; *Voiers*, 1964; подробнее об этом см.: *Харман*, 1972).

Факторный анализ довольно быстро превратился в достаточно сложную математическую систему, сочетающую методы теории вероятности и математической статистики, линейной алгебры и функционального анализа, развиваемую американскими математиками и статистиками для американских психологов и этими американскими психологами главным образом используемую. Практически все книги по факторному анализу, доступные русскоязычному читателю, — это переводы. И ссылки в них, иллюстрирующие применение этого метода в психологии, относятся исключительно к англоязычной литературе.

В нашей стране обсуждение основ факторного анализа началось еще в 1930-х гг. Однако в основном это были критические выступления, соответствующие духу эпохи и приведшие к тезису о «крайнем упрощенчестве метафизического характера, возникающем при разложении свойства на сумму составляющих» (*Мандрыка*, 1931). Такая позиция существенно затормозила дальнейшее распространение и использование факторного анализа во всех областях советской науки.

Новый этап развития этого метода в СССР начался в 1950-х гг. в антропологии (*Игнатьев*, 1957). В работе В.П.Чтецова (1960) была изложена общая схема факторного анализа и рассмотрены некоторые работы зарубежных антропологов. Необходимость использования факторного анализа в физкультурной антропологии была показана в статье П.Н.Башкирова (1960), послужившей «мостиком» между антропологией и науками о спорте, тесно соприкасающимися с наукой о высшей нервной деятельности человека — областью интересов Б.М. Теплова и В.Д. Небылицина (подробнее об этом см.: *Небылицын*, 1960; *Докторов*, 1969).

Статья Небылицына (1960) по тем временам была достаточно смелой (не будем забывать про активную борьбу с буржуазными веяниями в советской биологии, генетике, математике и т.д.). Осторожно называя факторный анализ скорее искусством, предоставляющим немалый простор для субъективных интерпретаций и выводов, автор все же предлагает психологам познакомиться с теорией, основными предпосылками, логикой и техникой этого метода, а также выражает надежду на скорое превращение его в строгую логическую схему, дающую единственное решение.

Теплов (1967) обращает внимание на две различные, но не противоречащие друг другу задачи факторного анализа: формально-математическую (статистическую, связанную с экономным описанием полученных данных) и научно-содержательную (интерпретационную, позволяющую подтвердить или отбросить гипотезы, касающиеся природы изучаемых процессов). Эти две задачи тесно взаимосвязаны: для решения второй (научно-содержательной) задачи надо прежде всего решить первую — математическую. Описывая математическую модель факторного анализа и приводя примеры из исследований руководимой им лаборатории, Теплов говорит о том, что факторный анализ будет ценным орудием в любой области, где можно предположить наличие некоторых основных параметров, функций, свойств, образующих структуру. В настоящее время во всех монографиях по факторному анализу указываются области применения его в психологии. Стоит отметить, что свое окончательное название на русском языке метод факторного анализа получил именно в этой работе Теплова (ранее наряду с термином «факторный» использовался термин «факториальный»).

Если попросить любого отечественного психолога назвать имена коллег, наиболее часто использующих факторный анализ сегодня, то бесспорными лидерами такого рейтинга станут «отцы-основатели» психосемантического направления — В.Ф.Петренко (1983, 1988, 1997) и А.Г.Шмелев (1983). Это действительно так. Факторный анализ (наряду с другими методами многомерной статистики — кластерным и дискриминантным анализом, многомерным шкалированием) входит в рабочий арсенал психосемантики. И если Е.Ю.Артемьева (1980, 1999), развивая психосемантический подход, пыталась избежать обработки данных, связанной с громоздкими вычислениями, из-за определенных трудностей использования больших ЭВМ и отсутствия персональных (отсюда ее семантические коды и пр.), то в настоящее время снятие этих барьеров позволяет «выжать» из полученных данных гораздо больше информации методами многомерной статистики. Конечно же, использование факторного анализа не ограничивается областью одной только психосемантики, хотя развитие последней в значительной степени способствует развитию общей математической культуры отечественных психологов. Достаточно просмотреть психологические журналы за последние два-три года, чтобы убедиться, что практически не осталось областей общей или прикладной психологии, где бы не проводились исследования с помощью метода факторного анализа.

Если на первых этапах факторно-аналитические процедуры выполнялись в основном «вручную», что требовало от исследователя владения теорией и методами расчета, то в настоящее время подавляющее большинство психологов, использующих факторный анализ для обработки своих данных, имеет очень туманное представление о сложных конструкциях, обосновывающих вычисления, а соответствующие компьютерные программы (как правило, созданные американскими программистами) воспринимает как «черный ящик», в который можно ввести свою матрицу данных, а на выходе получить матрицу факторов или какие-то графики. Конечно же, некоторые знания в области теории факторного анализа позволят исследователю более свободно чувствовать себя не только при обработке данных (выбор методов, статистических критериев, математического обоснования оптимального решения), но и на этапе планирования эксперимента (какие переменные включить, какого математического решения ожидать), а также при интерпретации полученного результата и осознании того, почему получилось именно это решение и можно ли его улучшить, выбрав другие методы факторного анализа. Все это повышает уровень исследований.

Однако все мы знаем, что ездить на автомобиле вполне можно и без знания его внутреннего устройства: выучил правила дорожного движения, познакомился с принципами движения машины, вспомнил школьные уроки физики — и в дорогу. Если что-то сломалось в пути, вовсе не обязательно лезть под капот, а можно обратиться за помощью к специалисту. Наверное, то же самое должно происходить, когда психолог садится за компьютер, включает программу факторного анализа и начинает обрабатывать свои данные. Здесь в качестве помощников выступают «Руководство пользователя» по применению программы факторного анализа и общая математическая культура, полученная в школе, а потом в институте (не случайно же курс математики считается необходимым для студента-психолога). Главная цель предлагаемого пособия — по возможности просто объяснить психологу (или студенту), как использовать мощь факторного анализа в своих целях. Однако, вспоминая аналогию с вождением автомобиля и учитывая то, что автосервис в настоящий момент развит гораздо лучше, чем обслуживание ученых-психологов специалистами по теории факторного анализа (последних просто очень мало), а также вероятность того, что психолог сам захочет (или будет вынужден) разбираться в формулах и теоремах этой теории, мы даем некоторые математические основы факторного анализа, а более продвинутому читателю рекомендуем дополнительную литературу.

Глава 1

МЕТОДЫ ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ И ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА: ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ПРАКТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1.1. Общие положения

Методы главных компонент и факторного анализа представляют собой совокупность статистических процедур, направленных на выделение из заданного множества переменных подмножеств переменных, тесно связанных (коррелирующих) между собой. Переменные, входящие в одно подмножество и коррелирующие между собой, но в значительной степени независимые от переменных из других подмножеств, образуют факторы[1]. Цель факторного анализа — идентифицировать явно не наблюдаемые факторы с помощью множества наблюдаемых переменных.

В основе парадигмы использования факторного анализа лежит предположение о том, что выделяемые факторы отражают глубинные процессы (латентные, не наблюдаемые, не измеряемые), являющиеся причиной кор-

---

[1] В ходе выполнения анализа по методу главных компонент выделяются «компоненты», тогда как в результате факторного анализа выделяются факторы, однако в данном случае разница незначительна и выделенные конструкты (подмножества переменных) вполне можно назвать факторами.

реляций первичных (наблюдаемых, измеряемых) переменных. Другими словами, факторы (глубинные параметры) детерминируют (определяют) первичные наблюдаемые переменные и могут быть использованы для объяснения комплексных явлений. Наблюдаемые корреляции между первичными переменными возникают из-за того, что их детерминируют одни и те же факторы.

Например, мы исследуем влияние на академическую успеваемость студентов различных психологических и социально-демографических параметров: личностных характеристик, мотивации, умственных способностей, социального происхождения, семейного положения, здоровья, физических характеристик и т.д. Каждая из этих областей задается множеством переменных; все переменные подвергаются анализу одновременно и независимо друг от друга. Анализ выявляет «связки» (подмножества) коррелирующих между собой переменных. Изучение этих «связок» (интерпретация результатов) позволяет выявить скрытые процессы, влияющие на успеваемость студентов. В ходе анализа может получиться так, что несколько переменных, характеризующих независимость личности, имеют высокие коэффициенты корреляции с переменными, измеряющими мотивацию и успеваемость. Это можно проинтерпретировать как положительное мотивирующее влияние на успеваемость *фактора независимости личности*. Если же высокие коэффициенты корреляции будут обнаружены между переменными, измеряющими интеллектуальные способности и успеваемость, то это можно проинтерпретировать как положительное влияние на успеваемость *фактора интеллекта*. Корреляция между тестовыми баллами может быть объяснена такими определяющими факторами, как *общий уровень интеллекта, абстрактная способность понимания, способность понять прочитанное*. Корреляция между социальными переменными может возникнуть благодаря таким факторам, как *социально-экономический уровень общества, уровни урбанизации, благотворительности, демографической стабильности*.

Математическая модель факторного анализа появилась как нечто подобное многомерному уравнению регрессии: каждая переменная выражается как линейная комбинация факторов, которые в действительности не наблюдаемы. Например, в классическом семантическом дифференциале Ч.Осгуда (со шкалами прилагательных-антонимов, с помощью которых достаточно легко оценивается любой объект) каждую из наблюдаемых шкал (большой/маленький, высокий/низкий, веселый/грустный и т.д.) можно выразить через три латентных фактора (*Оценка, Сила и Активность*):

$$\text{Большой/Маленький}= a(\text{Оценка})+b(\text{Сила})+c(\text{Активность})+U_{\text{БМ}} \qquad (1)$$

Это уравнение отличается от обычного многомерного уравнения регрессии тем, что *Оценка, Сила и Активность* — это не единичные независимые переменные. Это латентные (ненаблюдаемые, гипотетические) конструкты, которые нельзя измерить, но которые, согласно модели исследователя, проявляются через целую группу переменных (в нашем случае шкал прилагательных-антонимов).

Факторы определяются наблюдаемыми переменными и могут быть оценены как их линейная комбинация. Например:

$$\text{Оценка}=C_1(\text{приятный/неприятный})+C_2(\text{веселый/грустный})+C_3(\text{красивый/безобразный})+\ldots \qquad (2)$$

Теоретически возможна ситуация, что все переменные входят в фактор *Оценки*, но, как правило, переменными, характеризующими этот фактор, считаются те, у которых большие коэффициенты C_i. Говорят, что эта группа переменных составляет фактор. Так, например, в группу шкал фактора *Оценка* обычно входят красивый/некрасивый, хороший/плохой и т.п., в группу шкал фактора *Сила* — сильный/слабый, большой/маленький и т.п., а фактор *Активность* включает шкалы активный/

пассивный, быстрый/медленный, подвижный/неподвижный и т.п. Обычно факторы, используемые для характеристики множества переменных, не известны заранее, а определяются в ходе факторного анализа.

Оценка, Сила, Активность — это *общие факторы*, так как через них все шкалы-переменные выражаются как функции. $U_{БМ}$ — это *характерный фактор*, включающий в себя специфический фактор ($S_{БМ}$), выражающий ту часть переменной большой/маленький, которая не может быть объяснена общими факторами, а также связанный с ошибками измерения, присутствующими при любом исследовании.

Общее выражение для *j*-го фактора может быть записано так:

$$F_j = W_{j1}X_1 + W_{j2}X_2 + W_{j3}X_{3\ldots} + W_{jp}X_p, \tag{3}$$

где W_{ji} — неизвестные коэффициенты факторных значений и p — количество переменных.

В общем случае для *i*-й переменной может быть записано следующее выражение:

$$X_i = A_{i1}F_1 + A_{i2}F_2 + \ldots + A_{ik}F_k + U_i, \tag{4}$$

где F_j (j изменяется от 1 до k) — это общие факторы, U_i — характерный, A_{ij} — константы, используемые в линейной комбинации k факторов. Характерные факторы могут не коррелировать друг с другом и с общими факторами.

В психологии методы главных компонент и факторного анализа широко используются для разработки всевозможных диагностических методик — личностных, интеллектуальных и пр. Исследование начинается с выбора большого множества первичных переменных (которые можно измерить, т.е. определить их значение в результате опроса или какого-то физического измерения), отражающих первоначальную (экспериментально проверяемую) гипотезу о связи измеряемых и латентных переменных. Данные (значения переменных) набираются на репрезентативной (с точки зрения основной гипотезы исследования) выборке испытуемых. Выборка может быть составлена случайным образом или, наоборот, по какому-то внешнему критерию, которому испытуемые должны удовлетворять.

Процедуры факторно-аналитической обработки, применяемые к полученным данным, различны, но структура (алгоритм) анализа состоит из одних и тех же основных этапов: 1. *Подготовка исходной матрицы данных.* 2. *Вычисление матрицы взаимосвязей признаков.* 3. *Факторизация* (при этом необходимо указать количество факторов, выделяемых в ходе факторного решения, и метод вычисления). На этом этапе (как и на следующем) можно также оценить, насколько хорошо полученное факторное решение сближает исходные данные. 4. *Вращение* — преобразование факторов, облегчающее их интерпретацию. 5. *Подсчет факторных значений* по каждому фактору для каждого наблюдения. 6. *Интерпретация данных.*

В ходе выполнения факторного анализа какие-либо из указанных этапов можно опустить. Например, в качестве исходной матрицы данных можно использовать корреляционную матрицу или эквивалентную ей любую другую матрицу связей, подсчитанную в ходе какой-то другой вычислительной процедуры, и тогда работа начинается сразу со второго этапа. Также можно опустить вращение или (при отсутствии непосредственных наблюдений, когда мы имеем в качестве исходной матрицы корреляционную) не выполнять подсчет значений по каждому фактору для наблюдений.

Подготовка исходных данных. Практически во всех процедурах любой программы факторного анализа в качестве исходных данных используются матрицы. *Матрица* – это прямоугольная (в частном случае квадратная) таблица чисел, в которой, как правило, горизонтальные линии (строки, ряды) соответствуют наблюдениям (объектам), а вертикальные линии (столбцы) — переменным. При подготовке исходных данных для факторного анализа исследователь должен решить, как он будет записывать данные в строки и столбцы таблицы, т.е. выбрать, что будет рассматриваться в качестве наблюдений, а что в качестве переменных.

Наиболее распространен случай, когда факторно-аналитической обработке подвергается набор данных, полученных в результате опроса N испытуемых (респондентов) с помощью анкеты, содержащей n вопросов. Если целью исследования является анализ вопросов анкеты (точнее, ответов на эти вопросы и взаимосвязей между ними), то анкета, заполненная одним респондентом, соответствует одному наблюдению, а каждый из n вопросов рассматривается как переменная. Следовательно все данные записываются в таблицу, состоящую из N строк и n столбцов. Значения каждой переменной принадлежат заранее заданному множеству вариантов ответов на соответствующий вопрос и должны представлять собой интервальную (или по крайней мере ранговую) шкалу, если в дальнейшем предусмотрен факторный анализ матрицы данных. N испытуемых, ответивших на вопросы анкеты, называются выборкой.

Если исследователя интересует взаимосвязь не вопросов анкеты, а отдельных испытуемых из выборки, тогда матрицу данных можно *транспонировать* (т.е. столбцы записать как строки, а строки автоматически получатся записанными как столбцы) и говорить об n наблюдениях (каждый пункт анкеты — одно наблюдение) и N переменных (испытуемые рассматриваются как переменные).

Еще один способ формирования матрицы данных используется в психосемантике (*Петренко*, 1997), когда исследуется семантическое пространство (пространство значений) сознания (представлений, картины мира) индивида или группы индивидов, т.е. определяется, что представляет собой (означает) для исследуемого индивида или группы тот или иной объект. Но определить это можно только путем соотнесения между собой оценок, данных испытуемыми объектам по тем или иным шкалам. В данном случае шкалы представляют собой некий «алфавит» описания объекта, и чтобы понять, какое «слово» (оценка по большому набору шкал) сказано про какой-то объект, нужно соотнести это «слово» с другими «словами» этого «алфавита» (с оценкой других объектов по тем же шкалам). Таким образом, все данные шкалирования сводятся в матрицу, в которой каждая шкала соответствует переменной, а каждый объект — наблюдению. Наиболее типичный пример такого многомерного шкалирования (когда один испытуемый оценивает несколько объектов по нескольким шкалам) представляет уже упомянутый выше семантический дифференциал Ч.Осгуда[2].

Французский математик Ж.Балладур (1974) предложил свой способ составления матриц данных для факторного анализа. Этот метод предназначен для изучения взаимосвязей между качественными (номинативными) признаками, описывающими некоторую изучаемую совокупность. Например, лица, занятые в обрабатывающей промышленности, могут характеризоваться двумя качественными признаками: местом работы (отраслью производства) и местом проживания (городом). Можно составить матрицу, в которой на пересечении столбца, соответствующего отрасли, и строки, соответствующей городу, будет стоять число, означающее количество лиц, живущих в таком-то городе и занятых в такой-то отрасли производства. Факторный анализ этой матрицы по-

---

[2] Обратим внимание на то, что не всякая факторно-аналитическая обработка данных является психосемантическим исследованием. Для психосемантического исследования, как правило, существенным бывает выбор не только шкал, но и самих *наблюдений*, роль которых играют объекты шкалирования, каждый из которых несет самостоятельную семантическую нагрузку и используется при интерпретации результатов. Когда же речь идет, например, о факторизации пунктов опросника для проверки их взаимосвязи, исследователя интересуют именно пункты, а наблюдения (респонденты) выбираются лишь с учетом требований к выборке, и информация о них при интерпретации практически не используется.

может изучить сходства и различия промышленной структуры исследуемой группы городов (поскольку строки матрицы представляют структуру промышленности рассматриваемых городов). Он даст возможность представить города точками в многомерном пространстве, в котором оси переменных соответствуют отраслям. Тем самым исходная задача переформулируется в задачу факторного анализа: задан массив числовых данных, характеризующих изучаемую группу объектов (городов) по набору переменных (отраслей).

Вычисление матрицы взаимосвязей признаков. Процедура факторного анализа начинается с вычисления *матрицы взаимосвязей* переменных между собой (это квадратная матрица, размер которой равен количеству переменных).

Наиболее распространенная мера взаимосвязи (используемая в факторном анализе в 95% случаев) — это корреляционная связь. Вообще изобретение факторного анализа было связано именно с необходимостью одновременного анализа большого количества коэффициентов корреляции различных шкал между собой. Поэтому практически во всех книгах по факторному анализу речь идет именно о корреляционных матрицах, а не о матрицах взаимосвязей. *Корреляционную матрицу* можно вычислять различными способами. Чаще всего вычисляется коэффициент корреляции Пирсона, но может вычисляться и коэффициент ранговой корреляции (тогда говорят о непараметрическом факторном анализе). Коэффициент корреляции удобен тем, что это стандартизированная мера взаимосвязи, не зависящая ни от единиц измерения, ни от диапазона изменения переменных.

Английское слово *«correlation»* в русском языке оказалось жестко привязанным к «коэффициенту корреляции», вычисляемому по достаточно ограниченному набору формул из теории вероятностей и математической статистики. Однако его можно перевести не только как «корреляция», но и как «взаимосвязь», «соотношение», «взаимозависимость», «взаимоотношение», «отношение». Поэтому не следует ограничивать меры взаимосвязи признаков одними только коэффициентами корреляции, понимаемыми в узком теоретико-вероятностном смысле. Так, в качестве матрицы для факторизации во многих компьютерных программах предусмотрено использование также *матрицы ковариаций*. Еще один распространенный вариант построения матрицы взаимосвязей базируется на использовании различных метрик, задающих «расстояние» между переменными и нормированных таким образом, чтобы диапазон их изменений соответствовал диапазону изменения коэффициента корреляции (от −1 до 1).

Однако в случаях, когда дисперсии разных переменных существенно различаются и измеряются в разнородных единицах, разумно использовать именно корреляционную матрицу.

В случае, когда переменные измеряются в неодинаковых единицах, построение матрицы взаимосвязей заключается в нормировке переменных, т.е. в приведении их к стандартной форме с использованием средних и дисперсии по формуле:

$$X_s = (X - X_{ср})/\sigma \qquad (5)$$

где X_s — стандартизированное значение переменной X, $X_{ср}$ — среднее, σ — стандартное отклонение.

И далее можно вычислять показатели взаимосвязи каким-то иным способом, а не только как коэффициенты корреляции.

Интерпретируемость результатов — наиболее важный содержательный критерий достоверности и значимости анализа. Результат всех процедур можно назвать «хорошим», если выделенная факторная структура с содержательной точки зрения «имеет смысл» (факторы, полученные при «плохом» анализе, такого смысла не имеют). Факторы интерпретируются и получают названия в зависимости от конкретной комбинации измеряемых переменных, имеющих с ними высокую корреляцию. Легче всего интерпретировать фактор, когда несколько измеряемых переменных имеют высокую корреляцию только с ним и не коррелируют с другими факторами.

Чтобы интерпретация была выполнена адекватно, необходимо верифицировать факторную структуру путем установления *конструктивной валидности* факторов. Исследователь должен показать, что факторные значения (баллы, показатели), полученные испытуемыми по латентным переменным (факторам), напрямую взаимосвязаны со значениями (баллами, показателями), полученными испытуемыми по измеряемым первичным переменным, т.е. значения по латентным переменным зависят от условий эксперимента, как это предсказывала теоретическая модель.

Одна из проблем, связанных с методами главных компонент и факторного анализа заключается в том, что критериев, которые позволяли бы проверить правильность найденного решения, не существует. Например, при регрессионном анализе можно сопоставить показатели по зависимым переменным, полученные эмпирическим путем, с показателями, вычисленными теоретически на основе предлагаемой модели, и использовать корреляцию между ними как критерий правильности решения по схеме корреляционного анализа для двух наборов переменных. В дискриминантном анализе правильность решения базируется на том, насколько точно предсказана принадлежность испытуемых к тем или иным классам (если сравнивать с реальной принадлежностью, имеющей место в жизни). К сожалению, в методах главных компонент и факторного анализа не существует такого внешнего критерия, позволяющего судить о правильности решения, подобного принадлежности к классу в дискриминантном анализе. Желание исследователей решить эту проблему способствовало развитию латентно-структурного анализа как следующей ступени факторного анализа.

Вторая проблема заключается в том, что после выделения факторов возникает бесконечное множество вариантов вращения, базирующихся на тех же исходных переменных, но дающих разные решения (факторные структуры определяются несколько иным образом). Окончательный выбор между возможными альтернативами внутри бесконечного множества математически равнозначных решений зависит от содержательного осмысления исследователями результатов интерпретации. А поскольку объективного критерия для оценки различных решений нет, предлагаемые обоснования выбора решения могут казаться голословными и неубедительными.

Третья проблема заключается в том, что факторный анализ довольно часто применяют с целью спасти плохо продуманное исследование, когда становится ясно, что ни одна статистическая процедура не дает желаемого результата. Мощь методов главных компонент и факторного анализа позволяет из хаотичной информации выстроить упорядоченную концепцию (что и создает им сомнительную репутацию).

Существует два основных типа факторного анализа: *эксплораторный* (разведочный) и *конфирматорный* (подтверждающий гипотезу). В первом случае исследователь желает описать и обобщить информацию, группируя переменные, тесно связанные между собой. При этом первичные (измеряемые) переменные выбираются чаще всего без предварительных гипотез относительно существования определяющих их латентных факторов. Эксплораторный факторный анализ обычно используется на ранних этапах исследования как инструмент для объединения в группы первичных переменных и для порождения гипотез относительно структуры латентных факторов. Конфирматорный факторный анализ гораздо тоньше и используется на более поздних стадиях работы для подтверждения уже выстроенной гипотезы о латентной структуре. В этом случае наблюдаемые переменные тщательно отбираются.

Итак, дадим более точные определения некоторым терминам. Первая группа терминов относится к матрицам связей[3]. Матрица взаимосвязей, построенная на основании показателей наблюдаемых (измеренных экспериментальным путем) переменных, называется *наблюдаемой* матрицей взаимосвязей. Матрица взаимосвязей, построенная на основании вычисленных (исходя из экспериментальных данных, но аналитически) факторов, называется *вычисленной* матрицей взаимосвязей. Разница между наблюдаемой и вычисленной матрицами связей называется *остаточной* матрицей взаимосвязей. При хорошем факторном анализе (т.е. в том случае, когда все наблюдаемые переменные практически однозначно разбиваются на подмножества, позволяющие определить фактор) элементы в остаточной матрице должны быть малы, так как наблюдаемая и вычисленная матрицы оказываются близки друг другу.

Вторая группа терминов относится к матрицам, которые строятся и интерпретируются как часть решения. *Поворот* факторов — это процесс поиска наиболее легко интерпретируемого решения для данного количества факторов. Существуют два основных класса поворотов: *ортогональный* и *косоугольный*. В первом случае все факторы априорно выбираются ортогональными (не коррелирующими друг с другом) и строится *матрица факторных нагрузок*, представляющая собой матрицу взаимосвязей между наблюдаемыми переменными и факторами. Величина нагрузок отражает степень связи каждой наблюдаемой переменной и каждым фактором и интерпретируется как коэффициент корреляции между наблюдаемой переменной и фактором (латентной переменной), а потому изменяется в пределах от −1 до 1. Решение, полученное после ортогонального поворота, интерпрети-

[3] Напомним, что наиболее часто в качестве матрицы взаимосвязей в исследованиях и практически всегда в методической литературе используется корреляционная матрица, но мы не будем сужать этот класс матриц и лишь обращаем внимание читателя на этот момент, чтобы избежать недоразумений.

руется на основе анализа матрицы факторных нагрузок путем выявления того, с каким из факторов в максимальной степени связана та или иная наблюдаемая переменная. Таким образом, каждый фактор оказывается заданным группой первичных переменных, имеющих по нему наибольшие факторные нагрузки.

Если выполняется косоугольное вращение (т.е. априорно допускается возможность корреляции факторов между собой), то строится еще несколько дополнительных матриц. *Матрица факторной корреляции* содержит корреляции между факторами. *Матрица факторных нагрузок*, упомянутая выше, расщепляется на две: *структурную матрицу взаимосвязей* между факторами и переменными и *матрицу факторного отображения*, выражающую линейные взаимосвязи между каждой наблюдаемой переменной и каждым фактором (без учета влияния наложения одних факторов на другие, выражаемого корреляцией факторов между собой). После косоугольного вращения интерпретация факторов происходит на основе группировки первичных переменных (подобно тому, как было описано выше), но уже с использованием в первую очередь матрицы факторного отображения.

Наконец, для обоих поворотов вычисляется *матрица коэффициентов факторных значений*, используемая в специальных уравнениях регрессионного типа для вычисления факторных значений (факторных баллов, показателей по факторам) для каждого наблюдения на основе значений для них первичных переменных.

Сравнивая методы главных компонент и факторного анализа, отметим следующее. В ходе выполнения анализа по методу главных компонент строится модель для наилучшего объяснения (максимального воспроизведения) полной дисперсии экспериментальных данных, полученных по всем переменным. В результате выделяются «компоненты». При факторном анализе предполагается, что каждая переменная объясняется (детерминируется) некоторым количеством гипотетических общих факторов (влияющих на все переменные) и характерными факторами (для каждой переменной своими). И вычислительные процедуры выполняются таким образом, чтобы освободиться как от дисперсии, полученной в результате ошибки измерения, так и от дисперсии, объясняемой специфичными факторами, и анализировать только дисперсии, объясняемые гипотетически существующими общими факторами. В результате получаются объекты, называемые факторами. Однако, как уже упоминалось, с содержательно-психологической точки зрения эта разница в математических моделях существенного значения не имеет, поэтому в дальнейшем, если не дается особых пояснений, о каком именно случае идет речь, мы будем использовать термин «фактор» как по отношению к компонентам, так и по отношению к факторам.

* * *

Итак, цель использования методов главных компонент и факторного анализа заключается в сокращении большого количества переменных до небольшого количества факторов. Это делается для того, чтобы более точно описать (и объяснить) взаимосвязи между наблюдаемыми переменными или же проверить теорию, касающуюся латентных переменных. Наиболее часто возникающие при этом вопросы: *Сколько выбрать факторов? Как интерпретировать факторы? Как определить значимость решений и факторов? Как проверить теорию в факторном анализе? Как оценить факторные значения?* будут подробно рассмотрены в нашем пособии.

1.2. Особенности факторно-аналитического исследования

Схема исследования, планируемого специально для факторно-аналитической обработки, отличается от схем других исследований. Приведем некоторые положения из работы (*Comrey, Lee*, 1992), в которой эта проблема подробно обсуждается.

В первую очередь исследователь должен выработать гипотезу относительно того, какие факторы могли бы описывать предметную область. Статистически очень важно, чтобы экспериментальное исследование было достаточно широким и можно было бы выделить не менее пяти-шести гипотетических факторов. Иначе будет трудно говорить об устойчивости решения. С другой стороны, потеря какого-то фактора, действительно участвующего (лежащего в основе, детерминирующего, связанного) в изучаемом процессе, может стать серьезным препятствием с точки зрения успешности исследования. Ошибки при измерении каких-либо важных факторов могут привести к неправильной трактовке очевидных взаимосвязей между измеряемыми факторами. Включение всех факторов, имеющих отношение к исследуемой области, — это в первую очередь содержательная, а не статистическая проблема.

Далее исследователь должен выбрать переменные для наблюдения. Для каждого гипотетического фактора следует предусмотреть пять или шесть первичных наблюдаемых переменных, которые позволят измерить фактор в «чистом» виде (исходя из предположения, что эти переменные детерминированы *только этим* фактором). Их называют *маркерными переменными*. Другими словами, маркерные переменные должны быть в высокой степени взаимосвязаны с одним и только одним фактором и иметь по нему высокие нагрузки вне зависимости от того, с помощью какого алгоритма выделялись и вращались факторы. Маркерные переменные четко определяют природу фактора. Добавление переменных, которые потенциально могут быть объяснены каким-то фактором, с тем, чтобы более четко выявить его семантику, гораздо более эффективно, если этот фактор с самого начала был однозначно определен маркерными переменными.

Следует учитывать также сложность переменной, характеризуемую количеством факторов, с которыми эта переменная коррелирует (взаимосвязана). Переменные разной сложности, включенные в исследование, могут «связываться» в факторы, имеющие очень мало общего с исследуемым процессом. Переменные одинаковой сложности могут «связываться» между собой (иметь высокий показатель взаимосвязи) именно по этой причине, а не потому, что они относятся к одному и тому же семантическому фактору. Оценка сложности переменных — это неотъемлемая часть процесса порождения гипотез о факторах и выбора переменных для измерения этих факторов.

Исследователь, планирующий факторно-аналитическое исследование, должен обратить внимание еще и на следующие моменты. Очень важно, например, чтобы показатели испытуемых, составляющих экспериментальную выборку, покрывали возможно более широкий спектр значений как по наблюдаемым переменным, так и по латентным факторам. Действительно, если все испытуемые имеют практически одинаковые значения по какому-то фактору, то взаимосвязь между наблюдаемыми переменными низка и фактор может не выделиться. Выбор испытуемых с ожидаемо высоким разбросом показателей по наблюдаемым переменным и латентным факторам — важная составная часть планируемого исследования.

Следует также внимательно относиться к объединению для факторной обработки данных, полученных на нескольких выборках или на одной и той же, но в течение длительного временного интервала. Во-первых, испытуемые, различающиеся по какому-либо критерию (например, социально-экономическому статусу), могут также характеризоваться различными факторами. Изучение групповых различий в большинстве случаев очень полезно для прояснения гипотезы. Во-вторых, структура латентного фактора может изменяться во времени для одних и тех же испытуемых по мере получения ими полной информации или опыта участия в эксперименте, и исследование подобных различий также может быть очень полезным. Объединение результатов разных групп в одну матрицу может скрыть (а не выявить) различия. Если же на различных выборках действительно получаются аналогичные факторы, то их объединение даже желательно, ибо увеличивает размер выборки. Например, если на выборке мужчин получаются те же факторы, что и на выборке женщин, то стоит их объединить и проанализировать факторную структуру «общечеловеческой» выборки.

В связи с тем, что методы главных компонент и факторного анализа чувствительны к величине показателей взаимосвязей, существенно важны достоверность и надежность этих показателей. Чувствительность к экстремальным случаям (к значительным отклонениям от нормы, посторонним значениям), проблемы, связанные с отсутствием данных, пропуском каких-то пунктов, а также слабая взаимосвязь между «плохо распределенными» переменными (имеющими маленький диапазон разброса) негативно влияют на результаты факторного анализа (подробнее об этом см.: *Tabachnik, Fidell*, 1996). Математически корректное преодоление этих проблем, включая преобразование переменных, может существенно улучшить результаты как эксплораторного (разведочного), так и конфирматорного (подтверждающего) факторного анализа (для последнего указанные ограничения актуальны в значительно большей степени, чем для первого).

Размеры выборки и пропущенные данные. Чем больше выборка, тем больше достоверность показателей взаимосвязи. Поэтому очень важно иметь достаточно большую выборку. Требуемый размер выборки также зависит от степени взаимосвязи показателей в популяции в целом и количества факторов: при сильной и достоверной взаимосвязи и небольшом количестве четко очерченных факторов будет достаточно и не очень большой выборки.

Так, выборка, размер которой 50 испытуемых, оценивается как очень плохая, 100 — плохая, 200 — средняя, 300 — хорошая, 500 — очень хорошая и 1000 — превосходная (*Comrey, Lee*, 1992). Исходя из этих соображений, в качестве общего принципа можно порекомендовать исследовать выборки не менее 300 испытуемых. Для решения, базирующегося на достаточном количестве маркерных переменных с высокими факторными нагрузками (>0.80) достаточно выборки порядка 150 испытуемых (*Guadagnoli, Velicer*, 1988).

Исследователь, проводящий эксперимент, часто сталкивается с проблемой пропуска ответов на какие-то отдельные вопросы (первичные переменные) у отдельных испытуемых. В принципе данные таких испытуемых всегда можно исключить из общей матрицы. Но если выборка не очень велика и, исключая кого-то, мы уменьшаем ее еще больше, то имеет смысл воспользоваться специальными методами восстановления пропущенных данных: например, экстраполяцией, регрессионной оценкой, построением корреляционной матрицы с неполной информацией (подробнее об этом см.: *Tabachnik, Fidell*, 1996, гл. 4). При этом необходимо обращать внимание на то, какие значения были пропущены (с точки зрения того, является ли этот пропуск случайным). Также следует иметь в виду, что оценочные процедуры (например, регрессия) «подгоняют» данные, т.е. увеличивают показатели взаимосвязи, и это может привести к «порождению» дополнительных факторов.

Нормальность распределения первичных данных. Как уже было сказано, основное достоинство методов главных компонент и факторного анализа заключается в удобстве обобщения взаимосвязей большого набора наблюдаемых переменных. Поэтому допущения, касающиеся распределения переменных, не так уж важны. Если переменные распределены нормально, то решение будет лучше, но отсутствие нормальности не делает решение совсем плохим, хотя и ухудшает его качество.

В тех случаях, когда количество выделяемых факторов определяется на основании статистических критериев, необходимо, чтобы наблюдаемые переменные удовлетворяли требованию многомерной нормальности (допущение о нормальном распределении по всем переменным и их комбинациям). Тесты на многомерную нормальность очень чувствительны к отклонениям от теоретической модели, но нормальность для каждой переменной в отдельности проверяется по *асимметрии* (насколько кривая изучаемого распределения сдвинута вправо или влево по сравнению с теоретически нормальной кривой) и *эксцессу* (степень вытянутости вверх или прогнутости вниз «колокола» имеющегося распределения, визуально представленного в частотной диаграмме, в сравнении с «колоколом» графика плотности, характерным для нормального распределения). Если переменная имеет существенные асимметрию и эксцесс, то ее можно преобразовать, введя новую переменную (как однозначную функцию от рассматриваемой) таким образом, чтобы эта новая переменная была распределена нормально (подробнее об этом см.: *Tabachnik, Fidell*, 1996, гл. 4).

Линейность. Многомерная нормальность также предполагает линейность взаимосвязи между парами переменных. Если эта взаимосвязь значимо отличается от линейной, то результат существенно ухудшается, так как линейная модель факторного анализа не учитывает нелинейных зависимостей. Линейность между парами переменных можно проверить графически, расположив в системе координат множество точек, каждая из которых соответствует отдельному измерению (наблюдению, случаю, испытуемому и т.д.): координата точки по одной оси равна значению первой переменный у этого испытуемого, а по второй оси — значению второй переменной. На этом графике будет видна конфигурация разброса. Избавиться от нелинейных зависимостей также можно с помощью преобразования переменных.

Посторонние значения. Иногда экспериментатор сталкивается с тем, что показатели какого-то испытуемого по некоторым переменным (одной или нескольким) резко отличаются (значительно больше или меньше) от показателей всех остальных испытуемых. Эти «посторонние значения» (одномерное или многомерное) существенно влияют на факторное решение, и во многих программах факторного анализа предусмотрены специальные методы выявления и ослабления этого влияния (подробнее о этих методах см.: там же).

Множественная коллинеарность и сингулярность. В процессе факторного анализа для построения обратной матрицы возникает необходимость делить матрицу взаимосвязей на детерминант. В случае множественной *коллинеарности* переменные очень сильно взаимосвязаны (показатель взаимосвязи более 0.9) и детерминант близок к нулю; в случае *сингулярности* существуют избыточные переменные, не несущие абсолютно никакой новой информации и являющиеся просто комбинацией двух или нескольких переменных. Детерминант в этом случае в точности равен нулю. Когда переменные коллинеарны или сингулярны, то говорят об избыточности информации (какие-то переменные можно исключить из анализа). То есть экспериментальные данные свидетельствуют о том, что фактически выявлено меньшее количество переменных, чем планировалось перед началом эксперимента, и матрица взаимосвязей имеет ранг меньший, чем количество столбцов (формальное количество переменных).

Множественная коллинеарность и сингулярность создают для исследователя логические и статистические проблемы. С точки зрения логики, для проведения анализа нет необходимости перегружать исследование избыточными переменными. Они только увеличивают долю ошибок и в действительности ухудшают результаты. Планируя эксперимент, следует хорошо обдумать необходимость включения в общий список сильно взаимосвязанных переменных (показатель взаимосвязи выше 0.7). Тут можно либо исключить одну из переменных, либо создать новую переменную, представляющую собой композицию первых двух.

Статистические проблемы, связанные с множественной коллинеарностью и сингулярностью, возникают в случае очень сильной взаимосвязи (выше 0.9) из-за того, что сингулярную матрицу невозможно обратить, а обращение коллинеарной матрицы приводит к неустойчивому решению. Обращение матрицы эквивалентно делению; вычисления, требующие деления, не могут быть проведены на сингулярной матрице, так как ее детерминант равен нулю (возможность деления на нуль исключена).

В случае множественной коллинеарности детерминант очень близок к нулю. Деление на близкий к нулю детерминант дает очень большие и неустойчивые значения в обратной матрице.

Для метода главных компонент коллинеарность не представляет собой никакой проблемы, поскольку нет необходимости строить обратную матрицу. Для оценки значений факторов в большинстве форм факторного анализа сингулярность и высокая коллинеарность представляют проблему, возникающую из-за того, что детерминант матрицы взаимосвязей и собственные значения, связанные с некоторыми факторами, близки к нулю.

В большинстве программ в случае коллинеарности или сингулярности предусмотрено вычисление показателя множественной взаимосвязи переменной с другими переменными как квадрата *коэффициента множественной корреляции* (КМК) переменных. Для вычисления КМК переменной рассматривается ее множественная корреляция со всеми остальными переменными. При этом та переменная, КМК которой вычисляется, рассматривается как зависимая от всех остальных (считаемых независимыми) переменных[4]. Большое значение КМК означает сильную взаимосвязь рассматриваемой переменной со всей совокупностью остальных (*коллинеарность*). Если

[4] Формально это может быть определено следующим образом. Коэффициент множественной корреляции (КМК) переменной X_1 и всеми остальными переменными $X_2, ..., X_n$ определяется как обычный коэффициент корреляции между X_1 и наилучшим линейным приближением X_1 по $X_2, ..., X_n$, т.е. регрессией X_1 по $X_2, ..., X_n$. КМК при $n = 2$ равен обычному коэффициенту корреляции ρ_{12} между X_1 и X_2. КМК между X_1 и $X_2, ..., X_n$ равен $\rho_{1(2...n)}$ и выражается через элементы корреляционной матрицы $R = \|\rho_{ij}\|$ так: $\rho_{1(2...n)} = 1 - |R| / R_{11}$, где $|R|$ — определитель R, а R_{11} — алгебраическое дополнение элемента $\rho_{11} = 1$. При этом $0 \le \rho_{1(2...n)} \le 1$. Если $\rho_{1(2...n)} = 1$, то величина X_1 с вероятностью 1 равна линейной комбинации величин $X_2, ..., X_n$. С другой стороны, случай $\rho_{1(2...n)} = 0 \Leftrightarrow \rho_{12} = ... = \rho_{1n} = 0$ имеет место, когда X_1 не коррелирует ни с одной из переменных $X_2, ..., X_n$ (*Прохоров*, 1982).

КМК=1, то это значит, что переменная однозначно выражается через совокупность остальных переменных (*сингулярность*). Многие компьютерные программы вместо КМК оперируют с *толерантностями*, вычисляемыми как (1–КМК). В большинстве случаев коллинеарные и сингулярные переменные рекомендуется исключать из анализируемой матрицы.

Факторизуемость матрицы взаимосвязей. Матрица взаимосвязей, допускающая выделение факторов, называется *факторизуемой*. Чтобы быть таковой, матрица обязательно должна включать несколько значимых по величине показателей взаимосвязей. Достаточность этой величины в некоторой степени зависит от N (количества испытуемых, наблюдений, измерений): выборки больших размеров допускают анализ более слабых взаимосвязей, но если ни один из показателей взаимосвязей не превышает 0.3, то в использовании факторного анализа нет смысла. Поэтому, прежде чем начинать факторно-аналитическую обработку своих данных, следует убедиться, что в матрице взаимосвязей присутствуют значения, которые по абсолютной величине больше 0.3. Если же ни одной такой корреляции не найдено, то целесообразнее отказаться от использования факторного анализа.

Однако даже сильные взаимосвязи между парами переменных сами по себе не могут быть надежной гарантией наличия факторов. Вполне возможно, что взаимосвязи существуют только между парами первичных переменных и не отражают глубинные процессы, одновременно влияющие на несколько переменных. Для определения степени непосредственной взаимосвязи переменных друг с другом (без учета влияния всех остальных переменных) используются частные коэффициенты корреляций. Если фактор действительно присутствует, то высоким парным взаимосвязям соответствуют низкие частные коэффициенты корреляции. В программах *BMDP*, *SPSS* и *SAS* предусмотрена выдача частных корреляционных матриц.

В программе *SPSS* реализована возможность проверять гипотезы о равенстве нулю показателей взаимосвязей, вычисленных как коэффициенты корреляции (так называемый тест Бартлетта[5]). Это достаточно хороший метод, однако из-за зависимости от количества испытуемых тест рекомендуется использовать для выборок большого размера и с большим количеством переменных.

Некоторые более тонкие методы определения факторизуемости матриц взаимосвязей, также вычисленных как матрицы коэффициентов корреляций, реализованы в программах *SPSS* и *SAS*.

Обе программы дают критерии значимости корреляций с помощью вычисления антиобразной корреляционной матрицы и кайзеровских характеристик адекватности выборки. Проверка значимости корреляций в корреляционной матрице позволяет определить достоверность взаимосвязи между парами переменных. Чтобы корреляционная матрица была факторизуема, значимой связью должны обладать многие пары переменных. Антиобразная корреляционная матрица содержит частичные корреляции между парами переменных, не учитывающие влияния других переменных. Если корреляционная матрица факторизуема, то значения элементов вне диагонали антиобразной матрицы преимущественно близки к нулю. Наконец, кайзеровский параметр адекватности выборки представляет собой соотношение суммы квадратов корреляций к сумме квадратов корреляций плюс сумма квадратов частичных корреляций. Чем меньше сумма частичных корреляций, тем ближе к единице значение кайзеровской характеристики. О хорошей факторизуемости свидетельствует значение величины >0.6.

К сожалению, нам неизвестны методы определения факторизуемости матриц взаимосвязей, вычисленных «некорреляционным» способом.

---

[5] Один из вариантов формулы предложенного Бартлеттом критерия приводится Харманом (1972) и выглядит так: $\chi^2 = -[n - 1/6(2m + 5)]\, ln\,|R|$, с $(m-1)/2$ степенями свободы.

Посторонние переменные. В процессе факторизации (и в эксплораторном, и в конфирматорном анализе) можно выделить переменные, не связанные с другими. Эти переменные обычно не связаны с первыми значимыми факторами, хотя могут быть связаны с более мелкими факторами, менее устойчивыми и достоверными, поскольку на них приходится очень мало переменных. Тем не менее нельзя однозначно отказаться от рассмотрения этих «маленьких» факторов, так как никто не знает насколько они «реальны», т.е. в какой степени они как теоретические конструкты соответствуют или не соответствуют какому-то базисному глубинному образованию в изучаемой области.

Если дисперсия, объясняемая фактором, определенным одной или двумя переменными, достаточно высока, то, исходя из практических соображений, его следует интерпретировать с большой осторожностью или вообще опустить. В конфирматорном анализе такой фактор представляет собой либо многообещающее начало будущего исследования, либо (возможно) ошибку дисперсии, при этом его интерпретация требует прояснения на основе более глубокого изучения.

Переменная с низким квадратом множественной корреляции с другими переменными и слабой взаимосвязью со всеми значимыми факторами представляет собой *постороннюю переменную.* Ее лучше исключить из модели.

Посторонние наблюдения. Отдельные наблюдения (например, испытуемые), имеющие слишком большие или слишком маленькие факторные значения, представляют собой одномерные *посторонние значения* по отношению к решению. Нестандартные факторные значения (слишком большие или слишком маленькие) возникают тогда, когда факторное решение неадекватно. Отдельное исследование посторонних значений поможет определить ситуации, когда применение факторного анализа не дает желаемых результатов.

В различных программах используются различные алгоритмы выделения посторонних значений.

Глава 2

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРОЦЕДУРЫ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА

2.1. Основные уравнения

Раньше практически во всех учебниках и монографиях по факторному анализу предусматривалось объяснение того, как проводить основные вычисления «вручную» или посредством простейшего счетного устройства (арифмометра или калькулятора). Сегодня в связи со сложностью и большим объемом вычислений, необходимых для построения матрицы взаимосвязей, выделения факторов и их вращения, наверное, не осталось ни одного человека, который при проведении факторного анализа не использовал бы мощных компьютеров и соответствующих программ.

Поэтому мы сосредоточим внимание на том, какие наиболее существенные матрицы (массивы данных) можно получить в ходе факторного анализа, как они связаны друг с другом и как их можно использовать для интерпретации данных. Все необходимые вычисления можно сделать с помощью любой компьютерной программы (например, *SPSS* или *STADIA*).

В табл. 1 приведен список наиболее важных матриц для методов главных компонент и факторного анализа. Этот список содержит в основном матрицы взаимосвязей (между переменными, между факторами, между переменными и факторами), стандартизированных значений (по переменным и по факторам), регрессионных весов (для расчета факторных значений с помощью значений по переменным), а также матрицы факторных отображений взаимосвязей между факторами и переменными после косоугольного вращения. В табл. 1 приводятся также матрицы собственных чисел и соответствующих им собственных векторов. Собственные числа (собственные значения) и собственные вектора описываются ввиду их значимости для выделения факторов, употребления в этой связи большого количества специальных терминов, а также тесной связи собственных чисел и дисперсии в статистических исследованиях.

Набор данных, подготовленных для факторного анализа, состоит из результатов измерений (опроса) большого количества испытуемых (респондентов) по определенным шкалам (переменными). В табл. 2 приводится массив данных, который условно можно считать удовлетворяющим требованиям факторного анализа.

Пяти респондентам, обратившимся в туристическое агентство с целью приобрести путевку на морской курорт, были заданы вопросы о значимости для них четырех условий (переменных) выбора места летнего отдыха. Этими условиями-переменными были: *стоимость путевки*, *комфортабельность комплекса*, *температура воздуха*, *температура воды*. Чем большей, с точки зрения респондента, значимостью обладало для него то или иное условие, тем большее значение он ему приписывал. Исследовательская задача состояла в изучении модели взаимосвязей между переменными и выявлении глубинных причин, обусловливающих выбор курорта. (Пример, конечно же, предельно упрощен в иллюстративно-учебных целях, и его не следует рассматривать всерьез в содержательном аспекте.)

Матрица взаимосвязей (табл. 2) была вычислена как корреляционная. Обратите внимание на структуру взаимосвязей в ней, выделенную вертикальными и горизонтальными линиями. Высокие корреляции в верхнем ле-

Таблица 1

Матрицы, наиболее часто используемые в факторном анализе

Обозначение	*Название*	*Размер*	Описание
R	Матрица взаимосвязей	$p \times p$	Взаимосвязи между переменными
D	Матрица нестандартизированных данных	$N \times p$	Первичные данные — нестандартизированные значения наблюдений по первичным переменным
Z	Матрица стандартизированных данных	$N \times p$	Стандартизованные значения наблюдений по первичным переменным
F	Матрица значений факторов	$N \times f$	Стандартизированные значения наблюдений по факторам
A	Матрица факторных нагрузок Матрица факторного отображения	$p \times f$	Коэффициенты регрессии для общих факторов при условии, что наблюдаемые переменные являются линейной комбинацией факторов. В случае ортогонального вращения — взаимосвязи между переменными и факторами
B	Матрица коэффициентов значений факторов	$p \times f$	Коэффициенты регрессии для вычисления значений факторов с помощью значений переменных
S	Структурная матрица	$p \times f$	Взаимосвязи между переменными и факторами

Продолжение таблицы 1

S	Структурная матрица	$p \times f$	Взаимосвязи между переменными и факторами
Ф	Матрица корреляций факторов	$f \times f$	Корреляции между факторами
L	Матрица собственных значений (диагональная)	$f \times f$	Собственные значения (характеристические, латентные корни); каждому фактору соответствует одно собственное число
V	Матрица собственных векторов	$p \times f$	Собственные (характеристические) вектора; каждому собственному числу соответствует один собственный вектор

Примечание. При указании размера дается количество рядов×количество столбцов: p — количество переменных, N — количество наблюдений, f — количество факторов или компонент. Если матрица взаимосвязей R не вырождена и имеет ранг равный p, то тогда фактически выделяется p собственных чисел и собственных векторов, а не f. Однако интерес представляют только f из них. Поэтому оставшиеся $p-f$ не показываются.

К матрицам S и Φ применяется только косоугольное вращение, к остальным — ортогональное и косоугольное.

Таблица 2

Данные для факторного анализа (учебный пример)

Туристы	Переменные			
	Стоимость путевки	Уровень комфорта	Температура воздуха	Температура воды
T_1	32	64	65	67
T_2	61	37	62	65
T_3	59	40	45	43
T_4	36	62	34	35
T_5	62	46	43	40

Корреляционная матрица

	Стоимость путевки	Уровень комфорта	Температура воздуха	Температура воды
Стоимость путевки	1.000	–.953	–.055	–.130
Уровень комфорта	–.953	1.000	–.091	–.036
Температура воздуха	–.055	–.091	1.000	.990
Температура воды	–.130	–.036	.990	1.000

вом и нижнем правом квадрантах показывают, что оценки по *стоимости путевки* и *комфортабельности комплекса* взаимосвязаны, также как и оценки по *температуре воздуха* и *температуре воды*. Два других квадранта показывают, что *температура воздуха* и *комфортабельность комплекса* связаны между собой, также как и *комфортабельность комплекса* и *температура воды*.

Попробуем теперь с помощью факторного анализа обнаружить эту структуру корреляций, легко замечаемую невооруженным глазом в маленькой корреляционной матрице (в большой матрице это очень непросто сделать).

2.1.1. Факторизация

Важная теорема из матричной алгебры гласит, что матрицы, удовлетворяющие определенным условиям, могут быть диагонализированы, т.е. преобразованы в матрицу, на главной диагонали которой стоят числа, а на всех остальных позициях — нули. Матрицы взаимосвязей относятся именно к типу диагонализируемых матриц. Преобразование проводится по формуле:

$$L=V'RV \tag{6}$$

т.е. диагонализация матрицы R выполняется умножением ее сначала (слева) на транспонированную матрицу V, обозначаемую V', а потом (справа) на саму матрицу V.

Столбцы в матрице V называются *собственными векторами*, а величины на главной диагонали матрицы L — *собственными числами*. Первый собственный вектор соответствует первому собственному числу и т.д. (подробнее об этом см. в Приложении 1).

В связи с тем, что в приведенном примере рассматриваются четыре переменные, мы получаем четыре собственные величины с соответствующими им собственными векторами. Но поскольку целью факторного анализа является обобщение матрицы взаимосвязей посредством как можно меньшего количества факторов и каждая собственная величина соответствует разным потенциально возможным факторам, обычно принимаются в расчет только факторы с большими собственными величинами. При «хорошем» факторном решении матрица вычисленных взаимосвязей, полученная с помощью этого ограниченного набора факторов, практически дублирует матрицу взаимосвязей.

В нашем примере, когда на количество факторов не накладываются никакие ограничения, собственные величины 2.02, 1.94, .04 и .00 вычисляются для каждого из четырех *возможных факторов*. Только для первых двух факторов собственные значения достаточно велики, чтобы стать предметом дальнейшего рассмотрения. Поэтому выполняется повторное выделение только первых двух факторов. Они имеют собственные величины 2.00 и 1.91 соответственно, как это указано в табл. 3. Используя уравнение (6) и вставив значения из приведенного примера, получаем:

$$L=\begin{bmatrix}-.283 & .177 & .658 & .675\\ .651 & -.685 & .252 & .207\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.000 & -.953 & -.055 & -.130\\ -.935 & 1.000 & -.091 & -.036\\ -.055 & -.091 & 1.000 & .990\\ -.130 & -.036 & .990 & 1.000\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-.283 & .651\\ .177 & -.685\\ .658 & .252\\ .675 & .207\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2.00 & .00\\ .00 & 1.91\end{bmatrix}$$

(Все величины, вычисленные на компьютере, совпадают; расчеты, выполненные «вручную», могут отличаться в связи с неточностями округления.)

Умножение слева матрицы собственных векторов на транспонированную ей дает *единичную матрицу E* (с единицами на главной диагонали и остальными нулями). Поэтому можно сказать, что преобразование матрицы взаимосвязей по формуле (6) не изменяет ее саму, а лишь преобразует к более удобному для анализа виду:

$$V'V=E. \tag{7}$$

Например:

$$\begin{bmatrix}-.283 & .177 & .658 & .675\\ .651 & -.685 & .252 & .207\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-.283 & .651\\ .177 & -.685\\ .658 & .252\\ .675 & .207\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.000 & .000\\ .000 & 1.000\end{bmatrix}$$

Таблица 3

Собственные векторы и соответствующие собственные числа для рассматриваемого учебного примера

Собственный вектор 1	Собственный вектор 2
–.283	.651
.177	–.685
.658	.252
.675	.207
Собственное значение 1	Собственное значение 2
2.00	1.91

Поскольку корреляционная матрица диагонализируема, то для получения результатов факторного анализа к ней можно применять матричную алгебру собственных векторов и собственных величин (см. Приложение 1). Если матрица диагонализируема, то вся существенная информация о факторной структуре содержится в ее диагональной форме. В факторном анализе собственные числа соответствуют дисперсии, объясняемой факторами. Фактор с наибольшей собственной величиной объясняет наибольшую дисперсию и т.д., пока не доходит до факторов с небольшими или отрицательными собственными величинами, которые обычно не учитываются при анализе. Расчеты собственных величин и собственных векторов весьма трудоемки, и умение их вычислять не является крайней необходимостью для психолога, осваивающего факторный анализ в своих практических целях. Однако знакомство с этой процедурой не повредит, поэтому в Приложении 1 мы даем в качестве примера вычисления собственных чисел и собственных векторов на маленькой матрице.

Для нахождения собственных величин квадратной матрицы $p \times p$ необходимо найти корни многочлена степени p, а для нахождения собственных векторов — решить p уравнений с p неизвестными с дополнительными побочными ограничениями, что для $p>3$ редко выполняется вручную. Как только найдены собственные вектора и собственные величины, оставшаяся часть факторного анализа (или метода главных компонент) становится более или менее ясной (см. уравнения 8–11).

Уравнение (6) может быть представлено в виде:

$$R=VLV', \tag{8}$$

т.е. матрицу взаимосвязей можно рассматривать как произведение трех матриц – матрицы собственных величин, матрицы соответствующих собственных векторов и транспонированной к ней.

После преобразования матрицу собственных величин L можно представить следующим образом:

$$L=\sqrt{L}\sqrt{L}, \tag{9}$$

и следовательно:

$$R=V\sqrt{L}\sqrt{L}V' \tag{10}$$

или (что то же самое):

$$R=(V\sqrt{L})(\sqrt{L}V').$$

Обозначим: $A=(V\sqrt{L})$, а $A'=(\sqrt{L}V')$, тогда:

$$R=AA'. \tag{11}$$

т.е. матрица взаимосвязей также может быть представлена как произведение двух матриц, каждая из которых есть комбинация собственных векторов и квадратных корней из собственных величин.

Уравнение (11) часто называют фундаментальным уравнением факторного анализа[6]. Оно выражает утверж-

---

[6] Чтобы однозначно воспроизвести корреляционную матрицу, как это указано в уравнениях (10) и (11), необходимы все собственные величины и все собственные вектора, а не только несколько первых.

дение о том, что матрица взаимосвязей — это произведение матрицы факторных нагрузок (A) и транспонированной к ней.

Уравнения (10) и (11) также показывают, что значительная доля вычислений в методах факторного анализа и главных компонент заключается в определении собственных величин и собственных векторов. Как только они становятся известны, факторная матрица до поворота получается путем прямого матричного умножения:

$$A=V\sqrt{L}. \tag{12}$$

В нашем примере:

$$A=\begin{bmatrix} -.283 & .651 \\ .177 & -.685 \\ .658 & .252 \\ .675 & .207 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2.00} & 0 \\ 0 & \sqrt{1.91} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -.400 & .900 \\ .251 & -.947 \\ .932 & .348 \\ .956 & .286 \end{bmatrix}$$

Матрица факторных нагрузок является матрицей взаимосвязей (интерпретируемых как коэффициенты корреляций) между факторами и переменными. Первый столбец — это корреляции между первым фактором и каждой переменной по очереди: *стоимость путевки* (−.400), *комфортабельность комплекса* (.251), *температура воздуха* (.932), *температура воды* (.956). Второй столбец – это корреляции между вторым фактором и каждой переменной: *стоимость путевки* (.900), *комфортабельность комплекса* (−.947), *температура воздуха* (.348), *температура воды* (.286). Фактор интерпретируется на основе сильно связанных с ним (т.е. имеющих по нему высокие нагрузки) переменных. Так, первый фактор главным образом «климатический» (*температура воздуха и воды*), в то время как второй «экономический» (*стоимость путевки и комфортабельность комплекса*).

Интерпретируя эти факторы, следует обратить внимание на то, что переменные, имеющие высокие нагрузки по первому фактору (*температура воздуха* и *температура воды*), взаимосвязаны положительно, тогда как переменные, имеющие высокие нагрузки по второму фактору (*стоимость путевки* и *комфортабельность комплекса*), взаимосвязаны отрицательно (от дешевого курорта нельзя ожидать большой комфортабельности). Первый фактор называется *униполярным* (все переменные сгруппированы на одном полюсе), а второй — *биполярным* (переменные распались на две противоположные по смыслу группы — два полюса). Переменные, имеющие факторные нагрузки со знаком «плюс», образуют положительный полюс, а со знаком «минус» — отрицательный. При этом названия полюсов «положительный» и «отрицательный» при интерпретации фактора не имеют оценочного смысла «плохой» и «хороший». Выбор знака происходит во время вычислений случайным образом. Замена всех знаков на противоположные (всех плюсов на минусы, а всех минусов на плюсы) решения не меняет. Анализ знаков необходим только для идентификации групп (что чему противопоставлено). С таким же успехом один полюс можно называть правым, другой левым. В нашем примере переменная *стоимость путевки* оказалась на положительном (правом) полюсе, ей противопоставлена переменная *комфортабельность комплекса* на отрицательном (левом) полюсе. И этот фактор можно проинтерпретировать (назвать) как «*Экономичность* ↔ *Комфортность*». Респонденты, для которых проблема экономии существенна, оказались справа — получили факторные значения со знаком «плюс». При выборе курорта они более ориентируются на его дешевизну и менее — на комфортабельность. Респонденты, не экономящие на отдыхе (цена путевки их мало волнует) и желающие отдохнуть прежде всего в комфортных условиях, оказались слева — получили факторные значения со знаком «минус».

Однако следует иметь в виду, что все переменные в значительной степени коррелируют со обоими факторами. В рамках этого простого примера интерпретация очевидна, но в случае реальных данных не все так просто. Обычно фактор легче интерпретируется, если с ним сильно взаимосвязана только небольшая часть переменных, а остальные — нет.

2.1.2. Ортогональное вращение

Вращение обычно применяется после выделения факторов для максимизации высоких корреляций и минимизации низких. Существуют многочисленные методы вращения, но чаще всего используется поворот *варимакс*, представляющий собой процедуру максимизации дисперсий. Этот поворот максимизирует дисперсии факторных нагрузок, делая высокие нагрузки выше, а низкие ниже для каждого из факторов. Эта цель достигается с помощью *матрицы преобразования* Λ:

$$A_{\text{до поворота}}\,\Lambda = A_{\text{после поворота}}, \tag{13}$$

т.е. матрица факторных нагрузок до поворота умножается на матрицу преобразования и в результате получается матрица факторных нагрузок после поворота.

В нашем примере:

$$A_{\text{после поворота}} = \begin{bmatrix} -.400 & .900 \\ .251 & -.947 \\ .932 & .348 \\ .956 & .286 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .946 & -.325 \\ .325 & .946 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.086 & .981 \\ -.071 & -.977 \\ .994 & .026 \\ .997 & -.040 \end{bmatrix}$$

Сравните матрицы до и после поворота. Обратите внимание, что у матрицы после поворота низкие факторные нагрузки ниже, а высокие выше, чем у матрицы до поворота. Подчеркнутая разница нагрузок облегчает интерпретацию фактора, позволяет однозначно выбрать сильно взаимосвязанные с ним переменные.

Элементы матрицы преобразования имеют специальную геометрическую интерпретацию:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cos\Psi & -\sin\Psi \\ \sin\Psi & \cos\Psi \end{bmatrix} \tag{14}$$

Матрица преобразования — это матрица синусов и косинусов угла Ψ, на который выполняется поворот. (Отсюда и название преобразования – *поворот*, потому что с геометрической точки зрения происходит поворот осей вокруг начала координат факторного пространства.) В нашем примере этот угол составляет примерно 19 градусов: $\cos 19^0 = .946$ и $\sin 19^0 = .325$. Геометрически это соответствует повороту факторных осей на 19 градусов вокруг начала координат. (Более подробно о геометрических аспектах вращения см. далее.)

2.1.3. Общности, дисперсия и ковариация

Выполнив поворот и получив матрицу факторных нагрузок после поворота, можно проанализировать серию других показателей (см. табл. 4). *Общность переменной* — это дисперсия, рассчитанная с помощью факторных нагрузок. Это квадратичная множественная корреляция переменной, предсказанная факторной моделью. Общность вычисляется как сумма квадратов факторных нагрузок (СКН) для переменной по всем факторам. В табл. 4 общность для *стоимости путевки* равна $(-.086)^2 + (.981)^2 = .970$, т.е. 97% дисперсии *стоимости путевки* объясняется факторами 1 и 2.

Доля дисперсии фактора по всем переменным — это СКН по фактору, деленная на количество переменных (в случае ортогонального вращения)[7]. Для первого фактора доля дисперсии равна:

$$[(-.086)^2 + (-.071)^2 + (.994)^2 + (.997)^2]\,/4 = 1.994/4 = .50,$$

[7] Только в случае анализа матрицы факторных нагрузок до поворота сумма квадратов нагрузок по фактору равна собственному числу. После выполнения поворота сумма квадратов нагрузок называется СНК по фактору и не равна собственному числу.

Таблица 4

Связь между факторными нагрузками, общностями, СКН, дисперсией и ковариацией ортогональных факторов после поворота

	Фактор 1	Фактор 2	Общности (h^2)
Стоимость путевки	−.086	.981	Σa^2=.970
Уровень комфорта	−.071	−.977	Σa^2=.960
Температура воздуха	.994	.026	Σa^2=.989
Температура воды	.997	−.040	Σa^2=.996
СНК	Σa^2=1.994	Σa^2=1.919	3.915
Доля дисперсии	.50	.48	.98
Доля ковариации	.51	.49	1.00

т.е. первый фактор объясняет 50% дисперсии переменных. Второй фактор объясняет 48% дисперсии переменных и (в силу ортогональности вращения) два фактора в сумме объясняют 98% дисперсии переменных.

Доля дисперсии решения, объясняемая фактором, — доля *ковариации* — это СКН для фактора, деленная на сумму общностей (сумму СКН по переменным). Первый фактор объясняет 51% дисперсии решения (1.994/3.915); второй — 49% (1.919/3.915); два фактора вместе объясняют всю ковариацию.

Воспроизведенную корреляционную матрицу можно вычислить при помощи уравнения:

$$\bar{R}=\begin{bmatrix} -.086 & .981 \\ -.071 & -.977 \\ .994 & .026 \\ .997 & -.040 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -.086 & -.071 & .994 & .997 \\ .981 & -.977 & .026 & -.040 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} .970 & -.953 & -.059 & -.125 \\ -.953 & .962 & -.098 & -.033 \\ -.059 & -.098 & .989 & .990 \\ -.125 & -.033 & .990 & .996 \end{bmatrix}$$

Заметим, что воспроизведенная матрица взаимосвязей все-таки отличается от исходной. Разница между исходной и воспроизведенной матрицами называется *остаточной* матрицей взаимосвязей:

$$R_{ocm} = R - \bar{R}, \qquad (15)$$

т.е. *остаточная матрица взаимосвязей* – это разность между исходной (наблюдаемой, измеренной) и воспроизведенной матрицами взаимосвязей.

$$R_{ocm}=\begin{bmatrix} .970 & -.953 & -.055 & -.130 \\ -.953 & .960 & -.091 & -.036 \\ -.055 & -.091 & .989 & .990 \\ -.130 & -.036 & .990 & .996 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} .970 & -.953 & -.059 & -.125 \\ -.953 & .962 & -.098 & -.033 \\ -.059 & -.098 & .989 & .990 \\ -.125 & -.033 & .990 & .996 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} .000 & .000 & .004 & -.005 \\ .000 & -.002 & .007 & -.003 \\ .004 & .007 & .000 & .000 \\ -.005 & -.003 & .000 & .000 \end{bmatrix}$$

При хорошем факторном решении числа в остаточной матрице взаимосвязей должны быть очень малы в силу незначительности различий между исходной и воспроизведенной матрицами взаимосвязей.

2.1.4. Факторные значения

После вычисления матрицы факторных нагрузок можно вычислить значения факторов для каждого наблюдения (испытуемого). Приведем наиболее распространенный способ вычисления факторных значений. Сначала вычисляются коэффициенты регрессии, позволяющие на основе значений переменных для каждого респондента оценить для него значения факторов. Пусть R^{-1} — матрица, обратная матрице взаимосвязей, а A — матрица факторных нагрузок, тогда матрица коэффициентов факторных значений B вычисляется по формуле:

$$B=R^{-1}A\,, \tag{16}$$

т.е. коэффициенты для определения факторных значений являются результатом умножения матрицы, обратной матрице взаимосвязей, на матрицу факторных нагрузок.

В нашем примере[8]:

$$B=\begin{bmatrix} 25.485 & 22.689 & -31.655 & 35.479 \\ 22.689 & 21.386 & -24.831 & 28.312 \\ -31.655 & -24.831 & 99.917 & -103.950 \\ 35.479 & 28.312 & -103.950 & 109.567 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -.087 & .981 \\ -.072 & -.978 \\ .994 & .027 \\ .997 & -.040 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 0.082 & 0.537 \\ 0.054 & -0.461 \\ 0.190 & 0.087 \\ 0.822 & -0.074 \end{bmatrix}$$

---

[8] Числа в матрице B отличаются от коэффициентов значений факторов, вычисленных компьютером для небольшого количества данных. Разница – это результат ошибок округления при обращении корреляционной матрицы. Матрица A тоже содержит значительные ошибки округления.

Для определения факторных значений респондентов по первому фактору все их значения по переменным стандартизируются, а затем суммируются с учетом весов (веса равны соответствующим числам из матрицы B). Например, суммируются весовые коэффициенты для *стоимости путевки* (.082), для *комфортабельности комплекса* (.054), для *температуры воздуха* (.190) и для *температуры воды* (.822). В матричной форме это выглядит так:

$$F = ZB, \tag{17}$$

т.е. значения факторов равны произведению стандартизированных значений по переменным и матрицы коэффициентов значений факторов.

В нашем примере:

$$F = \begin{bmatrix} -1.22 & 1.14 & 1.15 & 1.14 \\ 0.75 & -1.02 & 0.92 & 1.01 \\ 0.61 & -0.78 & -0.36 & -0.47 \\ -0.95 & 0.98 & -1.20 & -1.01 \\ 0.82 & -0.30 & -0.51 & -0.67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.082 & 0.537 \\ 0.054 & -0.461 \\ 0.190 & 0.087 \\ 0.822 & -0.074 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.12 & -1.16 \\ 1.01 & 0.88 \\ -0.45 & 0.69 \\ -1.08 & -0.99 \\ -0.60 & 0.58 \end{bmatrix}$$

Первый респондент по первому фактору получил стандартизированное значение 1.12, а по второму он получил −1.16. Таким образом, этот респондент имеет очень высокие положительные значения по униполярному «климатическому» фактору, а очень высокое отрицательное значение по «экономическому» фактору свидетельствует о том, что для него комфортность отдыха существенно важнее, чем его низкая стоимость. Второй респондент имеет высокое значение по «климатическому» фактору (но все-таки меньшее, чем у первого респондента) и высокое положительное значение по «экономическому» фактору. Следовательно, у него соображения экономии существенно превалируют над соображениями комфорта. Третьего респондета климатические условия не волнуют, но, выбирая место отдыха, он будет в первую очередь ориентироваться на его дешевизну. И т.д. Среднее стандартизированных значений всех испытуемых по каждому фактору равно нулю.

Также можно воспроизвести значения по переменным, исходя из значений факторов. Для этого используется следующее уравнение:

$$Z = FA', \tag{18}$$

т.е. матрица воспроизведенных стандартизированных значений по переменным вычисляется как произведение матрицы значений факторов и транспонированной матрицы факторных нагрузок.

$$Z = \begin{bmatrix} 1.12 & -1.16 \\ 1.01 & 0.88 \\ -0.45 & 0.69 \\ -1.08 & -0.99 \\ -0.60 & 0.58 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -.086 & -.072 & .994 & .997 \\ .981 & -.978 & .027 & -.040 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.23 & 1.05 & 1.08 & 1.16 \\ 0.78 & -0.93 & 1.03 & 0.97 \\ 0.72 & -0.64 & -0.43 & -0.48 \\ -0.88 & 1.05 & -1.10 & -1.04 \\ 0.62 & -0.52 & -0.58 & -0.62 \end{bmatrix}$$

Первый респондент (первая строка в матрице Z) теоретически (прогнозируемо) должен иметь стандартизированное значение −1.23 по *стоимости* путевки, 1.05 по *комфортабельности комплекса*, 1.08 по *температуре воздуха* и 1.16 по *температуре воды*. Если в ходе факторного анализа действительно удалось уловить существующие взаимосвязи между переменными и их структуру, то расчетные величины в этой и вычисляемой матрицах взаимосвязей близки к наблюдаемым (полученным экспериментально) величинам.

В качестве упражнения рекомендуем выписать все эти формулы для получения расчетных значений по переменным. Например, для первого респондента:

$$\begin{aligned} -1.23 &= -.086\,(1.12) + .981\,(-1.16) \\ 1.05 &= -.072\,(1.12) - .978\,(-1.16) \\ 1.08 &= .994\,(1.12) + .027\,(-1.16) \\ 1.16 &= .997\,(1.12) - .040\,(-1.16). \end{aligned}$$

Или в алгебраической форме:

Z стоимости путевки $= a_{11}F_1 + a_{12}F_2$

Z комфортабельности комплекса $= a_{21}F_1 + a_{22}F_2$

Z температуры воздуха $= a_{31}F_1 + a_{32}F_2$

Z температуры воды $= a_{41}F_1 + a_{42}F_2$

Таким образом, в ходе исследования принимается гипотеза о том, что общая латентная структура факторов характеризует всех испытуемых, однако каждый из них имеет различные показатели (факторные значения) по каждому из факторов. Каждый конкретный показатель испытуемого по наблюдаемой переменной вычисляется как линейная комбинация показателей (факторных значений) испытуемого по базисным факторам.

2.1.5. Косоугольное вращение

При использовании косоугольного (коррелированного) вращения большинство показателей ортогонального вращения сохраняется, но к ним добавляются еще и новые (список дополнительных матриц, используемых только для косоугольного вращения, см. в табл. 1).

При косоугольном вращении для выделения факторной структуры вместо матрицы факторных нагрузок используется *матрица факторного отображения*. Квадраты значений в матрице факторного отображения представляют собой характерный вклад каждого фактора в дисперсию каждой переменной, исключая часть дисперсии, возникающей как следствие корреляции факторов между собой. Для нашего примера матрица факторного отображения после косоугольного вращения имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} -.079 & .981 \\ -.078 & -.978 \\ .994 & .033 \\ .997 & -.033 \end{bmatrix}$$

Характерный вклад первого фактора в переменную *стоимость путевки* равен $(-.079)^2$, в переменную *комфортабельность комплекса* $(-.078)^2$, в переменную *температура воздуха* $(.994)^2$ и в переменную *температура воды* $(.997)^2$.

Коэффициенты факторных значений вычисляются аналогично:

$$B = \begin{bmatrix} 0.104 & 0.584 \\ 0.081 & -0.421 \\ 0.159 & -0.020 \\ 0.856 & 0.034 \end{bmatrix}$$

Применяя уравнение (17), получаем значения факторов:

$$F = \begin{bmatrix} -1.22 & 1.14 & 1.15 & 1.14 \\ 0.75 & -1.02 & 0.92 & 1.01 \\ 0.61 & -0.78 & -0.36 & -0.47 \\ -0.95 & 0.98 & -1.20 & -1.01 \\ 0.82 & -0.30 & -0.51 & -0.67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.104 & 0.584 \\ 0.081 & -0.421 \\ 0.159 & -0.020 \\ 0.856 & 0.034 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.12 & -1.18 \\ 1.01 & 0.88 \\ -0.46 & 0.68 \\ -1.07 & -0.98 \\ -0.59 & 0.59 \end{bmatrix}$$

Определив значения факторов, можно посчитать корреляции между факторами. Для этого применяется уравнение:

$$\Phi=(1/N-1)F'F\,, \tag{19}$$

т.е. один из способов вычисления корреляций между факторами состоит в делении произведения матрицы стандартизированных значений факторов и транспонированной ей на количество наблюдений минус один.

Факторная корреляционная матрица является стандартной частью компьютерной распечатки после выполнения косоугольного вращения. Например:

$$\Phi=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1.12 & 1.01 & -0.46 & -1.07 & -0.59 \\ -1.18 & 0.88 & 0.68 & -0.98 & 0.59 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.12 & -1.18 \\ 1.01 & 0.88 \\ -0.46 & 0.68 \\ -1.07 & -0.98 \\ -0.59 & 0.59 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.00 & -0.01 \\ -0.01 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Взаимосвязь между первым и вторым факторами очень мала (−.01), т.е. в рассматриваемом примере факторы практически никак не связаны.

При косоугольном вращении матрица взаимосвязей между переменными и факторами называется *структурной матрицей.* Она включает как характерную взаимосвязь между переменной и фактором (из матрицы факторного отображения), так и взаимосвязь между переменной и дисперсией, полученной за счет наложения факторов друг на друга. Структурную матрицу можно получить из уравнения:

$$S=A\Phi\ , \tag{20}$$

т.е. структурная матрица — это произведение матрицы факторного отображения и матрицы корреляции факторов.

$$S=\begin{bmatrix} -.079 & .981 \\ -.078 & -.978 \\ .994 & .033 \\ .997 & -.033 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.00 & -.01 \\ -.01 & 1.00 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -.069 & .982 \\ -.088 & -.977 \\ .994 & .023 \\ .997 & -.043 \end{bmatrix}$$

Переменные *стоимость путевки, комфортабельность комплекса, температура воздуха, температура воды* имеют коэффициенты корреляции с первым фактором: −.069, −.088, .994 и .997; со вторым: .982, −.977, .023 и −.043.

Дискутируется вопрос, следует ли интерпретировать матрицу факторного отображения или структурную матрицу после косоугольного вращения. Преимущество структурной матрицы заключается в том, что ее легче понять. Однако взаимосвязи переменных и факторов сильно зависят от любых наложений факторов друг на друга. По мере увеличения взаимосвязей между факторами становится все сложнее определить, какая же из переменных относится к тому или иному фактору. С другой стороны, матрица факторного отображения содержит величины, представляющие характерные вклады каждого фактора в дисперсии переменных. Смешанная дисперсия не учитывается, но здесь проще выделить переменные, описывающие фактор. Однако если факторы высоко коррелируют друг с другом, то может оказаться, что к ним нельзя отнести ни одну из переменных, поскольку после того, как будут исключены наложения факторов, практически не останется ни одной характерной дисперсии.

Как правило, исследователи интерпретируют и включают в свои отчеты матрицу факторного отображения, а не структурную. Однако заинтересованный читатель, зная матрицу корреляций факторов Φ, а также одну из двух матриц — факторного отображения или структурную, всегда может вычислить другую используя уравнение (20).

После косоугольного вращения матрица R получается следующим образом:

$$R=SA' \qquad (21)$$

т.е. воспроизведенная матрица взаимосвязей – это произведение структурной матрицы и транспонированной матрицы факторного отображения. Воспроизведенная матрица взаимосвязей позволяет вычислить остаточную матрицу взаимосвязей с помощью уравнения (15) и оценить адекватность результатов факторного анализа.

2.1.6. Компьютерный анализ простейшего примера

Результаты факторно-аналитической обработки данных рассматриваемого нами простейшего примера в программах *STADIA* и *SPSS* см. в табл. 5 и 6.

Таблица 5

Результаты факторно-аналитической обработки данных учебного примера в программе *STADIA*

ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ. Файл: пример1.txt

Переменная	Среднее	Ст.отклон.
x1	50	14.7
x2	49.8	12.5
x3	49.8	13.2
x4	50	14.9

Корреляционная матрица

	x1	x2	x3	x4
x2	−0.952			
x3	−0.055	−0.091		
x4	−0.129	−0.036	0.99	

Число значимых коэффициентов=2 (66%)

Собственные значения и процент объясняемой дисперсии факторов

Фактор:	1	2	3	4	5	6	7
Собств.зн.	2.02	1.94					
Дисперс.%	50.4	48.5					
Накоплен.%	50.4	98.9					

Переменная <— Собственные вектора (коэффициенты поворота факторных осей) —>

x1	0.348	−0.617
x2	−0.246	0.665
x3	−0.63	−0.317
x4	−0.649	−0.275

Исходные данные в координатах факторов

N	1	2	3	4	5	6	7
0	−2.17	0.833					
1	−0.723	−1.71					
2	0.94	−0.655					
3	0.836	1.89					
4	1.12	−0.358					

Продолжение таблицы 5

Переменная <—Факторные нагруаки до вращения —>

x1	0.493	−0.86	0.131	0.0162
x2	−0.35	0.927	0.133	0.0131
x3	−0.894	−0.442	0.0517	−0.0461
x4	−0.922	−0.383	−0.0306	0.0484

Вращение: варимакс, число факторов=2

Переменная	Общность	Специфичность
x1	0.983	0.0174
x2	0.982	0.018
x3	0.995	0.00479
x4	0.997	0.00328

Объекты в координатах факторов

N	1	2	3	4	5	6	7
0	−87.5	23.4					
1	−83.6	−16.3					
2	−56.2	−13.0					
3	−43.1	18.8					
4	−52.2	−11.0					

Переменная <—Факторные нагрузки после вращения—>

x1	0.0866	−0.988
x2	0.0721	0.988
x3	−0.997	−0.0254
x4	−0.998	0.0396

Таблица 6

Результаты факторно-аналитической обработки данных учебного примера в программе *SPSS*

Factor Analysis

Communalities

	Initial	Extraction
X1	.961	.970
X2	.953	.960
X3	.990	.989
X4	.991	.996

Extraction Method: Principal Axis Factoring.

Total Variance Explained

Factor	Initial Eigenvalues			Extraction Sums of Squared Loadings			Rotation Sums of Squared Loadings		
	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %
1	2.016	50.408	50.408	2.005	50.118	50.118	1.995	49.866	49.866
2	1.942	48.538	98.945	1.909	47.733	97.852	1.919	47.986	97.852
3	.038	.945	99.891						
4	.004	.109	100.000						

Extraction Method: Principal Axis Factoring.

Factor Matrix[a]

	Factor 1	Factor 2
X1	-.400	.900
X2	.251	-.947
X3	.932	.348
X4	.956	.286

Extraction Method: Principal Axis Factoring.

a. 2 factors extracted. 4 iterations required.

Rotated Factor Matrix[a]

	Factor 1	Factor 2
X1	-8.59E-02	-.981
X2	-7.10E-02	.977
X3	.994	-2.59E-02
X4	.997	4.028E-02

Extraction Method: Principal Axis Factoring.
Rotation Method: Varimax with Kaiser Normalization.

a. Rotation converged in 3 iterations.

Factor Transformation Matrix

Factor	1	2
1	.946	.325
2	.325	-.946

Extraction Method: Principal Axis Factoring.
Rotation Method: Varimax with Kaiser Normalization.

Factor Score Coefficient Matrix

	Factor	
	1	2
X1	.108	-.585
X2	.078	.420
X3	.159	.019
X4	.856	-.040

Extraction Method: Principal Axis Factoring.
Rotation Method: Varimax with Kaiser Normalization.

Factor Scores Method: Regression.

Factor Score Covariance Matrix

Factor	1	2
1	.997	8.775E-05
2	8.775E-05	.982

Extraction Method: Principal Axis Factoring.
Rotation Method: Varimax with Kaiser Normalization.

Factor Scores Method: Regression.

Factor Scores

	Components	
	F1	F2
T1	1.14	1.18
T2	.98	-.90
T3	-.40	-.70
T4	-1.10	.99
T5	-.61	-.56

Для выполнения факторного анализа в программе *STADIA* на основании табл. 2 была подготовлена матрица чисел в стандарте, необходимом программе *STADIA*, и выполнен поворот варимакс. Переменные *стоимость путевки, комфортабельность комплекса, температура воздуха, температура воды* заменены буквенно-цифровыми обозначениями $x1$, $x2$, $x3$, $x4$ соответственно. Наблюдения (респонденты) пронумерованы от 0 до 4.

Вначале на экран выдается таблица «переменная – среднее – дисперсия» и матрица коэффициентов корреляции. Затем производится выделение главных компонент и выдается таблица, где для каждой компоненты приводятся: собственное значение, пропорциональное части общей дисперсии экспериментальных данных, приходящейся на данную компоненту (или объясняемой ею), процент полной дисперсии, приходящейся на каждую компоненту; процент накопленной дисперсии. Малозначимые компоненты, собственные значения которых составляют менее 2% от накопленной дисперсии, опускаются.

Далее идут: матрица собственных векторов, таблица координат объектов в новой системе факторов и матрица факторных нагрузок. Далее производится варимакс-вращение факторов в пространстве переменных, чтобы облегчить предметную интерпретацию факторов. Перед вращением по подтверждению выполняется нормализация факторных нагрузок (Кайзера), чтобы исключить влияние на результат переменных с большой общностью. По окончании вращения выдается таблица общностей и специфичностей каждого фактора и таблица новых факторных нагрузок.

Для выполнения факторного анализа с вращением варимакс программа *SPSS* (см. табл. 6) начинает работу с выдачи всех общностей (*communality*), равных на первом этапе работы КМК, и новые значения общностей после факторизации для каждой переменной (h^2 в табл. 4). Для каждой переменной указываются собственные значения, процент дисперсии, объясняемой каждым фактором, и процент накопленной дисперсии. Все эти параметры вычисляются для каждого из четырех начальных факторов, выделенных значимых факторов и факторов после поворота. Далее для двух выделенных факторов распечатывается матрица факторных нагрузок до поворота. Матрица факторных нагрузок после поворота, соответствующая нагрузкам из табл. 4, дается вместе с матрицей факторного преобразования для ортогонального вращения варимакс с нормализацией по Кайзеру.

2.2. Процедуры факторизации и вращения

В настоящее время в распоряжении психологов имеются самые разнообразные методы *факторизации* (выделения факторов) и *вращения*, реализуемые с помощью различных компьютерных программ. За рубежом распространены программы *BMDP, SAS и SYSTAT*, однако мы подробно рассмотрим здесь методы, доступные с помощью программ *STADIA* и *SPSS*.

2.2.1. Методы факторизации

К методам факторизации относятся: методы главных компонент, главных факторов, максимального правдоподобия факторов, каноническая факторизация Рао, факторизация образов, альфа-факторизация, а также невзвешенная и общая (взвешенная) факторизация с помощью метода наименьших квадратов. Универсального пакета программ, в котором были бы реализованы все методы факторизации, не существует. Табл. 7 позволяет сориентироваться при выборе того или иного метода факторизации и того или иного статистического пакета. Чаще всего исследователи используют методы главных компонент и главных факторов, реализованные в большинстве программ.

Все методы выделения факторов основаны на вычислении набора ортогональных компонент или факторов,

Таблица 7

Методы факторизации

Метод факторизации	Программа	Цель анализа	Особенности
Главные компоненты (ГК)	*SPSS, STADIA, SAS, BMDP4M, SYSTAT*	Максимизация дисперсии экспериментальных данных, объясняемой ортогональными компонентами	Математическое представление каждой наблюдаемой переменной через линейную комбинацию компонент, включающих в себя общую, специфичную дисперсии и дисперсию ошибки измерения
Главные факторы (ГФА)	*SPSS, SAS, BMDP4M*	Наилучшая аппроксимация матрицы корреляций переменных с помощью выделенных ортогональных факторов	Оценка общих факторов с исключением специфичной дисперсии и дисперсии ошибки измерения
Канонический факторный анализ Рао (Рао)		Максимизация связи гипотетических ортогональных факторов с каждой наблюдаемой переменной	Оценка общих факторов с исключением специфичной дисперсии и дисперсии ошибки измерения, анализируются канонические коэффициенты корреляции гипотетических факторов с переменными. Предусмотрена проверка факторов на значимость. Определяется максимальная связь между двумя группами переменных

Продолжение таблицы 7

Факторизация образов	*SPSS, SAS, BMDP4M*	Эмпирический факторный анализ	Для каждой переменной строится образ, вычисляемый как результат множественной регрессии всех остальных переменных – общность и антиобраз – характерная часть. Факторы вычисляются по дисперсии образов (т.е. общей дисперсии)
Метод максимального правдоподобия	*SPSS, SAS, BMDP4M*	Оценка факторных нагрузок для популяции путем максимально точного воспроизведения корреляционной матрицы, полученной на выборке	Предполагается, что наблюдаемые переменные распределены нормально, а факторы ортогональны. Предусматривает проверку факторов на значимость, наиболее часто используется в конфирматорном анализе
Альфа-факторизация (Альфа)	*SPSS, SAS*	Максимизация воспроизводимости генеральной совокупности переменных за счет факторов	Переменные считаются выборкой из генеральной совокупности переменных. Минимальное количество общих факторов оценивается по величинам собственных значений факторов и коэффициентов обобщенности α, которые должны быть больше 1 и 0, соответственно

Окончание таблицы 7

Невзвешенный метод наименьших квадратов	*SPSS, SAS*	Минимизация квадратичной остаточной матрицы корреляций	Оценка соответствия вычисленных и наблюдаемых коэффициентов корреляции производится по критерию минимума суммы квадратов отклонения
Обобщенный метод наименьших квадратов	*SPSS, SAS*	Вычисление весов переменных в зависимости от их вклада в общую дисперсию, а затем (с учетом этих весов) минимизация квадратичной остаточной матрицы корреляций	

по которым можно воспроизвести матрицу взаимосвязей R. Эти методы различаются критериями, используемыми для нахождения решения (это может быть максимизация дисперсии или минимизация остаточных корреляций). Но при большой выборке и большом количестве *переменных различия в решении невелики. Фактически* в качестве одного из тестов на устойчивость факторного решения можно использовать повторяемость результатов при обработке данных разными методами. В табл. 8 содержатся решения для одного и того же набора данных после выделения факторов различными методами с последующим вращением варимакс. Максимальная разница в оценке общностей для отдельных переменных при использовании различных методов факторизации = 0.08. Сходство полученных решений очевидно.

Обычно ни один из методов без вращения не дает решения, удовлетворительного с точки зрения последующей интерпретации. Исключение составляет метод Кайзера, включающий вращение в качестве подпрограммы.

Проводя факторный анализ, исследователь должен категорически отказаться от мысли о подтасовке данных. Обычно на предварительном этапе используется метод главных компонент, после чего применяется одна или несколько процедур, изменяющих количество факторов, общность оценок, методы вращения и т.д. Выбрав наиболее подходящий с содержательной точки зрения вариант, исследователь может считать анализ законченным.

Математические различия методов главных компонент и факторного анализа. В первой главе мы указали на принципиальное сходство методов главных компонент и факторного анализа с точки зрения получения содержательных результатов, однако используемые в этих методах модели различаются с точки зрения математики. Обратим внимание на эту разницу.

При проведении анализа одним из самых важных решений является выбор между методом главных компонент и факторным анализом. Математически различие

Таблица 8

Результаты использования различных методов факторизации для одного и того же набора данных

Переменные	Фактор 1				Фактор 2			
	ГК	ГФА	Рао	Альфа	ГК	ГФА	Рао	Альфа
Факторные нагрузки до поворота								
1	.58	.63	.70	.54	.68	.68	−.54	.76
2	.51	.48	.56	.42	.66	.53	−.47	.60
3	.40	.38	.48	.29	.71	.55	−.50	.59
4	.69	.63	.55	.69	−.44	−.43	.54	−.33
5	.64	.54	.48	.59	−.37	−.31	.40	−.24
6	.72	.71	.63	.74	−.47	−.49	.59	−.40
7	.63	.51	.50	.53	−.14	−.12	.17	−.07
8	.61	.49	.47	.50	−.09	−.09	.15	−.03
Факторные нагрузки после поворота (варимакс)								
1	.15	.15	.15	.16	.89	.91	.87	.92
2	.11	.11	.10	.12	.83	.71	.72	.73
3	−.02	.01	.02	.00	.81	.67	.69	.66
4	.82	.76	.78	.76	−.02	−.01	−.03	.01
5	.74	.62	.62	.63	.01	.04	.03	.04
6	.86	.86	.87	.84	.04	.02	−.01	−.03
7	.61	.49	.48	.50	.20	.18	.21	.17
8	.57	.46	.45	.46	.23	.20	.20	.19

между ними отражается в числах, стоящих на главной диагонали матрицы взаимосвязей, где располагаются показатели взаимосвязи переменных самих с собой. В факторном анализе, как и в методе главных компонент, анализируемая дисперсия есть сумма величин, стоящих на главной диагонали. В методе главных компонент на главной диагонали расположены единицы и анализируется дисперсия, соответствующая количеству первичных переменных. Каждая переменная добавляет свою долю дисперсии. На главной диагонали матрицы взаимосвязей в соответствующем номеру переменной столбце (и строке) ставится 1. Вся дисперсия распределяется по компонентам, включая дисперсию ошибки измерения и дисперсию, специфичную для каждой наблюдаемой переменной. Поэтому если для дальнейшего анализа сохраняются все компоненты, то они в точности дублируют (воспроизводят) наблюдаемую матрицу взаимосвязей и стандартизированные значения по наблюдаемым переменным.

В факторном анализе для каждой переменной анализируется только общая дисперсия, присущая сразу нескольким наблюдаемым переменным, и не включаются дисперсия ошибки измерения и специфичная дисперсия какой-то отдельной переменной. Такой подход основывается на основном постулате факторного анализа, что эти дисперсии ухудшают общую картину изучаемого явления. Общая дисперсия оценивается общностями, стоящими на главной диагонали матрицы взаимосвязей и принимающими значения от 0 до 1[9]. Факторное решение выбирается на основе переменных с высокими общностями. Сумма общностей (СКН по всем переменным) — это дисперсия, объясняемая факторами в меньшей степени, чем общая дисперсия наблюдаемых переменных. Поскольку специфичная и ошибочная дисперсии опускаются, линейная комбинация факторов аппроксимирует, но не дубли-

[9] Выделение факторов методом максимального правдоподобия в большей степени работает с внедиагональными элементами, чем с величинами на диагонали.

рует наблюдаемую матрицу взаимосвязей и значения по наблюдаемым переменным.

Таким образом, можно сказать, что основной объект анализа в методе главных компонент — это дисперсия, а в факторном анализе — ковариации (общности). Метод главных компонент ориентирован на выделение малого набора ортогональных главных компонент таким образом, чтобы они объясняли максимум дисперсии для анализируемого набора данных. Цель факторного анализа — при помощи малого набора ортогональных факторов воспроизвести матрицу взаимосвязей. С математической точки зрения метод главных компонент дает единственное решение, тогда как разные виды факторного анализа дают несколько решений для одного и того же набора данных.

Выбор между методом главных компонент и факторным анализом зависит от того, какая из моделей с нашей точки зрения наилучшим образом описывает набор исходных данных и удовлетворяет цели исследования. Если мы хотим построить модель, не учитывающую разнообразие ошибок и специфичные особенности проведенного эксперимента, то нам следует предпочесть факторный анализ. Но если мы хотим эмпирически обобщить именно наш набор данных, то в этом случае предпочтителен метод главных компонент[10].

Метод главных компонент ориентирован на выделение малого набора ортогональных главных компонент таким образом, чтобы они объясняли максимум диспер-

[10] На языке матричной алгебры разницу между методом главных компонент и факторным анализом можно выразить следующим образом. В первом случае подбирается матрица W такая, что $F=WX$. Тогда, используя тот факт, что $W'W$ – квадратная матрица и к ней можно построить обратную матрицу $(W'W)^{-1}$, получим $(W'W)^{-1}W'F=(W'W)^{-1}W'WX$, т.е. $(W'W)^{-1}W'F=X$, и матрица факторных нагрузок A считается равной $(W'W)^{-1}W'$. Так как теоретически в методе главных компонент количество выделенных компонент равно количеству переменных, то матрицу W можно считать квадратной и обратимой, поэтому $(W'W)^{-1}W'=W^{-1}$. Основное уравнение факторного анализа в матричном виде таково: $X=AF+U$, где U соответствует характерной части и опускается.

сии для анализируемого набора данных. Первая главная компонента — это линейная комбинация наблюдаемых переменных, которая в максимальной степени разделяет испытуемых, максимизируя дисперсию их компонентных значений. Вторая компонента формируется из остаточных показателей взаимосвязей (корреляций) и представляет собой линейную комбинацию наблюдаемых переменных, объясняющую максимум вариативности, не взаимосвязанной с первой компонентой. Далее аналогично (по индукции) выделяются следующие компоненты, также объясняющие максимум вариативности остаточных корреляций и ортогональные для всех компонент, выделенных на предыдущих шагах.

Главные компоненты упорядочены, причем первая объясняет наибольшую долю дисперсии, а последняя — наименьшую. Решение является единственным, и если сохранить все компоненты, то можно точно воспроизвести наблюдаемую матрицу взаимосвязей. Поскольку компоненты ортогональны, их анализ другими методами (например, в качестве зависимых переменных в многофакторном дисперсионном анализе — *MANOVA*) может значительно облегчить интерпретацию результатов.

Если исследователь хочет в первую очередь сократить большое количество переменных до малого количества компонент, то ему следует выбрать метод главных компонент. Этот метод рекомендуется применять на первом этапе факторного анализа, так как с его помощью можно определить возможное количество и природу факторов. Метод главных компонент реализован практически во всех программах факторного анализа.

Метод главных факторов отличается от метода главных компонент по способу оценки взаимосвязей, находящихся на главной диагонали наблюдаемой матрицы. Эти оценки выполняются с помощью *итерационной процедуры*. В качестве начальных значений итерационного процесса выбираются квадраты коэффициентов множественной корреляции (КМК) каждой переменной со всеми другими переменными. Как и в случае метода главных компонент, цель анализа — объяснение максимума ортогональных дисперсий набора данных каждым последующим фактором. Метод главных факторов широко распространен (и прост для понимания) и не вступает в противоречие с факторно-аналитической моделью, в которой анализируется только общая дисперсия и исключаются специфичные дисперсии и дисперсии ошибок. Но поскольку цель состоит в получении факторов, объясняющих максимально возможную дисперсию переменных, метод главных факторов в некоторых случаях проигрывает другим методам факторизации с точки зрения воспроизведения матрицы взаимосвязей. Выбирая то или иное решение, следует обращать внимание на оценку общностей. Метод главных факторов реализован в большинстве программ факторного анализа.

Факторный анализ образов. В этом методе общая часть каждой переменной вычисляется как результат множественной регрессии всех остальных переменных (подобно тому, как это происходит при подсчете КМК). То есть в общей части дисперсии каждой переменной учитывается только то, что оказалось взаимосвязанным (отраженным, включенным) с другими переменными. Можно сказать, что общая часть наблюдаемой переменной — это ее *образ* в других переменных (отсюда и название метода). Дополнение до наблюдаемой переменной (включающее все, что не вошло в образ) составляет *антиобраз* — характерную часть, независимую от других переменных. Обе части переменной, которые могут быть однозначно определены по матрице исходных данных, далее рассматриваются отдельно.

Значения для каждой переменной вычисляются с помощью множественной регрессии. Все переменные по очереди выступают в качестве зависимых от всех остальных переменных. В качестве показателей взаимосвязей в матрице взаимосвязей используются ковариации. Интерпретируя результаты, следует помнить, что вычисляемые этим методом факторные нагрузки также интерпретируются как ковариации между переменными и факторами.

Выделение факторов с помощью анализа образов — своеобразный компромисс между методами главных компонент и главных факторов. Подобно методу главных компонент, анализ образов дает математически единственное решение, поскольку на единичной диагонали матрицы взаимосвязей расположены фиксированные величины. Подобно главным факторам, величины на диагонали являются общностями, не содержащими специфичных и ошибочных дисперсий. Метод анализа образов реализован в компьютерных программах *SPSS, BMDP и SAS.*

Метод максимального правдоподобия. Процедура выделения факторов методом максимального правдоподобия была разработана Д.Лоули (*Lawley*, 1940). Заметим, что методы факторного анализа всегда применяются к выборочным матрицам взаимосвязей, но интерпретация ведется обычно так, как если бы речь шла о генеральной совокупности, из которой взята выборка. В методе максимального правдоподобия проводится различие между выборочной матрицей взаимосвязей, полученной на основе экспериментальных данных, и гипотетической матрицей, соответствующей генеральной совокупности, из которой взята исследуемая выборка. Эту гипотетическую матрицу теоретически можно было бы получить, если измерить значения анализируемых переменных (например, путем опроса) по всей популяции в целом. При этом предполагается, что наблюдаемые переменные распределены нормально, а факторы ортогональны друг другу. Величины факторных нагрузок для генеральной совокупности оцениваются путем вычисления нагрузок, максимизирующих вероятность получения наблюдаемой матрицы взаимосвязей, вычисленной на основе данных по выборке. В связи с ограничениями, установленными для показателей взаимосвязей (корреляций) переменных, популяционные оценки для факторных нагрузок вычисляются таким образом, чтобы получить наибольшую вероятность совпадения с корреляционной матрицей, вычисленной по выборочным данным. Этот метод также максимизирует совпадение наблюдаемых и вычисленных корреляций между переменными и факторами, предусматривает проверку факторов на значимость, наиболее часто используется в конфирматорном анализе.

Метод реализован в большинстве компьютерных программ (*BMDP, SPSS, SYSTAT и SAS*). В пакете *BMDP* этот метод дает приемлемые результаты в случае небольшого количества переменных и несингулярной корреляционной матрицы.

Метод невзвешенных наименьших квадратов ставит целью минимизацию квадратов остаточной матрицы взаимосвязей, вычисляемой как разность между наблюдаемой и воспроизведенной матрицами взаимосвязей (корреляционными). При этом минимизируются только внедиагональные остатки. Минимизация же полной остаточной матрицы, включая диагональные члены, приводит к обычному методу главных факторов. Операция исключения диагональных членов имеет большое значение, так как диагональные элементы выборочной корреляционной матрицы (значения общностей) не задаются, а должны определяться в ходе решения совместно с факторными нагрузками. Таким образом, факторизация по методу невзвешенных наименьших квадратов может быть рассмотрена как особый случай метода главных факторов, в котором общности оцениваются после выбора решения.

Эта процедура, изначально получившая название процедуры минимальных остатков, была разработана А.Комри (*Comrey*, 1962), а позднее модифицирована Г.Харманом и У.Джонесом (*Harman, Jones*, 1966). Она реализована в программах *SPSS и SAS*.

Обобщенный метод (взвешенных) наименьших квадратов отличается от предыдущего «невзвешенного» метода тем, что внедиагональная минимизация квадратичных различий между наблюдаемыми и воспроизведенными корреляционными матрицами выполняется с введением специальных весовых коэффициентов для каждой переменной. Те переменные, у которых общая дисперсия составляет существенную долю по сравнению со специфичной дисперсией, получают большие весовые коэффициенты, чем переменные, у которых специфичная дисперсия преобладает над общей. Другими словами, реализуется принцип, согласно которому переменные, не связанные сильно с другими переменными в имеющемся наборе данных, не очень важны для решения. Этот относительно новый метод факторизации заложен в программы *SPSS и SAS*.

Альфа-факторный анализ. Идея альфа-факторного анализа, предусмотренного в программах *SPSS и SAS*, возникла в рамках психометрических исследований. В случае альфа-факторного анализа измеряемые переменные считаются выборкой из генеральной совокупности переменных и на основании данных по этим переменным у популяции индивидов пытаются судить о значениях всей генеральной совокупности переменных.

Коэффициент обобщенности α, под которым понимается квадрат коэффициента корреляции наблюдаемой переменной с действительной теоретической переменной (взятой из генеральной совокупности всех мыслимых величин) — мера, заимствованная из психометрики для оценки надежности результатов вычислений, выполненных в различных ситуациях. Этот коэффициент отражает общую долю дисперсии наблюдаемой переменной и ее действительной величины. Коэффициент обобщенности представляет собой расширение понятия надежности.

Кайзер применил это понятие к факторному анализу. Основная идея метода α-факторного анализа состоит в выделении факторов, обнаруживающих максимальную корреляцию с соответствующими факторами генеральной совокупности переменных. То есть задача состоит в том, чтобы найти такие факторы, которые в максимальной степени позволили бы воспроизвести генеральную совокупность переменных.

Подобно главным компонентам, альфа-факторы выделяются в порядке уменьшения их общности. С помощью специальных итерационных процедур оцениваются общности, имеющие максимальный коэффициент альфа. (Иногда значения превышают 1.0.) *BMDP* не выполняет альфа-факторизацию, но в качестве опции распечатывает альфа-статистику.

Возможно, самое большое преимущество этой процедуры в том, что она фокусирует внимание исследователя на проблеме выбора переменных из области всех возможных переменных, связанных с областью исследования. Однако среди исследователей этот метод, а также класс задач, решаемых с его помощью, мало известны.

Канонический факторный анализ Рао. Задачей канонического факторного анализа Рао (описание метода см.: *Rao,* 1955) является определение максимальной связи, определяемой с помощью канонической корреляции между двумя группами переменных, измеряемых у одних и тех же испытуемых. Важный вопрос этого метода — оценка и определение факторов по наблюдаемым переменным с наибольшей точностью.

2.2.2. Типы вращения

Выделенные в результате факторизации факторы в большинстве случаев трудно интерпретировать. Чтобы получить более осмысленное и легче интерпретируемое решение, рекомендуется использовать *вращение.* При этом следует помнить, что математически (с точки зрения соответствия между наблюдаемой и воспроизведенной матрицами взаимосвязей) решения, отличающиеся друг от друга с точностью до поворота, эквивалентны между собой в том смысле, что вращение не дает возможности улучшить качество математического соответствия между наблюдаемой и воспроизведенной матрицами взаимосвязей.

Подобно тому, как различные методы факторизации при хорошем наборе данных в большинстве случаев дают сходные результаты, различные методы вращения при верном определении структуры взаимосвязей, как правило, дают сходные результаты. Другими словами, при хорошей факторизации устойчивое решение с большой степенью вероятности будет так или иначе получено вне зависимости от того, какой из видов вращения использовался.

Прежде всего следует выбрать вид вращения — *ортогональное* или *косоугольное.* В первом случае факторы остаются ортогональными друг другу, т.е. независимыми. Ортогональное решение легче поддается интерпретации и описанию. Но если исследовательская гипотеза не предполагает независимости базисных факторов, такое вращение может исказить реальность. Если исследователь уверен, что базисные факторы взаимосвязаны друг с другом, он должен использовать косоугольное вращение, которое имеет концептуальные преимущества, но на практике не очень удобно для интерпретации, описания и изложения результатов.

В табл. 9 описаны варианты вращений, реализованные в наиболее распространенных программах. Читателю, заинтересовавшемуся этой проблемой, рекомендуется следующая литература: *Харман,* 1972; *Gorsuch,* 1983; *Mulaik,* 1972. Особенно трудолюбивые могут освоить метод ручного вращения (*Comrey, Lee,* 1992).

Ортогональное вращение (поворот). Варимакс, квартимакс и эквимакс — три различных варианта ортогонального вращения, реализованные в большинстве пакетов программ. Наиболее часто психологи используют варимакс. Рассматривая выше многочисленные методы факторизации, мы отмечали, что все они отличаются друг от друга (хоть и незначительно) с точки зрения используемых статистических моделей. Так же и при вы-

Таблица 9

Методы вращения

Метод поворота	Программа	Цели анализа	Комментарии
Варимакс (Ортогональное)	*SPSS, STADIA, SAS, BMDP4M, SYSTAT*	Минимизация сложности факторов (упрощение столбцов матрицы факторных нагрузок) за счет увеличения дисперсии факторных нагрузок по каждому фактору	Наиболее часто используемый вид вращения; в большинстве программ используется по умолчанию (в *BMDP* указывается Г=1)
Квартимакс (Ортогональное)	*SPSS, STADIA, SAS, BMDP4M, SYSTAT*	Минимизация сложности переменных (упрощение строк матрицы факторных нагрузок) за счет увеличения дисперсии факторных нагрузок по каждой переменной	Первый фактор, как правило, получается более общим (в *BMDP* указывается Г=0)
Эквимакс (Ортогональное)	*SPSS, STADIA, SAS, BMDP4M, SYSTAT*	Упрощение строк и столбцов (компромисс между варимаксом и квартимаксом)	Может давать неустойчивые решения (в *BMDP* указывается Г=1/2)
Ортомакс (Гамма-Ортогональное)	*SAS, BMDP4M*	Упрощение либо строки, либо столбца в зависимости от значения Г	Г – континуальная (непрерывно изменяющаяся) переменная

Парсимакс (Ортогональное)	*SAS*	Упрощение строк и столбцов	$\Gamma=(p^*(m-1))/p+m-2$
Прямой облимин (Косоугольное)	*SPSS, STADIA, BMDP4M*	Упрощает факторы, минимизируя сумму смешанных произведений столбцов матрицы факторных нагрузок	Предусмотрен выбор значений Γ(*BMDP*) или δ (*SPSS*) из непрерывного спектра, допускается широкий диапазон интеркорреляции факторов
Прямой квартимин (Косоугольное)	*BMDP4M*	Упрощает факторы, минимизируя сумму смешанных произведений столбцов структурной матрицы	Допускаются достаточно высокие корреляции между факторами. Этот метод рекомендуется выполнять в *BMDP* (Γ=0). В *SPSS* квартимин задается установкой δ=0
Орто-косоугольное	*BMDP4M, SAS (HK)*	Изменяет масштаб в пространстве факторов таким образом, чтобы они удовлетворяли ортогональному решению, неперемасштабированные факторы могут коррелировать друг с другом	Выполняется в Кайзеровской факторизации образов в *BMDP4M*
Промакс (Косоугольное)	SPSS, SAS	Полученные при ортогональном вращении факторы вращаются вновь с допущением корреляции между ними	Быстрый и экономичный метод
Прокруст (Косоугольное)	SAS	Преобразование матрицы, задающей взаиморасположение факторов, в целевую	Используется в конфирматорном факторном анализе

полнении различных вращений максимизируются и минимизируются различные функционалы.

Цель вращения варимакс — выбор наиболее простого факторного решения путем максимизации дисперсии факторных нагрузок переменных по каждому фактору (высокие факторные нагрузки после вращения еще более повышаются, а низкие понижаются). В результате становится более очевидным, какие переменные с какими факторами взаимосвязаны, и интерпретация сильно упрощается. Кроме того, при варимакс-вращении доли дисперсий, объясняемые факторами, перераспределяются в сторону выравнивания. Дисперсии у первых факторов уменьшаются и за счет этого увеличиваются у следующих (суммарная дисперсия остается постоянной). В итоге дисперсии, объясняемые каждым фактором, в какой-то степени выравниваются.

Если варимакс работает с факторами, то квартимакс — с переменными. В результате переменные упрощаются за счет увеличения дисперсии факторных нагрузок по каждой переменной. Другими словами, при варимакс-вращении изменения происходят в столбцах матрицы факторных нагрузок, а при квартимакс-вращении — в рядах. Отметим, что среди психологов, в большей степени заинтересованных в упрощении факторов, а не переменных, квартимакс не слишком популярен.

Эквимакс, занимающий промежуточное положение между варимаксом и квартимаксом, одновременно упрощает и факторы и переменные. С.Мьюлейк (*Mulaik*, 1972) отмечал, что если с помощью эквимакса вращать различное количество факторов, то результаты будут существенно отличаться друг от друга. Поэтому этот тип вращения имеет смысл использовать только тогда, когда вы уже точно определились с выбором количества факторов для вашей модели.

Варимакс упрощает (делает более прозрачными, однозначными с точки зрения интерпретации) факторы, квартимакс — переменные, а эквимакс — те и другие. Все эти типы вращений выполняются в программе

BMDP путем установления разных уровней критерия простоты «гамма» — 1.0 и 1/2 соответственно. Гамма может также непрерывно изменяться между 0 (преобразование происходит за счет упрощения переменных) и 1 (преобразование происходит за счет упрощения факторов) при ортогональном вращении «вручную», что позволяет пользователю самому определять гамма-уровень (вид вращения). В программе *SAS* возможность такого перехода реализуется также специальным типом вращения — *ортомакс*. Там же предусмотрено вращение *парсимакс*, использующее для выбора «гаммы» специально встроенную расчетную формулу, исходя из количества факторов и переменных.

Варимакс реализован в большинстве программ и почти везде является опцией, выполняющейся по умолчанию.

Косоугольное вращение. Виды косоугольного вращения весьма многообразны (см. табл. 9) ввиду того, что взаимосвязи между неортогональными факторами бесконечно вариативны. При косоугольном вращении взаимосвязь между факторами во всех программных пакетах измеряется как коэффициент корреляции. Величина корреляции, допустимой между факторами, определяется переменными *дельта* (δ) в программе *SPSS* и *гамма* (Γ) в программах *SYSTAT и BMDP*[11]. Величины *дельта* и *гамма* определяют максимальное значение корреляции, допустимое между факторами. Если эта величина меньше нуля, то решения все больше и больше приближаются к ортогональным и становятся таковыми на уровне около −4. Когда величина равна нулю, решения могут быть достаточно высоко коррелированы. Значение, близкое к 1, может продуцировать очень высоко коррелированые факторы. Несмотря на наличие зависимости меж-

[11] В программах *SYSTAT* и *BMDP* гамма используется для указания как типа упрощения при ортогональном вращении (факторы, переменные или то и другое), так и величины косоугольности при косоугольном вращении.

ду величинами *дельта* и *гамма* и величиной корреляции, максимальная корреляция при заданных значениях *дельта* и *гамма* зависит от набора исходных данных.

Отметим, что при косоугольном вращении не обязательно должны получиться коррелирующие факторы. Очень часто они не коррелируют, и исследователь получает более простой случай — случай ортогонального вращения.

Параметрическое семейство процедур, используемых для косоугольного вращения (в качестве изменяющегося параметра выступает величина корреляции) реализовано в *SPSS, SYSTAT и BMDP* как *прямой облимин.* В специальном случае, если *гамма* или *дельта* равны нулю (опция задается по умолчанию в трех программах), процедура называется *прямым квартимином.* Значения *гаммы* или *дельты* большие нуля допускают высокие корреляции между факторами, и исследователь должен быть осторожным, выбирая правильное количество факторов. Иначе эти высоко коррелируемые факторы будет трудно отличить друг от друга. Наиболее подходящее значение *гаммы* и *дельты* устанавливается методом проб и ошибок в сочетании с изучением связей между парами факторов. Или же можно просто положиться на величину, заданную по умолчанию.

Ортокосоугольное вращение сопровождает кайзеровскую факторизацию и автоматически выполняется в *BMDP.* Ортокосоугольное вращение использует алгоритм квартимакса для получения ортогонального решения для факторных нагрузок с измененным масштабом. Тем не менее решение может оказаться косоугольным в сравнении с исходными нагрузками.

Программы *промакс и прокруст* представлены в *SAS.* В промаксе решение, полученное после ортогонального вращения (обычно варимакса), вращается снова, но уже с допущением возможных корреляций между факторами. Факторные нагрузки, полученные при ортогональном решении, возводятся в степень (обычно во 2, 4 или 6-ю), чтобы свести маленькие и средние нагрузки к нулю, в то время как большие нагрузки уменьшаются, но не до нуля. Даже если факторы взаимосвязаны, простая структура максимизируется путем определения, взаимосвязаны переменные с тем или иным фактором или нет. В качестве дополнительного преимущества промакса укажем его экономичность в плане времени.

При вращении *прокруст* исследователь определяет целевую матрицу нагрузок (обычно состоящую из нулей и единиц) и затем отыскивает матрицу преобразования (вращения), с помощью которой выделенные факторы можно было бы привести к целевой матрице. Если такое преобразование существует (решение может быть приведено к целевому), гипотетическая факторная структура считается подтвержденной. Р.Горсуч (*Gorsuch*, 1983) отмечает, что, к сожалению, прокруст часто приводит к слишком высокой корреляции факторов и корреляционная матрица, построенная случайным образом, зачастую может быть очень легко приведена к целевой (специально заданной исследователем в соответствии с его гипотезой).

Геометрическая интерпретация. На рис. 1 изображена геометрическая интерпретация вращения: а) ситуация до поворота; б) после поворота примера из табл. 2. Точки представлены в двумерном пространстве в соответствии с их нагрузками по факторам 1 и 2, интерпретируемыми как координаты по осям X и Y. Таким образом, в ситуации до поворота (рис. 1*а*) точки (переменные) имеют следующие координаты (факторные нагрузки) по осям X (фактор 1) и Y (фактор 2): *стоимость путевки* (−.400; .900), *комфортабельность комплекса* (.251; −.947), *температура воздуха* (.932; .348), *температура воды* (.956; .286).

На рис. 1*б*, где изображена ситуация после поворота осей, абсолютное положение точек не изменилось, но изменились их координаты по отношению к новым осям: *стоимость путевки* (−.086; .981), *комфортабельность комплекса* (.071; −.977), *температура воздуха* (.994; .026), *температура воды* (.997; −.040). С точки зрения

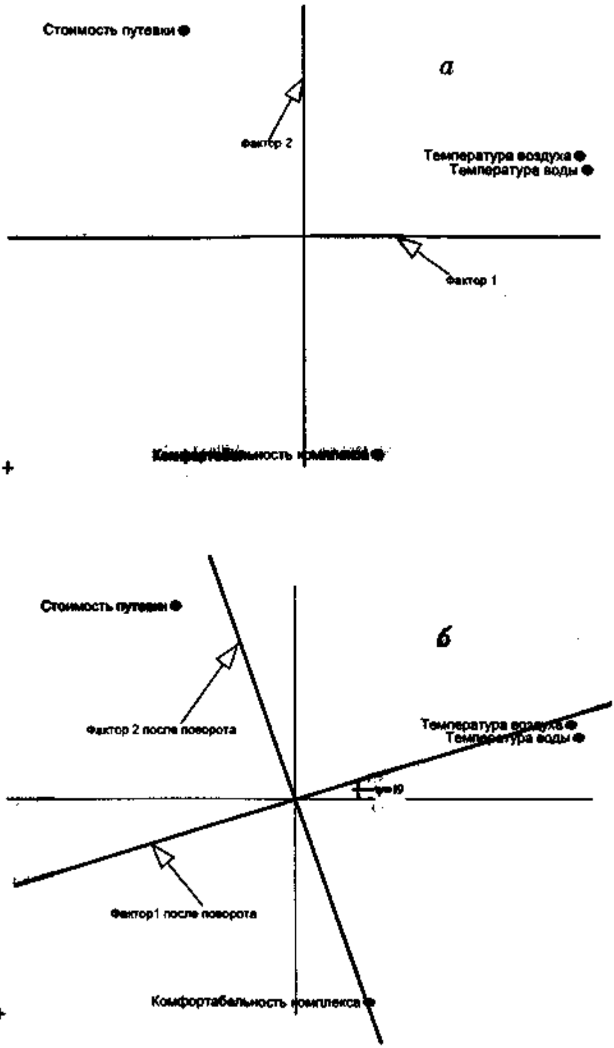

Рис. 1. **Иллюстрация вращения осей для обеспечения лучшего определения факторов по отношению к взаимосвязанным с ними переменным. Расположение переменных** *стоимость путевки, комфортабельность комплекса, температура воздуха, температура воды*: *а* – **до поворота,** *б* – **после поворота**

статистики вращение увеличивает высокие факторные нагрузки и уменьшает низкие. С точки зрения геометрии вращение выполняется таким образом, чтобы новые оси проходили через области скопления переменных.

Геометрически факторизация дает возможность представить все наблюдаемые переменные как вектора, выходящие из начала координат и заканчивающиеся в определенной точке координатной плоскости. Факторы служат осями в этой координатной системе. Координаты для каждой точки (задающей вектор-переменную) однозначно определяются факторными нагрузками этой переменной. Когда факторов не два, а, например, три, тогда речь идет не о координатной плоскости, а о трехмерном координатном пространстве, и каждая переменная задается тремя координатами. Длина вектора для каждой переменной есть общность этой переменной.

Если факторы ортогональны, то факторные оси составляют друг с другом прямые углы, и координаты точки, соответствующей переменной, являются показателями взаимосвязи между общими факторами и этой переменной. По графикам легко определить факторные нагрузки, проведя перпендикуляры к каждой из осей.

Необходимость вращения объясняется тем, что оно помогает реализовать главную цель методов главных компонент и факторного анализа — определить минимальное количество факторных осей, необходимых для достоверного нахождения позиций переменных, а также вскрыть содержание базисных факторов, определяющих ответы респондентов. Чтобы реализовать эту цель, необходимо проинтерпретировать факторные оси, задающие пространство. Вращение факторных осей в максимальной степени облегчает их интерпретацию. Изменение положения осей изменяет только координаты точек-переменных, сохраняя их взаимное расположение.

Фактор обычно легче интерпретировать, когда несколько переменных имеют по нему высокие факторные нагрузки, а нагрузки всех остальных переменных по этому фактору незначительны. В идеале хотелось бы, чтобы каждая переменная имела одну единственную высокую факторную нагрузку, т.е. была включена в интерпретацию только одного фактора. Геометрически это означает, что точка, которая соответствует переменной, имеющей достаточно удаленную от нуля координату по какой-то из осей, по всем остальным осям должна лежать очень близко к началу координат (нулю).

Когда мы имеем дело только с одной наблюдаемой переменной, процедура задания факторной оси становится тривиальной: эта ось, содержащая единственный вектор-переменную, задает одномерное пространство. Однако в случае многих переменных и нескольких факторов расположение факторных осей требует определенного компромисса. Сильно взаимосвязанные друг с другом переменные в геометрическом пространстве образуют некоторое скопление («облако») близких между собой точек. Цель поворота в таком случае можно определить как проведение оси именно через эти скопления точек. При удачном стечении обстоятельств (если все скопления переменных-точек лежат по отношению друг к другу под углом 90^0) получается ортогональное решение. А если, к тому же, скоплений мало и все остальное пространство между ними пусто, проинтерпретировать оси-факторы не составляет никакого труда.

При косоугольном вращении мы сталкиваемся с более сложной ситуацией. Поскольку допускается, что факторы могут быть взаимосвязаны друг с другом, угол между осями не обязательно должен быть прямым. И хотя легче проводить оси так, чтобы каждому скоплению точек соответствовала только одна ось, тем не менее может получиться, что какие-то оси окажутся проведенными очень близко друг к другу (сильно взаимосвязанными) и решение будет очень трудно интерпретировать. Подробнее о применении графических методов для оценки результатов и степени приемлемости выполненного вращения см. далее.

Практические советы. Подавляющее большинство предлагаемых комбинаций методов факторизации и вращения вполне доступно, и практика показывает, что разница между ними не велика (*Fava, Velicer,* 1992; *Velicer, Jackson,* 1990). Различные методы факторизации дают очень близкие результаты, если исследователем подготовлены данные, содержащие большой набор переменных с сильными взаимосвязями между некоторыми из них, с одним и тем же хорошо подобранным числом факторов и со схожими значениями общностей. Более того, различия, появившиеся после факторизации, исчезают после вращения.

В большинстве случаев работа с факторным анализом начинается с использования метода главных компонент и вращения варимакс. По этим результатам оцениваются: факторизуемость корреляционной матрицы, количество факторов, ранг наблюдаемой матрицы взаимосвязей и переменные, которые могут быть исключены из последующего анализа.

В процессе нескольких последующих прогонов исследователь экспериментирует, выбирая различное количество факторов, различные методы факторизации и вращения, и выясняет, какая комбинация количества факторов с методами факторизации и вращения приводит к наиболее осмысленному с научной точки зрения решению — логичному и имеющему наибольшую ценность. Именно это решение и выбирается для интерпретации.

Глава 3

НЕКОТОРЫЕ ВАЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА

Проблемы, обсуждаемые в этой главе, могут быть решены несколькими методами. Обычно разные методы факторного анализа приводят к одному и тому же решению. Когда этого не происходит, результаты интерпретируются на основе содержательного понимания и научной ценности найденных решений.

3.1. Оценка общностей

В факторном анализе (в отличие от метода главных компонент) перед факторизацией на главной диагонали матрицы взаимосвязей R ставятся не единицы, а значения *общностей* (числа между 0 и 1). Использование общностей вместо единиц позволяет исключить специфичные и ошибочные дисперсии каждой наблюдаемой переменной. Решение получается только на основе анализа общих дисперсий, объясняемых факторами. Однако в настоящее время нет единого мнения о том, как проводить оценку общностей. Круг задач, связанных с этой оценкой (процедуры, способы задания, критерии и т.д.) называется проблемой общности.

Так как дисперсия каждой переменной берется равной единице (все переменные вначале стандартизируются), то общность в модели классического факторного анализа (содержащей ряд общих факторов и по одному характерному на каждую переменную) не может превышать единицу и составляет ту часть дисперсии, которая обусловливается общими факторами (без учета специфичной и ошибочной дисперсий).

Таким образом, каждая переменная обладает общностью, которая должна быть меньше единицы. В предельном случае, когда общая дисперсия приближается к единице, общность также равна единице. В этом случае значения специфичной и ошибочной дисперсий должны быть около нуля. Крайний случай, когда эти дисперсии равны нулю, на практике не встречается, так как в экспериментах всегда присутствуют погрешности измерения и в модели факторного анализа всегда проводится различие между общими и специфичными факторами, которые также всегда должны присутствовать.

Итак, общности могут принимать значения от нуля до единицы. К.Иберла (1980) указывает, что эту область принятия значений можно ограничить еще больше: от квадрата коэффициента множественной корреляции переменной до квадрата коэффициента ее надежности (единица минус дисперсия ошибки).

Формальное определение общности переменной как суммы квадратов нагрузок общих факторов не дает однозначного ответа при оценке общности. Уже из этого определения видно, что общность тесно связана с количеством общих факторов. Проблема оценки общностей — уязвимое место многофакторного анализа. В настоящее время разработано довольно много вычислительных процедур (только один Тэрстоун предложил 12 различных способов), но ни одна из них не получила исчерпывающего теоретического обоснования.

Тэрстоун (*Thurstone*, 1961) указал только эмпирические методы и разработал практические вычислительные процедуры без достаточного теоретического обоснования.

Другие авторы (напр., *Albert*, 1944*a,b*) пытались найти аналитическое решение проблемы общности, формулируя ее следующим образом: при известных внедиагональных элементах матрицы взаимосвязей R нужно подобрать такие значения диагональных элементов, чтобы ранг полученной редуцированной матрицы был по возможности минимальным.

Установив значения всех общностей, можно воспроизвести редуцированную матрицу взаимосвязей (в том числе определить ее ранг, т.е. минимально необходимое для ее воспроизведения количество факторов). Могут иметь место два альтернативных случая. В первом случае вначале определяют общности, а затем количество выделяемых факторов (прямая оценка общностей). Во втором — сначала устанавливают количество факторов, подлежащих выделению, а затем подбирают значения общностей таким образом, чтобы ранг редуцированной матрицы приближался к этому числу.

Лоули (*Lawley*, 1940) и Рао (*Rao*, 1955) определили общности как величины, которые при статистически значимых факторах позволяют воспроизвести матрицу взаимосвязей наилучшим образом. Значимые факторы и общности получаются в результате итеративных процедур.

На практике (при определении общностей в конкретном случае) теоретический подход имеет второстепенное значение и выбирается в зависимости от имеющейся компьютерной программы и индивидуальных предпочтений самого исследователя. При большом количестве переменных вполне достаточно грубых оценок, так как в этом случае неточные оценки общностей большей частью не оказывают сильного влияния на окончательное факторное решение. Читатель, интересующийся теоретическими вопросами, может обратиться к обзорам, приведенным в книгах Хармана (1972) и Иберлы (1980).

К сожалению, работ, посвященных сравнению точности оценок, полученных различными способами, пока мало, хотя такие исследования относительно легко провести путем компьютерного моделирования.

В большинстве случаев решение проблемы общности состоит в нахождении соответствующих значений, которые определяют общую дисперсию каждой переменной и лежат в интервале между квадратом коэффициента множественной корреляции и квадратом коэффициента надежности.

Гуттман (*Guttman*, 1940) доказал, что с увеличением количества переменных при постоянном количестве факторов значение общности приближается к квадрату множественной корреляции. Выбор квадрата множественной корреляции в качестве оценки общности в настоящее время теоретически обоснован и чаще всего рекомендуется к использованию при большом количестве переменных для предварительной грубой оценки. На главной диагонали записывается с положительным знаком (независимо от его исходного алгебраического знака) наибольший коэффициент корреляции данного столбца матрицы R. Этот способ распространен благодаря своей простоте, хотя наибольший коэффициент корреляции в столбце матрицы R является случайной величиной и не имеет непосредственной связи с общностью.

Кроме того, для оценки общности можно применять средние коэффициенты корреляции столбца или строки. Ясно, что это значение должно быть меньше наибольшего коэффициента корреляции каждого столбца.

Промежуточное положение в использовании наибольшего и среднего коэффициентов корреляции занимает *метод триад*. Для оценки общности i-й переменной в i-м столбце матрицы R отыскиваются два наибольших коэффициента корреляции r_{ki} и r_{ji}. Их значения вместе с коэффициентом корреляции между обеими переменными k и j подставляются в следующую формулу:

$$h_i^2 = r_{ki} r_{ji} / r_{kj} \quad (22)$$

Следует упомянуть еще один распространенный способ определения общностей — *итерационный*. Оценка общностей обычно начинается с вычисления коэффициентов множественной корреляции (КМК) каждой переменной, рассматриваемой как зависимая по отношению к остальным, выступающим в роли независимых. По этим значениям диагональных элементов матрицы R выполняется факторизация и вычисляются новые оценки общностей, которые затем подправляются при помощи итерационных процедур (которые могут выполняться «вручную») так, чтобы соответствие между матрицей, воспроизведенной с помощью небольшого количества факторов, и наблюдаемой корреляционной матрицей было максимальным. Опять выполняется факторизация матрицы R с новыми диагональными элементами. Когда последовательно получаемые оценки общностей сильно сближаются и перестают меняться от итерации к итерации, процесс прекращается. Окончательные оценки общностей также являются КМК, только теперь уже между каждой переменной (в качестве зависимой) и факторами (в качестве независимых). Окончательные общности представляют собой долю дисперсии переменной, объясняемую глубинными факторами. При ортогональном вращении значения общностей не меняются.

На практике процедура данного способа часто сходится, хотя формального обоснования сходимости итеративного процесса не существует. Теоретически пока не доказано, при каких условиях такая сходимость осуществляется и совпадают ли достигнутые предельные значения с истинными величинами общностей. Вполне возможно также, что данная процедура приведет к значениям общностей, сильно отклоняющимся от истинных. Поэтому нет теоретических оснований рекомендовать данный способ. В любом случае при выборе начальных значений общностей следует соблюдать границы, указанные формулой (22).

При факторизации образов в качестве общностей используются дисперсии из образной ковариационной матрицы. Из-за того, что при выполнении этого алгоритма общности никак не меняются, получается единственное решение. Метод максимального правдоподобия вместо общностных значений оценивает количество факторов и изменяет внедиагональные корреляции для получения наилучшего соответствия между наблюдаемой и воспроизведенной матрицами.

Программы *SPSS*, *SAS* и *BMDP* предусматривают несколько начальных вариантов статистики для общностных оценок. *BMDP* предлагает пользователю в качестве исходных общностных оценок либо самому устанавливать значения КМК (коэффициенты множественной корреляции), либо использовать максимальную абсолютную корреляцию с любой другой переменной. *SPSS* допускает, чтобы пользователь самостоятельно устанавливал начальные значения общностей только для метода главных факторов, а во всех остальных случаях использует КМК. *SAS* предлагает для каждой переменной выбор между КМК, подправленными таким образом, чтобы сумма общностей была равна сумме максимальных абсолютных корреляций со всеми остальными переменными (значениями), заданными пользователем, и числами между 0 и 1, выбранными случайным образом. *SYSTAT* использует КМК. Итерационный процесс, использующий в качестве начальных значений КМК, сходится (заканчивается) быстрее.

Если способ дает завышенные значения общностей, то часть характерной дисперсии переходит в общую дисперсию, что вызывает изменение факторного отображения. Если способ дает заниженные значения общностей, то происходит потеря части общей дисперсии для процесса выделения факторов.

Если переменных более 20, выбор КМК в качестве первоначальных общностей вполне разумен. В подобных случаях количество элементов на главной диагонали значительно меньше общего количества элементов во всей матрице R[12] и их значения не очень влияют на решение.

---

[12] Действительно, общее количество элементов в матрице размера $n \times n$ равно n^2, а количество диагональных элементов n. Чем больше n, тем больше разница $(n^2 - n)$.

Если общности для всех переменных имеют приблизительно одну и ту же величину, результаты методов главных компонент и факторного анализа оказываются очень близкими между собой (*Velicer, Jackson*, 1990).

Последующее вращение сглаживает ошибки в оценках, и качество оценок в итоге не оказывает влияния на интерпретацию факторов. Поэтому при большом количестве переменных не так уж важно иметь точные оценки общностей. При малом количестве переменных качество оценок влияет на факторное решение. Поэтому исследователю рекомендуется включать в анализ не менее 20 переменных.

Ситуация, когда общности равны или превышают единицу, указывает на наличие каких-то проблем с решением: либо слишком мало данных, либо начальные общности заданы неправильно, либо количество факторов выбрано неверно. Понизить значение общности можно путем добавления или исключения факторов. Слишком низкие значения общностей свидетельствуют о том, что соответствующие переменные не связаны с другими переменными в наборе данных. В программе *SAS* предусмотрено два способа работы с общностями, большими единицы: специальная опция *HEYWOOD* понижает их до единицы, а опция *ULTRAHEYWOOD* допускает превышение ими единицы.

3.2. Критерии оценки соответствия количества факторов и факторной модели экспериментальным данным

Нахождение наиболее адекватной факторной модели связано с определением количества факторов, так как включение в предлагаемую факторную модель большего количества факторов улучшает соответствие между наблюдаемой и вычисляемой матрицами взаимосвязей и увеличивает процент дисперсии в исходной информации, объясняемый факторным решением. Вместе с тем, соображения экономного решения требуют ограничивать количество выделенных факторов и из двух конкурирующих моделей принимать ту, которая содержит наименьшее количество факторов. Теоретически учесть абсолютно *все* дисперсии и ковариации набора данных возможно только в том случае, когда количество факторов равно количеству наблюдаемых переменных. Поэтому совершенно очевидно, что следует соблюдать разумный баланс: с одной стороны, стремиться к достаточному количеству факторов для максимизации соответствия, с другой — помнить о принципе экономии. Выбор количества факторов — в определенном смысле более ответственный момент, чем выбор метода факторизации и вращения или задание начальных значений для общностей. В конфирматорном анализе выбор количества факторов соответствует выбору количества теоретических латентных переменных, составляющих базис исследуемой области. Полученный в результате процедуры конфирматорного анализа ответ на вопрос о том, насколько теоретически предполагаемое количество факторов соответствует набору исходных данных, является частичным подтверждением гипотетической факторной структуры.

Общепризнанного метода определения количества факторов, подлежащих выделению, не существует (представители различных школ расходятся во мнении о том, какой метод более достоверен и пригоден для практики), но есть несколько часто употребляемых критериев. Некоторые из них альтернативны, некоторые дополняют друг друга (подробнее об этом см.: *Gorsuch*, 1983). Наиболее часто применяются:

- различные правила, формулируемые в терминах собственных чисел;
- критерий следа (отсеивания);
- критерии значимости, связанные с методами максимального правдоподобия и наименьших квадратов;
- критерий, основанный на величине долей дисперсий факторов;
- критерий факторных нагрузок;
- критерий интерпретируемости и инвариантности.

Первый (быстрый) метод определения количества факторов заключается в оценке собственных чисел и введении критерия значимости фактора при наличии собственного числа>1. Рассмотрим факторизацию по методу главных компонент. Собственные числа соответствуют дисперсии. Поскольку дисперсия каждой стандартизированной переменной равна единице, то компоненты с собственными значениями меньше единицы гораздо менее значимы (с точки зрения перспективы объяснить дисперсию какой-либо наблюдаемой переменной), нежели сами переменные. Компоненты с собственными величинами больше единицы составляют от одной пятой до одной трети от общего количества переменных (например, 20 переменных дают от 4 до 7 компонент с собственными величинами больше единицы). Этот простой критерий хорошо себя зарекомендовал, так как обычно дает результаты, совпадающие с ожидаемыми. Кроме того, этот метод был тщательно проверен на модельных искусственных данных. Как правило, этим критерием можно пользоваться в случае большой выборки респондентов и при количестве переменных не более 40. В других обстоятельствах этот критерий может либо пере-, либо недооценивать количество факторов для набора исходных данных.

Отметим, что количество общих факторов, соответствующих матрице взаимосвязей, относящейся к генеральной совокупности, всегда будет больше или равно количеству факторов, выделяемых согласно этому критерию (в отличие от выборочной матрицы взаимосвязей). Кайзер (*Kaiser*, 1974) приводит несколько доводов в пользу критерия собственных чисел больше единицы и считает его более предпочтительным по сравнению с другими (более «утонченными») критериями.

Второй метод определения количества факторов заключается в анализе «следа» (гисторграммы собственных значений, расположенных по убыванию номеров факторов — см.: Факторный..., 1989). Факторы в возрастающем порядке по номеру расположены по абсциссе, а собственные значения — по ординате. Такое графическое представление удобно использовать как при работе с методом главных компонент, так и при факторном анализе на начальном и последующих прогонах. Обычно «след» монотонно убывает. Собственное значение будет самым высоким для первого фактора, средним (но уменьшающимся) для следующих нескольких факторов и низким для последних факторов (рис. 2).

Как правило, на графике виден отчетливый излом между крутым наклоном первых факторов и постепенным убыванием остальных. Процедура определения количества факторов заключается в поиске на графике точки, где линия меняет крутизну и приобретает почти горизонтальное положение. Этот постепенный «сход на нет» от найденной точки получил название *«scree»* (след) по аналогии с подножием горы (хотя практически во всех переведенных на русский язык монографиях этот критерий называется «критерием отсеивания»). Опыт

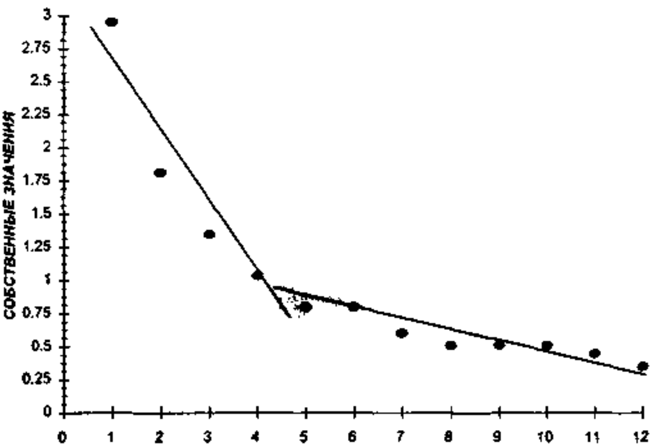

Рис. 2. **Пример следа, полученного в результате процедуры факторного анализа. Излом наблюдается после четвертого фактора**

многих исследователей показывает, что количество выделенных факторов равно n, если след начинается с n-го фактора.

График «следа» распечатывается во всех программах факторного анализа. Для рассматриваемого примера (рис. 2) через первые четыре собственные величины вполне (с некоторым приближением) можно провести одну общую прямую линию. После этого остальные восемь точек можно аппроксимировать другой линией с заметно отличающимся наклоном. Следовательно, в данном случае можно говорить о выделении четырех факторов.

К сожалению, «критерий следа (отсеивания)» нельзя назвать точным, поскольку определить на графике точки существенных изломов не всегда легко (изломов может быть несколько и выделение какого-либо из них становится субъективным). По мнению Горсуча (*Gorsuch*, 1983), «критерий следа» дает более очевидные и надежные результаты в том случае, когда размеры выборки велики, общности высоки и для каждого фактора имеется несколько переменных с высокими нагрузками. Вместе с тем даже при менее оптимальных условиях критерий точен в пределах одного-двух факторов, а при наличии второстепенных факторов может быть предпочтительнее других.

Принимая решение о количестве факторов, подлежащих выделению по «критерию следа», исходят не из модели факторного анализа, а из модели главных компонент. В этом случае процедура проведения факторного анализа состоит в следующем. Вначале определяют главные компоненты матрицы взаимосвязей R, не проводя оценку общностей. Затем устанавливают по «критерию следа» количество факторов, которое должно быть выделено. После этого выбирают значения общностей и факторизуют по методу главных факторов, выполняют вращение, интерпретируют выделенные факторы и лишь после этого принимают окончательное решение о количестве факторов, которое следует оставить для объяснения рассчитанных корреляций. Графическое изображение долей дисперсии факторов дает возможность принять лишь предварительное решение, необходимое для дальнейшей процедуры. И только после завершения всего факторного анализа можно ответить на вопрос о количестве факторов, которое должно быть выделено. Трудность состоит в том, что в ходе анализа должно быть относительно рано принято решение, сколько же факторов необходимо вращать. В случае сомнений в количестве факторов рекомендуется выполнить анализ несколько раз, используя различное количество факторов, повторяя «критерий следа» и анализируя остаточную матрицу взаимосвязей (выдача этой матрицы предусмотрена в программах *SPSS, BMDP и SAS*).

Как уже указывалось, остаточная матрица взаимосвязей получается путем вычитания воспроизведенной матрицы взаимосвязей из наблюдаемой матрицы взаимосвязей. Числа в остаточной матрице фактически представляют частичные корреляции между парами переменных без учета влияния факторов. Если анализ проведен хорошо, то значения в остаточной матрице невелики. Наличие заметного количества умеренных остаточных величин (скажем, от .05 до .10) или даже малого количества более значительных разностей (скажем, более .10) предполагает наличие еще других факторов.

Определив количество факторов при помощи этого критерия, важно посмотреть на матрицу факторных нагрузок после поворота и определить количество переменных, имеющих значимые нагрузки по каждому фактору. Если по какому-то фактору высокая нагрузка присутствует только у одной переменной, фактор определен плохо. Если фактор нагружается двумя переменными, достоверность выбора определяется структурой взаимосвязей этих двух переменных между собой и с другими переменными в матрице R. Если две переменные сильно взаимосвязаны между собой (скажем, нормированный показатель взаимосвязи, принимающий значения в диапазоне от -1 до 1, в данном конкретном случае по абсолютной величине больше 0.7) и относительно не связаны с другими переменными, фактор может считаться достоверным.

Интерпретация факторов, нагруженных одной или двумя переменными, все же таит в себе опасности даже на самом начальном (максимально разведочном) этапе факторного анализа.

Для факторизации методами главных компонент и максимального правдоподобия в конфирматорном анализе существуют *тесты значимости количества факторов*. На каждом этапе факторизации рассматривается остаточная матрица и оценивается ее значимость. Если все элементы остаточной матрицы незначительно отличаются от нуля, то нет необходимости в новом факторе. Для оценки «незначительности» можно использовать упоминавшийся тест Бартлетта[13], который оценивает значимость существования всех факторов вместе и каждого в отдельности при наличии альтернативной гипотезы об отсутствии факторов вообще.

Критерий значимости главных компонент интересен прежде всего тем, что по нему проверяется значимость всей корреляционной матрицы. Реже интересуются вопросом, с какого момента оставшиеся главные компоненты значимо различаются между собой.

Критерии значимости, используемые в методе главных компонент, нельзя без изменения перенести на модель факторного анализа. В этом случае необходима проверка гипотезы о том, что выделенных общих факторов вполне достаточно для воспроизведения ковариационной или корреляционной матрицы. При этом вычисляется критерий значимости:

$\chi^2=(n-1)ln(|R^+|/|R|)$ с $(m-r)^2-m-r$ степенями свободы.

В этой формуле $|R^+|$ — определитель матрицы корреляций, воспроизведенной с помощью выбранной модели; $|R|$ — определитель исходной корреляционной матрицы; m — количество переменных; r — количество выделен-

---

[13] Более простой критерий предложил Лоули: $\chi^2=n\sum r_{ij}^2$ $(i<j=1, ...m)$, с $m(m-1)/2$ степенями свободы, где n — объем выборки, m — количество переменных (*Иберла*, 1980, с. 141).

ных факторов и n — количество испытуемых. Если при определенных m и n вычисленное значение критерия превышает табличное значение χ^2, соответствующее заданному уровню значимости, это указывает на то, что необходимо выделить факторов больше, чем r, по крайней мере $r+1$. Таким образом, при статистическом подходе нижней границей количества факторов, подлежащих выделению, является наименьшее число r, при котором на заданном уровне значимости расчетное значение критерия будет меньше табличного. Для работы с этим тестом необходимо, чтобы наблюдаемые переменные имели нормальное распределение, факторные нагрузки определялись методом максимального правдоподобия и n было достаточно велико.

При условии выполнения предположений, необходимых для метода максимального правдоподобия, с чисто статистической точки зрения предпочтительнее пользоваться критерием χ^2. Применение этого критерия показало, что для большой выборки при значительном количестве переменных количество выделяемых факторов намного больше количества факторов, которое ожидает получить исследователь. Это обстоятельство не является недостатком метода, но в некоторых случаях оно заставляет исследователей после применения критерия статистической значимости дополнительно использовать критерий, основанный на величине доли воспроизводимой дисперсии.

Однако в настоящее время среди ученых существуют некоторые разногласия по поводу использования этих тестов. Читателя, заинтересованного в более подробном освещении этих вопросов, мы отсылаем к книгам Иберлы (1980), Горсуча (*Gorsuch*, 1983) или к более новым работам о проверке выделенных факторов на значимость.

Графическое изображение долей дисперсии факторов позволяет дать в общих чертах обзор критериев выделения факторов. В принятом в факторном анализе подходе полная дисперсия m наблюдаемых переменных всегда равна m. Легко можно определить, какая доля этой дисперсии приходится на r выделяемых общих факторов. Доля дисперсии, вносимая одним фактором, равна сумме квадратов факторных нагрузок одного столбца матрицы A. Можно произвольно предположить, что достаточно выделить такое количество факторов, на которые приходится 90—95% полной дисперсии. Такое условие приводит к однозначному, но обычно недостаточно аргументированному решению, почему именно ограничиваются 90% полной дисперсии. Для выражения дисперсии фактора в процентах от полной дисперсии служит отношение: *(дисперсия фактора×100%)/полная дисперсия,* в котором характерная (специфическая) дисперсия входит в знаменатель. Таким образом, с самого начала не указывается, сколько характерной и сколько общей дисперсии приходится на определенную переменную. В методе главных компонент, где нет разделения на общую и характерную дисперсии, такой подход к выделению факторов вполне корректен, но при использовании модели факторного анализа полезно знать доли дисперсии факторов относительно полной дисперсии. Эти доли часто очень малы и не отражают содержание анализа. Для наглядности чертят график долей дисперсии факторов, располагая их в порядке уменьшения или в виде накопленного ряда. На основе такого изображения можно произвольно установить правило: выделять такое количество факторов, на которое суммарно приходится, например, 90% полной дисперсии.

При применении модели факторного анализа часто рациональнее употреблять процентные доли дисперсий общих факторов, отнесенных к суммарной общности, т.е. общей дисперсии, а не полной (включающей в себя еще специфическую часть и дисперсию ошибки). Такие значения, естественно, становятся больше, так как характерная дисперсия не входит в знаменатель. Однако при принятии решения о количестве факторов, подлежащих выделению, недостаточно учитывать исключительно только эти значения; при небольшой суммарной общности соответствующие процентные величины могут быть большими, хотя ситуация не будет отражать действительного положения вещей.

Поэтому всегда рекомендуется вычислять дисперсии отдельных факторов в виде долей от полной дисперсии и от суммарной общности и сопоставлять их с графиком «следа». Основной недостаток критерия, основанного на величине доли воспроизводимой дисперсии, состоит в его определенной субъективности.

Самый простой из критериев отбора значимых факторов на основе анализа факторных нагрузок (критерий Хэмфри) состоит в том, что абсолютная величина произведения двух максимальных факторных нагрузок должна быть вдвое больше двойки, деленной на квадратный корень из количества наблюдений (испытуемых):

$$|r_{1max} \times r_{2max}| > 2/\sqrt{N} \tag{23}$$

Фрачтер (*Fruchter*, 1954) считает, что этот критерий применим для небольших выборок.

Другой критерий может быть сформулирован так: фактор более значим, если произведение модулей двух максимальных факторных нагрузок равно или больше значимого коэффициента корреляции при данном количестве наблюдений. Иногда этот критерий усиливают требованием, чтобы переменные, обладающие этими максимальными факторными нагрузками, имели хотя бы по одному значимому коэффициенту корреляции (подробнее об этом см.: *Левандовский*, 1980).

В научных статьях поднимается вопрос о том, что делать, когда определение количества факторов вызывает сомнение: что лучше — принять решение в сторону уменьшения или увеличения их количества? Например, Иберла (1980) рекомендует использовать «критерий следа», позволяющий первоначально выделить больше факторов, а сокращение проводить на последующих этапах расчета.

Иногда наряду со значимыми факторами исследователь вращает незначимые (маргинальные) факторы, но не интерпретирует их. В других случаях интерпретация факторов с незначительными вкладами в общую дисперсию приводит к самым неожиданным и интересным находкам в исследуемой области. Хотя это и является доводом для сохранения маргинальных факторов, однако, если исследователя интересуют заведомо достоверные факторы, следует сохранять (вращать и интерпретировать) лишь факторы, имеющие высокие вклады в общую дисперсию. Иберла вообще рекомендует никогда не оставлять маргинальные факторы (1980, с. 147).

В связи с тем, что вычислительная процедура факторного анализа представляет собой многоступенчатый процесс, допустимо принимать решение о количестве остающихся факторов на различных этапах расчета — либо в процессе выделения факторов, либо после этого. Однако лишь на последних этапах получают важную информацию о количестве факторов, которые следует оставить. Основная стратегия при этом состоит в том, чтобы вначале выделить на один фактор больше, а затем либо отбросить его, либо оставить на основании дальнейших результатов анализа и дополнительных критериев.

Важнейший критерий количества оставляемых факторов — получение простой структуры после вращения. Существуют специальные статистические тесты, позволяющие определять простоту полученной факторной структуры (Иберла, 1980). Таким образом, решение о количестве факторов может быть окончательно принято лишь после вращения и оценки простоты факторной структуры с помощью статистических критериев.

Вопрос о количестве факторов, подлежащих выделению, может быть поставлен по-разному. Заведомо недостаточна постановка вопроса только в статистическом смысле, а именно о проверке значимости по какой-то формуле. Также недостаточно использовать только такие критерии, которые, например, связаны с долями дисперсии или количеством собственных значений больше единицы. Для ответа на такой важный вопрос нужно привлечь целый ряд критериев, позволяющих сделать дифференцированное заключение, попытаться применить к одним и тем же данным комбинацию различных независимых критериев и принять только те результаты, которые проходят по всем критериям (Факторный..., 1989).

Если надо быстро и приблизительно оценить количество факторов, то рекомендуется следующее правило. Выделенных факторов должно быть менее половины от количества переменных, но больше (или равно) количества собственных значений корреляционной матрицы, превышающих единицу. Вклад общих факторов в суммарную общность должен составлять около 90%. Остатки корреляционной матрицы должны быть приблизительно нормально распределены со средним значением, равным нулю, и стандартным отклонением, не превышающим значения: $s = 1/\sqrt{(n-2)}$, где n — количество наблюдений. Наконец, должен быть проведен тест с применением какого-либо статистического критерия, который при выделенных r факторах не превышает соответствующую табличную величину с заданными уровнем значимости и степенями свободы. Если по этим критериям выносятся решения, не противоречащие друг другу, то можно удовлетвориться именно этими r факторами. При малом количестве переменных вышеназванные критерии обычно дают схожие результаты (*Иберла*, 1980).

Для более тщательной оценки количества выделяемых факторов должны быть выполнены как минимум следующие процедуры. Вначале применяется «критерий следа» и устанавливается верхняя граница количества факторов, подлежащих выделению. После оценки общностей по установленным факторам выполняется вычислительная процедура с помощью метода главных факторов. Затем применяется вращение до получения косоугольной простой структуры. Факторы, соответствующие простой структуре и подтверждаемые каким-либо статистическим критерием, интерпретируются, и затем принимается окончательное решение о количестве факторов, достаточно полно объясняющих наблюдаемые корреляции. Анализируется также график долей дисперсий оставшихся факторов, определяется остаточная корреляционная матрица, проверяется на нормальность распределение остатков с выполнением условия, чтобы стандартное отклонение не превышало $s=1/\sqrt{(n-2)}$.

Разные критерии не всегда точно согласуются между собой. Когда все они не удовлетворяются, это может служить точным указанием на необходимость выделения еще одного фактора. После применения более мощного критерия и попытки содержательного описания этого нового фактора принимается окончательное решение о его включении в факторную структуру.

Окончательное решение должно быть приемлемым с точки зрения содержательных представлений в данной области. Это «обходный маневр», но мы вынуждены предпринять его, если хотим, чтобы нашими результатами могли воспользоваться другие исследователи. Однако не все согласны с этим принципом. Например Иберла считает его ошибочным и опасается, что исследователи, наделенные богатой фантазией, будут оставлять слишком много факторов, а исследователи с бедной фантазией будут довольствоваться малым.

3.3. Критерии оценки качества вращения и простоты полученной структуры

Определившись с количеством значимых факторов, исследователь оказывается перед выбором типа вращения. На первый взгляд, во многих случаях факторного анализа косоугольное вращение кажется более подходящим, чем ортогональное, поскольку ситуация, в которой предполагается, что факторы каким-то образом взаимосвязаны друг с другом, выглядит более соответствующей реальности. Однако описание результатов косоугольного вращения включает анализ матриц факторного отображения и корреляции факторов, тогда как при ортогональном вращении выдается только матрица факторных нагрузок. Иными словами, результаты ортогонального вращения гораздо легче анализировать и интерпретировать. Кроме того, ортогональное вращение дает неоспоримые преимущества для использования факторных значений или подобных им величин в качестве зависимых или независимых переменных в других аналитических процедурах или же при сравнении различных факторных структур.

Возможно, наилучший способ выбора между ортогональным и косоугольным вращением — это выполнение косоугольного вращения с желаемым количеством факторов и анализ корреляций между факторами. Если необходимо найти соответствие с исходными данными для вычисления сильно взаимосвязанных между собой факторов, в программах *SPSS*, *SYSTAT*, *BMDP и SAS* по умолчанию выполняется косоугольное вращение. Однако в том случае, если имеющиеся данные не задают коррелирующих факторов, решение (автоматически) вычисляется как ортогональное.

Если в корреляционной матрице все коэффициенты корреляции превышают .32 и не менее 10% объясняемой факторами дисперсии объясняется именно наложением факторов, то при отсутствии каких-либо серьезных причин для проведения ортогонального вращения можно пользоваться косоугольным вращением. К серьезным причинам относятся: желание сравнить различные факторные структуры; необходимость использовать ортогональные факторы в других аналитических процедурах; наличие теоретически обоснованной модели, базирующейся на ортогональном вращении.

Определившись с типом вращения (ортогональное или косоугольное), можно воспользоваться различными способами оценки соответствия решения, полученного после вращения, начальным экспериментальным данным. Наиболее простой способ — сравнить структуры взаимосвязей в матрице взаимосвязей с полученными после вращения факторами. Удалось ли в полученном после вращения решении воспроизвести эти структуры? Имеют ли сильно взаимосвязанные между собой переменные высокие факторные нагрузки по одним и тем же факторам? Насколько высоки факторные нагрузки у маркерных переменных по тем факторам, которые они должны предсказывать (соответствовать, определять) согласно гипотетической модели?

Другой критерий правильности выбранного вращения — простота структуры (*Thurstone*, 1961). Простая структура имеет не слишком сильно взаимосвязанные между собой факторы. Несколько переменных сильно взаимосвязаны с каждым фактором и только один фактор сильно взаимосвязан с каждой переменной. Другими словами, столбцы матрицы факторных нагрузок A, определяющие факторы по отношению к переменным, имеют несколько высоких и много низких значений, тогда как строки матрицы A, определяющие переменные по отношению к факторам, имеют по одному высокому значению. Строки с более чем одной высокой факторной нагрузкой соответствуют переменным, считающимся сложными в связи с тем, что они отражают влияние более чем одного фактора. Обычно следует избегать сложных переменных, поскольку они затрудняют интерпретацию факторов.

Адекватность вращения также можно оценить с помощью графиков, изображающих факторные оси и переменные в координатах этих осей (координата по факторной оси для каждой переменной равна факторной нагрузке этой переменной по фактору, соответствующему этой оси). При этом следует обращать внимание на степень удаленности точек-переменных от начала координат, на скопления точек и на характер расположения этих скоплений. (В англоязычных программах эти графики называются *«component plot»* и выполняются с помощью команды *«Plot»*.) Расстояние от точки-переменной до начала координат соответствует факторным нагрузкам: переменные, высоко коррелирующие с фактором, находятся далеко по оси этого фактора (имеют большую по абсолютной величине координату). В идеале каждая переменная должна находиться далеко от начала координат по оси какого-либо фактора и лежать близко к этой оси (иметь маленькие координаты по всем остальным осям). Скопление точек-переменных показывает, насколько четко определен фактор. Большинство исследователей предпочитает иметь следующую картинку: на конце каждой оси имеется скопление точек, близко лежащих к самой этой оси. Распределение точек вдоль всей оси указывает, что соответствующий фактор определен нечетко, в то время как скопление точек между различными осями указывает на наличие другого фактора или на необ-

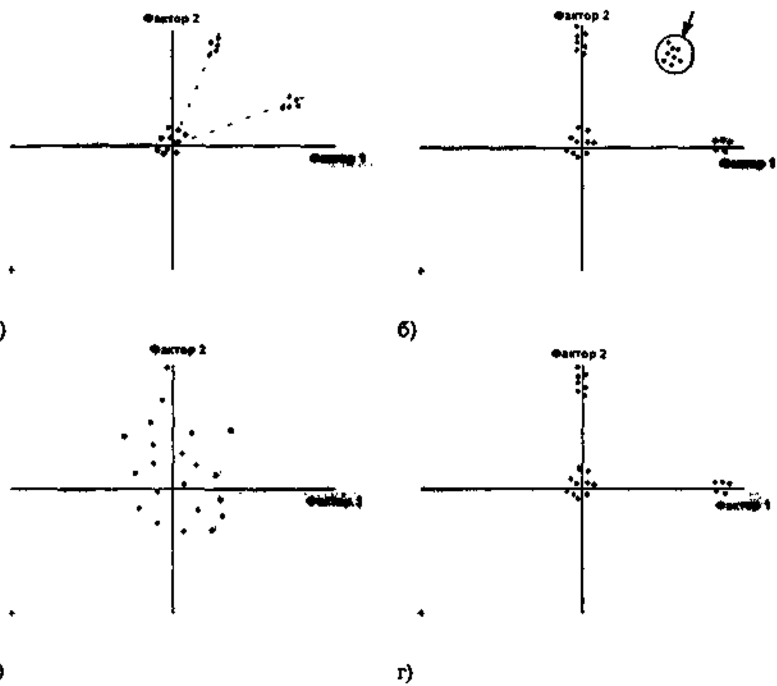

Рис. 3. Графическое представление факторных нагрузок переменных, полученных после ортогонального вращения, в плоскости двух факторов показывает: *а*) необходимость косоугольного вращения; *б*) наличие еще одного фактора; *в*) отсутствие структуры данных; *г*) наличие простой структуры

ходимость косоугольного вращения. Характер расположения скопления после ортогонального вращения может также указывать на необходимость косоугольного вращения. Если после ортогонального вращения образуются скопления точек, лежащие между осями факторов, и угол между скоплениями по отношению к началу координат не равен 90 градусам, тогда лучшее соответствие этим скоплениям обеспечивается неортогональными осями. Косоугольное вращение может выявить существенные корреляции между факторами. Некоторые из этих взаимосвязей изображены на рис. 3.

3.4. Значимость и внутренняя согласованность факторов

Значимость фактора оценивается его вкладом в общую дисперсию или ковариацию после вращения. Вклады фактора в общую дисперсию до и после вращения отличаются друг от друга, поскольку в процессе вращения происходит перераспределение дисперсий среди факторов. Простота установления вкладов факторов в общую дисперсию зависит от того, какое вращение было использовано — ортогональное или косоугольное.

После ортогонального вращения значимость фактора определяется по величине его сумм квадратов факторных нагрузок из матрицы факторного отображения A после вращения. Сумма квадратов факторных нагрузок, деленная на количество переменных, как раз и равна вкладу фактора в общую дисперсию. Если же сумму квадратов факторных нагрузок какого-то фактора разделить на сумму квадратов факторных нагрузок по всем факторам (что равно сумме общностей), то получается вклад фактора в общую ковариацию (эти расчеты приведены в табл. 4 в качестве примера).

Вклад фактора в общую дисперсию есть величина дисперсии исходных переменных, сжато (более экономно) выраженная фактором. (Вклад в общую дисперсию каждой переменной равен 1.) Доля дисперсии, объясняемой фактором, вычисляется как отношение дисперсии фактора к дисперсии переменных. Доля ковариации, объясняемой фактором, указывает на относительную значимость фактора по отношению к общей ковариации, определяющейся всеми факторами. Доля ковариации — это отношение дисперси фактора к дисперсии всего решения. Дисперсия решения составляет только часть дисперсии исходных переменных.

При косоугольном вращении вклады факторов в общую дисперсию и ковариацию могут быть получены описанными выше методами из матрицы факторного отображения A до вращения, однако они являются очень грубым приближением вкладов факторов в общие дисперсию и ковариацию после вращения. Из-за того, что факторы коррелируют, разброс, соответствующий наложениям, делится между факторами и трудно однозначно отнести ту или иную дисперсию к тому или иному фактору. После косоугольного вращения величина суммы квадратов факторных нагрузок по фактору также является лишь грубым приближением его значимости (факторы с большими суммами более значимы), однако в этом случае нельзя определить доли объясняемых каждым фактором дисперсий и ковариаций.

Внутренняя согласованность решения — *степень однозначности, с которой факторные оси заданы в пространстве переменных*, — определяется квадратичными множественными корреляциями (КМК) значений факторов, предсказанных на основе значений наблюдаемых переменных. Высокие КМК (скажем, 0.70 и выше) означают, что наблюдаемые переменные действительно детерминируют реальную дисперсию факторных значений. В случае низких КМК факторы слабо определяются наблюдаемыми переменными. Отрицательные КМК получаются, когда в модели оставлено слишком много факторов.

Программа *BMDP* распечатывает КМК как главную диагональ матрицы ковариаций факторных значений. *SPSS* распечатывает их как главную диагональ ковариационной матрицы для регрессионной оценки факторных значений. В *SAS* КМК распечатываются вместе с коэффициентами значений факторов при помощи опции *SCORE*.

3.5. Интерпретация факторов

Чтобы интерпретировать фактор, исследователь пытается найти глубинное измерение, объединяющее группу переменных, имеющих по нему высокие нагрузки. Как при ортогональном, так и при косоугольном вращении нагрузки содержатся в матрице нагрузок A, однако значения нагрузок для каждого из вращений различны. После ортогонального вращения величины в нагрузочной матрице представляют корреляции между переменными и факторами. Исследователь выбирает какой-то критерий определения значимости корреляций, собирает вместе переменные с нагрузками, превышающими установленный критерий, и пытается определить некий базисный признак (характеристику, концепт), их объединяющий.

После косоугольного вращения процесс аналогичен, однако интерпретация значений в матрице факторного отображения более сложна. Нагрузка представляет собой уже не корреляцию, а меру специфичной (индивидуальной) взаимосвязи между переменной и фактором (именно этой переменной именно с этим фактором без учета наложений). Поскольку факторы считаются коррелирующими, корреляции между переменными и факторами, приведенные в структурной матрице S, подвержены влиянию наложений факторов. Переменная может коррелировать с одним фактором через корреляцию с другим фактором, а не непосредственно. В значениях, стоящих в матрице факторного отображения, та часть дисперсии, которая получается из-за наложения факторов, отсутствует, однако это искажает принятую модель.

Фактически интерпретация матрицы факторного отображения, а не структурной, проводится по чисто практической причине: матрица факторного отображения проще и разница между высокими и низкими нагрузками в ней более очевидна.

Чем больше нагрузка, тем с большей уверенностью можно считать, что переменная определяет фактор. Комри и Ли (*Comrey, Lee*, 1992) предполагают, что нагрузки, превышающие 0.71 (объясняет 50% дисперсии), — превосходные, 0.63 (40% дисперсии) — очень хорошие, 0.55 (30%) — хорошие, 0.45 (20%) — удовлетворительные и 0.32 (объясняет 10% дисперсии) — слабые. Однако нагрузки, получающиеся в результате факторно-аналитической обработки, существенным образом зависят от того, каким способом была получена исходная матрица данных. Если обрабатывается матрица, заполненная одним испытуемым, проводящим многомерное шкалирование каких-либо объектов по каким-либо шкалам, то факторные нагрузки по значимым для того или иного фактора шкалам получаются существенно более высокими, чем в случае обработки матрицы, составленной как совокупность ответов различных испытуемых на единый список вопросов, когда каждый испытуемый (респондент) представляется одной строкой в общей матрице данных. Так, по первому (наиболее значимому) фактору, имеющему шкалы с самыми высокими нагрузками, граница отсечения величины нагрузок для интерпретации (т.е. значение, начиная с которого переменные, имеющие большую факторную нагрузку, включаются в группу для интерпретации), как правило, не ниже 0.75, а по второму считается приемлемым значение 0.5.

Вообще право выбора этой границы предоставляется исследователю и сам выбор напрямую связан с имеющимся у него опытом. Иногда в нагрузках факторов наблюдается некоторый пробел и его можно использовать в качестве границы отсечения.

Следует обратить внимание на то, что однородность выборки (например, все испытуемые имеют по переменным примерно одинаковые показатели, тогда как в целом по популяции диапазон показателей по тем же переменным гораздо шире) существенно влияет на величины факторных нагрузок. Поэтому если у вас есть какие-то соображения об однородности имеющейся выборки, то стоит понизить границу отсечения (и интерпретировать более низкие нагрузки). Таким образом, если выборка дает сходные значения по наблюдаемым переменным, для интерпретации факторов используется нижняя граница отсечения.

Процедура наименования фактора (присвоения ему названия или какого-то ярлыка) — процесс, требующий одновременно и творчества и научной обоснованности. Так, Руммель (*Rummel,* 1970) приводит многочисленные полезные советы по интерпретации и наименованию факторов. Лучшей интерпретации факторов способствует распечатка матрицы отсортированных (упорядоченных по степени убывания по каждому фактору) факторных нагрузок, где переменные сгруппированы по признаку их корреляции с определенными факторами. Процедура сортировки нагрузок предусмотрена во всех упомянутых программах. (По умолчанию в *BMDP4M*; *REODER* в *SAS*; *SORT* в *SPSS* и *SYSTAT*; *сортировка* в *STADIA*).

При интерпретации следует также учитывать вычисляемость, практическую значимость и сложность факторов. Удалось ли получить значимо близкое факторное решение через какой-то промежуток времени и/или на другой выборке? Имеет ли оно научную значимость и новизну с точки зрения понимания проблемы исследования? Каково место факторов в иерархии «объяснений» природы явлений? Достаточно ли они сложны (не примитивны), чтобы вызвать интерес ученых, и не слишком ли они сложны (трудно понимаемы и объяснимы) для интерпретации?

3.6. Факторные значения

Факторные значения, являющиеся оценками показателей испытуемого по каждому из факторов (как если бы они замерялись непосредственно), можно отнести к наиболее полезным с практической точки зрения результатам методов главных компонент и факторного анализа.

Поскольку обычно факторов меньше, чем наблюдаемых переменных, и значения факторов почти не коррелируют (если факторы ортогональны), последние могут быть очень полезны в других аналитических процедурах. Например, колинеарные корреляционные матрицы (т.е. вырожденные, чей ранг меньше количества строк или столбцов) при помощи метода главных компонент могут быть сведены к ортогональным компонентам. Или же можно применить факторный анализ и сократить количество зависимых переменных, а потом в качестве зависимых переменных для *MANOVA* использовать существенно меньшее количество факторов. Другой вариант — сократить большое количество независимых переменных до нескольких факторов и использовать их с целью прогнозирования зависимых переменных во множественной регрессии или принадлежности к группе в дискриминантном анализе. Небольшой набор устойчивых и хорошо интерпретируемых факторов расширяет возможности последующих аналитических процедур.

Процедуры оценки факторных значений расположены в диапазоне от «простейших» (но чаще всего адекватных) до «утонченных». Комри и Ли (*Comrey, Lee,* 1992) описывают несколько довольно простых процедур оценки значений факторов. Наиболее простая из них — суммирование для каждого фактора значений по переменным, имеющим высокие нагрузки по этому фактору. Если показатели по переменным сначала стандартизируются или переменные имеют приблизительно равные стандартные отклонения для начальных данных, то решение этой проблемы становится менее сложным. Для многих исследовательских целей вполне допустима такая быстрая и приблизительная оценка факторных значений. Однако переменные с большими стандартными отклонениями более значимо влияют на значения факторов, полученных при помощи этой процедуры.

Существует несколько статистических подходов к оценке факторных значений. Метод, описанный выше (в частности уравнения 16 и 17), представляет собой регрессионный подход к оценке факторных значений. Распределение значений по каждому фактору имеет нулевое среднее и единичное стандартное отклонение (после метода главных компонент) или же равное КМК между факторами и переменными (после факторного анализа). Однако этот регрессионный метод, равно как и другие, усиливает значение случайных взаимосвязей между переменными таким образом, что оценки факторных значений оказываются *смещенными*. Даже если факторы ортогональны, между их значениями часто наблюдается взаимосвязь. Регрессионный метод оценки факторных значений включен во все пакеты программ. Все они распечатывают компонентные/факторные значения и создают специальные файлы для дальнейшего анализа.

В *SPSS* реализовано еще два дополнительных метода для оценки факторных значений. Факторные значения, полученные методом Бартлетта, не смещены (т.е. систематически не бывают слишком близки или слишком далеки от «истинных» факторных значений). Они имеют те же средние и стандартные отклонения, как и при регрессионном методе, однако могут все же коррелировать между собой.

Подход Андерсона—Рубина (см.: *Gorsuch*, 1983) связан с вычислением факторных значений, не коррелирующих между собой даже при наличии корреляции самих факторов. Факторные значения имеют нулевое среднее и единичное стандартное отклонение. В случаях, когда нет специальных ограничений, лучше применять регрессионный подход, потому что он более доступен и удобен для понимания.

Следует отметить, что факторные значения, вычисляемые всеми описанными выше методами, нормально распределены с нулевым средним. Однако бывает необходимо рассмотреть выборку ответов респондентов или оценок объектов по первичным переменным как часть общей выборки, относительно которой строится гипотетическое предположение о нулевом среднем, и оценить именно смещение факторных значений по сравнению с нулем. В этом случае в уравнении (17), где значения факторов равны произведению стандартизированных значений по переменным и матрицы коэффициентов значений факторов, следует заменить матрицу Z, на матрицу нестандартизированных первичных данных D.

Другой вариант получения ненормализованных и нестандартизированных факторных значений — это умножение матрицы первичных данных D на матрицу факторных нагрузок A (*Митина*, 1994).

3.7. Сравнение факторных решений и выборок

Часто исследователю бывает необходимо определить, одинаковы или нет две факторные структуры, полученные на основе анализа двух различных (по опыту или по каким-то другим характеристикам) выборок. Для сравнения факторных решений используют матрицу факторного отображения, содержащую корреляции между переменными и факторами, или матрицу факторного отображения с учетом значимости корреляций между ними. Руммель (*Rummel*, 1970), Левайн (*Levine*, 1977) и Горсуч (*Gorsuch*, 1983) приводят хорошие обзоры методов сравнения факторных решений. Мы ограничимся способами, описанными у Хармана (1972).

Первый способ можно назвать качественным. Допустим, получены две факторные структуры — два набора факторов f и k с матрицами факторного отображения A и B соответственно. Задача состоит в нахождении и оценке такой матрицы T, что:

$$AT=B. \qquad (24)$$

Отношение между факторами задается с помощью этой же матрицы:

$$f=Tk. \qquad (25)$$

Используя это последнее соотношение, можно проанализировать вклад факторов из набора k в дисперсию любого из факторов набора f.

Чтобы найти матрицу T, нужно воспользоваться следующим соотношением: $(A'A)^{-1}(A'A)=E$ — единичная матрица. Тогда, умножив слева и справа части равенства (24) на $(A'A)^{-1}A'$, получим:

$$T=(A'A)^{-1}A'B. \qquad (26)$$

Другой способ связан с вычислением «коэффициента конгруэнтности» (Такер), «коэффициента несовпадения» (Барт) или «степени подобия факторов» (Рили и Нейгауз). Все коэффициенты аналогичны.

Перед задачей сопоставления факторов исследователь может оказаться в двух случаях. Первый: есть фиксированный набор параметров, измеренных на различных выборках, и нужно определить степень соответствия факторов. Второй: выборка фиксирована, а параметры могли быть различны.

Будем обозначать элементы матрицы факторных нагрузок ${}_k a_{ij}$, а элементы матрицы значений факторов ${}_k z_{lj}$, где k — номер сравниваемой факторной структуры, i изменяется от 1 до n (количество переменных), l – от 1 до N (количество респондентов), j — номер фактора. Для простоты будем считать, что нам надо сравнить две факторные структуры, поэтому k=1,2. Тогда коэффициент конгруэнтности для факторов p и q в первом случае можно записать так:

$$\varphi_{pq}=(\Sigma_i {}_1a_{ip}\times {}_2a_{iq})/\sqrt{(\Sigma_i {}_1a_{ip}{}^2)\times(\Sigma_i a_{iq}{}^2)},$$

а во втором:

$$\varphi_{pq}=(\Sigma_l {}_1z_{lp}\times {}_2z_{lq})/\sqrt{(\Sigma_l z_{lp}{}^2)\times(\Sigma_l z_{lq}{}^2)}.$$

Значение коэффициента конгруэнтности меняется от +1 при полном совпадении (или −1 при полном обратном совпадении) до нуля при полном отсутствии связи.

Если m_1 и m_2 — количества факторов в двух исследованиях, то можно вычислить m_1m_2 коэффициентов конгруэнтности, характеризующих степень подобия двух систем факторов. Будем говорить, что данный фактор из одного исследования конгруэнтен некоторому фактору из другого исследования, если им соответствует достаточно большое значение коэффициента φ. В частности там, где это не вызовет недоразумений, Рили и Нейгауз предлагают объединять факторы в пары таким образом, чтобы значение коэффициента φ для каждой пары было максимально возможным.

В настоящее время проверкой теорий и сравнением факторных решений, полученных на различных выборках, занимается относительно новая область многомерной статистики — *структурное моделирование* (латентно-структурный анализ).

3.8. Сравнение различных пакетов программ факторного анализа

Пакеты *STADIA, SPSS, BMDP, SAS, SYSTAT* имеют единую программу как для факторного анализа, так и для выделения главных компонент. В пакетах предусмотрен большой набор опций, позволяющих применять различные методы факторизации и вращения, что дает пользователю значительную свободу при проведении анализа.

SPSS — программа факторного анализа, наиболее часто употребляемая отечественными психологами. Нельзя сказать, что в *SPSS* полностью реализованы возможности всех остальных программ (в *SAS, SYSTAT* и *BMDP* есть специфические функции, нигде больше не реализованные), но практические возможности *SPSS* достаточно широки. Фирма, разрабатывающая это программное средство, ведет целенаправленную политику на освоение российского рынка, что также в значительной степени повышает конкурентоспособность данного пакета.

SPSS выполняет факторный анализ и анализ главных компонент на основе корреляционной матрицы, ковариационной матрицы или матрицы факторных нагрузок, предоставляя исследователю возможность осуществлять анализ высоких порядков (проводя факторизацию факторов, полученных на предыдущем шаге). Реализованы несколько методов факторизации и разнообразные варианты ортогонального вращения. Косоугольное вращение представлено прямым облимином — наиболее мощным из доступных на сегодняшний момент методов.

Сопутствующий одномерный анализ ограничен выдачей средних, стандартных отклонений и частотных распределений случаев для переменных, поэтому, если необходимо проанализировать одномерные посторонние значения, следует воспользоваться другой программой. Графический анализ многомерных посторонних значений также не предусмотрен. Однако для анализа факторизуемости корреляционной матрицы программа очень полезна.

Предусмотрена распечатка очень большого объема вычислений и различных параметров, полученных при факторизации и вращении. *SPSS* — единственная программа, выдающая детерминант корреляционной матрицы, знание которого необходимо для проверки сингулярности и коллинеарности. Есть возможность определить количество факторов с помощью анализа графика «следа» (для этого нужно указать дополнительную опцию).

Предусмотрены несколько вариантов процедуры оценивания факторных значений и вывод данных в файл (но не по умолчанию, требуется дополнительное указание). Вывод наблюдений, плохо укладывающихся в схему найденного факторного решения, не предусмотрен.

STADIA — единственная конкурентоспособная русскоязычная программа, разрабатываемая в сотрудничестве с учеными ф-та психологии МГУ и поэтому в значительной степени ориентированная на статистические методы, наиболее часто используемые отечественными психологами.

Исходные данные, предназначенные для факторного анализа в *STADIA*, должны быть оформлены либо в матрицу первичных данных D, либо в квадратную матрицу взаимосвязей (корреляционную), выбор осуществляется исследователем. По матрице первичных данных может быть построена матрица взаимосвязей — корреляционная или ковариационная.

В процессе вычислений распечатываются средние и дисперсии первичных переменных, а также матрица взаимосвязей. Кроме матрицы факторных нагрузок предусмотрено выделение только главных компонент, с указанием собственных значений, процента вклада каждой компоненты в общую дисперсию и процента накопленной дисперсии. По дополнительным запросам могут быть выданы: матрица собственных векторов; таблица факторных значений; графики проекций объектов в пространстве, задаваемом любой парой факторов; график «следа» собственных значений.

Меню выполняемых вращений достаточно полно. Перед вращением по подтверждению можно выполнить нормализацию Кайзера.

Создание новой версии *STADIA* для *Windows* существенно расширило возможности программы по обработке больших массивов данных.

BMDP — программа, изначально созданная для обработки биолого-медицинских данных (*BioMeDical computer Program*). В качестве входных данных используются: матрица первичных данных, корреляционная матрица, ковариационная матрица (возможна стандартизация — преобразование всех переменных к виду с нулевыми средними).

В программе реализованы несколько методов факторизации, ортогональное и косоугольное вращения. Выводится информация обо всех посторонних (экстремальных) значениях — переменные, одномерные и многомерные посторонние значения для наблюдений и для решений. Не определяются: детерминант корреляционной матрицы, ее факторизуемость и матрица преобразований (эти данные исследователи используют очень редко).

Широкий набор различных графиков дает возможность представить переменные в факторном пространстве (согласно матрицам факторных нагрузок) как до поворота, так и после него, а также разместить объекты (испытуемых, отдельные наблюдения) согласно матрице факторных значений. Переменные в матрице факторных нагрузок после поворота могут быть отсортированы таким образом, что позволят легко увидеть, какие переменные имеют высокие нагрузки по каждому фактору. При интерпретации гораздо легче работать именно с такой отсортированной таблицей. (Нагрузки, меньшие какой-то нижней границы, задаваемой самим исследователем, распечатываются как нулевые.) Возможна оценка адекватности факторизации и вращения на основе анализа остаточной корреляционной матрицы, а также оценка внутренней согласованности решения с помощью ковариационной матрицы факторных значений.

SAS — очень гибкая (по возможностям использования различных типов входных данных) и мощная (по набору реализованных опций, методов и предусмотренных для выдачи результатов) программа анализа факторов и главных компонент. Единственное слабое место — отсутствие анализа посторонних значений. В качестве начальных данных может использовать матрицу нагрузок после поворота. Анализирует матрицы частичных корреляций и ковариаций (с исключенными специфичными ковариациями). Реализовано несколько методов факторизации, ортогональное и косоугольное вращения. При выполнении конфирматорного анализа с косоугольным вращением в качестве критерия его оценки возможно использование целевой матрицы факторного отображения. Для определения количества выделяемых факторов можно использовать опции вычисления долей вкладов факторов в общую дисперсию и опции, предусматривающие возможность работы с общностями, большими единицы. В начальном наборе данных переменным можно приписывать различные веса и использовать значения этих весов при факторизации по обобщенному методу наименьших квадратов.

Факторные значения можно записать в файл данных, но отсутствуют параметры, которые можно вычислить с помощью факторных значений (например, позволяющие определять посторонние значения в факторном решении). Также отсутствует матрица ковариаций факторных значений, но распечатываются КМК факторов как зависимых переменных от независимых начальных наблюдаемых переменных. Есть две опции, отсутствующие в других аннотируемых программах: распечатка целочисленных матриц (каждый элемент матрицы умножается на 100 и округляется до ближайшего целого числа) и замена пропущенных значений очень маленькими.

SYSTAT — программа, в которой наряду с методом главных компонент реализованы методы главных факторов и наибольшего правдоподобия. Предусмотрены четыре наиболее распространенных варианта ортогонального вращения и косоугольное вращение. Наряду с матрицей первичных данных для анализа принимаются корреляционная и ковариационная матрицы.

SYSTAT выдает: след собственных значений, график переменных в пространстве факторов и (по дополнительному требованию) сортированную матрицу факторных нагрузок (что существенно помогает в процессе интерпретации). Также дополнительно можно вывести стандартизированные и не стандартизованные факторные значения, коэффициенты факторных значений и факторные нагрузки в файл данных. Факторные значения, полученные при выполнении методов главных факторов и наибольшего правдоподобия, не сохраняются. Предусмотрено сохранение остаточных значений (реальные значения минус предсказанные стандартизированные значения), суммы квадратов остатков и их вероятностных оценок.

Глава 4

ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА В ПСИХОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ*

В данной главе мы не ставим перед собой задачу объяснения и содержательного разбора того, почему были получены те или иные факторы и насколько оправдан выбор решения (заинтересованный читатель найдет соответствующую информацию в указываемых для каждого примера источниках). Мы только хотим продемонстрировать, как в конкретном психологическом исследовании осуществляется процедура интерпретации и оформления результатов при уже выбранном факторном решении.

4.1. Психологическое строение пола как характеристика личности ребенка

Данное исследование (*Колясникова М.В.* Психологическое строение пола как характеристика личности ребенка: Дис. ... канд. психол. наук. М., 1999) было проведено при изучении проблем гетерогенности/гомогенности пола у старших дошкольников.

140 детей в возрасте 6—7 лет оценивались по 57 шкалам, разнородым по используемым для измерения величинам. В качестве меры связи применялись коэффициенты корреляции, позволяющие одновременно опериро-

* Приводимые исследования выполнены при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (РФФИ).

вать с различными типами данных. Факторизация проводилась методом главных компонент, вращение 10 факторов осуществлялось методом варимакс (возможны и другие решения; данное решение было выбрано по содержательным соображениям). Приведем процедуру интерпретации выделенных факторов.

Список шкал

1. Пол (мальчики — 1, девочки — 0).

Степень агрессивности и особенности реагирования на фрустрацию. Использовался детский вариант рисуночного фрустрационного теста Розенцвейга. Все показатели особенностей реагирования на фрустрацию выражались в процентах по отношению к сумме реакций по всем карточкам. Показатели направленности специфицировались по их типу.

2. Доминирование непреодолимости помехи, т.е. акцентирование препятствия, вызывающего фрустрационную ситуацию.

3. Самозащита, т.е. направленность на защиту своего «Я».

4. Поиск конструктивного решения конфликтной ситуации.

5. Экстрапунитивные реакции на фрустрационную ситуацию.

6. Интропунитивные реакции на фрустрационную ситуацию.

7. Импунитивные реакции на фрустрационную ситуацию.

8. Показатель степени агрессивности (самозащита экстрапунитивного типа реакции) выражался также в процентах по отношению к общей сумме реакций.

Сила нервной системы (НС). Использовался опросник В.Э.Чудновского для родителей и воспитателей: 25 вопросов, охватывающих разные сферы жизнедеятельности ребенка — во время занятий, игр, медицинских процедур, при выполнении режимных моментов, в незнакомой или необычной обстановке. Ответы оценивались в баллах, соответствующих частоте проявления особенностей поведения, описываемых в пунктах 1—4. Показатель силы НС — сумма баллов, набранная ребенком по всем двадцати пяти пунктам схемы наблюдения.

9. Сила НС ребенка по оценке родителей.

10. Сила НС ребенка по оценке воспитателей.

Свойства темперамента (пластичность, эмоциональность, импульсивность, экстраверсия) изучались с помощью экспертной оценки по опроснику В.Л.Каткова для родителей и воспитателей. Показатели свойств темперамента — суммы баллов, полученные при оценке ответов на соответствующие вопросы. Экстраверсия в данном опроснике рассматривается как индикатор общительности (вслед за Айзенком), широты и интенсивности социальных контактов. Экстраверсия может рассматриваться и в другом аспекте: как ориентация на впечатления, в отличие от интраверсии как ориентации на представления (если следовать Юнгу). Для исследования экстра- и интроверсии использовались проективные методики: «Широта классификации» (по Кеттелу) и «Неструктурированные картинки».

11. Пластичность по оценке родителей.
12. Пластичность по оценке воспитателей.
13. Эмоциональность по оценке родителей.
14. Эмоциональность по оценке воспитателей.
15. Импульсивность по оценке родителей.
16. Импульсивность по оценке воспитателей.
17. Экстраверсия по оценке родителей.
18. Экстраверсия по оценке воспитателей.
19. Экстраверсия («широта классификации» по Кеттелу).
20. Экстраверсия («неструктурированные картинки»).

Физическая сила — свойство, изначально различающее мужской и женский организмы. Статический аспект физической силы определяется усилием, которое прилагает человек, удерживая на вытянутой руке определенный вес в течение определенного времени. Показатель статической силы — время (в секундах) удержания руки в горизонтальном положении (до отклонения от него). Динамический аспект физической силы определялся усилием, прилагаемым во время прыжка с места. Показатель динамической силы — длина прыжка (в сантиметрах).

21. Физическая сила статическая (удержание руки).
22. Физическая сила динамическая (прыжок с места).
23. *Независимость в поведении* (доминантность и стремление к лидерству) изучалась методом наблюдения. Схема наблюдения включала в себя восемь различных параметров анализа поведения детей в игре. Каждый параметр оценивался по 4-балльной шкале в зависимости от степени проявления. Показатель независимости поведения — сумма баллов, набранных ребенком по всем показателям.

24. *Познавательная активность* измерялась с помощью методики «Найди на двух картинка как можно больше отличий». Показатель познавательной активности — среднее время продуктивного поиска отличий (отношение общего времени поиска к количеству обнаруженных отличий).

25. ***Экспрессивные реакции*** — это внешнее проявление (выражение) эмоций и чувств (в мимике, пантомимике, голосе, жестах).

Степень экспрессивности (выразительности) оценивалась по 5-балльной шкале в ходе наблюдения за ребенком в процессе восприятия им литературных произведений.

Степень логичности мышления, связности и эмоциональности устного рассказа. Использовалась методика «Последовательность событий». Ребенку предъявлялись три сюжетные картинки в неправильной (перепутанной) последовательности. Проводилось семь замеров с разными сюжетами. Испытуемый должен был понять сюжет, выстроить адекватную последовательность событий и составить рассказ по картинкам. Рассказ ребенка фиксировался на диктофон, после чего анализировался по следующим показателям.

26. Логика расположения картинок. Показатель — количество ошибок (каждая ошибка — один балл). Ошибками считались случаи, когда ребенок: а) неправильно определял последовательность событий; б) рассказывал не в том логическом порядке, в котором сам разложил картинки; в) одну из картинок переворачивал относительно двух других.

27. Общее количество смысловых единиц в рассказе.

28. Количество единиц с эмоциональной окраской.

29. Коэффициент эмоциональности в рассказах.

30. Тенденция усматривать конфликтный финал (если такая тенденция в некоторой ситуации отмечалась, начислялся один балл; баллы по всем пробам суммировались).

31. Тенденция усматривать миролюбивый финал (аналогичная обработка).

Социальный статус в группе, а также в подгруппах детей своего и другого пола изучался с помощью социометрической методики (по Я.Л.Коломинскому). Для надежности статус определялся по ответам детей на три вопроса: кого бы ты пригласил на день рождения (эмоциональная значимость), выбрал бы себе в качестве помощников для выполнения поручения, задания (деловой), позвал бы играть в придуманную тобой интересную игру (игра). Для определения статуса внутри подгрупп своего и противоположного пола проводились две дополнительные серии социометрии. В рамках тех же трех сюжетов: мальчику предлагалось сделать выбор только среди девочек, а девочке — только среди мальчиков. В следующей серии ребенок аналогичным образом осуществлял выбор в подгруппе своего пола. Результаты эксперимента обрабатывались стандартным для социометрического исследования образом.

32. Социальный статус ребенка в группе (эмоциональная значимость).

33. Социальный статус в подгруппе своего пола (эмоциональная значимость).

34. Социальный статус в подгруппе другого пола (эмоциональная значимость).

35. Социальный статус в группе (деловой).

36. Социальный статус в подгруппе своего пола (деловой).

37. Социальный статус в подгруппе другого пола (деловой).

38. Социальный статус в группе (игра).

39. Социальный статус в подгруппе своего пола (игра).

40. Социальный статус в подгруппе другого пола (игра).

Показатели половой идентификации детей измерялись с помощью проективного метода. Помимо непосредственной цели выявления собственно адекватности половой идентификации данный метод использовался нами для оценки степени устойчивости представлений о половой принадлежности людей, а также для выявления категорий объектов половой идентификации ребенка.

41. Показатель категории объектов половой идентификации выражался с помощью 3-балльной шкалы. Каждая категория объектов обозначалась одним баллом.

42. Степень устойчивости представлений о половой принадлежности оценивалась по 10-балльной шкале: один балл начислялся за каждое правильное размещение людей в ряду, соответствующему их полу. Категориями объектов половой идентификации ребенка считаются сверстники, родители и другие значимые взрослые. Наличие всех трех категорий в самосознании ребенка свидетельствует о высокой степени идентификации.

43. Адекватность половой идентификации (0 — неадекватно, 1 — адекватно) — методика Данилюк.

Адекватность отнесения себя к полу и возрасту, умение определять и выстраивать возрастную последовательность. Использовалась методика поло-возрастной идентификации Н.Белопольской. Показатели выражались в баллах.

44. Адекватность половой идентификации (0 — неадекватно, 1 — адекватно).

45. Адекватность возрастной идентификации (0 — неадекватно, 1 — адекватно).

46. Выстраивание возрастной последовательности.

Особенности половой идентификации изучались с помощью рисунков детей. В эксперименте каждый ребенок рисовал себя, мальчика и девочку, мужчину и женщину. Все рисунки оценивались в баллах, баллы суммировались по следующим показателям.

47. Когнитивный компонент половой идентификации.

48. Аффективный компонент половой идентификации.

49. *Тенденция к единению с представителями другого пола* изучалась с помощью рисунков «Мальчик и девочка» и «Мужчина и женщина». Под «едниеннем» понималась склонность воспринимать представителей обоих полов как равных, близких друг другу, образующих общность. Выделены показатели данной тенденции, оцениваемые в баллах. Общее значение по данной шкале вычислялось как общая сумма.

Беседа с детьми использовалась с целью *выявления особенностей их половой идентификации*. Беседа состояла из блоков вопросов, ответы на которые подвергались количественной обработке в баллах.

50. Первый блок — представления ребенка об особенностях образа-Я девочки и мальчика, мужчины и женщины.

51. Второй блок — ориентированность ребенка на семейную жизнь в будущем и осознанная ориентация на представителей своего и противоположного пола.

52. Третий блок — отношение ребенка к интересам представителей своего и противоположного пола.

53. Четвертый блок — установки ребенка на фемининность и маскулинность в семье и среде сверстников.

54. *Степень консолидации* детей 6—7 лет со сверстниками *по полу* — возрастной показатель процесса половой идентификации: чем больше консолидируется ребенок со сверстниками своего пола, тем интенсивнее протекает процесс его идентификации со своим полом. Показатель степени консолидации определялся с помощью протоколов социометрии в процентах.

Для диагностики *особенностей социального пола* был разработан опросник в двух вариантах: первый — для родителей и воспитателей мальчиков, второй — для родителей и воспитателей девочек. Опросник содержит 20 особенностей поведения детей в сюжетно-ролевых играх и в сфере поло-ролевых предпочтений. Родители и воспитатели оценивали в баллах частоту предпочтений ребенком конкретных видов одежды, игр и игрушек. Баллы в сумме давали показатели.

55. Социальный пол по оценке родителей.

56. Социальный пол по оценке воспитателей.

57. Степень выраженности представлений о своем поле (рисунок себя).

После поворота варимакс была получена следующая матрица факторных нагрузок.

Matrix of Factor loadings after Varimax

	Factor1	Factor2	Factor3	Factor4	Factor5	Factor6	Factor7	Factor8	Factor9	Factor10
Loadings:	7.651	4.173	3.228	3.213	3.051	3.029	2.573	2.462	2.289	1.996
% Disp.:	13.4	7.3	5.7	5.6	5.4	5.3	4.5	4.3	4.0	3.5
1	-0.0449	0.0253	0.0415	-0.1043	-0.0036	0.7283	0.0552	0.0281	0.1917	0.1719
2	-0.0251	0.2506	0.1409	-0.0274	-0.1225	-0.2700	0.0376	0.0363	-0.7285	0.1245
3	-0.0786	-0.8465	-0.1060	0.0075	0.0797	0.1173	-0.0271	-0.0380	0.0790	-0.0347
4	0.0978	0.5843	-0.0553	-0.0051	0.0511	0.1283	-0.0172	-0.0115	0.6206	-0.0793
5	-0.0722	-0.9008	-0.0402	-0.0708	-0.0592	0.0282	-0.0190	0.0229	-0.1013	-0.0077
6	0.1543	0.6015	0.0484	-0.0147	-0.0635	0.1748	0.0380	-0.1212	0.4719	-0.1965
7	-0.0348	0.6989	0.0214	0.0784	0.1166	-0.1865	-0.0227	0.0686	-0.2762	0.1663
8	-0.1558	-0.9142	-0.0915	-0.0042	-0.0070	0.0976	-0.0829	-0.0395	0.0204	0.0721
9	0.2192	-0.0290	0.0029	-0.0853	0.0286	-0.0588	0.0566	-0.8658	0.0683	0.0546
10	0.1990	-0.0382	0.0158	-0.1067	0.0267	-0.0680	0.0625	-0.8712	0.0661	0.0577
11	0.0361	-0.0273	0.1014	-0.8641	0.0361	-0.0677	-0.0744	-0.0272	0.0262	0.1914
12	0.1154	0.0101	0.0701	-0.8249	0.0548	-0.1374	-0.1210	-0.0643	0.0313	0.1797
13	0.0590	0.1124	-0.1391	0.0110	-0.0177	0.0125	0.8479	-0.1008	0.0461	-0.1017
14	0.1498	0.0859	-0.1976	-0.0350	0.0065	0.0283	0.8463	-0.1199	0.0309	-0.1097
15	-0.1749	-0.2207	-0.1522	0.0069	0.0498	0.2908	0.3405	-0.0444	-0.1633	0.3524

16	-0.1459	-0.1109	0.0645	0.0156	-0.0514	0.1136	0.3370	0.0377	-0.0268	0.2814
17	0.0396	-0.1338	-0.1789	-0.7184	-0.0376	0.2322	0.1530	-0.1044	-0.1420	-0.1749
18	0.0817	-0.0577	-0.2478	-0.7224	-0.0075	0.2394	0.1748	-0.1573	-0.0987	-0.2825
19	0.0560	0.0549	-0.2992	-0.3665	0.0859	0.0218	-0.1110	-0.4268	0.0513	-0.1256
20	0.1707	0.0703	-0.1518	-0.3765	0.0509	0.0776	0.3239	-0.0105	0.1465	-0.5692
21	0.1186	0.0725	0.0629	-0.0661	-0.0545	0.2995	0.1046	-0.0844	-0.0210	0.3780
22	0.1194	-0.0062	0.0569	0.0716	0.0355	0.6083	-0.1395	-0.1067	-0.0864	0.0012
23	0.5922	-0.1221	0.0346	-0.1916	0.1772	-0.1159	-0.0559	-0.0509	-0.0183	-0.0606
24	-0.2592	-0.0232	0.0896	0.0887	-0.0036	0.0692	-0.0352	0.0024	0.0084	0.2203
25	0.2968	0.0058	-0.3455	-0.2830	0.0346	0.0148	0.3187	0.0104	-0.1893	-0.0850
26	-0.1610	-0.0058	-0.0602	0.0328	0.2636	-0.1821	0.4095	0.2168	-0.0109	0.0377
27	0.0290	-0.0514	-0.5777	-0.1449	0.2413	-0.2639	0.1931	0.0833	0.2739	0.2188
28	-0.0494	-0.0543	-0.7855	-0.0976	0.1783	-0.1474	0.1728	0.0458	0.1578	0.1373
29	-0.0490	-0.0902	-0.8744	-0.0062	-0.0618	-0.0423	0.1109	-0.0361	-0.0602	-0.0802
30	-0.2864	-0.0896	-0.0574	0.1276	0.1758	0.3457	0.1009	0.1919	0.0492	0.0277
31	0.0746	0.1843	-0.0685	-0.0343	-0.0755	-0.4273	0.2673	0.1796	0.0823	-0.1526
32	0.8817	0.0152	-0.0064	-0.1024	-0.0128	-0.0500	-0.0785	-0.0048	0.0476	0.0724
33	0.8759	0.0308	-0.0158	-0.1570	-0.1106	-0.0160	-0.0932	0.0289	0.0107	0.0485
34	0.8406	0.0229	0.0397	0.0010	0.0619	0.0291	0.0907	-0.2191	-0.0467	-0.0535
35	0.8684	0.1138	0.0312	0.0615	-0.0023	-0.0372	0.0165	-0.1068	0.1694	0.0498
36	0.8591	0.1054	0.0067	-0.0063	-0.0817	-0.0501	0.0563	0.0079	0.0685	0.0456

37	0.8063	0.0125	0.0683	0.0390	0.0636	0.0008	0.1016	-0.2409	-0.0677	-0.0352
38	0.8735	0.0999	-0.0107	-0.0471	-0.0222	-0.1012	-0.0052	-0.0013	0.0732	0.0583
39	0.8679	0.0447	-0.0196	-0.0285	-0.0721	-0.0377	-0.0093	0.0501	0.0901	0.0093
40	0.7595	0.0504	0.0631	0.0531	-0.0060	0.0294	0.0605	-0.2789	-0.0910	-0.0767
41	0.2909	0.0891	-0.1184	0.0639	-0.1814	-0.0091	-0.0224	0.1566	-0.0440	-0.0228
42	0.0561	-0.2265	0.2702	-0.1223	-0.4434	-0.2119	0.1101	-0.0841	0.1683	0.0975
43	0.0735	-0.2455	0.0244	-0.0513	-0.4921	-0.2453	0.0141	-0.0843	0.1919	0.1305
44	0.0908	-0.1718	0.0139	-0.1601	-0.5771	0.0073	0.1329	-0.0406	0.1897	0.1307
45	0.0132	0.1214	0.1315	-0.0917	0.1584	-0.1885	0.1023	-0.1058	0.2619	0.0506
46	0.0356	-0.0772	-0.0198	0.0428	-0.2941	0.1678	0.0812	-0.2073	0.3580	-0.1565
47	0.1900	0.1303	-0.1098	0.0757	0.0204	-0.6219	-0.1578	-0.0373	-0.0595	0.0779
48	0.1863	0.0712	-0.0439	0.0830	0.0005	-0.5995	-0.0725	-0.2195	-0.0929	-0.073
49	0.0395	0.0034	0.2055	-0.1759	-0.2245	-0.2065	0.1336	0.1996	-0.0047	0.3134
50	0.0789	-0.0642	0.0244	0.1477	-0.1013	-0.1892	-0.0092	-0.0554	0.4075	0.3432
51	0.0360	-0.1002	0.1537	0.0222	0.0325	-0.3020	0.2276	0.0086	0.1663	-0.3091
52	-0.0889	0.1294	0.0797	0.1325	-0.2367	-0.1667	-0.0505	0.2917	0.3858	-0.1364
53	-0.1169	-0.0427	0.2140	0.1511	-0.0500	-0.1681	0.1184	0.0521	0.0385	-0.6126
54	0.0602	0.2891	-0.1426	0.0354	-0.5295	0.0408	-0.1051	0.2102	-0.0270	-0.0079
55	-0.0612	0.0458	0.0409	0.1275	-0.8429	0.0549	-0.0634	0.0570	-0.1125	-0.0592
56	-0.0723	0.0674	0.0900	0.1319	-0.8261	-0.0178	-0.0978	0.0684	-0.1656	-0.0136
57	-0.0173	-0.0930	-0.8542	0.0190	-0.0607	0.0108	0.0302	-0.0678	-0.0875	-0.0501

Проинтерпретируем первые четыре фактора.

Первый фактор получился униполярный. Все высокие факторные нагрузки присутствуют со знаком плюс, а максимальная по модулю факторная нагрузка со знаком минус (−0.28 по шкале 30) в сравнении с высокими положительными факторными нагрузками не является значимой. (Напомним, что положительный или отрицательный знак факторной нагрузки не имеет оценочного смысла «плохой/хороший». Разделение на положительные и отрицательные нагрузки происходит в результате математической процедуры и имеет смысл противопоставления, противоположности, антонимичности.)

На основании полученного факторного решения первый фактор образовали следующие шкалы (пункты приводятся с указанием соответствующих факторных нагрузок):

32. Социальный статус в группе (эмоциональная значимость)	0.88
33 Социальный статус в подгруппе своего пола (эмоциональная значимость)	0.88
38. Социальный статус в группе (игра)	0.87
35. Социальный статус в группе (деловой)	0.87
39. Социальный статус в подгруппе своего пола (игра)	0.87
36. Социальный статус в подгруппе своего пола (деловой)	0.86
34. Социальный статус в подгруппе другого пола (эмоциональная значимость)	0.84
37. Социальный статус в подгруппе другого пола (деловой)	0.81
40. Социальный статус в подгруппе другого пола (игра)	0.76

Анализ полученных пунктов позволяет интерпретировать первый фактор как «Социальную значимость ребенка в группе». Отметим, что в этот фактор вошли все включенные в опросник пункты, касающиеся социального статуса.

Второй фактор — биполярный. Его положительный полюс был образован пунктами:

7. Импунитивные реакции на фрустрационную ситуацию	0.70
6. Интропунитивные реакции на фрустрационную ситуацию	0.60
4. Поиск конструктивного решения конфликтной ситуации	0.58

Отрицательный полюс:

8. Агрессивность во фрустрационной ситуации	−0.87
5. Экстрапунитивные реакции на фрустрационную ситуацию	−0.85
3. Самозащита	−0.79

Такое распределение пунктов позволяет интерпретировать второй фактор как «Стремление к снятию фрустрационной ситуации ↔ Агрессивное стремление к самозащите».

Третий фактор, проинтерпретированный как «Вербально-эмоциональная зрелость», был образован пунктами:

29. Коэффициент эмоциональности в рассказах	−0.87
57. Степень выраженности представлений о своем поле	−0.85
28. Количество единиц с эмоциональной окраской	−0.79
27. Общее количество смысловых единиц в рассказе	−0.58

Четвертый фактор, названный «Социальной контактностью», составили пункты:

11. Пластичность по оценке родителей	−0.86
12. Пластичность по оценке воспитателей	−0.82
18. Экстраверсия по оценке воспитателей	−0.72
17. Экстраверсия по оценке родителей	−0.72

Предлагаем читателю самостоятельно провести интерпретацию оставшихся факторов.

В заключение укажем, что при выборе оптимального (с содержательной точки зрения) решения исследователь должен не только оценить с помощью математических критериев, какое решение подходит лучше всего, но также провести интерпретацию нескольких различных решений.

4.2. Отношение к демократии и гражданской культуре у российских студентов

Данное исследование проводилось с целью изучения установок людей относительно степени и форм участия в политической жизни общества. В качестве методики использовался опросник, разработанный коллегами из стран Восточной Европы и США для проведения соответствующего кросс-культурного исследования (см.: *Reierabend I., Hofstetter C., Klicperova M., Synak B., Beres C.* Democracy, Civil Culture and Czech, Polish, Hungarian and American Students / Western Political Science Association, San-Francisco, 14—16.03.1996).

Были опрошены 57 студентов по 48 вопросам. Полученные данные были обработаны методом главных компонент с вращением 4 факторов методом варимакс. В качестве меры взаимосвязей брались коэффициенты корреляций. Решение о необходимости вращения именно такого количества факторов было принято на основании анализа «следа». Ниже приводятся: пункты опросника, матрица факторных нагрузок после поворота, график «следа», расположение респондентов в проекциях факторных осей согласно полученным ими ненормализованным факторным баллам (баллы респондента по каждому фактору являются координатами соответствующей этому респонденту точки в геометрическом пространстве, задаваемом факторными осями).

Пункты опросника

1. Зачем мне волноваться по поводу политики, если политические деятели мало беспокоятся о таких, как я?

2. О политике я знаю немного.

3. Я не принимаю участия в политике и считаю, что политические проблемы – забота государства и правительства.

4. Я принимаю активное участие в политической жизни, особенно если это касается меня лично.

5. Если ты занимаешься политикой, то становишься лишь частью нечестной системы и помогаешь коррумпированным политикам.

6. Мне нет смысла интересоваться политическими проблемами, так как политика мало влияет на мою жизнь.

7. Людям следует думать о своих собственных делах, не мешая государству и правительству делать свою работу.

8. Чем больше людей занимает активную позицию в вопросах политики и предвыборных кампаниях, тем лучше.

9. Я ненавижу политику, потому что в людях и в обществе она выявляет худшее.

10. Я не могу понять, что притягивает людей к политике.

11. Я ненавижу тех политиков, деятельность которых создает проблемы для государства.

12. Мне нравится участвовать в политической жизни, особенно в мирных политических демонстрациях за то, во что я верю.

13. Политические партии – это худшая черта государства.

14. Я не знаю, что все политические партии собираются делать.

15. Политические партии не способны выполнять какую-либо *разумную функцию в государстве.*

16. Политические партии, выражающие нужды людей, необходимы для развития государства и правительства.

17. Истинный гражданин должен игнорировать все политические партии, так как честных партий вообще не существует.

18. Политические партии и общественные организации не имеют для меня никакого значения.

19. Деятельность политических партий наносит вред нормальному развитию государства и правительства.

20. Истинный гражданин вступает в политические партии и участвует в общественных организациях.

21. Я ненавижу политические партии и их сторонников; они просто невыносимы.

22. Я не понимаю людей, которые говорят, что любят эту партию или ненавидят ту.

23. Истинный патриот своей страны не связывает себя членством в политических партиях.

24. Мне нравится поддерживаемая мной политическая партия, где я нахожу своих единомышленников.

25. Законы и политика государства и правительства не имеют ничего общего с нуждами и желаниями людей.

26. Я действительно не знаю, чем занимаются правительство и государство.

27. Обязанность государства и правительства – принимать решения в интересах народа, обязанность граждан – безоговорочно следовать этим решениям.

28. Законы и политика государства и правительства должны быть результатом участия народа в политической жизни.

29. Политика нашего государства и правительства — это грязная игра, противоречащая здравому смыслу.

30. Мне тяжело определить, является ли хороший или плохой закон таковым на самом деле.

31. Хорошее государство и правительство уверены в своих гражданах и в соблюдении ими законов.

32. Необходимо подчиняться законам, принятым при поддержке большинства людей.

33. Тот, кто уважает законы и верит в иих, – наивный человек.

34. Каким образом государство и правительство могут помочь людям? Помочь тебе могут только любящие тебя семья и друзья.

35. Любая власть, которая проводит в жизиь законы и строит политику государства и правительства, должна быть уважаема.

36. Законы и направления политики, выработанные в ходе всенародного обсуждения, заслуживают уважения.

37. Государство и правительство не оказывают поддержки людям, подобным мие.

38. Я не понимаю, как функционирует политическая система.

39. Общество функционирует наилучшим образом, когда люди подчиняются закоиам безоговорочно.

40. Выбранное в ходе свободных выборов правительство наиболее эффективно.

41. Ты, видимо, сошел с ума, если начал доверять государству, правительству и политикам.

42. Я не имею ясиого представления о том, как оценить, хороши или плохи режим и правительство.

43. Истинные граждане не должны пытаться изменить государство.

44. Лучшие государство и правительство те, в действиях которых реализуется воля иарода.

45. Всегда, когда я думаю о государстве и правительстве, я либо злюсь, либо впадаю в депрессию.

46. По отиошеиию к государству и правительству я не испытываю ни положительных, ни отрицательных чувств.

47. Люди должны уважать государство и правительство иезависимо от того, что оио делает.

48. Гражданин может гордиться своим государством и правительством в той мере, насколько они сопричастны народу.

Матрица факторных нагрузок после поворота

	Factor1	Factor2	Factor3	Factor4
Нагрузки:	5.536	5.366	4.673	3.774
% дисп.:	11.5	11.2	9.7	7.9
1	-0.5784	0.2144	-0.0374	0.2029
2	-0.7341	0.1925	-0.0689	0.0579
3	-0.4931	0.3936	-0.1177	-0.1199
4	0.1433	-0.2623	-0.2329	-0.0806
5	-0.1012	0.6817	0.0317	-0.1081
6	-0.5561	0.2987	-0.4086	0.2124
7	-0.5291	0.1158	-0.5450	-0.1605
8	0.2925	-0.1183	0.0121	-0.5208
9	-0.2761	0.4503	-0.2764	-0.1057
10	-0.5997	-0.0301	-0.1508	-0.0740
11	0.3599	0.3257	-0.3059	-0.0158
12	0.3200	0.0966	-0.5599	-0.2442
13	-0.2289	0.2832	-0.4603	0.1220
14	-0.5435	0.0971	-0.1173	0.2064
15	-0.0869	0.2124	-0.4485	0.3644
16	-0.0578	0.2692	0.1986	-0.6133
17	-0.0423	0.5581	-0.2887	0.2198

Координаты респондентов в факторном пространстве

	Factor1	Factor2	Factor3	Factor4
*	1.8022	-2.7502	1.5865	-2.6280
*	-1.3091	-1.6011	2.2850	-0.8084
*	-1.2108	-3.1533	1.9044	-3.4182
*	-1.5710	0.6473	0.3169	-4.0903
*	-1.5037	2.0033	-3.9212	-4.0856
*	-1.1558	1.2435	-1.3623	-1.1768
*	-0.2771	2.7192	2.0190	-1.0744
*	-1.8917	1.5332	-0.1477	-0.7710
*	1.0969	1.1167	-2.5118	-1.6779
*	-1.9371	1.4047	-1.2554	-1.6721
*	0.7367	1.1406	2.6341	-4.6713
*	1.4688	0.1640	2.8749	-1.7716
*	1.9693	1.6020	3.1133	-3.5868
*	-2.2146	1.5526	3.7166	-3.6162
*	2.3287	0.8957	3.6156	-4.4524
*	-1.9257	1.1756	0.5597	-2.3963
*	1.4497	-1.2324	-1.2317	-2.8213
*	-0.0875	2.5864	2.4150	-1.1956

18	-0.2204	0.3705	-0.5362	0.0836	*	1.3624	-0.7336	-1.3913	-0.5369
19	-0.3225	0.3036	-0.6379	-0.0441	*	1.4107	1.1092	0.6008	-4.1076
20	0.1345	0.0171	-0.4067	-0.2903	*	2.9505	2.2185	1.1993	-3.1459
21	-0.0168	0.4581	-0.5011	0.1435	*	-0.9918	-1.3765	3.4559	-2.3974
22	-0.4481	-0.0362	-0.0431	0.0243	*	0.4548	-1.5663	0.3267	-3.2138
23	-0.2025	0.1836	-0.4086	0.0564	*	2.0526	-1.0164	2.0333	-1.3305
24	0.0575	-0.1589	-0.5331	-0.4161	*	0.7341	1.0289	3.3289	-3.1208
25	-0.0407	0.5993	-0.0926	0.1372	*	-2.4511	-1.0430	1.8162	-1.7861
26	-0.6688	0.1429	-0.2789	0.0504	*	3.0573	-4.0614	-0.2300	-1.2147
27	-0.0293	0.0721	-0.3028	-0.3904	*	-0.9876	-2.2333	0.6469	-0.8864
28	0.2371	0.0050	0.1832	-0.3753	*	-1.2009	-0.1857	2.1780	-1.6738
29	-0.0384	0.8085	0.0602	0.0306	*	3.1489	3.7694	2.9733	0.9723
30	-0.6301	-0.0442	-0.0241	-0.0640	*	2.5888	1.1572	1.6963	-2.7069
31	0.0962	0.0025	0.0419	-0.3824	*	-0.1269	3.5033	2.0040	-4.2858
32	-0.1159	0.0421	-0.2407	-0.5680	*	0.5569	3.0851	-0.4338	-2.8188
33	-0.1662	0.3870	-0.4145	0.1087	*	2.6152	1.4375	1.5946	-3.4463
34	-0.2252	0.5682	0.0542	-0.0259	*	2.6326	2.2956	2.6635	-1.6049
35	-0.2512	-0.1507	-0.3248	-0.2056	*	3.1585	0.8348	1.6074	-1.8695
36	-0.0795	-0.2026	-0.0141	-0.5218	*	-4.6712	0.9433	3.5363	-3.9823
37	-0.1925	0.6839	-0.0505	-0.0483	*	-2.4357	0.2651	2.3379	-2.7883
38	-0.7274	0.1767	0.1567	-0.0628	*	-3.2858	1.9632	4.9325	-2.9660

39	-0.0686	-0.1063	0.0162	-0.4826
40	-0.0766	0.0559	-0.1591	-0.4025
41	-0.0466	0.7715	-0.1340	0.0082
42	-0.6335	0.1614	-0.1608	-0.1520
43	-0.3844	-0.0224	-0.5919	0.2086
44	-0.0631	-0.0074	-0.0372	-0.7222
45	0.1202	0.5937	-0.1053	-0.1597
46	-0.1277	0.0259	0.0164	-0.1343
47	-0.1213	-0.2557	-0.6752	0.0862
48	0.1319	0.0872	0.2053	-0.4657

Матрица корреляции факторов

1	1.000000	-0.001582	0.008162	-0.410566
2	-0.001582	1.000000	0.102416	0.407321
3	0.008162	0.102416	1.000000	-0.391755
4	-0.410566	0.407321	-0.391755	1.000000

*	2.3872	1.4492	2.9061	-4.2062
*	-2.1842	0.7802	1.1277	-1.3067
*	1.9530	0.0913	1.3239	-2.6822
*	0.4738	-1.4823	0.6352	-3.9023
*	0.7779	1.0757	-2.2159	-2.1600
*	-0.6310	1.3478	-2.0410	-1.0763
*	-1.5437	-0.9516	1.9692	-0.3108
*	-0.7577	-1.2243	3.9095	2.0050
*	-1.0316	-0.5910	0.7807	0.4066
*	-1.1817	-2.5919	2.5920	-4.1481
*	1.4084	-3.4597	0.5611	-3.0745
*	-1.3942	3.0873	2.7355	1.6960
*	0.8834	-1.2740	2.3739	-0.4161
*	2.6016	2.3398	3.0308	-1.9110
*	1.9654	1.9419	2.1013	1.5912
*	-2.4846	1.6946	1.1863	-3.4599
*	-1.3354	2.5008	-0.2080	-3.5947
*	2.3789	-0.6838	1.8394	-3.5064

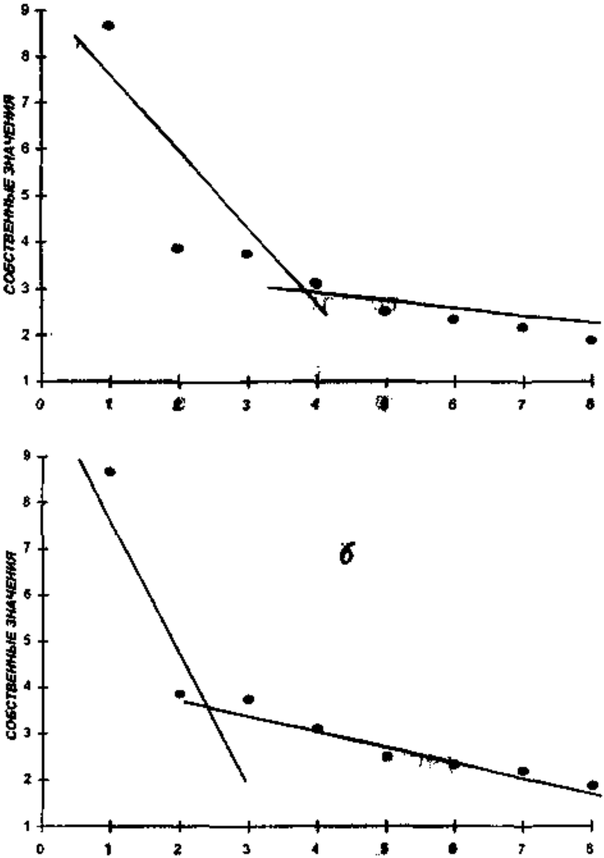

Рис. 4. Диаграмма следа: *а)* четыре значимых фактора; *б)* два значимых фактора

Конечно же, определение количества факторов на основании анализа «следа» — процедура достаточно условная. С одинаковым успехом можно считать, что в данном случае имеется четыре значимых фактора (рис. 4*а*) или два (рис. 4*б*). Наилучшее решение выбирается только на основе сопоставления содержательных интерпретаций, полученных в обоих случаях.

Все полученные факторы в обоих решениях — униполярные, т.е. задающие их пункты опросника группируются только на одном полюсе. Это бывает в тех ситуациях, когда в списке вопросов не предусмотрены антонимичные вопросы.

Звездочками (рис. 5, 6, 7) отмечены позиции респондентов. Рядом с полюсами факторов указаны шкалы, имеющие максимальные нагрузки по данному фактору с соответствующим знаком: шкалы, имеющие положительные факторные нагрузки, группируются на положительном полюсе соответствующей оси, т.е. либо справа, либо вверху; шкалы, имеющие отрицательные факторные нагрузки, группируются на отрицательном полюсе — слева или внизу. Такое графическое (наглядное) представление облегчает процесс интерпретации результатов.

Семантический анализ пунктов опросника, задающих факторы, позволяет их интерпретировать следующим образом.

Четырехфакторное решение: фактор 1 — *Пассивная аполитичность*; фактор 2 — *Пассивная критика политической жизни*; фактор 3 — *Поддержка политики сильной руки*; фактор 4 — *Поддержка демократической политики*.

Двухфакторное решение: фактор 1 — *Пассивная аполитичность*; фактор 2 — *Поддержка демократической политики*.

Таким образом, в пользу четырехфакторного решения говорит наличие еще двух содержательно интерпретируемых факторов.

Вычисление нестандартизированных факторных баллов для каждого респондента выявляет наличие определенных тенденций в распределении выборки, тогда как «облако» стандартизированных факторных баллов по каждому фактору имеет центр тяжести в нулевой точке. На рис. 6 (в плоскости третьего и четвертого факторов) особенно заметно смещение «облака» распределения респондентов в направлении полюса, противоположного поддержке политики сильной руки, и в сторону полюса поддержки демокра-

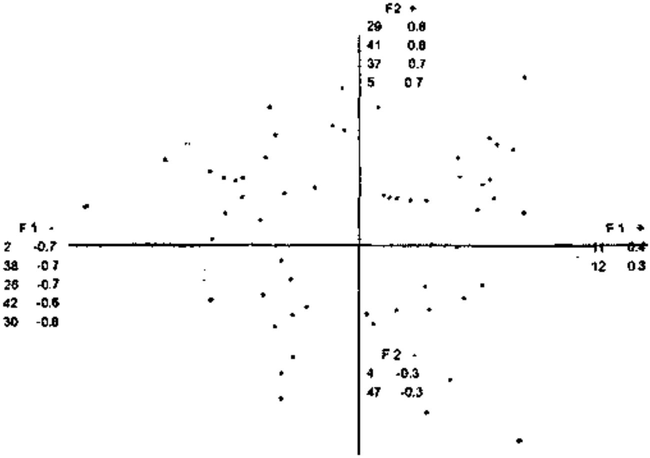

Рис. 5. Распределение позиций респондентов на плоскости факторного пространства, задаваемого осями первого и второго факторов (четырехфакторное решение)

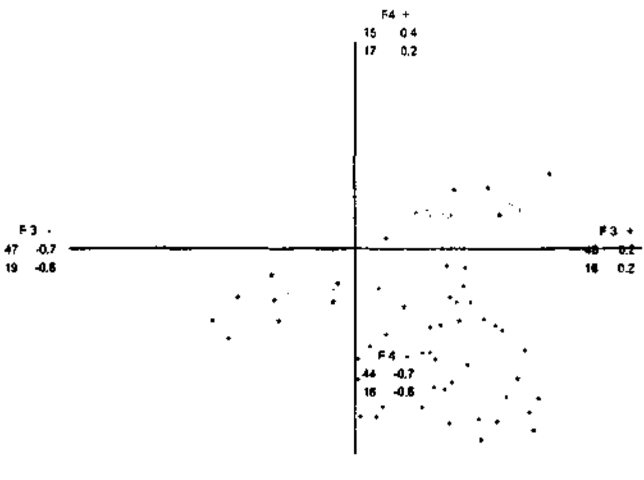

Рис. 6. Распределение позиций респондентов на плоскости факторного пространства, задаваемого осями третьего и четвертого факторов (четырехфакторное решение)

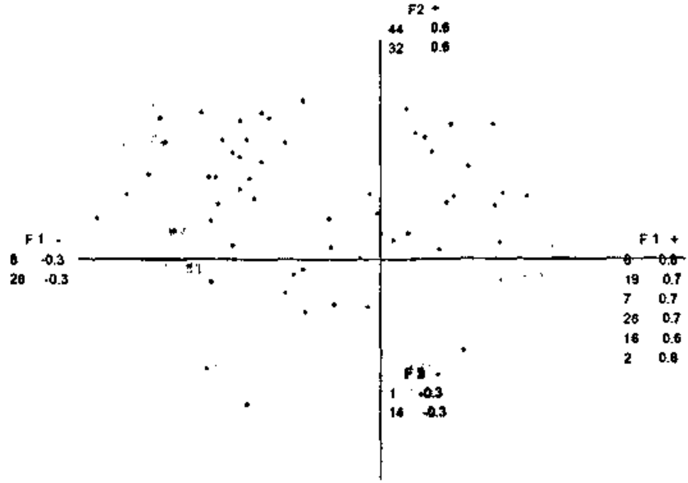

Рис. 7. Распределение позиций респондентов на плоскости факторного пространства, задаваемого осями первого и второго факторов (двухфакторное решение)

тической политики. Учитывая, что нашими респондентами были студенты московских вузов, можно сделать предварительный (с учетом малого объема выборки) вывод о наличии у них демократических настроений.

4.3. "Сказочный" семантический дифференциал

Данный пример иллюстрирует применение методики «Сказка», разработанной под руководством В.Ф.Петренко для определения уровня развития детей 5—11 лет (подробнее о психологических основах методики см.: *Петренко*, 1997, с. 119—124; компьютерный вариант методики создан в Лаборатории психосемантики и общения ф-та психологии МГУ).

Суть методики в том, что ребенку в диалоговом режиме предлагается оценить (ответив на различные вопросы) черты характера и личностные особенности хорошо известных ему сказочных персонажей по трехбалльной шкале: «Да» (1), «Сомневаюсь» (0), «Нет» (−1). После этого полученная индивидуальная матрица испытуемого-ребенка подвергается факториому анализу с вращением варимакс.

Анализ факторной структуры и ее содержания позволяет делать выводы о структуре и содержании сознания ребенка, об уровне сформированности и усвоенности общественных стереотипов и норм поведения. Для этого индивидуальная матрица ребенка сравнивается с матрицей, которая была получена в ходе подготовки методики как усредненная матрица ответов взрослых респондентов (преимущественно учителей начальных классов) на те же самые вопросы о тех же самых сказочных персонажах. Предлагаем читателю рассмотреть процедуру факторизации именно этой «взрослой» матрицы. Процедура факторного анализа была выполнена методом главных компонент, далее 3 фактора подверглись вращению вариакс.

Усредненная матрица первичных данных

	Айболит	Буратино	Кот в сапогах	Снежная королева	Карабас-Барабас	Карлсон	Мальвина	Пьеро
Верный друг	1.00	0.80	0.87	-0.98	-0.80	0.47	0.10	0.93
Смелый	0.93	0.87	0.87	0.30	-0.13	0.20	-0.33	-0.13
Красивый	-0.27	-0.33	0.53	1.00	-0.80	-0.20	0.93	0.47
Добрый	1.00	0.80	0.73	-1.00	-1.00	0.60	0.21	0.87
Хитрый	-0.87	0.40	0.90	0.60	0.50	0.50	-0.93	-0.93
Жадный	-1.00	-0.80	-0.67	0.98	1.00	0.53	-0.87	-1.00
Плакса	-1.00	-0.95	-0.95	-0.67	0.00	-0.93	0.30	0.90
Умный	1.00	0.43	0.87	0.10	-0.27	0.58	0.44	0.37
Ябеда	-1.00	-0.91	-1.00	-1.00	0.78	-0.67	0.87	-0.83
Воспитанный	0.93	-0.70	0.93	0.00	-0.90	-0.80	1.00	0.87
Хвастун	-1.00	0.77	0.27	0.33	0.60	1.00	0.00	-1.00
Умелый	1.00	0.10	0.93	0.03	-0.47	0.20	0.40	0.23
Драчун	-0.98	0.73	0.53	0.70	1.00	0.20	-1.00	-0.98
Шалун	-0.97	1.00	0.27	-0.87	0.00	1.00	-1.00	-0.80
Веселый	0.63	1.00	0.87	-1.00	-0.93	1.00	0.01	-1.00

Матрица факторных нагрузок после варимакс-вращения

	Фактор1	Фактор2	Фактор3
Нагрузки:	5.288	4.106	3.563
% дисп.:	35.3	27.4	23.8
Верный друг	-0.8973	0.3583	-0.1138
Смелый	-0.1779	0.8940	-0.1406
Красивый	0.0875	0.0867	0.7890
Добрый	-0.9071	0.3505	-0.1103
Хитрый	0.6935	0.4803	-0.4387
Жадный	0.8971	-0.1248	-0.2077
Плакса	-0.1538	-0.8638	0.3203
Умный	-0.6980	0.6594	0.1540
Ябеда	0.1342	-0.7686	-0.1230
Воспитанный	-0.5316	0.0968	0.7953
Хвастун	0.5799	0.1517	-0.6740
Умелый	-0.6179	0.6197	0.3935
Драчун	0.7690	0.2711	-0.5037
Шалун	0.0790	0.3336	-0.8925
Веселый	-0.4557	0.6547	-0.4764

Положение объектов в факторном пространстве

Айболит	-1.1231	0.6770	0.5548
Буратино	-0.2847	0.5253	-1.3405
Кот в сапогах	-0.0530	1.4357	0.2611
Снежная королева	1.8279	0.4803	1.2388
Карабас-Барабас	1.0837	-1.3035	-0.9021
Карлсон	0.0050	0.2806	-1.2198
Мальвина	-0.5289	-1.0633	0.7025
Пьеро	-0.9269	-1.0322	0.7052

По фактору 1 значимые нагрузки на полюсе со знаком «+» имеют переменные: *Жадный* (0.90), *Драчун* (0.77), *Хитрый* (0.69). Максимальные факторные баллы на этом полюсе получили: *Снежная королева* (1.8279) и *Карабас-Барабас* (1.0837).

На полюсе со знаком «−» значимые нагрузки имеют переменные: *Добрый* (−0.91), *Верный друг* (−0.90), *Умный* (−0.70), *Умелый* (−0.62). На этом полюсе максимальный (по абсолютной величине) факторный балл у *Айболита* (−1.1231).

Исходя из содержания шкал, составивших оба полюса первого фактора, и объектов, занимающих полярные позиции, он был интерпретирован как фактор *Оценки*: «Положительные ↔ Отрицательные персонажи».

По фактору 2 значимые нагрузки на полюсе со знаком «+» имеют переменные: *Смелый* (0.89), *Умный* (0.66), *Веселый* (0.65), *Умелый* (0.62). Максимальные факторные баллы на этом полюсе получили: *Айболит* (0.6770) и *Кот в сапогах* (1.4357).

На полюсе со знаком «−» значимые нагрузки имеют переменные: *Плакса* (−0.86) и *Ябеда* (−0.77). На этом полюсе максимальные по абсолютной величине факторные баллы имеют: *Карабас-Барабас* (−1.3035), *Мальвина* (−1.0633) и *Пьеро* (−1.0322).

Исходя из содержания шкал, составивших оба полюса второго фактора, и объектов, занимающих полярные позиции, он был интерпретирован как «Сила личности (эго)».

По фактору 3 значимые нагрузки на полюсе со знаком «+» имеют переменные: *Воспитанный* (0.80) и *Красивый* (0.79). Максимальный факторный балл на этом полюсе получили: *Снежная королева* (1.2388), *Мальвина* (0.7025) и *Пьеро* (0.7052).

На полюсе со знаком «−» значимые нагрузки имеют переменные: *Шалун* (−0.89) и *Хвастун* (−0.67). Максимальные по абсолютной величине факторные баллы получили:

Буратино (−1.3405), *Карабас-Барабас* (−0.9021) и *Карлсон* (−1.2198).

Исходя из содержания шкал, составивших оба полюса третьего фактора, и объектов, занимающих полярные позиции, он был интерпретирован как «Социальная нормативность ↔ Акцентуированность».

В качестве упражнения предлагаем читателю самостоятельно заполнить ту же матрицу, высказав свое собственное мнение о наличии или отсутствии у каждого из восьми сказочных персонажей указанных личностных характеристик. Обработав получившуюся матрицу с помощью факторного анализа, читатель может сравнить содержание своей факторной структуры с усредненной структурой, проанализированной выше.

Приложение

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Векторы

Все понятия и определения из линейной алгебры введем сначала для знакомых представлений о векторах на плоскости — двумерных векторах, исходящих из начала координат (0, 0). Будем записывать такой вектор в виде столбца из двух чисел — его координат:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Эти векторы умножаются на число и складываются между собой покомпонентно, т.е. вектор $c\boldsymbol{v}$ и сумма векторов $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ записываются в виде:

$$c\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} cx \\ cy \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}.$$

Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ обозначается $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ и вычисляется как $x_1 y_1 + x_2 y_2$. Длина вектора $\boldsymbol{v}$ обозначается $\|\boldsymbol{v}\|$ и вычисляется как $\|\boldsymbol{v}\|^2 = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$. Скалярное произведение имеет еще и наглядный геометрический смысл: $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \|\boldsymbol{v}_1\| \, \|\boldsymbol{v}_2\| \cos \varphi$, φ — угол между векторами. Если $\|\boldsymbol{v}_2\| = 1$, то скалярное произведение — это проекция вектора $\boldsymbol{v}_1$ на прямую, задаваемую вектором $\boldsymbol{v}_2$.

Упражнения

1. Даны два вектора v и w: $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Найти вектор $5v - 4w$. Найти c, такое, что $\|cv\|=1$. Найти проекцию вектора w на прямую, задаваемую вектором v.
2. Найти вектор v, проекция которого на ось $0Y$ равна 6, а скалярное произведение $(v,w) = 10$, где $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.
3. Даны два вектора v и w единичной длины, $(v,w) = 0{,}3$. Найти $\|3v + 4w\|$.

1.2. Линейные преобразования

Каждый вектор v можно перевести в некоторый другой вектор — его образ, который запишем в виде Av. Буква A обозначает преобразование всех векторов плоскости, т.е., правило соответствия каждого вектора v и его «образа» Av. Мы будем использовать лишь определенный вид преобразований — линейные преобразования. Линейными называются преобразования, которые обладают такими свойствами: $A(cv) = c(Av)$, $A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2$.

Рассмотрим примеры различных преобразований.

1. $Av = w \neq 0$, такое преобразование переводит все векторы плоскости в один и тот же вектор w, а значит $w = A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = 2w$.

Но равенство $w = 2w$ выполняется лишь для $w = 0$, и преобразование A не является линейным.

2. Преобразование, переводящее вектор $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ в вектор $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$, называется проекцией вектора на ось x-ов. Преобразование, переводящее $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ в $\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$, называется проекцией на ось y-ов. Легко доказать, что такие преобразования линейны. (*Докажите!*)

Линейные преобразования удобно задавать, указывая образы Ae_1 и Ae_2 единичных координатных векторов $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, потому что любой вектор v можно представить следующим образом: $v = xe_1 + ye_2$. В результате получим $Av = xAe_1 + yAe_2$.

3. Преобразование называется поворотом, если переводит каждый вектор v в вектор Av, повернутый на один и тот же угол φ.

Вектор $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ перейдет в $\begin{bmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{bmatrix}$, вектор $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ — в $\begin{bmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{bmatrix}$.

Такое преобразование тоже является линейным. (*Попробуйте доказать*).

Обозначив вектор Ae_1 в виде столбца $\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}$, а вектор Ae_2 — в виде столбца $\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}$, запишем оба в одну таблицу (матрицу) $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$. Таким образом получим наглядное правило нахождения Av для произвольного вектора $v = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ — правило умножения матрицы $A = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ на вектор-столбец $v = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$:

$$Av = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ax+by\\cx+dy\end{bmatrix}$$

Поэлементно умножая первую строчку матрицы A на столбец $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, вычислим $(ax+by)$ — первую координату вектора Av; повторив то же самое со второй строчкой, получим $(cx+dy)$ — вторую координату вектора Av.

Упражнения

Записать матрицу линейного преобразования:

а) поворота всех векторов плоскости на 90^0 против часовой стрелки;

б) поворота всех векторов плоскости на 45^0 по часовой стрелке;

в) поворота всех векторов плоскости на 90^0 по часовой стрелке;

г) тождественного преобразования $Av = v$ для всех векторов плоскости;

д) преобразования, переводящего e_1 в $3e_2$, а e_2 в $2e_1$;

е) преобразования, переводящего вектор $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ в $\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$, а вектор $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ в $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

ж) преобразования, переводящего векторы e_1 и e_2 в $2e_1$ и $2e_2$

Линейные преобразования можно проводить одно за другим. Сначала осуществить преобразование Av, а затем к полученному вектору Av применить преобразование B: $B(Av)$. Результирующее преобразование $B(Av)$ сохранит линейность. (*Доказать!*)

Какая матрица соответствует такому преобразованию?

Первый столбец этой матрицы $B(Ae_1)$ получится умножением матрицы B на вектор-столбец $Ae_1 = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$, второй – на вектор-столбец $Ae_2 = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$. Матрица, полученная таким способом, называется произведением матриц B и A.

Формальное правило умножения матриц состоит в следующем: элемент матрицы-произведения, стоящий в i-й строчке и j-м столбце получается поэлементным умножением элементов i-й строчки первого сомножителя и j-го столбца второго сомножителя. Заметим, что в отличие от чисел изменение порядка матриц-сомножителей изменяет, как правило, результат: AB и BA — разные матрицы.

При перемножении чисел особую роль играет единица, при умножении на которую числа не меняются. Матрица E, обладающая таким свойством, называется единичной и соответствует тождественному преобразованию. Эта матрица имеет вид $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. (*Доказать!*)

Известно, что для числа $a \neq 0$, существует обратное число a^{-1}, которое при умножении на a дает единицу: $aa^{-1} = 1$. Так же и для каждой так называемой невырожденной матрицы A существует обратная матрица A^{-1}, которая при умножении на A дает единичную матрицу E.

Матрица с двумя строчками и двумя столбцами является вырожденной, если ее столбцы пропорциональны. Из пропорциональности столбцов следует и пропорциональность строк. (*Доказать!*)

Можно перемножать три или более матриц, доказав предварительно, что произведения $(AB)C$ и $A(BC)$ (действия в скобках совершаются сначала) дают одну и ту же матрицу ABC. Это свойство операции умножения, называемое ассоциативностью, выполняется, конечно, и для чисел.

Упражнения

Вычислить:

1. AB, BA, A^{-1}, $BB = B^2$, AB^2A, где $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

2. A^3, $B^{-1}A$, где $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Для A и B из п. 2 решить матричное уравнение $XA = B$.

Указание. Умножить обе части уравнения справа на A^{-1}.

4. Проверить матричное равенство $(AB)C$ и $A(BC)$ для $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Линейные преобразования можно рассматривать и для векторов, составленных из n координат: n-мерных векторов или векторов из n-мерного пространства R^n. Матрица A, задающая это линейное преобразование (необязательно квадратная), составлена из n m-мерных столбцов — образов координатных векторов пространства R^n — $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$. Как и в случае плоскости, у вектора $\boldsymbol{e}_k$ k-я координата равна единице, а все остальные — нулю. Умножение матрицы A на вектор $\boldsymbol{v}$ дает вектор-столбец $A\boldsymbol{v}$, который получается поэлементным умножением каждой строчки матрицы A на столбец из координат

вектора v. Это преобразование каждому вектору из пространства R^n ставит в соответствие вектор из пространства R^m.

Для матрицы A, состоящей только из одной строчки $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$

и вектора $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$, вектор Av является числом (матрицей из одного столбца и одной строчки) $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$ и совпадает со скалярным произведением векторов $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{bmatrix}$ и v.

Аналогично определяется произведение AB матриц A и B, причем число столбцов матрицы A должно совпадать с числом строк матрицы B.

Упражнения

1. Для матриц A, B, C, D: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $D = [4\ 1\ 1]$

вычислить все возможные попарные произведения.

2. Найти Av, Cv, Dv, где $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Найти Bw_1, Bw_2, где $w_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1.3. Собственные векторы и собственные значения

Линейное преобразование выглядит особенно просто, когда образ вектора лежит на той же прямой, на которой находится исходный вектор. Это значит, что $Av = \lambda v$, где λ — некоторое число, называемое собственным значением, а v — собственный вектор линейного преобразования A (или матрицы A). Будем далее обозначать собственный вектор буквой s.

Если собственный вектор s умножить на какую-либо константу, то получится также собственный вектор cs: $A(cs) = cAs = c\lambda s = \lambda(cs)$.

Докажем следующую *теорему*:

Если матрица A линейного преобразования симметрична (в рассматриваемом нами двумерном случае на плоскости $b = c$), то это преобразование в случае различных собственных значений λ_1 и λ_2, имеет два ортогональных собственных вектора s_1 и s_2. И если $\lambda_1 = \lambda_2$, то все векторы собственные.

Доказательство.

Согласно определению собственного вектора $s = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ матрицы

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ имеем равенство: $As = \lambda s$.

Умножив матрицу A на вектор-столбец s, получим равенства для первой и второй координаты векторов As и λs:

$$\begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y. \end{cases}$$

Предполагая сначала число λ известным, напишем:

$$\begin{cases} (a-\lambda)x + by = 0 \\ cx + (d-\lambda)y = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Все точки (x,y), удовлетворяющие первому уравнению, лежат на прямой $y = [(\lambda - a)/b]x$, а точки (x,y), удовлетворяющие второму уравнению, дают вторую прямую $y = [c/(\lambda - d)]x$.

Эти прямые пересекаются в точке (0, 0). Другие решения могут быть лишь тогда, когда эти прямые совпадают. Значит, собственные значения λ, соответствующие ненулевому вектору, получатся как решения уравнения: $(\lambda - a)/b = c/(\lambda - d)$.

С учетом того, что $b = c$, это уравнение примет вид:

$\lambda_{1,2} = (-1/2)(a + d) \pm (1/2)\sqrt{(a+d)^2 - 4ad + b^2}$.

Дискриминант квадратного уравнения, равный сумме $(a - d)^2 + 4b^2$, не отрицателен, поэтому уравнение имеет два различных или совпадающих корня.

Рассмотрим случай $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Подставив в систему для x и y значение $\lambda = \lambda_1$, получим фактически одно уравнение, имеющее своим решением целую прямую в качестве возможных собственных векторов. Мы выберем на ней вектор единичной длины и назовем его s_1. Подставив в систему (1) $\lambda = \lambda_2$, найдем второй единичный собственный вектор s_2.

Докажем, что собственные векторы s_1 и s_2 симметричной матрицы A, соответствующие различным ее собственным числам λ_1 и λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ортогональны.

Будем записывать результат действия матрицы A справа на произвольный вектор-строку (x_1,x_2) как:

$(x_1,x_2)\,A = (ax_1 + cx_2,\ bx_1 + cx_2)$.

Для симметричной матрицы A, т.е. при $b=c$, компоненты этого вектора-строки совпадают с компонентами вектора-столбца, полученного умножением $A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Вектор-столбец v, записанный в строчку, обозначим через $v^{тр}$. Тогда полученное правило умножения вектора на симметричную матрицу справа можно записать в виде:

$v^{тр}A = (Av)^{тр}$.

Пусть теперь $v = s_1$. Тогда:

$v^{тр}A = s_1^{тр}A = (As_1)^{тр} = (\lambda_1 s_1)^{тр} = \lambda_1 s_1^{тр}$

Теперь подсчитаем двумя способами $s_1^{тр}As_2$, используя ассоциативный закон умножения матриц:

$s_1^{тр}As_2 = (s_1^{тр}A)s_2 = \lambda_1(s_1^{тр}s_2)$

$s_1^{тр}As_2 = s_1^{тр}(As_2) = s_1^{тр}(\lambda_2 s_2) = \lambda_2(s_1^{тр}s_2)$.

Таким образом :

$\lambda_1(s_1^{тр}s_2) = \lambda_2(s_1^{тр}s_2)$.

В скобках стоит произведение $s_1^{тр}s_2$ однострочной матрицы (вектора-строки) $s_1^{тр}$ на одностолбцевую матрицу s_2 (вектор-столбец). По правилу умножения матриц это произведение равно числу – сумме произведений координат с одинаковыми номерами векторов s_1 и s_2, т.е. скалярному произведению этих векторов:

$(s_1^{тр}s_2) = s_1^{тр}s_2 = (s_1,s_2).$

Значит, предыдущее равенство можно записать с помощью скалярного произведения:

$\lambda_1(s_1^{тр}, s_2) = \lambda_2(s_1,s_2).$

Но так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(s_1,s_2) = 0$, т. е. векторы s_1 и s_2 ортогональны.

Случай $\lambda_1 = \lambda_2$.

В этом случае, поскольку дискриминант равен нулю, $a = d = \lambda$, $b = 0$, матрица A превращается в диагональную $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ и любой вектор $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ оказывается собственным. Поэтому в качестве векторов s_1, s_2 выберем два произвольных ортогональных единичных вектора.

В общем n-мерном случае, если все векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ — собственные векторы матрицы A с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, то матрица A примет следующий диагональный вид $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}$.

Зная собственные векторы s_i матрицы A и соответствующие им собственные значения λ_i, составим из столбцов $s_1, s_2, ..., s_n$ матрицу V. Тогда: $VD = AV$ (*проверить!*), а матрица D получится как $D = V^{-1}AV$. Такая операция называется *диагонализацией* матрицы A. Если все s_i единичной длины, то: $V^{тр} = V^{-1}$ (*доказать!*). Напомним, что через $V^{тр}$ обозначается матрица, получающаяся из V, если элементы V, симметрично расположенные относительно диагонали, поменять местами, т.е. элемент v_{ik} заменить элементом v_{ki}, где $i,k = 1, 2, ..., n$.

1.4. Задача о поиске наилучшего направления

В дальнейшем будет использоваться важное утверждение, связанное со свойствами собственных векторов. Поставим такую задачу: имеются n векторов $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n$. Мы располагаем не их координатной записью, а их взаимными скалярными произведениями $(\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_i)$, $i,j = 1, ..., n$. Требуется найти такое направление, чтобы сумма квадратов проекций на него всех векторов $\boldsymbol{v}_i$ оказалась наибольшей.

Чтобы с самого начала не перегружать эту задачу большим количеством обозначений, основные этапы ее решения продемонстрируем, взяв только два непропорциональных друг другу вектора $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ единичной длины. Произвольный вектор $\boldsymbol{v}$ запишем как сумму помноженных на числа k_1, k_2 векторов $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$: $\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2$.

Взаимные скалярные произведения векторов $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ расположим в виде матрицы $R=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)\\(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_2)\end{bmatrix}$.

Для векторов $\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2$ и $\boldsymbol{w} = l_1\boldsymbol{v}_1 + l_2\boldsymbol{v}_2$,

$$R\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)\\(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1(k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2)\\\boldsymbol{v}_2(k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v})\\(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v})\end{bmatrix}$$

а скалярное произведение $(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})=(l_1,l_2)\begin{bmatrix}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v})\\(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v})\end{bmatrix}=(l_1,l_2)\,R\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}$.

Если векторы $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ ортогональны, т.е. $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2) = 0$, а $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1) = (\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_2) = 1$ (так как оба вектора единичные), то $R = E = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$, и скалярное произведение запишется в привычной форме: $k_1l_1 + k_2l_2$. Все наши дальнейшие рассуждения будут основаны на этих формулах.

Упражнения

1. Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = 0{,}3$.

Найти скалярные произведеиия следующих пар векторов: $\boldsymbol{g} = 3\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{h} = -\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2$; $\boldsymbol{w} = 5\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{z} = 4\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2$.

2. Записать в виде векторов-столбцов проекции $\boldsymbol{g}$ на $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$; $\boldsymbol{h}$ на $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$; $\boldsymbol{w}$ на $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$; $\boldsymbol{z}$ на $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$.

Вернемся к поиску «наилучшей» (в том смысле, о котором только что говорили) прямой или единичного вектора f, взятого на этой прямой. Мы можем записать вектор f как $c_1 v_1 + c_2 v_2$.

Тогда $1 = (f,f) = (c_1 c_2) R \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = (c,Rc)$, где $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$.

Вектор f надо подобрать так, чтобы сумма квадратов его проекций на v_1 и v_2 была наибольшей. Но вектор $R\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ составлен из этих проекций, значит надо добиться максимума скалярного произведения (Rc,Rc), сохраняя условие $(c,Rc) = 1$.

Эта задача имеет простое и наглядное решение с использованием собственных векторов матрицы R. Симметричная матрица R имеет два собственных вектора s_1 и s_2 с собственными значениями $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Эти собственные значения положительны потому, что (s,Rs), являясь квадратом длины некоторого вектора, положительно и равно $\lambda(s,s) = \lambda > 0$. Выберем s_1 и s_2 единичной длины, по доказанному в теореме $(s_1,s_2) = 0$. Разложим вектор c по векторам s_1 и s_2: $c = a_1 s_1 + a_2 s_2$. Тогда:

$(c,Rc) = (a_1 s_1 + a_2 s_2,\ a_1\lambda_1 s_1 + a_2\lambda_2) = a_1^2\lambda_1(s_1,s_1) + a_1 a_2\lambda_1(s_1,s_2) + a_1 a_2\lambda_2(s_1,s_2) + a_2^2(s_2,s_2) = a_1^2\lambda_1 + a_2^2\lambda_2 = 1.$

$(Rc,\ Rc) = (a_1\lambda_1 s_1 + a_2\lambda_2 s_2,\ a_1\lambda_1 s_1 + a_2\lambda_2 s_2) = a_1^2\lambda_1^2 + a_2^2\lambda_2^2.$

В обозначениях $a_1^2\lambda_1 = z_1$, $a_2^2\lambda_2 = z_2$ задача имеет простой вид:

Найти такие $z_1 \geq 0$, $z_2 \geq 0$, что: $z_1 + z_2 = 1$, а $S = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2$ принимает максимальное значение.

Очевидно, если выполнено строгое неравенство $\lambda_1 > \lambda_2$, для достижения максимума S λ_1 нужно умножить на максимально возможное z_1. Это значит, наше решение имеет вид:

$z_1 = 1$, $z_2 = 0$, и наибольшее $S = \lambda_1 1 + \lambda_2 0 = \lambda_1$.

В случае равенства $\lambda_1 = \lambda_2$ величина S для всех z_1, z_2 одинакова, и в качестве решения можно выбирать любые неотрицательные числа, в сумме дающие единицу.

Вернемся к прежним обозначениям:

$a_1^2\lambda_1 = 1$, $a_2^2\lambda_2 = 0$, откуда $c = a_1 s_1 + a_2 s_2 = (1/\sqrt{\lambda_1})s_1$.

Таким образом, «координаты» вектора f в косоугольной системе координатных векторов v_1, v_2 даются вектором $(1/\sqrt{\lambda_1})s_1$.

Пример.

Пусть v_1 и v_2 — векторы единичиой длины, и $(v_1, v_2) = 1/2$. Найти вектор f «наилучшего» направления.

Решение.

Матрица взаимных скалярных произведений $R = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$.

Найдем ее собственные значения и соответствующие им собственные векторы. Векторное равенство $Rs = \lambda s$ или $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ запишем для первой и второй координаты векторов в левой и правой частях равенства:

$$\begin{cases} x + (1/2)\,y = \lambda x \\ (1/2)x + y = \lambda y \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (1-\lambda) + (1/2)\,y = 0 \\ (1/2)x + (1-\lambda)\,y = 0 \end{cases}$$

Система имеет ненулевое решение лишь при совпадающих прямых, т.е. когда $\dfrac{1-\lambda}{1/2} = \dfrac{1/2}{1-\lambda}$. Корни этого квадратиого уравнения: $\lambda_1 = 1 + (1/2)$, $\lambda_2 = 1 - (1/2)$.

Подставив в систему наибольшее собственное значение $\lambda_1 = 3/2$, получим:

$$\begin{cases} -(1/2)x + (1/2)\,y = 0 \\ \ \ (1/2)x - (1/2)\,y = 0. \end{cases}$$

Значит, координаты собственного вектора равны: $x = y$.

Полагая $x = y = (1/\sqrt{2})$, получим единичный собственный вектор s_1. Его координаты, деленные на $\sqrt{\lambda_1}$ — коэффициенты разложения вектора f по векторам v_1, v_2: $f = (1/\sqrt{3})v_1 + (1/\sqrt{3})\,v_2$.

Такой ответ для двух единичных векторов, конечно, легко предсказать. Оптимальная прямая является биссектрисой острого угла между прямыми, на которых лежат вектора v_1 и v_2.

Задача становится более содержательной, если направление f подбирается для конфигурации из многих векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Вектор f нужно провести через самую «густую» часть конфигурации. Так же, как в только что рассмотренной задаче, находятся собственные векторы матрицы R, вектор f находится в виде разложения по «координатным» векторам:

$v_1, v_2, \ldots, v_n$: $f = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n$, вектор $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{bmatrix}$ оказывается равным старшему собственному вектору $s_1/\sqrt{\lambda_1}$, λ_1 — наибольшее собственное значение матрицы R.

2. ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

2.1. Постановка задачи

Как уже говорилось ранее, задачи факторного анализа решаются в огромном количестве различных вариантов и могут описываться в самых различных терминах.

В общем случае модель факторного анализа предполагает, что для i-й переменной может быть записано следующее выражение:

$$X_i = A_{i1}F_1 + A_{i2}F_2 + ... + A_{ik}F_k + U_i,$$

где $F_j s$ общие факторы, U_i s характерный фактор, A_{ij} s константы, используемые в линейной комбинации k факторов.

Или:

$$v_1 = a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + ... + a_{1k}f_k + g_1$$

....

$$v_i = a_{i1}f_1 + a_{i2}f_2 + ... + a_{ik}f_k + g_i$$

....

$$v_n = a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + ... + a_{nk}f_k + g_n.$$

Каждая переменная v_i — это вектор, составленный из измеряемых (шкалируемых) по i-й переменной наблюдений (объектов). Его размерность равна количеству испытуемых. Векторы $f_1, f_2, ..., f_k$, $g_1, g_2, ..., g_n$ будем считать единичными и ортогональными. Напомним, что коэффициент a_{i1} называется факторной нагрузкой первого фактора на i-ю переменную, ..., a_{in} — нагрузкой n-го фактора.

В матричном виде эта система запишется кратко:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ v_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ ... \\ f_n \end{bmatrix} + G.$$

Матрица G — диагональная матрица с $g_1, g_2, ..., g_n$ на диагонали. Все, что стоит в правых частях уравнений, — неизвестно, поэтому невозможно без дополнительных условий определить факторные нагрузки и значения общих и специфических факторов. То, что в уравнения включены специфические факторы, сильно усложняет задачу. Займемся моделью, в которой специфических факторов нет, а количество общих факторов заранее не задано.

2.2. Метод главных компонент

В такой постановке удобно применять метод главных компонент. Полезно представить геометрическую интерпретацию такой модели. Уточним, что каждый вектор-переменную будем записывать в центрированном и нормированном виде. Обозначим через v_i^l результат измерения l-го наблюдения по i-й переменной и вычислим среднее значение i-й переменной по всем наблюдениям:

$$\overline{v}_i = (1/L)\,(v_i^1 + \ldots + v_i^L) \text{ и}$$

$$S_i^2 = (v_i^1 - \overline{v}_i)^2 + \ldots + (v_i^L - \overline{v}_i)^2.$$

Тогда вектор-переменная, составленная из координат $(v_i^1 - \overline{v}_i)/S_i, \ldots, (v_i^L - \overline{v}_i)/S_i$, будет обладать следующим свойством: среднее ее координат равно 0, а сумма квадратов координат (а следовательно, длина) — единице. Таким образом, векторы v_i единичные, а их скалярные произведения (v_i, v_j) совпадают с эмпирическим коэффициентом корреляции из курса теории вероятностей.

Матричное уравнение запишется без матрицы G:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_n \end{bmatrix}$$

То же самое уравнение допускает запись с использованием векторов-строчек $(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (f_1, f_2, \ldots, f_k)\,A^{\text{тр}}$. $A^{\text{тр}}$ обозначает «транспонированную» матрицу, т.е. матрицу A, в которой строчки стали столбцами, а столбцы — строчками (*убедитесь, выполнив умножение матриц*).

Перемножив левые части первого и второго уравнений, а затем их правые части, получим так называемое основное уравнение факторного анализа:

$$R = A\,A^{\text{тр}},$$

поскольку $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} (v_1, v_2, \dots, v_n) = R$, а единичные ортогональные

векторы f_i при перемножении $\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix} (f_1, f_2, \dots, f_k)$ дают единичную матрицу E.

Поэлементное умножение столбцов и строчек, составленных из векторов, подразумевает их скалярное произведение.

По матрице R попарных скалярных произведений можно восстановить взаимное положение этих векторов, так называемую «конфигурацию».

Направление первого факторного вектора f_1 выберем так, чтобы он проходил через самую «густую», сильно заполненную векторами часть конфигурации. Точнее говоря, из всех возможных направлений выбираем то, проекции на которое векторов v_i, возведенные в квадрат, в сумме дают наибольшее по сравнению с другими направлениями значение.

Единичный факторный вектор f_1, задающий это направление, будем искать в виде линейной комбинации векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$:

$$f_1 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n.$$

Решение этой задачи было получено в п. 1.4 данного приложения.

Вектор коэффициентов $c = s_1/\sqrt{\lambda}$, где s_1 — старший собственный вектор матрицы R, а сумма квадратов проекций на это направление равна λ_1.

Координаты найденного вектора f_1 — величины первой факторной переменной для 1-го, 2-го и т.д. наблюдений.

Второй факторный вектор f_2 выбирается ортогональным предыдущему вектору f_1. Его координаты в «косоугольной» системе

$v_1, v_2, ..., v_n$ можно записать, используя только собственные векторы $s_2, ..., s_n$; $c = b_2 s_2 + ... + b_n s_n$, ведь все векторы w_j с координатами s_j ортогональны вектору w_1 с координатами s_1, так как $(w_1, w_j) = (s_1, Rs_j) = \lambda_j (s_1, s_j) = 0$ по свойству взаимной ортогональности собственных векторов $s_1, ..., s_n$.

Далее, дословно повторяя рассуждения при нахождении f_1, получим, что координаты для f_2 даются вектором $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} s_2$. Сумма квадратов проекций векторов $v_1, v_2, ..., v_n$ на f_2 равна λ_2.

Координаты следующего факторного вектора f_3 равны координатам вектора $\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} s_3$, а сумма проекций на него векторов $v_1, v_2, ..., v_n$ равна λ_3 и т.д.

Сделаем важное замечание. Сумма квадратов длин всех векторов $v_1, v_2, ..., v_n$ равна $|v_1|^2 + |v_2|^2 + ... + |v_n|^2 = n$, а сумма $\lambda_1 + \lambda_2 + ... \lambda_n$ есть та же сумма длин $|v_1|^2 + |v_2|^2 + ...+ |v_n|^2$, подсчитанная с помощью разложения по факторным векторам $f_1, ..., f_n$.

Значит, $\lambda_1 + \lambda_2 + ... \lambda_n = |v_1|^2 + |v_2|^2 + ... + |v_n|^2 = n$. Это дает возможность ограничиться несколькими первыми k факторными векторами, когда сумма $|v_1|^2 + |v_2|^2 + ... + |v_n|^2 = n$ окажется почти исчерпанной, т.е. когда $n - (\lambda_1 + \lambda_2 + ... \lambda_k)$ окажется достаточно малой.

Перейдем к расчету факторных нагрузок.

Покажем, что $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{31} \end{bmatrix} = \sqrt{\lambda_1}\, s_1$.

Вектор-столбец нагрузок первого фактора на первую, вторую и т.д. переменные можно получить, скалярно умножая левые и правые части каждого уравнения системы:

$$\begin{cases} v_1 = a_{11}f_1 + \ldots + a_{1l}f_l \\ \ldots \\ v_l = a_{n1}f_1 + \ldots + a_{ln}f_n \end{cases}$$

на вектор f_1, тогда:

$$\begin{cases} (v_1, f_1) = a_{11}(f_1, f_1) + \ldots + a_{1n}(f_n, f_1) \\ \ldots \\ (v_n, f_1) = a_{n1}(f_1, f_1) + \ldots + a_{nn}(f_n, f_1) \end{cases}$$

Поскольку векторы $f_1, \ldots, f_n$ предполагаются единичными и ортогональными, значит $(f_1, f_1) = 1$, а $(f_i, f_l) = 0$ для $i \neq 1$, то:

$$\begin{cases} (v_1, f_1) = a_{11} \\ (v_2, f_1) = a_{21} \\ (v_n, f_1) = a_{n1}\,. \end{cases}$$

Вектор-столбец $\begin{bmatrix} (v_1, f_1) \\ (v_2, f_1) \\ (v_n, f_1) \end{bmatrix}$ получится действием матрицы R

$$R\frac{s_1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{\lambda_1 s_1}{\sqrt{x_1}} = \sqrt{x_1}s_1$$ на вектор коэффициентов f_1, т.е. в виде

$$R\frac{s_1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{\lambda_1 s_1}{\sqrt{\lambda_1}} = \sqrt{\lambda_1}s_1\,.$$

Таким же образом получим вектор-столбец факторных нагрузок на f_2 в виде $\sqrt{\lambda_2}s_2$ и т.д.

Упражнение

Даны три единичных собственных вектора матрицы

$$R = \begin{bmatrix} (v_1, v_1)(v_1, v_2) \\ (v_2, v_1)(v_2, v_2) \\ (v_3, v_1)(v_3, v_3) \end{bmatrix}$$

$$s_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \; s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \; s_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$\lambda_1 = 1{,}5$; $\lambda_2 = 1{,}2$; $\lambda_3 = 0{,}3$.

Найти матрицу факторных нагрузок и записать факторные разложения для v_1, v_2, v_3, используя столько факторов, сколько необходимо для того, чтобы сумма квадратов длин $|v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2$ оказалась исчерпанной: а) на 80%, б) на 95%.

Заметим, что задачи с данными, требующими ранговых и знаковых методов, не могут быть здесь рассмотрены, поскольку факторный анализ с использованием этих методов не дает еще таких возможностей, чтобы без дальнейшего изучения рекомендовать какую-либо из его модификаций в прикладных целях.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Благуш П. Факторный анализ с обобщениями. М., 1989.

Гусев А.Н., Измайлов Ч.А., Михалевская М.Б. Измерение в психологии. М., 1997.

Иберла К. Факторный анализ / Пер. с нем. М., 1980.

Ким Дж.-О., Мьюллер Ч.У. Факторный анализ: статистические методы и практические вопросы // Факторный, дискриминантный и кластерный анализ / Пер. с англ. М., 1989.

Кулаичев А.П. Методы и средства анализа данных в среде Windows. Stadia 6.0. М.,1996.

Лоули Д., Максвелл А. Факторный анализ как статистический метод / Пер. с англ. М., 1967.

Окунь Я. Факторный анализ / Пер. с польск. М., 1974.

Харман Г. Современный факторный анализ / Пер. с англ. М., 1972.

SPSS Base 7.5 для Windows. Руководство по применению / Пер. с англ. М., 1997.

SPSS Base 7.5 для Windows. Руководство пользователя / Пер. с англ. М., 1997.

Дополнительная литература

Балладур Ж..-П. Факторный анализ соответствий // *Окунь Я.* Факторный анализ. М., 1974. С. 181—186.

Башкиров П.Н. Физкультурная антропология, ее задачи и связь с антропологией // Вопросы антропологии. 1960. № 4.

Докторов Б.З. Об использовании методов факторного анализа в работах советских исследователей (обзор) // Вопросы психологии. 1969. № 2.

Игнатьев М.В. Биометрические проблемы в антропологии // Советская антропология. 1957. № 1.

Левандовский Н.Г. О корректности применения факторного анализа // Вопросы психологии. 1980. № 5.

Мандрыка А.М. Математические методы и их применение в психотехнике. М., 1931.

Небылицын В.Д. Современное состояние факториального анализа // Вопросы психологии. 1960. № 4.

Основы общей психодиагностики / Под ред. В.В.Столина. М., 1988.

Петренко В.Ф. Основы психосемантики. М., 1997.

Петренко В.Ф., Митина О.В. Психосемантический анализ динамики общественного сознания. М., 1997.

Прохоров А.В. Математическая энциклопедия. Т. 3. М., 1982. С. 761.

Теплов Б.М. Простейшие способы факторного анализа // Типологические особенности высшей нервной деятельности человека / Под ред. Б.М.Теплова. Т. 5. М., 1967.

Чтецов В.П. Факторный анализ в антропологии // Вопросы антропологии. 1960. № 3.

Albert A. The matrices of factor analysis // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1944*a*. № 30.

Albert A. The minimum rank of a correlation matrix // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1944*b*. № 30.

Bentler P.M. EQS: Structural Equations Program Manual. Encino (CA), 1995.

Comrey A. The minimum residual method of factor analysis // Psychological reports. 1962. Vol. 11.

Comrey A.L., Lee H.B. A first course in factor analysis. (2nd. ed.) Hillsdale (NJ), 1992.

Fava J., Velicer W. An empirical comparison of factor, image, component, and scale scores // Multivariate Behavioral Research. 1992. № 27.

Fruchter B. Introduction to factor analysis. N.Y., 1954.

Gorsuch R. Factor Analysis. Hillsdale (NJ), 1983.

Guadagnoli E., Velicer W.F. Relation of sample size to the stability of component patterns // Psychological Bulletin. 1988. Vol. 103.

Guilford J.P., Zimmerman W.S. Fourteen dimensions of temperament // Psychological Monographs. 1956. Vol. 70.

Guttman L. Multiple rectilinear prediction and the resolution into components I // Psychometrika. 1940. № 5.

Harman H., Jones W. Factor analysis by minimizing residuals. (Miners) // Psychometrika. 1966. № 31.

Kaiser H. An index of factorial simplicity // Psychometrika. 1974. № 35.

Kelly G.A. The Psychology of Personal Constructs. N.Y., 1955.

Lawley D. The estimation of factor loading by the method of maximum likelihood //Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Series A. 1940. № 60.

Levine M. Canonical Analysis and Factor Comparison. Beverly Hills, 1977.

Lorr M., McNair D.M. Interview relationship in therapy // J. Nervous and Mental Diseases. 1964.

McNair D.M. Analysis of professed psycho-therapeutic techniques // J. Consulting Psychology. 1964.

Mulaik S. The Foundation of Factor Analysis. N.Y., 1972.

Rao C. Estimation and tests of significance in factor analysis // Psychometrika. 1955. № 20.

Roebuck S. et al. An investigation of the dimensions of executive morale // Psychological Research and Services Section. National Personnel Department, 1958.

Rummel R. Applied Factor Analysis. Evanston (Ill), 1970.

Schubert G. The 1960 term of the Supreme Court: A psychological analysis // *Amer. Polit. Sci. Rev. 1962.*

Tabachnik B.G., Fidell L.S. Using multivariate statistics. (3-d ed.) N.Y., 1996.

Thurstone L. Multiple factor analysis. (6th ed.) Chicago, 1961.

Thurstone L.L., Degan J.W. A factorial study of the Supreme Court. Research report, 1951.

Ullman J.B. Structural Equation Modeling // *Tabachnik B.G., Fidell L.S.* Using multivariate statistics. (3-d ed.) N.Y., 1996.

Velicer W., Jackson D. Component analysis *vs* Common factor analysis: Some issues in selecting an appropriate procedure // Multivariate Behavioral Research. 1990. № 25.

Voiers W.D. Perceptual bases of speaker identity // J. Acoustical Society of America, 1964.

Wilkinson L. SYSTAT: The System of Statistic. Evanston (Ill), 1990.

СОДЕРЖАНИЕ

Митина Ольга Валентиновна – кандидат психологических наук, старший научный сотрудник факультета психологии МГУ, специалист в области современных методов анализа психологических данных. Студентам факультета психологии МГУ преподает такие дисциплины, как одномерный и многомерный статистический анализ данных, математические методы в психологии, измерения в психологии.

Михайловская Ирина Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ, специалист по широкому кругу вопросов – от случайных моделей математической физики до задач прикладной статистики в геофизике, социологии и психологии. На факультете психологии МГУ читает основные курсы по теории вероятностей, математической статистике и математическим методам в психологии.