МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ПОЛТАВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ В. Г. КОРОЛЕНКА

М. П. Красницький, В. О. Марченко

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ

Полтава 2020

УДК 514.123 (075.8)
К 78

Красницький М. П., Марченко В. О.
Аналітична геометрія в просторі : навч. посіб. / М. П. Красницький, В. О. Марченко / за ред. В. О. Марченка. – Полтава : ПНПУ імені В. Г. Короленка, 2020. – 120 с.

Рецензенти:; Барболіна Т. М. — доктор фіз.-мат. наук, доцент
Флегантов Л. О. — кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Ухвалено до друку вченою радою Полтавського національного педагогічного університету імені В.Г.Короленка (протокол № 5 від 26 листопада 2020 року)

Навчальний посібник містить понад 300 задач з аналітичної геометрії у просторі, розв'язування яких має на меті забезпечити формування відповідних знань і вмінь студентів, визначених програмою для фізико-математичних факультетів педагогічних закладів освіти. Крім того до нього вміщено приклади розв'язань окремих типів задач, довідковий матеріал та зміст двох контрольних робіт.

Даний посібник стане в нагоді викладачам, студентам різних форм навчання й учителям.

Передмова

Курс аналітичної геометрії входить до фундаментальних частин вищої геометрії. Його основне освітнє завдання — сформувати в студентів уміння, пов’язані з використанням векторного і координатного методів розв’язування математичних задач. Саме векторний і координатний методи – одні з небагатьох універсальних методів, що дають можливість побудувати систематизований курс геометрії на основі аксіоматичного підходу, моделювати й досліджувати фізичні явища і процеси тощо. Тому мета даного посібника й полягає в забезпеченні навчального процесу задачним матеріалом для оволодіння студентами відповідним програмовим змістом.

Пропонований посібник орієнтований на програму з аналітичної геометрії для педагогічних вищих навчальних закладів. Представлені в ньому понад 300 задач для самостійного розв’язування згруповано згідно основних розділів програми. Крім того до нього включено завдання двох контрольних робіт, кожна з яких складається із десяти варіантів по п’ять задач у кожному. Контрольним роботам передують зразки розв’язань окремих типів задач. Серед включених до посібника задач чимало теорем шкільного курсу геометрії, які пропонується довести векторним або (і) координатним методами, що, на нашу думку, має сприяти формуванню наукового світогляду майбутніх учителів. У додаток вміщено зображення та різні способи задання окремих видів дійсних поверхонь другого порядку, які виконано в середовищі Maple 7.0.

Зауважимо, що даний посібник доповнює посібник [9], який охоплює зміст аналітичної геометрії на площині. Дібраний задачний матеріал можна використовувати для аудиторних і домашніх завдань студентів як денної так і заочної форм навчання.

Пропонований посібник з аналітичної геометрії буде корисний не лише студентам фізико-математичних факультетів, а й вчителям, студентам інших спеціальностей закладів вищої освіти, які вивчають вищу математику.

1. Векторний та мішаний добутки векторів

Означення. *Векторним добутком* векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє умови:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b}$;

3) трійка векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ має таку ж орієнтацію як і трійка базисних векторів простору.

Векторний добуток позначають $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ або $\vec{a}\times\vec{b}$.

Властивості векторного добутку

1) $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a}\right]$;

2) $\left[\lambda\vec{a},\vec{b}\right] = \left[\vec{a},\lambda\vec{b}\right] = \lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right]$;

3) $\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right] = \left[\vec{a},\vec{c}\right] + \left[\vec{b},\vec{c}\right], \quad \left[\vec{c},\vec{a}+\vec{b}\right] = \left[\vec{c},\vec{a}\right] + \left[\vec{c},\vec{b}\right]$;

4) *(необхідна і достатня умова колінеарності двох векторів)* два вектори колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх векторний добуток дорівнює нуль-вектору.

Обчислення векторного добутку

Якщо в ортонормованому базисі вектори мають координати $\vec{a}\left(a_1;a_2;a_3\right)$, $\vec{b}\left(b_1;b_2;b_3\right)$, то векторний добуток $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ матиме координати $\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$.

У базисі $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ векторний добуток обчислюється за формулою $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.

Застосування векторного добутку

1) Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює модулю векторного добутку цих векторів, тобто $S_{\square} = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|$.

2) Площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює половині модуля векторного добутку цих векторів, тобто $S_{\triangle} = \frac{1}{2}\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|$.

Означення. *Мішаним добутком* трьох векторів називається число, яке дорівнює скалярному добутку векторного добутку перших двох векторів на третій.

Мішаний добуток векторів позначають $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\vec{c}$ або $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Властивості мішаного добутку

1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$;
2) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$;
3) $\left(\lambda\vec{a}\right)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\left(\lambda\vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\left(\lambda\vec{c}\right) = \lambda\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$;
4) $\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2\right)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c}$;
5) *(необхідна і достатня умова компланарності трьох векторів)* три вектори компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Обчислення мішаного добутку

Якщо в довільному базисі $\left(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\right)$ вектори мають координати $\vec{a}\left(a_1; a_2; a_3\right)$, $\vec{b}\left(b_1; b_2; b_3\right)$, $\vec{c}\left(c_1; c_2; c_3\right)$, то мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ дорівнює $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \left(\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3\right)$.

Зокрема, в ортонормованому базисі мішаний добуток обчислюється за формулою $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

Застосування мішаного добутку

Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, дорівнює абсолютній величині мішаного добутку цих векторів, тобто $V_{par}=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

Об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, дорівнює одній шостій абсолютної величини мішаного добутку цих векторів, тобто $V_{tetr}=\dfrac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

1. Скласти таблицю векторного множення для ортів $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ простору.

2. У прямокутного паралелепіпеда $ABCDA'B'C'D'$ ребра мають довжини $AB=2,$ $AD=3,$ $AA'=5.$ Знайти векторні добутки: $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]$, $\left[\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{BC}\right]$, $\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right]$.

3. Нехай вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні. Довести колінеарність векторів $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, $\left[\vec{b},\vec{c}\right]$, $\left[\vec{c},\vec{a}\right]$. Чи є істиним обернене твердження?

4. Довести компланарність векторів $\left[\vec{x},\vec{a}\right]$, $\left[\vec{x},\vec{b}\right]$, $\left[\vec{x},\vec{c}\right]$.

5. Нехай для ненульових векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ виконуються рівності $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=6\vec{c},$ $\left[\vec{b},\vec{c}\right]=3\vec{a}.$ Знайти $\left[\vec{c},\vec{a}\right]$.

6. Нехай для векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ виконуються рівності $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=5\vec{c},$ $\left[\vec{b},\vec{c}\right]=-4\vec{a}.$ Знайти $\left[\vec{c},\vec{a}\right]$.

7. Основою паралелепіпеда $ABCDA'B'C'D'$ є ромб, довжина сторони якого дорівнює 1, а гострий кут — 45°. Знайти довжини ребер паралелепіпеда, якщо $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

8. Всі ребра паралелепіпеда $ABCDA'B'C'D'$ мають довжину 2. Знайти плоскі кути паралелепіпеда, якщо $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=\overrightarrow{AA'}$.

9. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=2\vec{m}-3\vec{n}$, $\vec{b}=5\vec{m}+\vec{n}$, $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=3$, $\angle(\vec{m},\vec{n})=\frac{\pi}{6}$.

10. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=2\vec{m}-\vec{n}$, $\vec{b}=3\vec{m}+2\vec{n}$, $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=\sqrt{2}$, $\angle(\vec{m},\vec{n})=\frac{\pi}{4}$.

11. До кожної грані паралелепіпеда проведено перпендикулярний вектор, спрямований у зовнішній бік паралелепіпеда, модуль якого дорівнює площі відповідної грані. Довести, що сума всіх побудованих векторів дорівнює $\vec{0}$.

12. До кожної грані тетраедра проведено перпендикулярний вектор, спрямований у зовнішній бік тетраедра, модуль якого дорівнює площі відповідної грані. Довести, що сума всіх побудованих векторів дорівнює $\vec{0}$.

13. До кожної грані опуклого многогранника проведено перпендикулярний вектор, спрямований у зовнішній бік многогранника, модуль якого дорівнює площі відповідної грані. Довести, що сума всіх побудованих векторів дорівнює $\vec{0}$.

14. Довести, що грані ABC і ABD тетаедра $ABCD$ є рівновеликими тоді і тільки тоді, коли спільний перпендикуляр прямих AB і CD проходить через середину ребра CD.

15. Нехай $[\vec{a},\vec{c}]=\left[\vec{b},\vec{c}\right]$, $\vec{c}\neq\vec{0}$. Чи обов’язково $\vec{a}=\vec{b}$?

16. Нехай $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{c},\vec{a}\right]$. Що можна сказати про вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$?

17. Дано трикутну піраміду *SABC*. Довести, що площина *ABC* перпендикулярна вектору $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{b},\vec{c}\right]+\left[\vec{c},\vec{a}\right]$, де $\vec{a}=\overrightarrow{SA},\quad \vec{b}=\overrightarrow{SB},\quad \vec{c}=\overrightarrow{SC}.$

18. Базис $\left(\vec{e}_1';\vec{e}_2{}';\vec{e}_3{}'\right)$ простору називається двоїстим до заданого базису $\left(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3\right)$, якщо виконуються умови $\vec{e}_i\vec{e}_i'=1;\quad \vec{e}_i\vec{e}_j'=0$ при $i\neq j$. Виразити базис $\left(\vec{e}_1';\vec{e}_2{}';\vec{e}_3{}'\right)$ через заданий.

19. Довести тотожності:

а) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2+\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\vec{b}^2;$

б) $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=(\vec{a}\vec{c})\vec{b}-\left(\vec{a}\vec{b}\right)\vec{c};$

в) $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]+\left[\vec{b},\left[\vec{c},\vec{a}\right]\right]+\left[\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right]=\vec{0};$

г) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\left[\vec{c},\vec{d}\right]=\begin{vmatrix}\vec{a}\vec{c} & \vec{b}\vec{c}\\ \vec{a}\vec{d} & \vec{b}\vec{d}\end{vmatrix}.$

У задачах 20-31 система координат є декартовою прямокутною.

20. Знайти векторний добуток векторів $\vec{u}\,(3;-5;3)$, $\vec{v}\,(4;2;-5)$.

21. Знайти векторний добуток векторів $\vec{u}\,(2;7;-4)$, $\vec{v}\,(3;-7;6)$.

22. Дано вектори $\vec{a}(5;-1;2)$, $\vec{b}(-1;1;3)$. При якому значенні k вектор $\vec{c}(2;-3;k)$ є ортогональним вектору $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$?

23. При яких значеннях x та y вектор $\vec{c}(x;y;-12)$ є колінеарним вектору $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, де $\vec{a}(-1;2;3)$, $\vec{b}(4;1;-5)$?

24. Знайти площу паралелограма *ABCD*, якщо відомі координати його вершин: $A(1;-3;7)$, $B(2;4;-5)$, $C(2;-1;3)$.

25. Знайти площу трикутника ABC, якщо відомі координати його вершин: $A(10;-6;1)$, $B(-3;7;10)$, $C(2;-4;-9)$.

26. Знайти площу трикутника ABC, якщо відомі координати його вершин у координатній площині Oxy: $A(7;-6)$, $B(-3;4)$, $C(-2;9)$.

27. Знайти площу чотирикутника $ABCD$, якщо відомі координати його вершин у координатній площині Oxy: $A(1;3)$, $B(5;-1)$, $C(-2;-4)$, $D(-6;2)$.

28. На вісі Ox знайти таку точку C, щоб площа трикутника ABC дорівнювала 5, якщо $A(2;-2;-3)$, $B(-1;4;7)$.

29. Знайти довжину BD висоти трикутника ABC, якщо відомі його вершини: $A(5;3;-1)$, $B(-7;5;-2)$, $C(4;-3;1)$.

30. Знайти відстань від точки $C(4;-3;1)$ до прямої, яка проходить через точки $A(7;0;-4)$ та $B(-5;2;-3)$.

31. Дано трикутник ABC, де $A(1;3;5)$, $B(3;3;2)$, $C(4;8;0)$. Знайти:

а) площу трикутника;
б) косинуси внутрішніх кутів;
в) довжину висоти CH і координати вектора $\overrightarrow{CH}$;
г) вектор $\vec{a}$, колінеарний бісектрисі кута A;
д) координати центра мас трикутника.

32. Відомі координати векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в довільному базисі $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$. З'ясувати, чи будуть компланарними ці вектори, якщо:

а) $\vec{a}\,(1;5;3)$, $\vec{b}\,(0;-2;5)$, $\vec{c}\,(-1;-4;11)$;

б) $\vec{a}\,(2;-1;2)$, $\vec{b}\,(-1;3;-1)$, $\vec{c}\,(4;-7;4)$.

33. Нехай вектори $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, $\left[\vec{b},\vec{c}\right]$, $[\vec{c},\vec{a}]$ — компланарні. Довести компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

34. Знайти відношення об'єму паралелепіпеда до об'єму тетраедра, вершинами якого є вершина паралелепіпеда і центри граней паралелепіпеда, які не проходять через цю вершину.

35. Знайти відношення об'єму паралелепіпеда до об'єму тетраедра, ребрами якого є діагоналі граней паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини.

36. Знайти відношення об'єму тетраедра до об'єму тетраедра, вершинами якого є центри мас граней заданого тетраедра.

37. Відрізки AB і CD лежать на мимобіжних прямих m і n відповідно. Довести, що об'єм тетраедра $ABCD$ не залежить від положення відрізків AB і CD на прямих m і n.

38. Довести тотожність $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a}\vec{b} & \vec{a}\vec{c} \\ \vec{a}\vec{b} & \vec{b}^2 & \vec{b}\vec{c} \\ \vec{a}\vec{c} & \vec{b}\vec{c} & \vec{c}^2 \end{vmatrix}$.

У задачах 39-44 система координат є прямокутною декартовою.

39. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a}\left(3;-5;3\right)$, $\vec{b}\left(4;2;-5\right)$, $\vec{c}\left(7;-4;1\right)$.

40. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{a}\left(2;7;-4\right)$, $\vec{b}\left(3;-7;6\right)$, $\vec{c}\left(4;-4;2\right)$.

41. Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках:

а) $A(1;-2;5)$, $B(2;3;7)$, $C(4;9;1)$, $D(-3;0;6)$;

б) $A(2;7;-5)$, $B(9;0;1)$, $C(2;-4;7)$, $D(3;10;5)$.

42. Знайти довжину висоти AH тетраедра $ABCD$, вершини якого знаходяться в точках $A(0;-4;3)$, $B(-3;-5;2)$, $C(3;3;-3)$, $D(-1;-4;-4)$.

43. Дано паралелепіпед $ABCDA'B'C'D'$, побудований на векторах $\overrightarrow{AB}(2;3;1)$, $\overrightarrow{AD}(-2;3;2)$ та $\overrightarrow{AA'}(5;4;0)$. Знайти:

а) об'єм паралелепіпеда;
б) площі граней;
в) довжину висоти, проведеної з вершини A' на грань $ABCD$;
г) кут між ребром AB та діагоналлю BD';
д) кут між гранями $ABCD$ та $ADD'A'$.

44. У трикутній призмі $ABCA'B'C'$ вектори $\overrightarrow{AB}(1;2;0)$, $\overrightarrow{AC}(3;0;5)$ визначають основу, а вектор $\overrightarrow{AA'}(3;-2;4)$ спрямований вздовж бічного ребра. Знайти:

а) об'єм призми;
б) площі граней;
в) довжину висоти призми;
г) кут між ребром $B'C'$ та діагоналлю AA'.

2. Афінна й прямокутна декартова системи координат у просторі

Афінна система координат

Упорядкована четвірка точок O, A_1, A_2, A_3 простору, які не лежать в одній площині, називається *афінним (загальним декартовим) репером* $R=(O;\,A_1;\,A_2;\,A_3)$, або *афінною (загальною декартовою) системою координат* у просторі.

Точка O називається *початком репера R або початком афінної системи координат*. Прямі OA_1, OA_2, OA_3 називаються *координатними прямими або осями координат* і позначаються Ox, Oy, Oz відповідно. Вісь Ox називається *віссю абсцис*, вісь Oy — *віссю ординат*, вісь Oz — *віссю аплікат*.

Оскільки точки O, A_1, A_2, A_3 не лежать в одній площині, то вектори $\overrightarrow{OA_1}=\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OA_2}=\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OA_3}=\vec{e}_3$ некомпланарні й утворюють базис $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ тривимірного векторного простору *V*. Отже, афінний репер можна задати точкою *O* і трьома некомпланарними векторами, тобто $R=(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$. Вектор $\vec{e}_1$ називається *першим координатним вектором*, $\vec{e}_2$ — *другим координатним вектором* і $\vec{e}_3$ — *третім координатним вектором*. Додатні напрямки осей координат визначаються напрямками відповідних координатних векторів.

Площини OA_1A_2, OA_1A_3, OA_2A_3 називаються *координатними площинами* і позначаються Oxy, Oxz, Oyz відповідно. На них задані афінні репери: $R_3=(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ на площині Oxy, $R_2=(O;\vec{e}_1;\vec{e}_3)$ на площині Oxz, $R_1=(O;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ на площині Oyz.

Нехай у просторі задана довільна точка *M*. Вектор $\overrightarrow{OM}$ називається *радіус-вектором точки M*. Існує єдиний розклад вектора $\overrightarrow{OM}$ за векторами базису $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{e}_1+y\,\vec{e}_2+z\,\vec{e}_3,\ \text{де}\ x\in R,\quad y\in R,\quad z\in R.$$

Координати x, y, z радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки *M* в базисі $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ називаються кординатами точки *M* в репері $R=(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$. x — *абсциса*, y — *ордината*, z — *апліката*. Записують $M(x;y;z)$.

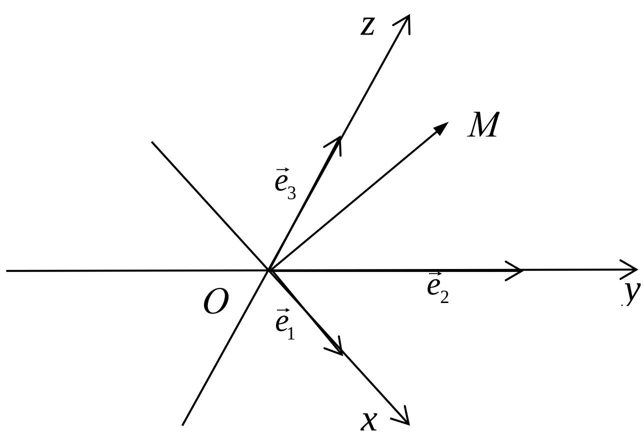

Рис. 2.1. Афінна (загальна декартова) система координат

Прямокутна декартова система координат. Афінний репер, у якого базисні вектори одиничні й попарно ортогональні, називається *ортонормованим*, або *прямокутним декартовим репером*, або *прямокутною декартовою системою координат*.

Ортонормований репер у просторі з початком у точці O позначають $R=\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, де $\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=\left|\vec{k}\right|=1$ і $\angle\left(\vec{i};\vec{j}\right)=\angle\left(\vec{i};\vec{k}\right)=\angle\left(\vec{j};\vec{k}\right)=\dfrac{\pi}{2}$. Вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — відповідно *перший, другий і третій базисні вектори*, які називають *ортами*. Назви і позначення координатних осей і координатних площин, координат точки такі ж як і для загальної декартової системи координат.

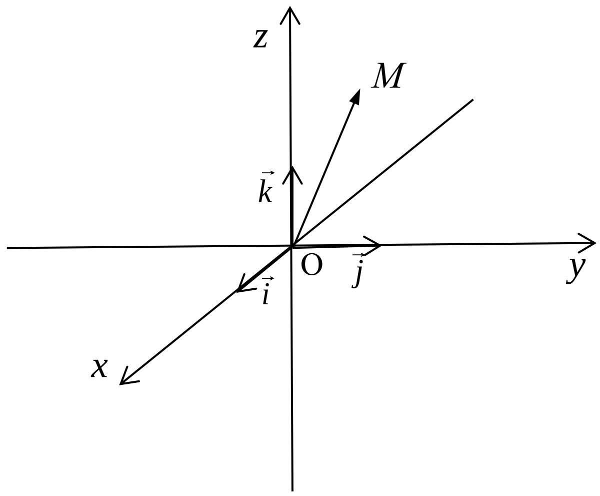

Рис.2.2. Прямокутна декартова система координат у просторі

Основні координатно-метричні співвідношення

1. У будь-якій, із розглянутих вище, системах координат *відрізок AB*, координати кінців якого відомі, можна *поділити у відношенні λ* за формулами:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

(де $A\left(x_1;y_1;z_1\right)$, $B\left(x_2;y_2;z_2\right)$ — кінці відрізка AB).

Формули поділу відрізка навпіл:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2};\ z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

2. У прямокутній декартовій системі координат *відстань між двома точками* $A(x_1;y_1;z_1)$ і $B(x_2;y_2;z_2)$ обчислюється за формулою $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

3. У прямокутній декартовій системі координат *кут між векторами* $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ і $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ обчислюється за формулою

$$\cos\varphi=\frac{|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

Перетворення координат у просторі

Нехай у просторі задано дві афінні системи координат $Oxyz$ (стара система координат) та $O'x'y'z'$ (нова система координат) з базисами $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ та $(\vec{e}_1\,';\vec{e}_2\,';\vec{e}_3\,')$ відповідно. І нехай новий початок координат у старому базисі має координати $O'(x_0;y_0;z_0)$, а нові базисні вектори в старому базисі — $\vec{e}_1\,'(a_{11};a_{21};a_{31})$, $\vec{e}_2\,'(a_{12};a_{22};a_{32})$, $\vec{e}_3\,'(a_{13};a_{23};a_{33})$. Довільна точка у старій системі координат задана трійкою чисел $M(x;y;z)$, а в новій системі координат — $M(x';y';z')$. Тоді координати точки M у старій і новій системах координат пов'язані *формулами перетворення координат*

$$\begin{cases} x=a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z'+x_0; \\ y=a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z'+y_0; \\ z=a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z'+z_0. \end{cases}$$

Для *прямокутних декартових систем координат формули перетворення* мають такий же вигляд, але базиси — ортонормовані (старий базис — $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, новий базис — $(\vec{i}\,';\vec{j}\,';\vec{k}\,')$, матриця переходу від старого базису до нового є ортогональною).

45. У прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ побудувати точки $A(1;0;0)$, $B(0;-3;0)$, $C(0;0;5)$, $D(-1;3;0)$, $E(1;0;-2)$, $F(0;1;2)$, $G(-1;3;2)$, $H(2;-1;1)$.

46. У заданій афінній системі координат $Oxyz$ побудувати точки, вказані в задачі 45.

47. Задано точки $A(1;0;0)$, $B(0;-3;0)$, $C(0;0;5)$, $D(-1;3;0)$, $E(1;0;-2)$, $F(0;1;2)$, $G(-1;3;2)$, $H(2;-1;1)$. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{FH}$.

48. У прямокутній декартовій системі координат знайти проекції точок $K(7;11;-2)$, $M(10;-5;4)$, $N(-8;3;3)$ на:

а) координатні прямі;
б) координатні площини.

49. Для заданих точок $P(1;-1;4)$, $Q(1;-2;3)$, $T(-4;1;2)$ указати і побудувати в прямокутній декартовій системі координат точки, симетричні відносно:

а) початку координат;
б) координатних осей;
в) координатних площин.

50. Задано точки $M(-1;3;-2)$ та $N(1;-1;2)$. Знайти:

а) координати середини C відрізка MN;
б) координати точки P, яка ділить відрізок MN у відношенні $\frac{4}{5}$;
в) координати точки Q, яка ділить відрізок MN у відношенні $-\frac{2}{3}$;
г) координати точки S, яка ділить відрізок MN у відношенні $\frac{2}{3}$.

51. Точки $E(1;3;-1)$ та $F(6;-3;1)$ ділять відрізок AB на три рівні частини. Знайти координати точок A і B.

52. Точки *C*, *D*, *E* і *F* ділять відрізок *AB* на п'ять рівних частин. Знайти координати цих точок, якщо $A(-10;3;5)$ і $B(8;3;-1)$.

53. Точки *K*, *L*, *M* — середини ребер *BC*, *AC*, *AB* тетраедра *SABC* відповідно. Знайти координати цих точок в репері $R(S;A;B;C)$.

54. Точки *K*, *L*, *M* — середини ребер *BC*, *AC*, *AB* тетраедра *SABC* відповідно. Знайти координати вершин цього тетраедра в репері $R(S;K;L;M)$.

55. Установити відношення, в якому кожна з координатних площин ділить відрізок *AB*, якщо $A(-1;2;4)$, $B(2;-4;3)$.

56. Вивести формули для знаходження координат точки перетину медіан трикутника *ABC*, якщо $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$. Користуючись цими формулами, обчислити координати центра мас трикутника із вершинами в точках $A(1;2;3)$, $B(-2;1;1)$, $C(1;3;-1)$.

57. Точки *A*, *B*, *C* — вершини паралелограма *ABCD*. Знайти точку перетину його діагоналей і координати вершини *D*, якщо:

а) $A(1;2;-3)$, $B(2;1;1)$, $C(1;-3;1)$;

б) $A(1;0;3)$, $B(0;1;1)$, $C(1;3;-3)$.

58. Довести, що відрізки, які сполучають середини протилежних ребер тетраедра, перетинаються в одній точці й діляться нею навпіл.

59. Довести, що відрізки, які сполучають вершини тетраедра з центрами мас протилежних граней, перетинаються в одній точці.

60. Довести, що діагоналі прямокутного паралелепіпеда перетинаються в одній точці й діляться нею навпіл.

61. Довести, що діагоналі довільного похилого паралелепіпеда перетинаються в одній точці й діляться нею навпіл.

62. Діагональ AC' паралелепіпеда $ABCDA'B'C'D'$ перетинає площину BDA' в точці S. Довести, що точка S є центром мас трикутника BDA'.

63. Діагональ AC' паралелепіпеда $ABCDA'B'C'D'$ перетинає площину BDA' в точці P, а площину $B'D'C$ – в точці Q. Довести, що точки P і Q поділяють діагональ AC' на три рівні частини.

64. Дослідити, які із заданих трійок точок лежать на одній прямій:

а) $A_1(3;2;1)$, $B_1(5;3;-2)$, $C_1(1;1;4)$;
б) $A_2(1;-3;5)$, $B_2(3;-1;7)$, $C_2(0;4;3)$;
в) $A_3(-1;0;4)$, $B_3(2;3;1)$, $C_3(8;9;-5)$;
г) $A_4(3;0;-8)$, $B_4(1;3;4)$, $C_4(0;-2;1)$.

65. Дослідити, які із заданих четвірок точок лежать в одній площині:

а) $A_1(0;0;-1)$, $B_1(-\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2})$, $C_1(-1;0;1)$, $D_1(1;1;1)$;
б) $A_2(1;7;8)$, $B_2(3;5;6)$, $C_2(-1;4;4)$, $D_2(0;7;6)$;
в) $A_3(1;1;0)$, $B_3(-1;2;-1)$, $C_3(0,-1;0)$, $D_3(-3;-3,2)$;
г) $A_4(1;2;2)$, $B_4(0;3;3)$, $C_4(2;-5;-1)$, $D_4(-1;-2;2)$.

У задачах 66–85 система координат є прямокутною декартовою.

66. Знайти довжину відрізка AB, якщо:

а) $A(3;1;4)$, $B(-1;-2;6)$;

б) $A(-8;3;-1)$, $B(1;-5;-2)$.

67. Точки $A(4;1;-2)$, $B(2;0;0)$, $C(-2;3;-5)$ — вершини трикутника. Для трикутника ABC знайти:

а) довжини сторін;

б) величини внутрішніх кутів;

в) величини зовнішніх кутів;

г) довжини медіан;

д) довжини бісектрис внутрішніх кутів;

е) довжини висот.

68. Скориставшись означенням і ознаками правильного трикутника, довести різними способами, що трикутник *ABC* — правильний, якщо:

а) $A(1;1;1)$, $B(2;1;2)$, $C(2;0;1)$;

б) $A(1;2;3)$, $B(0;4;2)$, $C(2;3;1)$.

69. Скориставшись означенням і ознаками рівнобедреного трикутника, довести, щонайменше, трьома способами, що трикутник *KLM* — рівнобедрений, якщо:

а) $K(1;2;3)$, $L(4;5;6)$, $M(7;8;9)$;

б) $K(-1;3;2)$, $L(2;4;1)$, $M(5;3;0)$.

70. Довести, що трикутник із вершинами в точках $A(2;1;3)$, $B(3;1;2)$, $C(2;0;3)$ — прямокутний.

71. Точки *A*, *B*, *C* — вершини паралелограма *ABCD*. Знайти довжини сторін, довжини діагоналей, внутрішні кути і площу цього паралелограма, якщо:

а) $A(1;2;-3)$, $B(2;1;1)$, $C(1;-3;1)$;

б) $A(1;0;3)$, $B(0;1;1)$, $C(1;3;-3)$.

72. Дано дві вершини *A* (2; –3; –5) і *B* (–1; 3; 2) паралелограма *ABCD* і точку перетину його діагоналей *K* (4; –1; 7). Знайти площу паралелограма.

73. На координатних осях знайти точки, відстань від кожної з яких до точки $M(-1;2;-3)$ дорівнює 3.

74. Указати геометричне місце точок простору, рівновіддалених від кінців відрізка *AB*, якщо:

а) $A(-2;0;3)$, $B(5;-1;2)$;

б) $A(1;-1;3)$, $B(-3;4;1)$.

75. Знайти геометричне місце точок простору, віддалених на відстань r від точки $C(x_0;y_0;z_0)$. Скориставшись одержаною формулою, записати рівняння вказаного ГМТ, якщо $C(-2;3;-5)$, $r=4$.

76. Знайти геометричне місце точок простору, які є вершинами рівнобедреного трикутника з основою AB, якщо:

а) $A(-2;0;3)$, $B(5;-1;2)$;

б) $A(1;-1;3)$, $B(-3;4;1)$.

77. Знайти геометричне місце точок простору, які є вершинами правильного трикутника з основою AB, якщо:

а) $A(3;-2;5)$, $B(1;-1;-2)$;

б) $A(-1;4;3)$, $B(-4;-1;-2)$.

78. Знайти геометричне місце точок простору, яке утворюють вершини C і D квадрата $ABCD$, якщо:

а) $A(1;5;-3)$, $B(-4;-3;1)$;

б) $A(-2;-1;3)$, $B(4;2;3)$.

79. Указати координати точки M_1, симетричної точці $M(1;2;3)$ відносно прямої AB, якщо:

а) $A(-2;0;3)$, $B(5;-1;2)$;

б) $A(-1;4;3)$, $B(-4;-1;-2)$.

80. Довжина ребра куба дорівнює a. Знайти відстань між мимобіжними прямими, що містять діагоналі двох суміжних граней куба, які не мають спільних точок.

81. Знайти відстань між прямою l_1, яка містить діагональ куба, і прямою l_2, яка містить ребро куба, що не має з цією діагоналлю спільних точок, якщо ребро куба дорівнює a.

82. У правильній трикутній піраміді з прямими плоскими кутами при вершині знайти кут між прямою, що містить апофему піраміди, і прямою, що містить медіану основи, яка не має спільних точок з цією апофемою.

83. Діагональ OD прямокутного паралелепіпеда, утворює кути $60°$ з ребрами OA і OB. Який кут вона утворює з ребром OC?

84. Пряма AB паралельна площиині σ. Через точки A і B проведено прямі l_1 та l_2, перпендикулярні AB, $\angle(l_1,\sigma)=45^\circ$, $\angle(l_2,\sigma)=30^\circ$. Знайти відстань від AB до площини σ, якщо відрізок $AB=a$, $L_1L_2=b$, де L_1 та L_2 — точки перетину прямих l_1 та l_2 з площиною σ відповідно.

85. Обчислити координати ортогональної проекції C_1 точки C на пряму AB:

а) $A(2;-1;0)$, $B(-1;3;1)$, $C(0;1;-1)$;
б) $A(3;1;1)$, $B(-2;1;-1)$, $C(1;-1;2)$.

86. Нехай $ABCDA'B'C'D'$ — деякий куб, O — точка перетину його діагоналей. Записати формули перетворення координат точок, якщо початком старої системи координат є точка A, а її базис — $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AA'}\right)$, початком нової системи координат є точка O, а новим базисом — $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OD}\right)$. Користуючись цими формулами, знайти координати вершин куба в новій системі координат.

87. Дано тетраедр $OABC$. Записати формули перетворення координат точок при переході від загальної декартової системи $\left(O,\ \vec{a}_1=\overrightarrow{OA};\ \vec{a}_2=\overrightarrow{OB};\ \vec{a}_3=\overrightarrow{OC}\right)$ до системи $\left(O'=A;\ \vec{a}_1'=\overrightarrow{AO};\ \vec{a}_2'=\overrightarrow{AB};\ \vec{a}_3'=\overrightarrow{AC}\right)$. Знайти координати вершин тетраедра в новій системі координат.

88. Знайти формули перетворення координат при переході від прямокутної декартової системи координат $Oxyz$ до афінної системи $Ox'y'z'$, якщо початок нової системи збігається з початком O старої системи, вісь Oz' збігається з віссю Oz, промені Ox', Oy' є відповідно бісектрисами кутів XOY та YOZ, а нові базисні вектори мають одиничну довжину.

3. Площини й прямі в просторі

3.1. Площини

Способи задання площин та їх рівняння

У афінній і, зокрема, в прямокутній декартовій системах координат площина може бути задана:

1) *точкою* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *і двома неколінеарними напрямними векторами* $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ і $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$:

- у координатній формі :

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0;$$

- *параметричні рівняння*: $\begin{cases} x = a_1u + b_1v + x_0; \\ y = a_2u + b_2v + y_0; \\ z = a_3u + b_3v + z_0; \end{cases}$

2) *двома точками* $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$ *та напрямним вектором* $\vec{l}\,(a;b;c)$:

- у координатній формі:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0;$$

- *параметричні рівняння*:

$$\begin{cases} x = (x_2-x_1)u + av + x_0; \\ y = (y_2-y_1)u + bv + y_0; \\ z = (z_2-z_1)u + cv + z_0; \end{cases}$$

3) *трьома точками* $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ та $M_3(x_3;y_3;z_3)$:

- у координатній формі:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

- *параметричні рівняння*:

$$\begin{cases} x=(x_2-x_1)u+(x_3-x_1)v+x_1; \\ y=(y_2-y_1)u+(y_3-y_1)v+y_1; \\ z=(z_2-z_1)u+(z_3-z_1)v+z_1; \end{cases}$$

4) *трьома відрізками, які площина відтинає на координатних осях* (*рівняння площини у відрізках*): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1;$
(де a, b, c — відрізки, які площина відтинає на координатних осях. Від'ємні значення цих параметрів указують на те, що площина перетинає відповідну координатну вісь у від'ємній частині);
5) *двома прямими, що перетинаються* (рівняння аналогічні до рівняння площини, заданої точкою і двома неколінеарними векторами. Напрямними векторами площини є напрямні вектори прямих, а заданою точкою може бути будь-яка точка однієї із прямих);
6) *двома паралельними прямими* (рівняння площини знаходять за трьома точками заданих прямих, або двома точками, які лежать на різних прямих, і напрямним вектором);

у прямокутній декартовій системі координат (і тільки в ній) площина може бути задана:

7) *точкою* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *і вектором нормалі* $\vec{n}(A;B;C)$, який перпендикулярний до розглядуваної площини:
   - у координатній формі:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0;$$

   - площина, задана точкою і одиничним вектором нормалі, записується *нормальним рівнянням*

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

(де α,β,γ — кути, утворені вектором нормалі площини з відповідними осями координат, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — напрямні косинуси вектора нормалі площини, p — відстань від початку координат до плошини).

Незалежно від способу задання й виду системи координат рівняння площини може бути зведене до *загального рівняння площини* $Ax + By + Cz + D = 0$.

Неповні рівняння площини

Означення. Загальне рівняння площини, в якому хоча б один із коефіцієнтів A, B, C, D дорівнює нулю, але коефіцієнти A, B, C одночасно не дорівнюють нулю, називається *неповним*.

Розташування площини відносно системи координат, залежно від вигляду неповного рівняння:

- $By + Cz + D = 0$ — площина паралельна вісі Ox;
- $Ax + Cz + D = 0$ — площина паралельна вісі Oy;
- $Ax + By + D = 0$ — площина паралельна вісі Oz;
- $Cz + D = 0$ — площина паралельна площині Oxy;
- $By + D = 0$ — площина паралельна площині Oxz;
- $Ax + D = 0$ — площина паралельна площині Oyz;
- $Ax + By + Cz = 0$ — площина проходить через початок координат;
- $By + Cz = 0$ — площина проходить через вісь Ox;
- $Ax + Cz = 0$ — площина проходить через вісь Oy;
- $Ax + By = 0$ — площина проходить через вісь Oz;
- $z = 0$ —площина Oxy;
- $y = 0$ —площина Oxz;
- $x = 0$ —площина Oyz;

Відхилення точки від площини

Нехай площина задана загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$. Точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ не належить цій площині й знаходиться на відстані d від неї.

Означення. *Відхиленням* δ точки M_0 від заданої площини називається число $+d$, якщо точка M_0 і початок координат знаходяться у різних півпросторах відносно цієї площини, й число $-d$, якщо вони лежать у одному півпросторі. (Якщо $M_0(x_0;y_0;z_0)$ належить площині, то $\delta = 0$).

У прямокутній декартовій системі координат відхилення точки обчислюється за формулою

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

де знак δ вибирається за означенням.

Якщо ж площина задана нормальним рівнянням, то

$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p.$$

Відстань від точки до площини

Відстань від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ у репері $R = (O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ обчислюється за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

або $$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p|$$

для нормального рівняння площини.

Взаємне розташування двох площин

Нехай площини задані загальними рівняннями $\sigma_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $\sigma_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Тоді їх взаємне розташування визначається ознаками:

1) площини σ_1 і σ_2 *збігаються* тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти в їх загальних рівняннях пропорційні $\left(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}\right)$;
2) площини σ_1 і σ_2 *паралельні* тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти біля змінних у їх загальних рівняннях

пропорційні, але не дорівнюють відношенню вільних членів $\left(\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}\right)$;

3) площини σ_1 і σ_2 перетинаються тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти біля змінних у їх загальних рівняннях непропорційні $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}\vee\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{C_1}{C_2}\vee\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$;

4) у прямокутній декартовій системі координат співвідношення $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ є умовою колінеарності векторів нормалей площин σ_1 і σ_2, а *перпендикулярними площини* будуть тоді і тільки тоді, коли їх вектори нормалей будуть перпендикулярними, тобто виконуватиметься умова $A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0$.

Кут між площинами в прямокутній декартовій системі координат обчислюється за формулою

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^{\,2}+B_1^{\,2}+C_1^{\,2}}\cdot\sqrt{A_2^{\,2}+B_2^{\,2}+C_2^{\,2}}}.$$

Відстань між паралельними площинами

У прямокутній декартовій системі координат *відстань між паралельними площинами* σ_1 і σ_2 обчислюється за формулою

$$d(\sigma_1;\sigma_2)=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

де D_1, D_2 — вільні члени загальних рівнянь площин σ_1 і σ_2 відповідно.

Взаємне розташування трьох площин

Нехай три площини задані загальними рівняннями $\sigma_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\sigma_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ і $\sigma_3: A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$. Складемо систему із цих рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$

Розглянемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix};$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}; \quad A'_{12} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix};$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}; \quad A'_{13} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix};$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}; \quad A'_{23} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}.$$

Мають місце такі ***ознаки взаємного розташування трьох площин***:

1) три площини перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли $rangA = rangA' = 3$;
2) площини попарно перетинаються у трьох різних паралельних прямих тоді і тільки тоді, коли $rangA = 2, \quad rangA' = 3$ і $rangA_{12} = rangA_{13} = rangA_{23} = 2$ і $rangA'_{12} = rangA'_{13} = rangA'_{23} = 2$;
3) площини σ_1 і σ_2 паралельні й перетинаються площиною σ_3 тоді і тільки тоді, коли $rangA = 2, \quad rangA' = 3 \quad rangA_{12} = 1, \quad rangA_{13} = rangA_{23} = 2$ і $rangA'_{12} = rangA'_{13} = rangA'_{23} = 2$;
4) три різні площини перетинаються по одній прямій тоді й тільки тоді, коли $rangA = rangA' = 2$ і $rangA_{12} = rangA_{13} = rangA_{23} = 2$ і $rangA'_{12} = rangA'_{13} = rangA'_{23} = 2$;
5) площини σ_1 і σ_2 збігаються й перетинаються площиною σ_3 тоді і тільки тоді, коли

$rangA = rangA' = 2,\quad rangA_{12} = 1,\quad rangA_{13} = rangA_{23} = 2$ і $rangA'_{12} = 1,\quad rangA'_{13} = rangA'_{23} = 2$;

6) три площини паралельні тоді й тільки тоді, коли $rangA = 1,\quad rangA' = 2,\quad rangA_{12} = rangA_{13} = rangA_{23} = 1$ і $rangA'_{12} = rangA'_{13} = rangA'_{23} = 2$;

7) площини σ_1 і σ_2 збігаються, а площина σ_3 паралельна їм тоді і тільки тоді, коли $rangA = 1,\quad rangA' = 2,\quad rangA_{12} = rangA_{13} = rangA_{23} = 1$ і $rangA'_{12} = 1,\quad rangA'_{13} = rangA'_{23} = 2$;

8) три площини збігаються тоді й тільки тоді, коли $rangA = rangA' = 1$.

89. Записати рівняння площин, що містять грані тетраедра *ABCD*, у репері $R = (A; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$, де:

а) $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AC}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{AB}, \vec{e}_3 = \overrightarrow{AD}$;

б) $\vec{e}_1 = \overrightarrow{DC}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{DB}, \vec{e}_3 = \overrightarrow{DA}$.

90. Дано вершини тетраедра $A(4;0;2)$, $B(0;-5;1)$, $C(4;1;3)$, $D(3;-1;5)$. Знайти загальні й параметричні рівняння та рівняння у відрізках:

а) площин, що містять грані тетраедра *ABCD*;

б) площин, які проходять через вершини тетраедра *ABCD* паралельно протилежним граням;

в) площин, які проходять через ребра тетраедра *ABCD*, паралельно протилежним до них ребрам.

91. З'ясувати особливості розташування площини відносно системи координат, побудувати зображення слідів площини:

а) $2x - y + 3z - 6 = 0$;

б) $x + 2y + 3z = 0$;

в) $5x + 2y - 5z - 10 = 0$;

г) $x - 3 = 0$;

д) $x - y + 1 = 0$;

е) $2y - z = 0$;

ж) $x + 2z = 0$;

з) $x - y + 2 = 0$;

и) $3y + 5 = 0$;

к) $y + z + 1 = 0$;

л) $z = 0$.

У задачах 92 – 116 система координат прямокутна декартова.

92. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(-1;2;-3)$ і відтинає на осях відмінні від нуля відрізки однакової довжини.

93. Записати рівняння площини, яка:

а) проходить через початок координат, перпендикулярно площинам $2x-y+3z-1=0$, $x+2y+z=0$;

б) проходить через точку $M(-1;1;-2)$ перпендикулярно площинам $2x-5z=0$, $x+y-3z-1=0$.

94. У трикутній пірамід $SABC$ вершина S збігається з початком координат, а бічні грані лежать у координатних площинах. Записати рівняння площини, яка містить основу ABC, якщо $SA:SB:SO=1:3:2$, висота $SH=6$ і вершини A, B, C мають невід'ємні координати.

95. Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, центр якого є початком координат, а вершини основи задані координатами $A(1;2;-3)$, $B(3;4;-2)$, $C(-3;-4;-3)$, $D(-1;-2;-2)$. Знайти загальні, параметричні рівняння та рівняння у відрізках:

а) площин, шо містять грані паралелепіпеда;

б) діагональних площин;

в) площини, яка проходить через центр паралелепіпеда паралельно грані $ABCD$;

г) площини, яка паралельна грані AA_1B_1B і ділить діагональ A_1C у відношенні 1:3;

д) площини, яка проходить через вершину A паралелепіпеда перпендикулярно до ребра AA_1.

96. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(1;-3;5)$ паралельно до площини:

а) $3x-5y+z+4=0$;

б) $x+3y-2z-8=0$;

в) $x+y+17=0$;

г) $2x-3z+1=0$;

д) $y-3z+4=0$;

е) $3z-2=0$;

ж) $2x+54=0$;

з) $y+6=0$.

97. Знайти нормальне рівняння площини, яка проходить через точку $K(-2;1;4)$ перпендикулярно вектору:

а) $\vec{a}(-1;2;-3)$;
б) $\vec{b}(1;3;-3)$;
в) $\vec{c}(0;2;-1)$;
г) $\vec{p}(3;0;-5)$.

98. Знайти відхилення й відстань від точки S до площини σ, якщо:

а) $S(-1;3;-1)$, $\sigma: 3x+y-z+2=0$;
б) $S(0;1;-2)$, $\sigma: x-y+z-12=0$;
в) $S(-2;5;4)$, $\sigma: x-3y-4z+1=0$;
г) $S(1;0;-1)$, $\sigma: y-z+2=0$;
д) $S(2;-1;-1)$, $\sigma: x+3y-2=0$;
е) $S(0;3;0)$, $\sigma: z-2=0$.

99. На вісі Oz знайти точки, рівновіддалені від точки $M(1;2;3)$ та від площини $x-2y+z-12=0$.

100. На вісі Oy знайти точки, рівновіддалені від двох площин $4x-y+3z-1=0$ та $x-2y+z-12=0$.

101. Знайти об'єм трикутної піраміди, обмеженої трьома координатними площинами й площиною $-2x+3y+z+1=0$.

102. Скласти рівняння геометричного місця точок простору, віддалених від площини $7x-4y-z+1=0$ на 4 одиниці.

103. Точки $M(-3;2;4)$ та $N(0;1;-2)$ симетричні відносно деякої площини. Знайти рівняння цієї площини.

104. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь ординат і утворює із площиною $3x+y-2z+4=0$ кут $\dfrac{\pi}{6}$.

105. Дослідити взаємне розташування відрізка AB і площини $\sigma: x-3y-4z+1=0$, якщо:

а) $A(-2;1;4)$, $B(1;2;3)$;
б) $A(1;-2;2)$, $B(3;4;5)$;
в) $A(1;1;-1)$, $B(-1;1;4)$;
г) $A(1;-2;2)$, $B(10;1;2)$;
д) $A(4;2;-3)$, $B(7;4;5)$;
е) $A(12;0;-3)$, $B(0,5,7)$.

106. Знайти геометричне місце точок простору віддалених на відстань r:

а) від початку координат;

б) від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

107. Знайти рівняння площини, яка дотикається сфери $x^2+(y+1)^2+(z+2)^2=9$ і паралельна площині $x-2y+z-12=0$.

108. Записати рівняння сфери, центр якої лежить на вісі Ox і яка дотикається двох площин:

а) $3x-y+z+1=0$ та $x+y+z+5=0$;

б) $2x-y+z-6=0$ та $4x-2y+2z+5=0$.

109. Скласти рівняння дотичної площини до сфери $x^2+y^2+z^2=49$ в точці $M(-2;3;-6)$.

110. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1;3;-2)$ і дотикається сфери:

а) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=25$;

б) $(x-5)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=49$.

111. Дослідити розміщення площини $2x-3y-z+9=0$ відносно сфери в кожному з випадків:

а) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$;

б) $(x+2)^2+y^2+(z-3)^2=9$;

в) $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=4$;

г) $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=5$.

112. Довести, що задані пари площин паралельні. Скласти рівняння геометричного місця точок простору, рівновіддалених від цих площин:

а) $3x-4y+z+5=0$ та $9x-12y+3z+1=0$;

б) $-2x-4y+2z-13=0$ та $x+2y-z+13=0$;

в) $4y-6z-5=0$ та $2y-3z+1=0$.

113. Знайти відстані між паралельними площинами, заданими рівняннями у задачі 112.

114. Довести, що задані площини перетинаються. Знайти геометричне місце точок рівновіддалених від цих площин:

а) $3x+5y+2z+1=0$, $z=0$;

б) $x+y+2z-7=0$, $x=4$;

в) $2x-4y-z+2=0$, $x-4z-5=0$;

г) $x+2y+3z-1=0$, $4x-5y+6z+3=0$.

115. Дослідити взаємне розміщення площин. Якщо площини перетинаються, то знайти кут між ними, якщо паралельні, то знайти відстань між ними:

а) $3x+5y+2z+1=0$, $z=0$;

б) $x+y+2z-7=0$, $4x+4y+8z-28=0$;

в) $5x-4y+3z-1=0$, $-15x+12y-9z-28=0$;

г) $2x-4y-z+2=0$, $x-4z-5=0$;

д) $x+2y+3z-1=0$, $9x-6y+z+3=0$.

116. Встановити величини двогранних кутів, утворених площинами:

а) $2x-y+3z+19=0$ та $x-2y+z+11=0$;

б) $5x+y-z+8=0$ та $3x-4y+z-10=0$.

117. Указати особливості розміщення трьох площин:

а) $3x-y+z-1=0$, $6x-2y+z+2=0$, $x+y-5z+3=0$;

б) $x+y-z+1=0$, $x+y-z=0$, $-x-y+z-1=0$;

в) $2x-y+3z-1=0$, $4x-2y+3z+1=0$, $-2x+y-3z+2=0$.

3.2. Прямі в просторі

Способи задання прямих у просторі та їх рівняння

У афінній і, зокрема, *в прямокутній декартовій системах координат* пряма може бути задана:

1) *точкою* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *і напрямним (паралельним до прямої) вектором* $\vec{p}(p_1; p_2; p_3)$, $\vec{p} \neq \vec{0}$:

- у координатній формі :

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = 0; \\ \begin{vmatrix} y - y_0 & z - z_0 \\ p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0; \end{cases}$$

- канонічні рівняння прямої: $\dfrac{x - x_0}{p_1} = \dfrac{y - y_0}{p_2} = \dfrac{z - z_0}{p_3}$, де $p_1 \neq 0 \wedge p_2 \neq 0 \wedge p_3 \neq 0$;

- параметричні рівняння: $\begin{cases} x = p_1 t + x_0; \\ y = p_2 t + y_0; \\ z = p_3 t + z_0; \end{cases}$

2) *двома точками* $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та $M_2(x_2; y_2; z_2)$:

- у координатній формі :

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0; \\ \begin{vmatrix} y - y_1 & z - z_1 \\ y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0; \end{cases}$$

- канонічні рівняння: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$, де $x_2 - x_1 \neq 0 \wedge y_2 - y_1 \neq 0 \wedge z_2 - z_1 \neq 0$;

- параметричні рівняння: $\begin{cases} x = (x_2 - x_1)t + x_1; \\ y = (y_2 - y_1)t + y_1; \\ z = (z_2 - z_1)t + z_1; \end{cases}$

3) *як перетин двох площин* $\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

де $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \vee \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \vee \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

У цьому випадку напрямний вектор прямої визначається за формулою

$$\vec{p}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Нехай пряма a задана точкою $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і напрямним вектором $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, пряма b — точкою $M_2(x_2; y_2; z_2)$ і напрямним вектором $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$. Тоді взаємне розміщення прямих обумовлене ознаками:

1) *пряма a паралельна прямій b* тоді і тільки тоді, коли їх напрямні вектори колінеарні між собою і неколінеарні вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$;
2) *прямі a і b збігаються* тоді і тільки тоді, коли їх напрямні вектори і вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ колінеарні;
3) *прямі a і b перетинаються* тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ компланарні, але вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні;
4) *прямі a і b будуть мимобіжними* тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ некомпланарні;
5) *пряма a перпендикулярна прямій b* тоді і тільки тоді, коли їх напрямні вектори — перпендикулярні.

У прямокутній декартовій системі координат к*ут між прямими* обчислюється за формулою

$$\cos\psi = \frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|},$$

або в координатній формі

$$\cos\psi = \frac{\left|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\right|}{\sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}}\cdot\sqrt{b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + b_3^{\ 2}}}.$$

Взаємне розміщення прямої і площини

Нехай пряма l і площина σ задані параметричними і загальним рівняннями відповідно: $l:\begin{cases} x = at + x_0; \\ y = bt + y_0; \\ z = ct + z_0, \end{cases}$ $\sigma: Ax + By + Cz + D = 0$. Тоді взаємне розміщення прямої і площини обумовлене ознаками:

1) *пряма* l *перетинає площину* σ тоді і тільки тоді, коли виконується умова $a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C \neq 0$ (у прямокутній декартовій системі координат дана умова означає, що напрямний вектор прямої не перпендикулярний вектору нормалі площини);
2) *пряма* l *лежить у площині* σ тоді і тільки тоді, коли виконується умова $\begin{cases} a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C = 0; \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \end{cases}$ де $M_0(x_0; y_0; z_0) \in l$ (у прямокутній декартовій системі координат дана умова означає, що напрямний вектор прямої перпендикулярний вектору нормалі площини і точка прямої належить площині).
3) *пряма* l *паралельна площині* σ тоді і тільки тоді, коли виконується умова $\begin{cases} a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C = 0; \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0, \end{cases}$ де

$M_0(x_0;y_0;z_0)\in l$ (у прямокутній декартовій системі координат дана умова означає, що напрямний вектор прямої перпендикулярний вектору нормалі площини і точка прямої не належить площині);

4) у прямокутній декартовій системі координат *пряма l перпендикулярна площині σ* тоді і тільки тоді, коли виконується умова $\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}$ (дана умова означає, що напрямний вектор прямої колінеарний вектору нормалі площини);

У прямокутній декартовій системі координат *кут між прямою і площиною* обчислюється за формулою

$$\sin\theta=\frac{\left|\vec{l}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{l}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|aA+bB+cC\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Відстані між прямими і площинами

Нехай у прямокутній декартовій системі координат пряма a задана точкою $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і напрямним вектором $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$, пряма b — точкою $M_2(x_2;y_2;z_2)$ і напрямним вектором $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$, площина σ має загальне рівняння $\sigma: Ax+By+Cz+D=0$. Тоді:

1) *відстань від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)\notin a$ до прямої a* обчислюється за формулою

$$d(M_0;a)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1},\vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|}=\frac{\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ a_1 & a_2 & a_3\end{matrix}\right\|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}};$$

2) *відстань між паралельними прямими a і b* обчислюється за формулою

$$d(a,b)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2},\vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|}=\frac{\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ a_1 & a_2 & a_3\end{matrix}\right\|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}};$$

3) *відстань між мимобіжними прямими* a і b обчислюється за формулою

$$d(a,b)=\frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{a},\vec{b}\right)\right|}{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{matrix}\right\|}$$

4) *відстань між площиною* σ *і паралельною до неї прямою* a обчислюється за формулою

$$d(a;\sigma)=d\left(M_1;\sigma\right).$$

118. Складти канонічні, параметричні рівняння прямої й задати її перетином двох площин, якщо пряма:

а) проходить через дві точки $M\left(-1;2;-\frac{1}{3}\right)$ та $N\left(5;-3;-\frac{2}{3}\right)$;

б) проходить через дві точки $A\left(\sqrt{2};2;-1\right)$ та $B\left(2\sqrt{2};-3;1\right)$;

в) проходить через точку $M\left(-1;-2;-3\right)$ паралельно вектору $\vec{m}\left(1;2;3\right)$;

г) проходить через точку $P\left(1;4;-3\right)$ паралельно вектору $\vec{p}\left(-3;1;5\right)$.

119. Записати канонічні й параметричні рівняння прямої, вказати пару точок, що належать їй, якщо пряма:

а) є слідом площини $2x-y+4z-6=0$ у координатній площині Oxy (Oxz, Oyz);

б) утворена перетином площини $x-2y+z=0$ з площиною, яка проходить через точки $A(1;2;3)$, $B(2;-2;2)$, $C(3;4;5)$;

в) утворена перетином площини, яка проходить через точки $A\left(-1;2;-\frac{1}{3}\right)$, $B(2;-2;1)$, $C(4;1;3)$, з площиною, яка проходить через точки $K(-2;2;0)$, $M(3;-2;1)$, $N(1;2;3)$.

120. Знайти параметричні й канонічні рівняння прямих:

а) $\begin{cases} x+z+4=0; \\ -2x+3y+z=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y-z+1=0; \\ -2x+z-1=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x+5y-8z+4=0; \\ 2x-3y-z+1=0. \end{cases}$

121. Через точку $F(-6;0;1)$ провести пряму, яка паралельна:

а) прямій $\begin{cases} x+y-z+4=0; \\ -2x+3y+z=0; \end{cases}$

б) прямій $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$;

в) прямій, що проходить через точки $B(2;-2;1)$, $C(4;1;3)$.

122. Знайти рівняння однієї із прямих, що проходять через точку $F(-6;0;1)$ паралельно:

а) площині, заданої точками $A(1;1;-1)$, $B(-2;3;0)$, $C(5;-1;2)$;

б) площині $\sqrt{2}x-y+5z+3=0$.

123. З'ясувати взаємне розміщення прямих:

а) $\begin{cases} x = 5t - 1; \\ y = 3t + 2; \\ z = -t - 3 \end{cases}$ та $\begin{cases} x = t; \\ y = \dfrac{3}{5}t - 2; \\ z = -\dfrac{1}{5}t + 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = t + 1; \\ y = 3t; \\ z = t \end{cases}$ та $\begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0; \\ x + 3y + z - 1 = 0; \end{cases}$

в) $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$ та $\begin{cases} x + y - z + 4 = 0; \\ -2x + 3y + z = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y = 0; \\ 3y - z = 0 \end{cases}$ та $\begin{cases} x = 4; \\ -2x + 3y + z + 1 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x - y - z = 0; \\ x + 6y + 7z - 1 = 0 \end{cases}$ та $\begin{cases} x - 5z + 1 = 0; \\ 2x + z + 5 = 0. \end{cases}$

124. Довести двома способами, що прямі $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{-6} = \dfrac{z+1}{-8}$ та $\begin{cases} x = 7 - 6t; \\ y = 2 + 9t; \\ z = 12t \end{cases}$ лежать в одній площині, записати рівняння цієї площини.

125. Довести, що прямі $\begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0; \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases}$ та $\begin{cases} 2x + y + 2z - 2 = 0; \\ 2x - 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$ перетинаються. Записати рівняння площини, яка проходить через ці прямі.

126. Дослідити взаємне розміщення прямої і площини:

а) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+4}{1}$ та $x-y-z-7=0$;

б) $\begin{cases} x=5-t; \\ y=-12+7t; \\ z=1+2t \end{cases}$ та $x+y-3z=0$;

в) $\begin{cases} 2x-3y+z-1=0; \\ x-5y-z+1=0 \end{cases}$ та $x+2y-3z+5=0$;

г) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{1}$ та $x-2y+5z-6=0$;

д) $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{1}$ та $x-2y+5z-6=0$.

127. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-8}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-1}$ паралельно прямій $\begin{cases} x-y+2z-2=0; \\ 4x+y-3z=0. \end{cases}$

128. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(-1;2;-3)$ і пряму $\begin{cases} x+y-3z-5=0; \\ x-2y+z+12=0. \end{cases}$

129. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і перетинає кожну із прямих:

а) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{1}$ та $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-4}{3}$;

б) $\begin{cases} 2x+3z+7=0; \\ 2x-3y-5=0 \end{cases}$ та $\frac{x-9}{6}=\frac{y}{-2}=\frac{z-2}{-1}$.

130. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1;2;3)$ і перетинає кожну із прямих:

а) $\begin{cases} x-2y+z-1=0; \\ 2x-y+2z-3=0 \end{cases}$ та $\begin{cases} x=3t+1; \\ y=2t; \\ z=-t-2; \end{cases}$

б) $\frac{x+4}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+1}{-2}$ та $\frac{x+5}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-5}{-5}$.

131. Довести, що пряма $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{1}$ перетинає площину $2x-4y+10z-1=0$. Знайти координати точки їх перетину.

132. Через точки перетину площини $2x-y+3z-1=0$ з осями координат провести прямі так, щоб вони належали даній площині й були б паралельні до координатної площини, що не містить відповідну точку перетину.

У задачах 133–152 система координат прямокутна декартова.

133. Пряма *AB* перетинає координатні площини *Oxy* та *Oyz* в точках *M* і *N* відповідно. Обчислити довжину відрізка *MN*, якщо:

а) $A(-2;2;1)$, $B(3;1;-4)$;
б) $A(7;-2;-3)$, $B(-3;2;5)$.

134. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $K(5;-3;1)$ перпендикулярно до площини $2x-y+3z-1=0$.

135. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $P(0;-3;5)$ і перетинає пряму $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+5}{1}$ під прямим кутом.

136. Через точку $N(-3;0;1)$ провести пряму, яка:

а) перпендикулярна до прямих $\begin{cases} x=-t-1; \\ y=3t; \\ z=-t-2 \end{cases}$ та $\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-2}$;

б) перпендикулярна до прямих $\begin{cases} 4x-2y+6z-1=0; \\ 2x-4y-4z+3=0 \end{cases}$ та $\begin{cases} 2x-2y-2z-1=0; \\ 2x+y+4z=0. \end{cases}$

137. Знайти точку, симетричну відносно площини $x-2y+z-1=0$ до:

а) початку координат; **б)** точки $B(-3;2;5)$.

138. Поверхня дзеркала розташована в площині $x-4y+7z-1=0$. Знайти координати точки, яка є відображенням точки $S(2;-1;1)$ у дзеркалі.

139. На площині $3x+y-2z+4=0$ знайти точку, сума відстаней від якої до точок $A(7;-2;-3)$ і $B(-3;2;5)$ була б найменшою.

140. Довести, що пряма $\begin{cases} x+y+z-1=0; \\ 3y-z=0 \end{cases}$ паралельна до прямої $\begin{cases} x+4y-27=0; \\ -3x-4z+1=0. \end{cases}$ Знайти рівняння площини, в якій лежать ці прямі.

141. Скласти рівняння площин, які перпендикулярні до координатних площин і проходять через прямі:

а) $\begin{cases} x-2y+z-1=0; \\ 2x-y+2z-3=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x=3t+1; \\ y=2t; \\ z=-t-2; \end{cases}$

в) $\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+1}{-2}$.

142. Знайти рівняння ортогональних проекцій прямих на три координатні площини:

а) $\begin{cases} x-2y+z-1=0; \\ 2x-y+2z-3=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 3t + 1; \\ y = 2t; \\ z = -t - 2; \end{cases}$

в) $\dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z+1}{-2}$.

143. Записати рівняння ортогональної проекції заданої прямої на задану площину:

а) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+4}{1}$, $\quad x - y - z - 7 = 0$;

б) $\begin{cases} x = 5 - t; \\ y = -12 + 7t; \\ z = 1 + 2t, \end{cases}$ $\quad x + y - 3z = 0$;

в) $\begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0; \\ x - 5y - z + 1 = 0, \end{cases}$ $\quad x + 2y - 3z + 5 = 0$;

144. Знайти координати ортогональної проекції точки $F(1;0;-6)$ на пряму:

а) $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{-6} = \dfrac{z+1}{-8}$;

б) $\begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0; \\ x + 3y + z - 1 = 0; \end{cases}$

в) задану двома точками $A(7;-2;-3)$, $B(-3;2;5)$.

145. Знайти рівняння площини, яка проходить через початок координат, паралельна прямій $\dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{1}$ і перпендикулярна до площини $2x - y + 3z + 4 = 0$.

146. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $N(-3;1;2)$, паралельна прямій $\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0; \\ 2x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$ і перпендикулярна до площини $y - 5z - 3 = 0$.

147. Через точку перетину площини $x-y+z-3=0$ з прямою $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{1}$ провести пряму так, щоб вона лежала в даній площині й була б перпендикулярна до прямої $\begin{cases} x+z+4=0; \\ -2x+3y+z=0. \end{cases}$

148. Знайти відстань від точки $L(-1;3;2)$ до прямої:

а) $\frac{x-2}{4}=\frac{y}{-6}=\frac{z+1}{-8}$;

б) $\begin{cases} 2x+y-z+2=0; \\ x+3y+z-1=0; \end{cases}$

в) заданої двома точками $A(7;-2;-3)$, $B(-3;2;5)$.

149. Знайти відстань і кут між мимобіжними прямими:

а) $\begin{cases} x=4t+2; \\ y=t-1; \\ z=-t+1 \end{cases}$ та $\begin{cases} x=2t-4; \\ y=-2t+2; \\ z=-3t-22; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x=-t-1; \\ y=3t; \\ z=-t-2 \end{cases}$ та $\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-2}$;

в) $\begin{cases} 4x-2y+6z-1=0; \\ 2x-4y-4z+3=0 \end{cases}$ та $\begin{cases} 2x-2y-2z-1=0; \\ 2x+y+4z=0. \end{cases}$

150. Дано дві прямі $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{2}$ та $\begin{cases} x=3t-1; \\ y=2t+2; \\ z=1 \end{cases}$:

а) довести, що вони мимобіжні;

б) написати рівняння площин, які проходить через кожну із цих прямих паралельно до іншої прямої;

в) знайти відстань між заданими прямими та між знайденими площинами;

г) порівняти ці відстані й зробити висновок.

151. Знайти кут між прямою a і площиною σ, якщо:

а) $a: \begin{cases} x = 2t+1; \\ y = 3t; \\ z = -t+2, \end{cases}$ $\quad \sigma:\ 6x+15y-10z+1=0$;

б) $a: \begin{cases} 4x-2y+6z-1=0; \\ 2x-4y-4z+3=0, \end{cases}$ $\quad \sigma:\ x+5y-z+1=0$.

152. Знайти кут між прямими:

а) $\begin{cases} 3x-y+z=0; \\ x-4y=0 \end{cases}$ та $\begin{cases} y=0; \\ z=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+y=0; \\ 3y-z=0 \end{cases}$ та $\begin{cases} x=4; \\ -2x+3y+z+1=0. \end{cases}$

153. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ бічна грань нахилена до основи під кутом β. Знайти кут між площинами AMB та SAC, де M — середина ребра SC.

154. У правильній трикутній піраміді $SABC$ висота SH дорівнює h, сторона основи дорівнює a. Знайти кут γ між площинами AKC та HBC, де K — середина ребра SB.

155. Довести, що дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, є паралельними.

156. Довести, що дві площини, перпендикулярні до однієї прямої, є паралельними.

157. Довести, що довжини перпендикулярів, проведених із кінців діагоналі паралелограма, до площини, яка містить іншу його діагональ, мають однакову довжину.

158. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ із ребром a. Знайти:

а) відстані від точки A до прямих $A_1C,\quad B_1D,\quad B_1C$;

б) кути між прямими AC_1 і A_1C, AC_1 і B_1D, AC_1 і AC, AC_1 і A_1D;

в) кут між прямою AC_1 і площиною CC_1D_1.

4. Алгебраїчні поверхні другого порядку

4.1. Поверхні обертання. Циліндричні та конічні поверхні

Означення. *Поверхнею обертання* називається поверхня, яка разом із кожною своєю точкою M містить і коло, утворене обертанням точки M навколо фіксованої прямої. Цю пряму називають *віссю обертання*.

Поверхню обертання можна задати віссю обертання і лінією, яка обертається навколо вісі.

Означення. Поверхня, яка разом із кожною своєю точкою містить і деяку пряму, яка проходить через цю точку, називається *лінійчатою*.

Прямі, які належать лінійчатій поверхні, називаються *прямолінійними твірними*, а лінії на поверхні – *напрямними лініями.*

Прикладами лінійчатих поверхонь є циліндричні й конічні поверхні.

Означення. *Циліндричною поверхнею* називається поверхня, яка разом із кожною своєю точкою M містить і пряму, яка проходить через точку M паралельно фіксованому ненульовому вектору. Цю пряму називають прямолінійною твірною циліндричної поверхні.

Циліндричну поверхню можна задати ненульовим вектором $\vec{p}$ і напрямною лінією, через кожну точку якої проходить прямолінійна твірна, паралельна вектору $\vec{p}$.

Означення. *Конічною поверхнею* з вершиною S називається поверхня, яка разом із кожною своєю точкою M, відмінною від S, містить і всю пряму MS. Цю пряму називають прямолінійною твірною конічної поверхні.

Конічну поверхню можна задати вершиною S і напрямною лінією, через кожну точку M якої проходить прямолінійна твірна MS.

У задачах 159-168 система координат є прямокутною декартовою.

159. Знайти рівняння поверхонь, утворених обертанням:

а) еліпса $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1; \\ z = 0 \end{cases}$ навколо вісі Ox;

б) еліпса $\begin{cases} \dfrac{z^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1; \\ x = 0 \end{cases}$ навколо вісі Oy;

в) гіперболи $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1; \\ z = 0 \end{cases}$ навколо вісі Oy;

г) гіперболи $\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1; \\ x = 0 \end{cases}$ навколо вісі Oy;

д) параболи $\begin{cases} y^2 = 2px; \\ z = 0 \end{cases}$ навколо вісі Ox;

е) параболи $\begin{cases} y^2 = 2px; \\ z = 0 \end{cases}$ навколо вісі Oy;

ж) кола $\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = r^2; \\ z = 0 \end{cases}$ навколо вісі Ox;

з) кола $\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = r^2; \\ z = 0 \end{cases}$ навколо вісі Oy.

160. Показати, що вказані поверхні є поверхнями обертання:

а) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 3;$

б) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 2z - 1 = 0;$

в) $x^2 + y^2 - 3z^2 + 12z - 1 = 0;$

г) $x^2 + y^2 - z^2 + 6x - 8y - 12z - 1 = 0;$

д) $x^4 + y^4 - z^2 + 2x^2y^2 = 0.$

161. Знайти рівняння поверхні, утвореної обертанням прямої $x = y = z$ навколо вісі Ox.

162. Знайти рівняння поверхні, утвореної обертанням вісі Ox навколо прямої $x = y = z.$

163. Скласти рівняння сфери, якщо:

а) центр її міститься в точці $P(1;-3;6)$, а радіус $r = 3;$

б) сфера проходить через початок координат і має центр в точці $P(-1;2;4);$

в) точки $A(0;3;5)$ і $B(-4;7;-1)$ є кінцями одного із діаметрів сфери;

г) сфера має центр у точці $P(2;1;-4)$ і дотикається площини $x - 2y + 2z - 10 = 0.$

164. Визначити координати центра і радіус сфери, заданої рівнянням:

а) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 10;$

б) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y + 12z - 1 = 0;$

в) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + y = 4;$

г) $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 5y - 3z = 0.$

165. Скласти рівняння сфери, описаної навколо тетраедра з вершинами $A(0;0;0)$, $B(12;0;0)$, $C(0;16;0)$, $D(0;0;5)$.

166. Скласти рівняння сфери, описаної навколо тетраедра з вершинами $A(0;0;0)$, $B(1;1;0)$, $C(1;0;1)$, $D(0;1;1)$.

167. Скласти рівняння сфери, вписаної в тетраедр із вершинами $A(0;0;0)$, $B(12;0;0)$, $C(0;16;0)$, $D(0;0;5)$.

168. Скласти рівняння сфери, вписаної в тетраедр із вершинами $A(0;0;0)$, $B(1;1;0)$, $C(1;0;1)$, $D(0;1;1)$.

169. Пряма m обертається навколо прямої l. Визначити тип поверхні обертання, якщо:

а) прямі m і l перетинаються;

б) прямі m і l паралельні;

в) прямі m і l мимобіжні.

170. Знайти рівняння циліндричної поверхні за напрямною лінією γ і напрямом $\vec{p}$ прямолінійних твірних:

а) $\gamma: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1; \\ z = 0, \end{cases} \quad \vec{p}(0;0;1);$

б) $\gamma: \begin{cases} \dfrac{z^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1; \\ x = 0, \end{cases} \quad \vec{p}(-2;0;0);$

в) $\gamma: \begin{cases} x^2 = 2pz; \\ y = 0, \end{cases} \quad \vec{p}(0;3;0).$

171. Показати, що вказані поверхні є циліндричними і визначити тип циліндра:

а) $x^2 - 5z^2 + 4x + 10z - 15 = 0;$

б) $y^2 + 12z - 3 = 0;$

в) $xz = 1;$

г) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 9 = 0;$

д) $x^2 - y^2 + 2xz + 2yz = 1.$

172. Знайти рівняння циліндричної поверхні за напрямною лінією γ і напрямом $\vec{p}$ прямолінійних твірних:

а) $\gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ z = 0, \end{cases} \quad \vec{p}(2;-1;1);$

б) $\gamma: \begin{cases} z^2 - 2y^2 = 3; \\ x = 0, \end{cases} \quad \vec{p}(1;3;4);$

в) $\gamma: \begin{cases} z^2 - 2x = 1; \\ y = 0, \end{cases} \quad \vec{p}(3;2;-2);$

г) $\gamma: \begin{cases} yz = 1; \\ x = 0, \end{cases} \quad \vec{p}(1;1;1).$

У задачах 173-175 система координат є прямокутною декартовою.

173. Скласти рівняння циліндричної поверхні, яка дотикається сфери $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z = 0$, а прямолінійні твірні паралельні вектору $\vec{p}(1;1;1)$.

174. Скласти рівняння циліндричної поверхні, яка дотикається сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, а прямолінійні твірні утворюють рівні кути з координатними осями.

175. Скласти рівняння циліндра обертання, який проходить через точку $M(5;3;2)$, а вісь визначається рівняннями $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+2}{2}$.

176. Знайти рівняння конічної поверхні з вершиною S і напрямною лінією γ:

а) $\gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ z = 0, \end{cases} \quad S(0;0;1);$

б) $\gamma: \begin{cases} z^2 - 4y^2 = 1; \\ x = 0, \end{cases} \quad S(2;1;1);$

в) $\gamma:\begin{cases} x^2+y^2=1; \\ z=-1, \end{cases}$ $S(0;0;0);$

г) $\gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9; \\ x+y+z=1, \end{cases}$ $S(0;0;0).$

177. Показати, що вказані поверхні є конічними:

а) $x^2+y^2-5z^2=0;$

б) $(x-1)^2-y^2-(z+1)^2=0;$

в) $xy+yz+zx=0;$

г) $x^2-y^2+z^2-2xy=0;$

д) $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx.$

178. Довести, що парабола $\begin{cases} x^2+4y^2-4xy-6x+2y+3=0; \\ z=0, \end{cases}$ гіпербола $\begin{cases} 4y^2+4z^2+10yz+2y+2z+3=0; \\ x=0 \end{cases}$ і еліпс $\begin{cases} x^2+4z^2-6x+2z+3=0; \\ y=0 \end{cases}$ лежать на одній конічній поверхні з вершиною $S(1;-1;1).$

У задачах 179-180 система координат є прямокутною декартовою.

179. Знайти рівняння конуса обертання, який містить усі координатні вісі.

180. Знайти геометричне місце прямих, які проходять через точку S і утворюють кут φ з площиною σ:

а) $S(-1;0;0),\ \varphi=\frac{\pi}{3},\ \sigma: x=0;$

б) $S(0;0;0),\ \varphi=\frac{\pi}{4},\ \sigma: x+y+z=1.$

4.2. Еліпсоїд, гіперболоїди, параболоїди

Означення. *Еліпсоїдом* називається поверхня, яка у деякій прямокутній декартовій системі координат визначається рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

Означення. *Однопорожнинним гіперболоїдом* називається поверхня, яка у деякій прямокутній декартовій системі координат визначається рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$

Означення. *Двопорожнинним гіперболоїдом* називається поверхня, яка у деякій прямокутній декартовій системі координат визначається рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$

Означення. *Еліптичним параболоїдом* називається поверхня, яка у деякій прямокутній декартовій системі координат визначається рівнянням $2z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}.$

Означення. *Гіперболічним параболоїдом* називається поверхня, яка у деякій прямокутній декартовій системі координат визначається рівнянням $2z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}.$

Рівняння, які визначають вказані поверхні, називаються канонічними.

Однопорожнинний гіперболоїд і гіперболічний параболоїд є лінійчатими поверхнями.

Однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ має два сімейства прямолінійних твірних:

$$\begin{cases} p_1\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=q_1\left(1+\frac{y}{b}\right); \\ q_1\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=p_1\left(1-\frac{y}{b}\right) \end{cases} \text{ і } \begin{cases} p_2\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=q_2\left(1-\frac{y}{b}\right); \\ q_2\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=p_2\left(1+\frac{y}{b}\right). \end{cases}$$

Гіперболічний параболоїд $2z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ має два сімейства прямолінійних твірних:

$$\begin{cases} p_1 z=q_1\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right); \\ 2q_1=p_1\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) \end{cases} \text{ і } \begin{cases} 2p_2=q_2\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right); \\ q_2 z=p_2\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right). \end{cases}$$

Еліпсоїд, двопорожнинний гіперболоїд, еліптичний параболоїд не мають прямолінійних твірних.

У всіх задачах параграфа система координат є прямокутною декартовою.

181. Дослідити методом перерізів поверхні й побудувати їх зображення:

а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1;$

б) $x^2+4y^2+16z^2=9;$

в) $x^2+y^2+z^2-4x+6y+2z=2;$

г) $2x^2+3y^2+z^2+4x-12y+4z=0.$

182. Написати рівняння еліпсоїда, вісі якого збігаються з координатними осями, і який:

а) містить еліпси $\begin{cases} \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1; \\ z=0 \end{cases}$ та $\begin{cases} \frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1; \\ x=0; \end{cases}$

б) містить еліпси $\begin{cases} x^2 + 16z^2 = 4; \\ y = 0 \end{cases}$ та $\begin{cases} 3y^2 + 8z^2 = 2; \\ x = 0; \end{cases}$

в) містить еліпс $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} = 1; \\ z = 0 \end{cases}$ і проходить через точку $M(1;1;1)$;

г) містить еліпс $\begin{cases} 4z^2 + y^2 = 110; \\ x = 0 \end{cases}$ і проходить через точку $M(-1;2;5)$.

183. Написати рівняння еліпсоїда, площини симетрії якого збігаються з координатними площинами, і який:

а) проходить через точки

$M_1(-1;1;1)$, $M_2\left(0;-1;\sqrt{3}\right)$, $M_3\left(\dfrac{1}{2};\sqrt{\dfrac{3}{2}};0\right)$;

б) проходить через точки

$M_1(1;-2;1)$, $M_2(2;-1;3)$, $M_3(-3;0;2)$.

184. Написати рівняння еліпсоїда з центром у точці $S(1;2;-1)$, вісі якого паралельні координатним осям, і який перетинає кординатні площини Oxy та Oyz по еліпсам $2x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$ та $y^2 + 3z^2 - 4y + 6z - 1 = 0$ відповідно.

185. Написати рівняння еліпсоїда з центром в точці $S(1;1;1)$, площини симетрії якого паралельні координатним площинам, і який проходить через точки $M(0;-2;1)$, $N(2;1;0)$, $O(0;0;0)$.

186. Дослідити методом перерізів поверхні й побудувати їх зображення:

а) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{1} = 1$;

б) $x^2 - 4y^2 + 16z^2 = 3$;

в) $-2x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z = 2$;

г) $2x^2+6y^2-z^2+4x-12y+4z=0;$

д) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}=1;$

е) $x^2+4y^2-z^2=-1;$

ж) $x^2+y^2-z^2-4x+2y+2z=-10;$

з) $x^2+4y^2-9z^2+2x-12y+36z=0.$

187. Написати рівняння однопорожнинного гіперболоїда, вісі якого збігаються з координатними осями, і який:

а) містить лінії $\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1;\\ z=0\end{cases}$ та $\begin{cases}\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{16}=1;\\ x=0;\end{cases}$

б) містить лінії $\begin{cases}-3x^2+16z^2=4;\\ y=0\end{cases}$ та $\begin{cases}3y^2+8z^2=2;\\ z=0;\end{cases}$

в) містить еліпс $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1;\\ z=0\end{cases}$ і проходить через точку $M(4;3;1);$

г) містить гіперболу $\begin{cases}2z^2-y^2=5;\\ x=0\end{cases}$ і проходить через точку $M(-3;2;1).$

188. Написати рівняння двопорожнинного гіперболоїда, вісі якого збігаються з координатними осями, і який:

а) містить гіперболи $\begin{cases}-\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1;\\ z=0\end{cases}$ та $\begin{cases}\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{36}=1;\\ x=0;\end{cases}$

б) містить лінії $\begin{cases}16x^2-3z^2=4;\\ y=0\end{cases}$ та $\begin{cases}z^2+2y^2=4;\\ x=1;\end{cases}$

в) містить гіперболу $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1; \\ z=0 \end{cases}$ і проходить через точку $M(-4;0;1)$;

г) містить гіперболу $\begin{cases} 2z^2-y^2=1; \\ x=0 \end{cases}$ і проходить через точку $M(1;1;-2)$.

189. Дослідити методом перерізів поверхні й побудувати їх зображення:

а) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=2z$;

б) $x^2+4y^2+6z=0$;

в) $y^2+z^2-4x+6y+2z=0$;

г) $2x^2+z^2+4x-2y+4z=5$;

д) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{1}=2z$;

е) $x^2+y-z^2=-1$;

ж) $x^2-z^2-2x+2y+2z=0$;

з) $4y^2-9z^2+2x-12y+36z=1$.

190. Написати рівняння еліптичного параболоїда, вершиною якого є початок координат, вісь збігається з віссю Oz, і який:

а) містить параболи $\begin{cases} x^2=6z; \\ y=0 \end{cases}$ та $\begin{cases} y^2=10z; \\ x=0; \end{cases}$

б) містить лінії $\begin{cases} z=9y^2; \\ x=0 \end{cases}$ та $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{3}+\dfrac{3y^2}{2}=1; \\ z=6; \end{cases}$;

в) містить параболу $\begin{cases} 6x^2=5z; \\ y=0 \end{cases}$ і проходить через точку $M(-1;1;2)$;

г) містить параболу $\begin{cases} -12z = y^2; \\ x = 0 \end{cases}$ і проходить через точку $M(-2;2;-2)$.

191. Написати рівняння гіперболічного параболоїда, вершиною якого є початок координат, вісь збігається з віссю Oz, і який:

а) містить параболи $\begin{cases} x^2 = z; \\ y = 0 \end{cases}$ та $\begin{cases} y^2 = -4z; \\ x = 0; \end{cases}$

б) містить параболу $\begin{cases} z = 9y^2; \\ x = 0 \end{cases}$ та гіперболу $\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 1; \\ x = -1; \end{cases}$;

в) містить параболу $\begin{cases} 7x^2 = 3z; \\ y = 0 \end{cases}$ і проходить через точку $M(-1;1;1)$;

г) містить параболу $\begin{cases} 8z = y^2; \\ x = 0 \end{cases}$ і проходить через точку $M\left(2;-2\sqrt{3};1\right)$.

192. Знайти рівняння прямолінійних твірних поверхні $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$, які проходять через точку $M(3;-2;1)$.

193. Знайти рівняння прямолінійних твірних поверхні $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{2} = 1$, які проходять через точку $M\left(-2\sqrt{2};3;2\right)$.

194. Знайти кут між прямолінійними твірними поверхні $x^2 - y^2 + z^2 = 6$, які проходять через точку $M(3;-2;1)$.

195. Знайти рівняння прямолінійних твірних поверхні $xy + z^2 = 1$, які проходять через точку $M(-2;4;3)$.

196. Знайти рівняння прямолінійних твірних поверхні $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, які перпендикулярні вектору $\vec{n}(1;1;-1)$.

197. Знайти рівняння прямолінійних твірних поверхні $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{1}=1,$ які паралельні площині $3x+y-6z=0.$

198. Знайти кут між прямолінійними твірними поверхні $x^2+2yz=4,$ які паралельні площині $x+y-3=0.$

199. Знайти рівняння прямолінійних твірних поверхні $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=2z,$ які проходять через точку $M\left(12;-4;6\right).$

200. Знайти рівняння прямолінійних твірних поверхні $-2y^2+3z^2=x,$ які проходять через точку $M\left(-1;1;1\right).$

201. Знайти рівняння прямолінійних твірних поверхні $xy=z,$ які проходять через точку $M\left(-2;2;-4\right).$

202. Знайти кут між прямолінійними твірними поверхні $5x^2-2y^2=2z,$ які проходять через точку $M\left(2;-3;1\right).$

203. Знайти рівняння прямолінійних твірних поверхні $x^2-z^2=2y,$ які перпендикулярні вектору $\vec{n}\left(4;1;-2\right).$

204. Знайти рівняння прямолінійних твірних поверхні $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=2z,$ які паралельні площині $2x+y-z=7.$

205. Знайти кут між прямолінійними твірними поверхні $x+2yz=4,$ які паралельні площині $x+y-1=0.$

206. Довести, що площина, яка проходить через центр і одну з прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда, перетинає його і по другій прямолінійній твірній, яка паралельна до заданої.

207. Довести, що площина дотикається до гіперболічного параболоїда тоді і тільки тоді, коли перетинає його по двох прямолінійних твірних.

4.3. Загальна теорія алгебраїчних поверхонь другого порядку

Означення. *Поверхнею другого порядку* називається поверхня, яка в деякій афінній системі координат задається алгебраїчним рівнянням другого степеня, тобто рівнянням виду $F(x,y,z)=0,$ де $F-$многочлен другого степеня.

Загальне рівняння поверхні другого порядку

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz+2a_{10}x+2a_{20}y+$$
$$+2a_{30}z+a_{00}=0.$$

Це рівняння можна записати в такому вигляді

$xF_1(x,y,z)+yF_2(x,y,z)+zF_3(x,y,z)+F_0(x,y,z)=0,$ де

$F_1(x,y,z)=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{10},\quad F_2(x,y,z)=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{20},$

$F_3(x,y,z)=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{30},\quad F_0(x,y,z)=a_{01}x+a_{02}y+a_{03}z+a_{00},$

при цьому $a_{ij}=a_{ji}.$

Означення. Напрям $\vec{p}$ називається *неасимптотичним* напрямом відносно поверхні Ф другого порядку, якщо будь-яка пряма, яка паралельна вектору $\vec{p},$ перетинає поверхню Ф рівно у двох точках. У інших випадках напрям називається *асимптотичним*.

Асимптотичні напрями визначаються рівнянням

$$a_{11}p_1^{\ 2}+a_{22}p_2^{\ 2}+a_{33}p_3^{\ 2}+2a_{12}p_1p_2+2a_{23}p_2p_3+2a_{13}p_1p_3=0.$$

Означення. Конус, прямолінійні твірні якого мають асимптотичні напрями відносно поверхні Ф другого порядку, називається *конусом асимптотичних напрямів* цієї поверхні. Конус асимптотичних напрямів поверхні з вершиною в її центрі називається *асимптотичним конусом* поверхні.

Означення. *Центром* поверхні Φ другого порядку називається її центр симетрії.

Поверхня, яка має рівно один центр, називається *центральною*. В інших випадках – *нецентральною*.

Координати центра визначаються системою рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) \equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{10} = 0; \\ F_2(x,y,z) \equiv a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{20} = 0; \\ F_3(x,y,z) \equiv a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{30} = 0. \end{cases}$$

Означення. Точка поверхні Φ другого порядку, яка є її центром, називається *особливою* точкою поверхні Φ. У іншому випадкові – *неособливою*.

Означення. Пряма, яка проходить через неособливу точку M поверхні Φ другого порядку, або перетинає поверхню у двох точках, що збігаються, або належить цій поверхні, називається *дотичною прямою* до поверхні. Геометричне місце прямих, які дотикаються поверхні Φ в точці $M \in \Phi$, називається *дотичною площиною* до поверхні. Точка M називається *точкою дотику*.

Дотична площина в точці $M_0(x_0;y_0;z_0) \in \Phi$ має рівняння $xF_1(x_0,y_0,z_0) + yF_2(x_0,y_0,z_0) + zF_3(x_0,y_0,z_0) + F_0(x_0,y_0,z_0) = 0.$

Означення. Пряма, яка проходить через точку $M \in \Phi$ перпендикулярно площині, що дотикається поверхні в цій точці, називається *нормаллю* до поверхні Φ в точці M.

Нормаль в точці $M_0(x_0;y_0;z_0) \in \Phi$ у прямокутній декартовій системі координат має рівняння

$$\frac{x - x_0}{F_1(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y - y_0}{F_2(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z - z_0}{F_3(x_0,y_0,z_0)}.$$

Означення. Геометричне місце середин хорд поверхні Ф другого порядку, які паралельні неасимптотичному напряму $\vec{p}$ відносно поверхні, називається *діаметральною площиною* поверхні, спряженою хордам напряму $\vec{p}$.

Діаметральна площина, спряжена хордам напряму $\vec{p}\left(p_1; p_2; p_3\right)$, задається рівнянням

$$p_1F_1\left(x,y,z\right)+p_2F_2\left(x,y,z\right)+p_3F_3\left(x,y,z\right)=0.$$

Означення. Напрям $\vec{p}$, який є перпендикулярним до діаметральної площини поверхні Ф другого порядку, спряженої хордам напряму $\vec{p}$, називається *головним напрямом* поверхні Φ. Відповідна діаметральна площина називається *головною діаметральною площиною*.

У прямокутній декартовій системі координат *головний напрям* $\vec{p}\left(p_1; p_2; p_3\right)$ визначається системою рівнянь

$$\begin{cases} \left(a_{11}-\lambda\right)p_1+a_{12}p_2+a_{13}p_3=0; \\ a_{21}p_1+\left(a_{22}-\lambda\right)p_2+a_{23}p_3=0; \\ a_{31}p_1+a_{32}p_2+\left(a_{33}-\lambda\right)p_3=0, \end{cases}$$

де λ є коренем характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

208. Для заданої поверхні визначити лінійні форми $F_1\left(x,y,z\right)$, $F_2\left(x,y,z\right)$, $F_3\left(x,y,z\right)$, $F_0\left(x,y,z\right)$:

а) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1;$

б) $2x^2+y^2-3z^2+xy-3yz+5xz+x+y-2z+1=0;$

в) $6xy-2yz+xz-x-z+3=0;$

г) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$

209. Яким умовам задовольняють коефіцієнти загального рівняння поверхні другого порядку, що містить початок координат?

210. Яким умовам задовольняють коефіцієнти загального рівняння поверхні другого порядку, що містить вісь абсцис?

211. Визначити точки перетину поверхні з координатними осями:

а) $x^2+y^2-4z^2+4xy-6yz+2xz+5x+7y-z+6=0;$

б) $3x^2-y^2-6z^2+xy-7yz+9xz+12x+11y-12z+12=0.$

212. Визначити точки перетину поверхні з прямою l:

а) $x^2+y^2-z^2+4xy-6yz+2xz+2x+4y-2z=0,$

$$l:\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{1};$$

б) $2x^2-4y^2-z^2+8xy-12yz+6xz+12x+16y-2z+1=0,$

$$l:\begin{cases} x=3-t; \\ y=1+2t; \\ z=-2t. \end{cases}$$

213. Навести приклади асимптотичних і неасимптотичних напрямів відносно поверхні:

а) $x^2-y^2-z^2+2xy-2yz+2xz+x+y-z+5=0;$

б) $4x^2+y^2+9z^2+4xy+6yz+12xz+10x+y-z=0;$

в) $x^2+y^2+16z^2+2xy+4yz-2xz+5x+2y-3z-7=0;$

г) $16x^2+y^2-8xy+3yz+12xz+2x+6y-7z-9=0.$

214. Проаналізувати множину асимптотичних напрямів відносно еліпсоїда, гіперболоїдів, параболоїдів.

215. Яким умовам задовольняють коефіцієнти загального рівняння поверхні другого порядку, відносно якої напрями всіх координатних осей є асимптотичнми?

216. Яким умовам задовольняють коефіцієнти загального рівняння поверхні другого порядку, що має єдиний (дійсний) асимптотичний напрям – напрям вісі ординат?

217. Записати рівняння асимптотичного конуса поверхні:

а) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1;$

б) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z;$

в) $4x^2+y^2+9z^2+16x+4y-12z-64=0;$

г) $x^2-4xy-yz+2xz=0.$

218. Скласти рівняння геометричного місця прямих, які проходять через точку M і мають асимптотичний напрям відносно поверхні Φ:

а) $M\left(2;-3;1\right), \Phi: x^2+y^2+xy-8yz+2xz+x+y-2z-4=0;$

б) $M\left(5;9;2\right), \Phi: 3x^2-y^2-2z^2-3yz+5xz+3x+y+7=0.$

219. Визначити лінію перетину асимптотичного конуса однопорожнинного гіперболоїда $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{5}=1$ і площини $z=2 \quad \left(R\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)\right)$. Знайти ексцентриситет цієї лінії.

220. Визначити лінію перетину асимптотичного конуса двопорожнинного гіперболоїда $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=-1$ і площини $x=0,5 \quad \left(R\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)\right)$. Знайти ексцентриситет цієї лінії.

221. Визначити лінію перетину конуса асимптотичних напрямів гіперболічного параболоїда $4x^2-z^2=y$ і площини $y+2=0.$

222. Знайти центри поверхонь:

а) $x^2+8y^2+2z^2-4yz+2xz+4x-5=0;$

б) $x^2+y^2+9z^2+2xy+12xz-6x+6y+3=0;$

в) $4x^2-y^2+9z^2-3yz+12xz-4x+y-6z-1=0;$

г) $xy+yz+xz-x-y-z-1=0;$

д) $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2xz-4x+4y-4z=0;$

е) $4x^2+9z^2-12yz-5z-10=0.$

223. Визначити лінії перетину поверхні площинами, які проходять через центр поверхні паралельно до координатних площин:

а) $4x^2-y^2+z^2-8xy-2yz+2xz-6x+4y-4z-16=0;$

б) $x^2+4y^2+16z^2-4xy-6yz+12xz-2x+4y-6z+1=0.$

224. Визначити рівняння площини, яка перетинає поверхню $2x^2-y^2-z^2-4xy+8yz+4xz-8x+2y-8z+2=0$ по лінії, центр якої збігається з початком координат.

225. Визначити рівняння площини, яка дотикається поверхні Φ в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$:

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$

б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$

в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1;$

г) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z;$

д) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z.$

226. Яким умовам повинні задовольняти коефіцієнти загального рівняння поверхні другого порядку, що:

а) дотикається координатної вісі Ox;

б) дотикається координатної площини Oxy?

227. Скласти рівняння площини, яка дотикається поверхні $x^2+8y^2+2z^2-4yz+2xz+4x-17=0$ в точці $M(1;0;2)$.

228. Скласти рівняння площини, яка дотикається поверхні $3x^2+2y^2+z^2-3xy-2yz+2xz-2x+2y-2z-1=0$ в точці $M(1;1;1)$.

229. Визначити рівняння дотичних площин до поверхні $xy+yz+xz-2x-2y-2z-9=0,$ паралельних площині $x+y+z+1=0.$

230. Визначити рівняння дотичних площин до поверхні $6x^2+4y^2+4z^2+4yz+8x-1=0,$ паралельних площині $2x-3y-4=0.$

231. Визначити, при яких значеннях параметра m площина $2x-2y-z+m=0$ дотикається еліпсоїда $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1.$

232. Знайти рівняння площини, яка дотикається поверхні $x^2+2y^2+3z^2-2xy+2x-4y-12z+4=0$ і містить вісь абсцис.

233. Знайти рівняння площини, яка дотикається поверхні $x^2+2y^2-2xy-12z+4=0$ і проходить через точки $A(1;1;-1), B(2;2;-3)$.

У задачах 234-251 система координат є прямокутною декартовою.

234. Визначити, при яких значеннях параметра m площина $3x-4y-12z+m=0$ дотикається сфери $x^2+y^2+z^2=x-y.$

235. Довести, що через пряму $\begin{cases} 3x+4y-2z+10=0; \\ x+y+2z=0 \end{cases}$ можна провести дві площини, які дотикаються сфери $x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z-15=0.$ Скласти рівняння цих площин.

236. Визначити рівняння нормалі в точці M до поверхні Φ:

а) $\Phi: x^2+y^2+z^2-2x-2y+4z-3=0, \quad M(1;1;1);$

б) $\Phi: x^2+2y^2-4z^2-2xy-2yz+x-4z-6=0, \quad M(2;-1;1).$

237. На поверхні $3x^2+5z^2-2xy-6yz+12xz+2y+10z-3=0$ визначити точки, в яких нормалі були б паралельні вісі Oz.

238. На поверхні $xy+yz+xz-2x-2y-2z-9=0$ визначити точки, в яких нормалі були б паралельні вісі Ox.

239. Довести, що всі нормалі до еліптичного циліндра паралельні деякій площині.

240. Довести, що всі нормалі до параболічного циліндра паралельні деякій площині.

241. Знайти рівняння діаметральної площини поверхні Φ, спряженої хордам напряму $\vec{p}$:

а) $\Phi: x^2+y^2+z^2-6x-2y+8z-1=0, \quad \vec{p}(1;1;1);$

б) $\Phi: x^2+4yz-2y-2z=0, \quad \vec{p}(-1;2;-3);$

в) $\Phi: 3x^2+y^2-4z^2-xy-yz+xz-x+3y-7=0, \quad \vec{p}(-1;3;5);$

г) $\Phi: x^2+y^2-xy-yz-xz-2z+5=0, \quad \vec{p}(4;-3;2).$

242. Знайти рівняння діаметральної площини поверхні Φ, яка паралельна площині σ:

а) $\Phi: x^2-2y^2+z^2=5, \quad \sigma: x-3y-5z-7=0;$

б) $\Phi: x^2+y^2+z^2-x-y-z=0, \quad \sigma: 2x-4y-8z=0;$

в) $\Phi: x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz=1, \quad \sigma: x+y+z-2=0;$

г) $\Phi: x^2+y^2-xy-yz-xz-2z+5=0, \quad \sigma: x=1.$

243. Знайти рівняння діаметральної площини поверхні Φ, яка містить пряму l:

а) $\Phi: x^2+2y^2-z^2+2xy-4yz-2x-2z-1=0,$

$$l: \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{-1};$$

б) $\Phi: x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z-1=0, \; l: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3};$

в) $\Phi: 3x^2+y^2-z^2+6xy-2yz-2xz+x+y+z-10=0,$

$$l: \begin{cases} x=1-t; \\ y=2+2t; \\ z=5-3t; \end{cases}$$

г) $\Phi: x^2+y^2+z^2+2xy-4yz+6xz-8x-5=0,$

$$l: \begin{cases} x-2y-1=0; \\ x+3y-z-4=0. \end{cases}$$

244. Перевірити, що площина σ є діаметральною площиною поверхні Φ. Знайти напрям хорд, спряжених площині σ:

а) $\Phi: x^2-yz-x-y-z=0, \quad \sigma: 2x-y+2z=0;$

б) $\Phi: x^2+y^2-z-7-1=0, \quad \sigma: 6x+8y-5=0;$

в) $\Phi: x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz-5=0, \quad \sigma: x+y+z=0;$

г) $\Phi: x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z=1, \quad \sigma: 3x+4y-12z-30=0.$

245. Визначити рівняння геометричного місця центрів перерізів поверхні $x^2 - 4y^2 + z^2 + 4yz + 8xz + x + 2y - z = 1$ площинами, які паралельні кординатній площині Oxy.

246. Визначити рівняння геометричного місця центрів перерізів поверхні $3x^2 + 4y^2 + z^2 + 6xy + 4yz - 2x - 3 = 0$ площинами, які паралельні площині $x - 3y + z - 10 = 0$.

247. Визначити орти головних напрямів поверхонь:

а) $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 - 6xy - 2x + 6y + 4z - 5 = 0$;

б) $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2yz - 2xz + 12x - 8y + 6z - 7 = 0$.

248. Знайти головні напрями і головні діаметральні площини поверхонь:

а) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4xz - 2x + 4y + 8z - 6 = 0$;

б) $xy + yz + xz - x - y - z = 0$.

249. Звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду, визначити тип поверхні, записати формули перетворення координат:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y + 8z - 1 = 0$;

б) $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - x + 6y + 9z = 0$;

в) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 2x + 4y + 6z$;

г) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 3z - 7 = 0$;

д) $2x^2 - 3y^2 + 3x - 2y - 5z - 3 = 0$;

е) $3y^2 - 5z^2 - 6x + 9y + 10z - 13 = 0$.

250. Звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду, визначити тип поверхні, записати формули перетворення координат:

а) $x^2 - 2yz - 2x - 6 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 2xy + z^2 = 2$;

в) $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$;

г) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 9 = 0$;

д) $6x^2 + 9y^2 + z^2 - 6xy - 4xz = 0$;

е) $xy + yz + zx = 0$.

251. Звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду, визначити тип поверхні, записати формули перетворення координат:

а) $xy + yz + zx = x + y + z$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx + 2x + 2y + 2z$;

в) $4x^2 - 5y^2 + 6z^2 - 4xy + 4yz + 4x + 6y + 4z - 27 = 0$;

г) $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2yz + 2xz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0$;

д) $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz + 2xz + 2x - 6y - 2z + 3 = 0$;

е) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$;

ж) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6xz - 2x + 6y + 2z = 0$;

з) $5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$;

и) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x - 2y = 0$;

к) $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy - 6yz + 4xz + 4x - 6y + 2z - 5 = 0$;

л) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz + 2x + y + z = 0$;

м) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 4yz - 10xz + 2x + 4y - 4z - 1 = 0$;

н) $4x^2 + y^2 + 9z^2 + 4xy - 6yz - 12xz + 6x - 2y - 6z + 2 = 0$;

о) $y^2 + 2xy + 2yz + 4xz - 4x - 2y = 0$;

п) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy - 12yz + 6xz - x + 2y - 3z - 6 = 0$;

р) $3x^2 - 4y^2 + 3z^2 + 4xy - 4yz + 10xz + 6x - 20y - 14z - 24 = 0$.

5. Геометричні перетворення простору

Означення. Перетворення простору, при якому будь-які три точки, що лежать на одній прямій, відображуються в точки, що теж лежать на одній прямій, і зберігається їх просте відношення, називається *афінним.*

Звя’зок між координатами точки $M(x;y;z)$ та її образа $M'(x';y';z')$ у фіксованій афінній системі координат при

афінному перетворенні встановлюється формулами
$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + x_0; \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + y_0; \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + z_0, \end{cases} \text{де} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Матричний запис афінного перетворення: $X' = AX + X_0$, де
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \det A \neq 0.$$

Означення. *Перетворенням подібності з коефіцієнтом* $k > 0$ називається перетворення простору, що для будь-яких точок A і B та їх образів A' і B' виконується умова $A'B' = kAB.$

Означення. *Рухом* простору називається перетворення простору, яке зберігає відстані між точками, тобто для будь-яких точок A і B та їх образів A' і B' виконується умова $A'B' = AB.$

Аналітично рухи і перетворення подібності визначаються тими ж формулами, що і афінні перетворення, але для рухів матриця A є ортогональною, а для перетворень подібності – пропорційною до ортогональної (в прямокутній декартовій системі координат).

252. З'ясувати, які з відображень простору в себе, заданих аналітично в деякій афінній системі координат, є афінними:

а) $\begin{cases} x' = x + y + z + 1; \\ y' = x + y - z + 2; \\ z' = x - y + z - 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x' = 2x + y + 3z + 5; \\ y' = x - 2y - z + 1; \\ z' = 4x - 3y + z - 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = y; \\ y' = z; \\ z' = x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x' = x^2 + y + z; \\ y' = x + y^2 + z; \\ z' = x + y + z^2. \end{cases}$

253. Афінне перетворення задане формулами $\begin{cases} x' = x + y; \\ y' = y + z; \\ z' = x + z. \end{cases}$ Знайти:

а) координати образів точок $M_1(0;0;0), M_2(3;-1;0), M_3(5;3;1), M_4(1;-1;7), M_5(6;2;-9)$;

б) координати прообразів точок $M_1'(0;0;0), M_2'(1;0;0), M_3'(2;2;2), M_4'(3;-5;7), M_5'(-4;1;9)$;

в) рівняння образа і прообраза площини $2x - 4y + 8z - 1 = 0$;

г) рівняння образа і прообраза прямої $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+4}{4}$.

254. Афінне перетворення задане формулами $\begin{cases} x' = x + y + z + 1; \\ y' = 2x - y - z; \\ z' = -x + y + 3z - 2. \end{cases}$

Знайти:

а) координати образів точок $M_1(0;0;0)$, $M_2(-1;1;0)$, $M_3(2;-2;6)$, $M_4(3;-1;-2)$, $M_5(1;2;-5)$;

б) координати прообразів точок $M_1'(1;0;-2)$, $M_2'(0;1;-5)$, $M_3'(2;-4;1)$, $M_4'(5;-6;10)$, $M_5'(0;0;0)$;

в) рівняння образа і прообраза площини $2x - 4y + 8z - 1 = 0$;

г) рівняння образа і прообраза прямої $\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z-8}{7}$.

255. Знайти аналітичне задання афінного перетворення, оберненого до заданого:

а) $\begin{cases} x' = x + y - z + 1; \\ y' = -x + y + z; \\ z' = x - y + z - 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x' = x + 2y + 3z - 6; \\ y' = y + 2z - 3; \\ z' = z - 1. \end{cases}$

256. Дано тетраедр $SABC$. Точки A', B', C' є серединами ребер BC, CA, AB відповідно. Записати формули афінного перетворення простору, яке репер $R(S, A, B, C)$ відображує в репер $R(S, A', B', C')$.

257. Дано тетраедр $SABC$. Точки A', B', C' є серединами ребер SA, SB, SC відповідно, S' є точкою перетину медіан трикутника ABC. Записати формули афінного перетворення простору, яке репер $R(S, A, B, C)$ відображує в репер $R(S', A', B', C')$.

258. Навести приклад афінного перетворення, яке еліпсоїд $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$ відображує в еліпсоїд $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{49} = 1.$

259. Навести приклад афінного перетворення, яке однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ відображує в гіперболоїд $xy + z^2 = 2$.

260. Записати формули афінного перетворення, яке точки $M_1(0;1;1), M_2(1;0;1), M_3(1;1;0), M_4(1;1;1)$ відображує в точки $M_1'(0;1;0), M_2'(3;3;-1), M_3'(-2;8;8), M_4'(1;3;1)$ відповідно.

261. Записати формули афінного перетворення, яке точки $M_1(-1;1;1), M_2(1;-1;1), M_3(1;1;-1), M_4(0;0;0)$ відображує в точки $M_1'(1;0;0), M_2'(0;1;0), M_3'(0;0;1), M_4'(2;2;2)$ відповідно.

262. Знайти інваріантні точки, прямі, площини афінних перетворень, заданих формулами:

а) $\begin{cases} x' = y + z; \\ y' = x + z; \\ z' = x + y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x' = 2x + y + z - 2; \\ y' = x + 2y + z - 4; \\ z' = x + y + 2z - 6. \end{cases}$

263. Довести, що будь-які два дійсні еліпсоїди є афінно-еквівалентними.

264. Довести, що будь-які два однопорожнинні гіперболоїди є афінно-еквівалентними.

265. Довести, що будь-які два двопорожнинні гіперболоїди є афінно-еквівалентними.

266. Довести, що будь-які два еліптичні параболоїди є афінно-еквівалентними.

267. Довести, що будь-які два гіперболічні параболоїди є афінно-еквівалентними.

268. Довести, що при афінному перетворенні простору відношення об'ємів тетраедрів зберігається.

269. З'ясувати, як змінюється об'єм тетраедра при афінному перетворенні простору.

У задачах 270-294 система координат є прямокутною декартовою.

270. З'ясувати, які з відображень простору в себе, заданих аналітично в деякій прямокутній декартовій системі координат, є рухами:

а) $\begin{cases} x' = y; \\ y' = z; \\ z' = x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x' = 2 - x; \\ y' = -1 - y; \\ z' = 3 - z; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = 2x; \\ y' = 2y; \\ z' = 2z; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x' = x; \\ y' = y; \\ z' = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x' = y + z - 2; \\ y' = x + z + 4; \\ z' = x + y - 3; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{6}}x + \dfrac{1}{\sqrt{6}}y - \dfrac{2}{\sqrt{6}}z - 1; \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}y + \dfrac{1}{\sqrt{3}}z + 2; \\ z' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y - 10. \end{cases}$

271. Перевірити, що перетворення, задане формулами

$$\begin{cases} x' = -z + 2; \\ y' = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y + 1; \\ z' = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y - 2, \end{cases}$$

є рухом. Знайти:

а) координати образів і прообразів точок $O(0;0;0), M(1;1;-2), N(10;0;5)$;

б) рівняння образа і прообраза площини $4x - 10y + 5z - 3 = 0$;

в) рівняння образа і прообраза прямої $\dfrac{x-10}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-6}{3}$.

272. Перевірити, що перетворення, задане формулами

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}y + \dfrac{2}{3}z - 1; \\ y' = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}y - \dfrac{2}{3}z - 2; \\ z' = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3}z + 4, \end{cases}$$

є рухом. Знайти:

а) координати образів і прообразів точок $O(0;0;0), M(-1;-2;4), N(-3;-6;9)$;

б) рівняння образа і прообраза площини $x - 2y + z - 3 = 0$;

в) рівняння образа і прообраза прямої $\frac{x-6}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z}{2}$.

273. Знайти аналітичне задання рухів, обернених до рухів, які задано формулами:

а) $\begin{cases} x'=-z+2; \\ y'=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+1; \\ z'=\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x'=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-1; \\ y'=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z-2; \\ z'=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z+4. \end{cases}$

274. Записати формули, які визначають рухи:

а) паралельне перенесення на вектор $\vec{p}\left(a;b;c\right)$;

б) симетрія відносно координатної площини Oxy;

в) симетрія відносно площини $y=h$;

г) симетрія відносно координатної вісі Oz;

д) симетрія відносно точки $S\left(x_0;y_0;z_0\right)$;

е) поворот навколо координатної вісі Oz на кут φ.

275. Знайти координати образа і прообраза точки $M\left(3;6;-4\right)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{p}\left(2;-5;7\right)$.

276. Знайти рівняння образа і прообраза прямої $\begin{cases} x=2-3t; \\ y=3+4t; \\ z=1-2t \end{cases}$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{p}\left(1;-3;4\right)$.

277. Знайти рівняння образа і прообраза площини $x+y+z-3=0$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{p}\left(3;2;-5\right)$.

278. Знайти рівняння образа прямої $\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-2}{2}$ при симетрії відносно точки $S(5;-2;3)$.

279. Знайти рівняння образа площини $3x-4y-12z+25=0$ при симетрії відносно точки $S(2;-1;7)$.

280. Чи існує точка, відносно якої є симетричними прямі l та l', якщо:

а) l та l' паралельні;
б) l та l' перетинаються;
в) l та l' мимобіжні?

281. Знайти координати образа точки $M(2;-6;3)$ при симетрії відносно площини $3x-4y+z-7=0$.

282. Знайти координати образа точки $M(-1;-3;4)$ при симетрії відносно площини $3x-y-z-7=0$.

283. Чи існує площина, відносно якої є симетричними прямі l та l', якщо:

а) l та l' паралельні;
б) l та l' перетинаються;
в) l та l' мимобіжні?

284. Знайти координати образа точки $M(3;-1;5)$ при симетрії відносно прямої $x+2=y+3=z$.

285. Знайти координати образа точки $M(0;1;-1)$ при симетрії відносно прямої $\begin{cases} 4x-3y-3z-18=0; \\ y-z=0. \end{cases}$

286. Чи існує пряма, відносно якої є симетричними прямі l та l', якщо:

а) l та l' паралельні;
б) l та l' перетинаються;
в) l та l' мимобіжні?

287. Знайти інваріантні точки, прямі, площини рухів, заданих формулами:

а) $\begin{cases} x' = y; \\ y' = z; \\ z' = x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x' = 2 - x; \\ y' = 4 - y; \\ z' = -2 - z; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{2}{3}; \\ y' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}; \\ z' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}. \end{cases}$

288. З'ясувати, які з відображень простору в себе, заданих аналітично в деякій прямокутній декартовій системі координат, є перетвореннями подібності:

а) $\begin{cases} x' = -2x; \\ y' = -2y; \\ z' = -2z; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x' = x + 2y + 2z - 5; \\ y' = 2x + y - 2z + 1; \\ z' = 2x - 2y + z + 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = x + y + z - 2; \\ y' = x + y - z + 2; \\ z' = x - y + z + 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x' = x + y - 2z - 1; \\ y' = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + \sqrt{2}z + 2; \\ z' = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}y - 3. \end{cases}$

289. Записати формули, які визначають гомотетію з коефіцієнтом k відносно точки $S\left(x_0; y_0; z_0\right)$.

290. Точки $M(a;b;c)$ і $M'(a';b';c')$ є відповідними точками гомотетії з коефіцієнтом k. Записати формули, які визначають гомотетію.

291. Точки $M(2;3;5)$ і $M'(4;5;13)$ є відповідними точками гомотетії відносно точки $S(1;2;1)$. Знайти:

а) координати образів і прообразів точок $O(0;0;0), N(-3;-2;2)$;

б) рівняння образа і прообраза площини $3x-4y+z-3=0$;

в) рівняння образа і прообраза прямої $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{-3}$.

292. Знайти інваріантні точки, прямі, площини перетворень подібності, заданих формулами:

а) $\begin{cases} x'=-3y; \\ y'=-3z; \\ z'=-3x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x'=3-2x; \\ y'=6-2y; \\ z'=-3-2z; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x'=-x+2y+2z-2; \\ y'=-2x+y-2z+4; \\ z'=2x+2y-z-2. \end{cases}$

293. При яких значеннях λ і μ є подібними еліпсоїди $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{\mu}+\dfrac{z^2}{100}=1$ та $\lambda x^2+4y^2+9z^2-4y+12z-15=0$? Знайти коефіцієнт подібності.

294. При яких значеннях λ є подібними гіперболічні параболоїди $xy=z$ та $\lambda x^2+4y^2=2\lambda z$? Знайти коефіцієнт подібності.

295. Довести, що будь-які дві сфери є подібними.

296. Довести, що будь-які два параболічні циліндри є подібними.

297. Довести, що будь-які два параболоїди обертання є подібними.

298. Знайти необхідні й достатні умови, при яких є гомотетичними два задані відрізки у просторі.

299. У просторі дано два нерівні трикутники з відповідно паралельними сторонами. Чи будуть ці трикутники гомотетичними?

300. У просторі дано дві сфери, які мають різні центри і різні радіуси. Визначити всі гомотетії, які одну сферу відображують в іншу.

301. Точки A', B', C', D' є центрами мас граней *BCD*, *CDA*, *DAB*, *ABC* тетраедра *ABCD* відповідно. Довести, що тетраедри *ABCD* і $A'B'C'D'$ гомотетичні. Знайти коефіцієнт гомотетії.

6. Контрольні роботи

6.1. Зразки розв'язань задач

Задача №1. На вісі абсцис знайти точки, відстань від яких до точки $A(-3;4;8)$ дорівнює 12.

Розв'язання. Нехай шуканою є точка $B(b_1;b_2;b_3)$. Оскільки вона належить вісі *Ox*, то $b_2=b_3=0$. За умовою $AB=12$. Тому скористаємося формулою відстані між двома точками (довжини відрізка):

$$AB=\sqrt{(b_1-(-3))^2+(0-4)^2+(0-8)^2}=\sqrt{b_1^2+6b_1+89}.$$

Або $12=\sqrt{b_1^2+6b_1+89}$. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату $144=b_1^2+6b_1+89;$ $b_1^2+6b_1-55=0.$ Розв'язавши одержане квадратне рівняння, знайдемо $b_1=5, b_2=-11.$

Відповідь: $B_1(5;0;0), B_2(-11;0;0).$

Задача №2. Центр мас однорідного стержня знаходиться в точці $C(1;-1;5)$, а один із його кінців у точці $A(-2;-1;7)$. Знайти координати другого кінця *B* цього стержня.

Розв'язання. Оскільки стержень однорідний, то його центр мас збігається із серединою. Тому скористаємося формулами поділу відрізка навпіл $x=\dfrac{x_1+x_2}{2};\quad y=\dfrac{y_1+y_2}{2};\quad z=\dfrac{z_1+z_2}{2}.$ Невідомими є координати точки *B*, тобто $(x_2;\, y_2;\, z_2)$. Виразивши невідомі із наведених формул, знайдемо

$$x_2 = 2x - x_1 = 2-(-2) = 4;$$
$$y_2 = 2y - y_1 = -2-(-1) = -1;$$
$$z_2 = 2z - z_1 = 10-7 = 3.$$

Відповідь: *B*(4; –1; 3).

Задача №3. Відрізок, обмежений точками $A(-1;8;3)$ і $B(9;-7;-2)$, поділений точками *K*, *L*, *M*, *N* на п'ять рівних частин. Знайдіть координати точки *M*.

Розв'язання. Точка *M* поділяє відрізок *AB* у відношенні $\lambda=\dfrac{3}{5}$. Скористаємося формулами поділу відрізка у відношенні λ.

$$m_1=\frac{a_1+\lambda b_1}{1+\lambda}=\frac{-1+\frac{3}{5}\cdot 9}{1+\frac{3}{5}}=\frac{22}{8}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4};$$

$$m_2=\frac{a_2+\lambda b_2}{1+\lambda}=\frac{8+\frac{3}{5}\cdot(-7)}{1+\frac{3}{5}}=\frac{19}{8}=2\frac{3}{8};$$

$$m_3=\frac{a_3+\lambda b_3}{1+\lambda}=\frac{3+\frac{3}{5}\cdot(-2)}{1+\frac{3}{5}}=\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}.$$

Відповідь: $M\left(2\dfrac{3}{4};\ 2\dfrac{3}{8};\ 1\dfrac{1}{8}\right).$

Задача №4. Дано вершини трикутника $A(1;-1;2)$, $B(3;0;-3)$, $C(1;3\ \ -1)$. Знайти довжину його висоти, проведеної із вершини B.

Розв'язання. Як відомо, площа трикутника дорівнює півдобутку основи на висоту. Тобто в нашому випадку $S=\frac{1}{2}AC\cdot h$. Звідки $h=\frac{2S}{AC}$.

Знайдемо довжину основи AC:

$$AC=\sqrt{(1-1)^2+(3-(-1))^2+(-1-2)^2}=\sqrt{16+9}=5.$$

Але площа трикутника дорівнює половині модуля векторного добутку векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

Тому знайдемо координати цих векторів: $\overrightarrow{AB}(2;1;-5)$, $\overrightarrow{AC}(0;4;-3)$.

Обчислимо їх векторний добуток:

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -5\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot 1\cdot(-3)+\vec{j}\cdot(-5)\cdot 0+2\cdot 4\cdot\vec{k}-\vec{k}\cdot 1\cdot 0-$$

$$-\vec{j}\cdot 2\cdot(-3)-(-5)\cdot 4\cdot\vec{i}=17\vec{i}+6\vec{j}+8\vec{k}.$$

Отже, векторний добуток $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$ має координати $(17;6;8)$. Знайдемо його модуль:

$$\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\sqrt{17^2+6^2+8^2}=\sqrt{289+36+64}=\sqrt{389}.$$ Тоді

$$S=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}{2}=\frac{\sqrt{389}}{2}.$$

Таким чином шукана висота $h=\frac{2S}{AC}=\frac{\sqrt{389}}{5}$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{389}}{5}$.

Задача №5. Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$.

Розв'язання. Об'єм тетраедра дорівнює шостій частині модуля мішаного добутку векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$. Тобто $V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|$.

Знайдемо координати цих векторів:

$$\overrightarrow{AB}(3;6;3),\ \overrightarrow{AC}(1;3;-2),\ \overrightarrow{AD}(2;2;2).$$

Знайдемо їх мішаний добуток

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -18.$$

Отже, $V = \frac{1}{6}|-18| = \frac{18}{6} = 3$.

Відповідь: 3.

Задача №6. Знайти кут між площинами $6x + 3y - 2z = 0$ та $x + 2y + 6z - 12 = 0$.

Розв'язання. Скористаємося формулою для знаходження кута між площинами:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

де $\overline{n}_1(A_1; B_1; C_1)$, $\overline{n}_2(A_2; B_2; C_2)$ вектори нормалей площин відповідно. Координати векторів нормалей знайдемо із заданих рівнянь площин: $\overline{n}_1(6;3;-2)$, $\overline{n}_2(1;2;6)$.

Отже, $\cos\varphi = \frac{|6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 6|}{\sqrt{36+9+4}\sqrt{1+4+36}} = \frac{0}{\sqrt{49}\sqrt{41}} = 0$ — площини перпендикулярні.

Відповідь: 90°.

Задача №7. Знайти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно до плошин $2x - y + 3z - 1 = 0$ та $x + 2y + z = 0$.

Розв'язання. Із рівнянь заданих площин знайдемо координати векторів їх нормалей: $\vec{n}_1(2;-1;3)$, $\vec{n}_2(1;2;1)$. Оскільки шукана площина перпендикулярна до заданих, то вектори нормалей заданих площин паралельні до шуканої площини, а тому вони є напрямними векторами шуканої площини. Враховуючи, що вектори $\vec{n}_1(2;-1;3)$ і $\vec{n}_2(1;2;1)$ неколінеарні, рівняння площини знайдемо за точкою і двома напрямними векторами. Заданою точкою є початок координат. Отже, шукане рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриємо визначник і знайдемо загальне рівняння площини

$$-7x + y + 5z = 0.$$

Відповідь: $-7x + y + 5z = 0$.

Задача №8. Точка $P(2;-1;-1)$ є основою перпендикуляра, проведеного із початку координат на площину. Знайти загальне і параметричні рівняння цієї площини.

Розв'язання. Вектор $\overrightarrow{OP}(2;-1;-1)$ є вектором нормалі шуканої площини.. Точка P належить шуканій площині. Отже, скористаємося рівнянням площини, заданої точкою і вектором нормалі $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, тобто $2(x-2)-(y+1)-\ (z+1)=0$. Розкриємо дужки і зведемо подібні доданки, одержимо загальне рівняння $2x-y-z-6=0$. Тоді параметричні рівняння мають вигляд $\begin{cases} x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v + 3; \\ y = u; \\ z = v. \end{cases}$

Відповідь: $2x - y - z - 6 = 0$; $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}u + \dfrac{1}{2}v + 3; \\ y = u; \\ z = v. \end{cases}$

Задача №9. Знайти площу трикутника, вершини якого є точками перетину площини $5x - 6y + 3z + 120 = 0$ з осями координат.

Розв'язання. Знайдемо координати вершин трикутника. Для цього скористаємося рівнянням заданої площини у відрізках, перетворивши відоме її загальне рівняння. Одержимо $\dfrac{5x}{-120} - \dfrac{6y}{-120} + \dfrac{3z}{-120} = 1$ або $\dfrac{x}{-24} + \dfrac{y}{20} + \dfrac{z}{-40} = 1$. Отже, вершини трикутника $A(-24;\ 0;0)$, $B(0;20;0)$, $C(0;0;-40)$. Тоді $\overrightarrow{AB}(24;20;0)$, $\overrightarrow{AC}(24;0;-40)$.

Площа трикутника дорівнює половині модуля векторного добутку $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$. Знайдемо цей векторний добуток.

$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 24 & 20 & 0 \\ 24 & 0 & -40 \end{vmatrix} = -800\vec{i} + 960\vec{j} - 480\vec{k}$. Тоді його модуль

$$\left\| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \right\| = \sqrt{800^2 + 960^2 + 480^2} = \sqrt{640000 + 921600 + 230400} = 160\sqrt{70}.$$

Отже, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{160\sqrt{70}}{2} = 80\sqrt{70}$.

Відповідь: $80\sqrt{70}$.

Задача №10. Дві грані куба лежать на площинах $2x - 2y + z - 1 = 0$ та $2x - 2y + z + 5 = 0$. Знайти об'єм цього куба.

Розв'язання. Для очислення об'єму куба треба знати довжину його ребра. Із рівнянь заданих площин знаходимо їх вектори нормалей і з'ясовуємо, що ці площини мають один і той же вектор нормалі $\vec{n}(2;-2;1)$. Отже, площини паралельні й містять протилежні грані куба, тому довжина ребра куба дорівнює відстані між цими площинами. Знайдемо її

$$d\left(\sigma_1;\sigma_2\right)=\frac{\left|D_2-D_1\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\left|5+1\right|}{\sqrt{9}}=\frac{6}{3}=2$$

Отже, об'єм куба $V=2^3=8$.

Відповідь: 8.

Задача №11. Записати канонічні й параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M\left(2;3;-5\right)$ паралельно до прямої $\begin{cases}3x-y+2z-7=0;\\ x+3y-2z+3=0.\end{cases}$

Розв'язання. Оскільки шукана пряма паралельна до заданої, то напрямний вектор у цих прямих спільний. Тому скористаємося рівнянням прямої, заданої точкою і напрямним вектором (канонічними рівняннями)

$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}=\frac{z-z_0}{p_3}.$$

Напрямний вектор $\vec{p}$ знайдемо за формулами

$$\vec{p}\left(\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\right).$$

Одержмо $\vec{p}(-4;8;10)$.

Отже, канонічні рівняння мають вигляд $\frac{x-2}{-4}=\frac{y-3}{8}=\frac{z+5}{10}$.

Домножимо на 2, остаточно одержимо $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+5}{5}$.

Щоб одержати параметричні рівняння прямої, прирівняємо кожну частину канонічних рівнянь до t і виразимо відповідну змінну. Матимемо

$$\begin{cases}x=-2t+2;\\ y=4t+3;\\ z=5t-5.\end{cases}$$

Відповідь: $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+5}{5}$; $\begin{cases} x=-2t+2; \\ y=4t+3; \\ z=5t-5. \end{cases}$

Задача №12. Знайдіть відстань від точки $P(1;-1;-2)$ до прямої $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-8}{-2}$.

Розв'язання. Скористаємося формулою відстані від точки до прямої $d(P,l)=\dfrac{\left|\left[\overline{MP},\vec{p}\,\right]\right|}{|\vec{p}|}$, де M деяка точка прямої, $\vec{p}$ — напрямний вектор прямої. Із заданих канонічних рівнянь прямої знаходимо $M(-3;0;8)$, $\vec{p}(3;2;-2)$.

Знайдемо вектор $\overrightarrow{MP}(4;-1;-10)$, і обчислимо векторний добуток

$$\left[\overrightarrow{MP},\vec{p}\,\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 10 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-18\vec{i}+38\vec{j}+11\vec{k}.$$

Тоді $\left|\left[\overrightarrow{MP},\vec{p}\,\right]\right|=\sqrt{(-18)^2+38^2+11^2}=\sqrt{1889}$,
$|\vec{p}|=\sqrt{9+4+4}=\sqrt{15}$.

Таким чином $d(P,l)=\dfrac{\sqrt{1889}}{\sqrt{15}}=\sqrt{\dfrac{1889}{15}}$.

Відповідь: $\sqrt{\dfrac{1889}{15}}$.

Задача №13. Довести, що пряма $m:\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0; \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$ належить площині $4x-3y+7z-7=0$.

Доведення. Перевіримо умову належності прямої площині $\begin{cases} a\cdot A+b\cdot B+c\cdot C=0; \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \end{cases}$ де $M_0(x_0;y_0;z_0)\in m$, $\vec{m}(a;b;c)$ — напрямний вектор прямої m.

Знайдемо координати вектора $\vec{m}$ за формулами

$$\vec{m}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right),\ \vec{m}(5;9;1).$$

Знайдемо довільну точку M_0 прямої m. Нехай $x_0=0$. Тоді система рівнянь, що задає пряму стає визначеною. Розв'яжемо її.

$$\begin{cases} x_0=0; \\ y_0=-z-1; \\ -3y_0+7z_0-7=0 \end{cases} \quad \text{або остаточно} \quad \begin{cases} x_0=0; \\ y_0=-\dfrac{7}{5}; \\ z_0=\dfrac{2}{5}. \end{cases}$$

Отже, точка $M_0\left(0;-\frac{7}{5};\frac{2}{5}\right)$ належить заданій прямій. Перевіримо умови належності прямої площині

$$\begin{cases} 5\cdot 4-9\cdot 3+1\cdot 7=20-27+7=0; \\ 4\cdot 0-3\cdot\left(-\dfrac{7}{5}\right)+7\cdot\dfrac{2}{5}-7=\dfrac{21}{5}+\dfrac{14}{5}-\dfrac{35}{5}=0. \end{cases}$$

Таким чином, обидві умови належності прямої площині виконуються. Задана пряма належить заданій площині, що й треба було довести.

Задача №14. Коло γ радіуса 3 см розташоване в площині Oxy так, що воно дотикається вісі Ox у початку координат. Знайти рівняння поверхні, утвореної обертанням даного кола навколо вісі Ox.

Розв'язання. Запишемо рівняння заданого кола. Враховуючи, що його точкою дотику до вісі Ox є початок координат, а радіус дорівнює 3, маємо центр $C(0;\pm 3;0)$.

Запишемо рівняння одного із кіл. Нехай $\gamma:\begin{cases} x^2+\left(y-3\right)^2=9; \\ z=0, \end{cases}$ а точка $M_0(x_0;y_0;0)\in\gamma$, її координати задовольняють рівняння кола, тобто $\begin{cases} x_0^2+\left(y_0-3\right)^2=9; \\ z_0=0. \end{cases}$ Оскільки обертання здійснюється навколо вісі *Ox*, то для всіх точок кола, яке описуватиме точка M_0 під час руху, $x_0=const=x$, а $y_0=\sqrt{y^2+z^2}$. Підставимо ці вирази в перше рівняння останньої системи й одержимо рівняння поверхні обертання $x^2+\left(\sqrt{y^2+z^2}-3\right)^2=9$. Перетворимо його.

$$x^2+y^2+z^2-6\sqrt{y^2+z^2}+9=9,$$
$$x^2+y^2+z^2-6\sqrt{y^2+z^2}=0,$$
$$x^2+y^2+z^2=6\sqrt{y^2+z^2}.$$

Враховуючи, що обидві частини рівняння невід'ємні, остаточно одержимо $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=36\left(y^2+z^2\right)$.

Відповідь: $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=36\left(y^2+z^2\right)$.

Алгоритм знаходження рівняння циліндричної поверхні за напрямом твірних і напрямною лінією

1. Зафіксувати довільну точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ напрямної лінії циліндра.
2. Записати параметричні рівняння довільної твірної циліндра за точкою M_0 і напрямним вектором.
3. Підставити координати точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ у задане рівняння напрямної лінії циліндра.
4. Скласти систему із рівнянь одержаних у пунктах 2 і 3 даного алгоритму.
5. Вилучити із одержаної в п.4 системи x_0; y_0; z_0; t.
6. Записати рівняння циліндричної поверхні.

Задача №15. Знайти рівняння циліндричної поверхні з напрямною, яка лежить у площині Oyz і має рівняння $2y^2 - z^2 + yz - 5 = 0$, а твірні паралельні вектору $\vec{u}(-4;2;1)$.

Розв'язання. Оскільки напрямна лежить у площині Oyz, то вона має рівняння $\begin{cases} 2y^2 - z^2 + yz - 5 = 0; \\ x = 0. \end{cases}$

Нехай точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — довільна точка напрямної лінії. Знайдемо рівняння твірної, що проходить через цю точку.

Її параметричні рівняння $\begin{cases} x = -4t + x_0; \\ y = 2t + y_0; \\ z = t + z_0. \end{cases}$

Враховуючи, що точка M_0 належить напрямній лінії, одержимо співвідношення $\begin{cases} 2y_0^2 - z_0^2 + y_0 z_0 - 5 = 0; \\ x_0 = 0. \end{cases}$

Складемо систему $\begin{cases} 2y_0^2 - z_0^2 + y_0 z_0 - 5 = 0; \\ x_0 = 0; \\ x = -4t + x_0; \\ y = 2t + y_0; \\ z = t + z_0. \end{cases}$

Виразимо t, y_0, z_0 із трьох останніх рівнянь

$$\begin{cases} 2y_0^2 - z_0^2 + y_0 z_0 - 5 = 0; \\ x_0 = 0; \\ t = \dfrac{x}{-4}; \\ y_0 = y - 2t; \\ z_0 = z - t. \end{cases}$$

Тоді
$$\begin{cases} 2y_0^2 - z_0^2 + y_0 z_0 - 5 = 0; \\ x_0 = 0; \\ t = \dfrac{x}{-4}; \\ y_0 = y + \dfrac{x}{2}; \\ z_0 = z + \dfrac{x}{4}. \end{cases}$$

Або $2\left(y+\dfrac{x}{2}\right)^2 - \left(z+\dfrac{x}{4}\right)^2 + \left(y+\dfrac{x}{2}\right)\left(z+\dfrac{x}{4}\right) - 5 = 0$. Це і є шукане рівняння циліндричної поверхні. Після розкриття дужок і спрощення одержимо $67x^2 + 256y^2 - 16z^2 + 260xy + 16yz - 80 = 0$.

Відповідь: $67x^2 + 256y^2 - 16z^2 + 260xy + 16yz - 80 = 0$.

Алгоритм знаходження рівняння конічної поверхні за вершиною і напрямною лінією

1. Зафіксувати довільну точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ напрямної лінії конуса.
2. Записати параметричні рівняння довільної твірної конуса за двома точками (заданою вершиною і точкою M_0).
3. Підставити координати точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ у задане рівняння напрямної лінії конуса.
4. Скласти систему із рівнянь одержаних у пунктах 2 і 3 даного алгоритму.
5. Вилучити із одержаної в п.4 системи x_0; y_0; z_0; t.
6. Записати рівняння конічної поверхні.

Задача №16. Знайти рівняння конічної поверхні з вершиною в початку координат і напрямною, заданою системою рівнянь $\gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1; \\ x+y+z=1. \end{cases}$

Розв'язання. Запишемо рівняння довільної твірної конуса. Для цього скористаємося вершиною конуса $O(0;0;0)$ і довільною точкою $M_0(x_0;y_0;z_0)$ напрямної лінії γ. Складемо рівняння твірної за двома точками $\begin{cases} x=x_0t; \\ y=y_0t; \\ z=z_0t. \end{cases}$

Оскільки точка $M_0(x_0;y_0;z_0)\in\gamma$, то $\begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=1; \\ x_0+y_0+z_0=1. \end{cases}$

Складемо систему із рінянь твірної і напрямної

$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=1; \\ x_0+y_0+z_0=1; \\ x=x_0t; \\ y=y_0t; \\ z=z_0t. \end{cases}$$

$\begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=1; \\ x_0+y_0+z_0=1; \\ x_0=\dfrac{x}{t}; \\ y_0=\dfrac{y}{t}; \\ z_0=\dfrac{z}{t}, \end{cases}$ де $t\neq 0$, бо точка $O(0;0;0)$ є вершиною конуса і не належить напрямній лінії.

Вилучимо із останньої системи x_0, y_0, z_0

$$\begin{cases}\left(\frac{x}{t}\right)^2+\left(\frac{y}{t}\right)^2+\left(\frac{z}{t}\right)^2=1;\\ \frac{x}{t}+\frac{y}{t}+\frac{z}{t}=1.\end{cases} \quad \text{Або} \quad \begin{cases}t=x+y+z;\\ \left(\frac{x}{t}\right)^2+\left(\frac{y}{t}\right)^2+\left(\frac{z}{t}\right)^2=1.\end{cases}$$

Вилучивши t, одержимо

$$\left(\frac{x}{x+y+z}\right)^2+\left(\frac{y}{x+y+z}\right)^2+\left(\frac{z}{x+y+z}\right)^2=1.$$

Домножимо це рівняння на $(x+y+z)^2$ — $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2$. Остаточно маємо $xy+xz+yz=0$ — конус, що містить усі координатні вісі.

Відповідь: $xy+xz+yz=0$.

Задача №17. Записати рівняння еліпсоїда, вісі якого збігаються з осями координат, а центр — із початком координат, і який проходить через точку $M(1;0;-3)$, перетинаючи площину Oxy по еліпсу $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$.

Розв'язання. Оскільки центр еліпсоїда знаходиться в початку координат, а вісі збігаються із осями координат, то система координат є канонічною. Отже, рівняння будемо шукати у вигляді $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Враховуючи, що переріз еліпсоїда координатною площиною Oxy заданий, з рівняння еліпса одержимо $a^2=4$, $b^2=5$. А оскільки точка M належить еліпсоїду, то її координати задовольняють шукане рівняння. Тому маємо $\frac{1^2}{4}+\frac{0^2}{5}+\frac{(-3)^2}{c^2}=1$.

Звідки $c^2=12$. Отже, рівняння еліпсоїда має вигляд $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{12}=1$.

Відповідь: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{12}=1$.

Задача №18. Знайти прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=2z$, які проходять через точку $P\left(0;2;-\frac{1}{2}\right)$.

Розв'язання. Розкладемо ліву частину рівняння поверхні на множники $\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{y}{2}\right)=2z$. Тоді два сімейства прямолінійних твірних визначаються системами рівнянь

$$\begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{y}{2}\right)=2\beta z;\\ \beta\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{y}{2}\right)=\alpha\end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases}\tilde{\alpha}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{y}{2}\right)=2\tilde{\beta} z;\\ \tilde{\beta}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{y}{2}\right)=\tilde{\alpha}.\end{cases}$$

Причому $\alpha\neq 0$ або $\beta\neq 0$, $\tilde{\alpha}\neq 0$ або $\tilde{\beta}\neq 0$.

Підставимо координати точки P і знайдемо значення α і β для кожного випадку. Маємо $\alpha=\beta$ і $\alpha=-\beta$.

Отже, прямолінійні твірні мають рівняння

$$\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{y}{2}=2z;\\ \frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{y}{2}=1\end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases}\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{y}{2}=-2z;\\ \frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{y}{2}=-1.\end{cases}$$

Домножимо кожне рівняння обох систем на $2\sqrt{3}$

$$\begin{cases}2x-\sqrt{3}y=4\sqrt{3}z;\\ 2x+\sqrt{3}y=2\sqrt{3},\end{cases} \quad \begin{cases}2x-\sqrt{3}y=-4\sqrt{3}z;\\ 2x+\sqrt{3}y=-2\sqrt{3}.\end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases}2x-\sqrt{3}y=4\sqrt{3}z;\\ 2x+\sqrt{3}y=2\sqrt{3},\end{cases}$ $\begin{cases}2x-\sqrt{3}y=-4\sqrt{3}z;\\ 2x+\sqrt{3}y=-2\sqrt{3}.\end{cases}$

Алгоритм зведення загального рівняння поверхні другого порядку (квадрики) до канонічного вигляду

1. Записати загальне рівняння поверхні

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{10}x+$$
$$+2a_{20}y+2a_{30}z+a_{00}=0.$$

2. Скласти характеристичне рівняння і знайти власні значення матриці квадратичної форми поверхні: $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0$. Розв'язками цього рівняння є власні значення $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ матриці. Вони ж будуть новими коефіцієнтами біля змінних $(x')^2, (y')^2, (z')^2$ нової системи координат після повороту системи координат.
3. Знайти власні вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Вони повинні бути взаємно перпендикулярними.
4. Нормувати власні вектори і знайти одиничні базисні вектори нової системи координат. Тобто $\vec{i}'=\dfrac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|},\quad \vec{j}'=\dfrac{\vec{a}_2}{|\vec{a}_2|},\quad \vec{k}'=\dfrac{\vec{a}_3}{|\vec{a}_3|}.$
$$\vec{i}'(l_1;m_1;n_1),\quad \vec{j}'(l_2;m_2;n_2),\quad \vec{k}'(l_3;m_3;n_3)$$
5. Записати формули перетворення координат (поворот осей координат):
$$\begin{cases} x=l_1x'+m_1y'+n_1z'; \\ y=l_2x'+m_2y'+n_2z'; \\ z=l_3x'+m_3y'+n_3z'. \end{cases}$$
6. Знайти нові значення коефіцієнтів лінійної форми:
$$a_{10}'=a_{10}l_1+a_{20}l_2+a_{30}l_3;$$
$$a_{20}'=a_{10}m_1+a_{20}m_2+a_{30}m_3;$$
$$a_{30}'=a_{10}n_1+a_{20}n_2+a_{30}n_3;$$
$$a_{00}'=a_{00}.$$

7. Записати рівняння поверхні у вигляді $\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+\lambda_3(z')^2+2a_{10}{}'x'+2a_{20}{}'y'+2a_{30}{}'z'+a_{00}{}'=0.$
8. Виділити повні квадрати:
$$\lambda_1(x'-x_0)^2+\lambda_2(y'-y_0)^2+\lambda_3(z'-z_0)^2+a_{00}{}''=0.$$
9. Замінити вирази в дужках (паралельне перенесення системи координат на вектор $\overrightarrow{OO'}(x_0;y_0;z_0)$):
$$\begin{cases} x''=x'-x_0; \\ y''=y'-y_0; \\ z''=z'-z_0. \end{cases}$$
10. Записати рівняння у вигляді
$$\lambda_1(x'')^2+\lambda_2(y'')^2+\lambda_3(z'')^2=-a_{00}{}''.$$
11. Записати канонічне рівняння.

Зауваження.
1. Якщо початкове рівняння поверхні II порядку має вигляд $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{00}=0$, то достатньо здійснити лише поворот системи координат у просторі. Для цього достатньо знайти власні значення, розв'язавши характеристичне рівняння і перейти до кроку 10.
2. Якщо початкове рівняння поверхні II порядку має вигляд $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{10}x+2a_{20}y+2a_{30}z+a_{00}=0$, то достатньо здійснити лише паралельне перенесення системи координат у просторі. Для цього треба виділити повні квадрати. Тобто розпочати із кроку 8.

Задача №19 Звести до канонічного вигляду рівняння поверхні $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0$ і записати формули перетворення координат.

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, одержимо кубічне рівняння $\lambda^3 - 7\lambda^2 - \lambda + 36 = 0$, розв'язками якого є $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = -2$.

Знайдемо власні вектори для кожного значення $\lambda_i \quad (i = 1, 2, 3)$.

Для $\lambda_1 = 3$ одержимо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -2x + y + 3z = 0; \\ x + 2y + z = 0; \\ 3x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

Її розв'язки $\begin{cases} x = z; \\ y = -z. \end{cases}$ Отже, перший головний напрям визначається вектором $\vec{a}_1(1; -1; 1)$.

Для $\lambda_2 = 6$ система має вигляд $\begin{cases} -5x + y + 3z = 0; \\ x - y + z = 0; \\ 3x + y - 5z = 0. \end{cases}$ Розв'язавши її, знайдемо другий головний напрям, визначений вектором $\vec{a}_2(1; 2; 1)$.

Для $\lambda_3 = -2$ маємо $\begin{cases} 3x + y + 3z = 0; \\ x + 7y + z = 0; \\ 3x + y + 3z = 0. \end{cases}$ Третім головним напрямом є $\vec{a}_3(1; 0; -1)$.

Нормуємо знайдені вектори і одержимо одиничні базисні вектори нової системи координат. Для цього поділимо кожен знайдений вектор на його довжину: $\dfrac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} = \vec{i}'; \quad \dfrac{\vec{a}_2}{|\vec{a}_2|} = \vec{j}'; \quad \dfrac{\vec{a}_3}{|\vec{a}_3|} = \vec{k}'$.

Остаточно матимемо

$$\vec{i}'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \vec{j}'\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \quad \vec{k}' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Запишемо формули перетворення координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}y' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}z'; \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{6}}y'; \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}y' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}z'. \end{cases}$$

Знайдемо значення нових коефіцієнтів лінійної форми

$$a_{10}' = -\frac{1}{\sqrt{3}} + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3};$$

$$a_{20}' = -\frac{1}{\sqrt{6}} + 3\cdot\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = \sqrt{6};$$

$$a_{30}' = -\frac{1}{\sqrt{2}} + -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2};$$

$$a_{00}' = 0.$$

Таким чином після повороту системи координат рівняння поверхні набуває вигляду

$$3(x')^2 + 6(y')^2 - 2(z')^2 - 2\sqrt{3}x' + 2\sqrt{6}y' - 2\sqrt{2}z' = 0.$$

Згрупуємо доданки

$$3\left((x')^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x'\right) + 6\left((y')^2 + \frac{2\sqrt{6}}{6}y'\right) - 2\left((z')^2 + \frac{2\sqrt{2}}{2}z'\right) = 0.$$

Виділивши повні квадрати, одержимо

$$3\left(x' - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 6\left(y' + \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 - 2\left(z' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1.$$

Замінимо вирази в дужках і запишемо формули паралельного перенесення

$$\begin{cases} x'' = x' - \dfrac{\sqrt{3}}{3}; \\ y'' = y' + \dfrac{\sqrt{6}}{6}; \\ z'' = z' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Остаточно матимемо $3(x'')^2+6(y'')^2-2(z'')^2=1$, або

$$\frac{(x'')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{(y'')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}-\frac{(z'')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$$ — канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда.

Формули перетворень системи координат мають вигляд

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{3}}x''+\frac{1}{\sqrt{6}}y''+\frac{1}{\sqrt{2}}z''-\frac{1}{3}; \\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x''+\frac{2}{\sqrt{6}}y''-\frac{2}{3}; \\ z=\ \frac{1}{\sqrt{3}}x''+\frac{1}{\sqrt{6}}y''-\frac{1}{\sqrt{2}}z''+\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Відповідь: $$\frac{(x'')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{(y'')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}-\frac{(z'')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$$ — однопорожнинний гіперболоїд. Формули перетворення координат мають вигляд

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{3}}x''+\frac{1}{\sqrt{6}}y''+\frac{1}{\sqrt{2}}z''-\frac{1}{3}; \\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x''+\frac{2}{\sqrt{6}}y''-\frac{2}{3}; \\ z=\ \frac{1}{\sqrt{3}}x''+\frac{1}{\sqrt{6}}y''-\frac{1}{\sqrt{2}}z''+\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Задача № 20. Звести до канонічного вигляду рівняння поверхні $12x^2-3y^2+z^2-24x-12\sqrt{3}y-4z+100=0$ і записати формули перетворення координат.

Розв'язання. Погрупуємо доданки відносно змінних і виділимо повні квадрати. Одержимо

$$12\left(x^2-2x\right)-3\left(y^2+4\sqrt{3}y\right)+\left(z^2-4z\right)+100=0,$$

$$12\left(x^2-2x+1\right)-12-3\left(y^2+4\sqrt{3}y+\left(2\sqrt{3}\right)^2\right)+3\left(2\sqrt{3}\right)^2+$$
$$+\left(z^2-4z+4\right)-4+100=0,$$
$$12\left(x-1\right)^2-12-3\left(y+2\sqrt{3}\right)^2+36+\left(z-2\right)^2-4+100=0,$$
$$12\left(x-1\right)^2-3\left(y+2\sqrt{3}\right)^2+\left(z-2\right)^2+120=0.$$

Поділимо все рівняння на 120 і перенесемо вільний член управо

$$\frac{\left(x-1\right)^2}{10}-\frac{\left(y+2\sqrt{3}\right)^2}{40}+\frac{\left(z-2\right)^2}{120}=-1.$$

Замінивши вирази в дужках, одержимо формули паралельного перенесення

$$\begin{cases} x'=x-1; \\ y'=y+2\sqrt{3}; \\ z'=z-2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=x'+1; \\ y=y'-2\sqrt{3}; \\ z=z'+2. \end{cases}$$

Остаточно маємо $\frac{\left(x'\right)^2}{10}-\frac{\left(y'\right)^2}{40}+\frac{\left(z'\right)^2}{120}=-1$ — рівняння двопорожнинного гіперболоїда.

Відповідь: $\frac{\left(x'\right)^2}{10}-\frac{\left(y'\right)^2}{40}+\frac{\left(z'\right)^2}{120}=-1$ — двопорожнинний гіперболоїд. Формули перетворення координат мають вигляд

$$\begin{cases} x=x'+1; \\ y=y'-2\sqrt{3}; \\ z=z'+2. \end{cases}$$

Задача № 21. Звести до канонічного вигляду рівняння поверхні $2x^2-3y^2+z^2+2\sqrt{6}xy=0$ і записати формули перетворення координат.

Розв'язання. Задане рівняння поверхні не містить лінійної форми. Тому достатньо знайти корені характеристичного рівняння розглядуваної поверхні. Складемо і розв’яжемо його

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & \sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{6} & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0\cdot$$

Розкладемо визначник у лівій частині за елементами третього рядка $(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Розкривши визначник другого порядку і виконавши перетворення, одержимо рівняння

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2+\lambda-12\right)=0,$$

коренями якого є $\lambda_1=1, \quad \lambda_2=-4, \quad \lambda_3=3$.

Запишемо нове рівняння поверхні $(x')^2-4(y')^2+3(z')^2=0$.

Отже, канонічне рівняння заданої поверхні має вигляд

$$\frac{(x')^2}{12}-\frac{(y')^2}{3}+\frac{(z')^2}{4}=0.$$

Щоб записати формули перетворення координат, знайдемо власні вектори для кожного кореня характеристичного рівняння:

$$\vec{e}_1=\vec{i}'(0;0;1),\ \vec{e}_2\left(1;-\sqrt{6};0\right),\ \vec{e}_3\left(\sqrt{6};1;0\right).$$

Після нормування одержимо нові базисні вектори

$$\vec{i}'(0;0;1),\ \vec{j}'\left(\frac{1}{\sqrt{7}};-\sqrt{\frac{6}{7}};0\right),\ \vec{k}'\left(\sqrt{\frac{6}{7}};\frac{1}{\sqrt{7}};0\right).$$

Відповідно до пункту 5, поданого вище алгоритму, запишемо формули перетворення координат

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{7}}y'+\sqrt{\dfrac{6}{7}}z'; \\ y=-\sqrt{\dfrac{6}{7}}y'+\dfrac{1}{\sqrt{7}}z'; \\ z=x'. \end{cases}$$

Відповідь: $\frac{(x')^2}{12}-\frac{(y')^2}{3}+\frac{(z')^2}{4}=0$ — дійсний конус. Формули перетворення координат мають вигляд

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{7}}y'+\sqrt{\frac{6}{7}}z'; \\ y=-\sqrt{\frac{6}{7}}y'+\frac{1}{\sqrt{7}}z'; \\ z=x'. \end{cases}$$

6.2. Контрольна робота №1

Варіант №1

1. Дано тетраедр $ABCD$. Обчислити об'єм тетраедра та довжину висоти, опущеної з вершини D на площину грані ABC, якщо $A(-5;-4;8), B(2;3;1), C(4;1;-2), D(6;3;7)$.

2. Довжина ребра куба $ABCDA'B'C'D'$ дорівнює 1. Площина α проходить через центр куба і перетинає ребра AA' і BC в точках E і F відповідно. Знайти методом координат відстань від вершини B' куба до площини α, якщо $AE=\frac{1}{3}, BF=\frac{1}{4}$.

3. Через вісь Oz провести площину, яка утворює з площиною $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ кут $\frac{\pi}{3}$.

4. Скласти канонічні рівняння прямої, яка утворена перетином площини $3x-y-7z+9=0$ з площиною, що проходить через вісь Ox і точку $A(3;2;-5)$.

5. Знайти кути між прямими, які містять протилежні ребра тетраедра $ABCD$, якщо $A(3;-1;0), B(0;-7;3), C(-2;1;-1), D(3;2;6)$.

Варіант №2

1. Дано трикутник *ABC*, де $A(1;-1;2), B(5;-6;2), C(1;3;-1)$. Обчислити довжину висоти, опущеної з вершини *B* на сторону *AC*.

2. У куб вписано сферу. Довести методом координат, що сума квадратів відстаней від кожної точки сфери до вершин куба не залежить від вибору точки. Знайти цю суму.

3. Через точку $A(1;2;3)$ провести площину, яка перпендикулярна до площини $5x-2y+5z-10=0$ і утворює з площиною $x-4y-8z+12=0$ кут $\frac{\pi}{4}$.

4. Вершини трикутника *ABC* мають координати $A(3;6;-7), B(-5;2;3), C(4;-7;-2)$. Скласти параметричні рівняння прямої, яка містить медіану трикутника, проведену з вершини *C*.

5. Знайти координати точки, яка симетрична точці $M(4;3;10)$ відносно прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$.

Варіант №3

1. Довести, що трикутник з вершинами в точках $A(3;-1;6), B(-1;7;-2), C(1;-3;2)$ прямокутний.

2. Основою піраміди *SABC* є рівносторонній трикутник *ABC*, довжина сторони якого дорівнює $4\sqrt{2}$. Бічне ребро *SC* перпендикулярне до площини основи і має довжину 2. Знайти методом координат величину кута і відстань між прямими, одна з яких проходить через точку *S* і середину ребра *BC*, а інша – через точку *C* і середину ребра *AB*.

3. Знайти величину двогранного кута, утвореного площинами $8x+4y+z+1=0$ і $2x-2y+z+1=0$, у якому лежить точка $M(1;1;1)$.

4. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(3;-1;-1), B(1;2;-7), C(-5;14;-3)$. Скласти канонічні рівняння прямої, яка містить бісектрису внутрішнього кута C трикутника.

5. Знайти відстань між прямими $\begin{cases} x+2y-z+1=0; \\ 2x-3y+z-4=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x=-t; \\ y=2+3t; \\ z=3t. \end{cases}$

Варіант №4

1. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=7\vec{i}+7\vec{j}-7\vec{k}$ та $\vec{b}=9\vec{i}+5\vec{j}-10\vec{k}.$

2. Дано куб $ABCDA'B'C'D'$. Точка K – середина ребра AA', S – центр грані $CC'D'D$. Знайти методом координат кут між площинами BKS та ACD'.

3. Вершини тетраедра знаходяться в точках $A(0;0;2), B(3;0;5), C(1;1;0), D(4;1;2)$. Обчислити довжину висоти, опущеної з вершини D на грань ABC.

4. Дано трикутник ABC, де $A(1;-2;-4), B(3;1;-3), C(5;1;-7)$. Скласти параметричні рівняння прямої, яка містить висоту трикутника, опущену з вершини B на протилежну сторону.

5. Знайти відстань між прямими, які містять ребра AB та CD тетраедра $ABCD$, де $A(3;-1;0), B(0;-7;3), C(-2;1;-1), D(3;2;6)$.

Варіант №5

1. На вісі ординат знайти точку, рівновіддалену від точок $A(1;-3;7)$ і $B(5;7;-5)$.

2. Основою піраміди $SABC$ є рівнобедрений прямокутний трикутник ABC, довжина гіпотенузи якого рівна $4\sqrt{2}$. Бічне ребро SC перпендикулярне до площини основи і має довжину 2. Знайти методом координат величину кута і відстань між мимобіжними прямими, одна з яких проходить через точку S і середину ребра AC, а інша – через точку C і середину ребра AB.

3. Скласти рівняння бісекторних площин двогранних кутів, утворених площинами $7x+y-6=0$ і $3x+5y-4z+1=0$.

4. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2;3;-5)$ паралельно прямій $\begin{cases} 3x-y+2z-7=0; \\ x+3y-2z+3=0. \end{cases}$

5. Знайти відстань між прямими $\begin{cases} x=3+t; \\ y=1-t; \\ z=2+2t \end{cases}$ і $\begin{cases} x+y+z-9=0; \\ 2x-y-z=0. \end{cases}$

Варіант №6

1. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(2;-1;4), B(3;2;-6), C(-5;0;2)$. Знайти довжину медіани, проведеної з вершини *A*.

2. У кубі $ABCDA'B'C'D'$ з ребром *a* послідовно сполучено середини ребер $AA', A'B', B'C', C'C, CD, DA, AA'$. Довести методом координат, що утворена фігура є правильним шестикутником, і знайти його площу.

3. На вісі Oz знайти точки рівновіддалені від точки $M(2;3;-4)$ і площини $2x+3y+z-17=0$.

4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1;2;-3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{p}\,(6;-2;-3)$ і перетинає пряму $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-5}$.

5. Довести, що пряма $l: \dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z-1}{-2}$ паралельна до площини $\alpha: x-2y-4z=0$. Знайти відстань від *l* до α.

Варіант №7

1. Центр мас однорідного стержня *AB* знаходиться в точці *M*. Точки $C(1;-1;5)$, *M* і $D(-2;-1;7)$ поділяють стержень на чотири рівні частини. Визначити координати кінців стержня.

2. Через середину кожного ребра тетраедра проведено площину, що містить протилежне ребро. Довести методом координат, що ці площини перетинаються в одній точці.

3. Скласти рівняння площини, яка знаходиться на відстані $\sqrt{29}$ від початку координат і перпендикулярна до прямої перетину площин $2x-y+z=0$ і $6x-y+7z-4=0$.

4. Скласти параметричні рівняння прямої, яка містить спільний перпендикуляр двох мимобіжних прямих, заданих рівняннями $\begin{cases} x=3t-7; \\ y=-2t+4; \\ z=3t+4 \end{cases}$ і $\begin{cases} x=t+1; \\ y=2t-8; \\ z=-t-12. \end{cases}$

5. Знайти кут між ребром AB і площиною грані BCD тетраедра $ABCD$, якщо $A(3;-1;0)$, $B(0;-7;3)$, $C(-2;1;-1)$, $D(3;2;6)$.

Варіант №8

1. Точки $A(-1;8;3)$, $B(9;-7;-2)$, C, D послідовно розташовані на прямій так, що $AB=BC$, а $CD=2BC$. Знайти координати точок C і D.

2. Плоскі кути при вершині S правильної трикутньої піраміди $SABC$ є прямими. Точки A' і B' — середини сторін BC і AC основи ABC відповідно. Знайти методом координат кут між прямими SA' і BB'.

3. Скласти рівняння площини, яка ділить навпіл той двогранний кут, утворених площинами $2x-14y+6z-1=0$ і $3x+5y-5z+3=0$, в якому лежить початок координат.

4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-4;-5;3)$ і перетинає прямі $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$ та $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$.

5. Знайти відстань між ребрами BC та AD тетраедра $ABCD$, якщо $A(3;-1;0)$, $B(0;-7;3)$, $C(-2;1;-1)$, $D(3;2;6)$.

Варіант №9

1. Знайти координати кінців відрізка, який точками $C(2;0;2)$, $D(5;-2;0)$ поділений на три рівні частини.
2. У тетраедрі $ABCD$ ребра AB, AC, DC, DB відповідно поділяються точками M, N, P, Q в одному і тому ж відношенні λ. Довести методом координат, що чотирикутник $MNPQ$ є паралелограмом.
3. Написати рівняння площини, яка відтинає на координатних осях відрізки, пропорційні числам 1, 2, 3 і знаходиться від точки $M(3;5;7)$ на відстані 4.
4. Скласти рівняння прямої, яка лежить у площині $y+2z=0$ і перетинає прямі $\begin{cases} x=1-t; \\ y=t; \\ z=4t \end{cases}$ та $\begin{cases} x=2-t; \\ y=4+2t; \\ z=1. \end{cases}$
5. Знайти кут між прямою AC і площиною грані ABD тетраедра $ABCD$, якщо $A(3;-1;0), B(0;-7;3), C(-2;1;-1), D(3;2;6)$.

Варіант №10

1. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(1;-1;-3), B(2;1;-2), C(-5;2;6)$. Знайти довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині A.
2. Довести методом координат, що площини $A'BD$ і $CB'D'$ ділять діагональ AC' паралелепіпеда $ABCDA'B'C'D'$ на три рівні частини.
3. Обчислити косинуси внутрішніх двогранних кутів тетраедра, утвореного координатними площинами і площиною $2x+3y+6z-12=0$.
4. Знайти параметричні рівняння ортогональної проекції прямої $\frac{x-3}{-5}=\frac{y-4}{6}=\frac{z-6}{8}$ на площину Oxy.
5. Знайти відстань між прямими $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$ і $\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$.

6.3. Контрольна робота №2

Варіант 1

1. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1; \\ z=0 \end{cases}$ навколо вісі Oy.

2. Скласти рівняння конічної поверхні з вершиною в точці $S(2;-2;-3)$, прямолінійні твірні якої утворюють кут $60°$ з площиною $2x-2y-z-15=0.$

3. Скласти рівняння циліндричної поверхні, прямолінійні твірні якої паралельні вектору $\vec{p}(1;2;3)$, а напрямною є лінія $\begin{cases} x^2+z^2=1; \\ y=0. \end{cases}$

4. Дослідити поверхню $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$ методом перерізів і побудувати її зображення.

5. Звести рівняння поверхні до канонічного вигляду, визначити тип поверхні, записати формули перетворення координат $3x^2+3y^2+5z^2-2xy-2xz+2yz-16x+4y+32z-12=0.$

Варіант 2

1. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1; \\ z=0 \end{cases}$ навколо вісі Ox.

2. Скласти рівняння конічної поверхні з вершиною в точці $S(2;-1;1)$ і напрямною лінією $\begin{cases} y^2-yx+5=0; \\ z=0. \end{cases}$

3. Скласти рівняння циліндричної поверхні, напрямною якої є лінія $\begin{cases} x^2-3y^2+z^2=2; \\ x-y-z=0, \end{cases}$ а прямолінійні твірні перпендикулярні до площини напрямної.

4. Дослідити поверхню $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z$ методом перерізів і побудувати її зображення.

5. Звести рівняння поверхні до канонічного вигляду, визначити тип поверхні, записати формули перетворення координат $x^2-2y^2+z^2+4xy-10xz+4yz+4x-4y+4z-2=0.$

Варіант 3

1. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії $\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1;\\ z=0\end{cases}$ навколо вісі Ox.

2. Скласти рівняння конічної поверхні, яка має вершину в точці $S(-1;2;3)$, а прямолінійні твірні утворюють з площиною $2x-2y+z-1=0$ кут $30°$.

3. Скласти рівняння циліндричної поверхні, прямолінійні твірні якої мають напрям $\vec{p}(1;0;1)$, а напрямною є лінія $\begin{cases}x^2+3y^2+2xy-x=0;\\ z=0.\end{cases}$

4. Дослідити поверхню $y^2-4z=0$ методом перерізів і побудувати її зображення.

5. Звести рівняння поверхні до канонічного вигляду, визначити тип поверхні, записати формули перетворення координат $3x^2-y^2-z^2-6xy+6xz-2yz-18x+14y-2z-9=0.$

Варіант 4

1. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії $\begin{cases}\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{64}=-1;\\ z=0\end{cases}$ навколо вісі Oy.

2. Скласти рівняння конічної поверхні з вершиною в точці $S(3;1;-2)$ і напрямною лінією $\begin{cases} y^2-4x=0; \\ z-1=0. \end{cases}$

3. Скласти рівняння циліндричної поверхні, прямолінійні твірні якої перпендикулярні до площини її напрямної лінії $\begin{cases} (x-1)^2+y^2-3z^2=0; \\ x-y+z+1=0. \end{cases}$

4. Дослідити поверхню $3x^2+4z^2-2y=0$ методом перерізів і побудувати її зображення.

5. Звести рівняння поверхні до канонічного вигляду, визначити тип поверхні, записати формули перетворення координат $2x^2+10y^2-2z^2+12xy-8yz+12x+4y-8z-1=0.$

Варіант 5

1. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії $\begin{cases} x^2-2z=0; \\ y=0 \end{cases}$ навколо вісі Oz.

2. Скласти рівняння конічної поверхні з вершиною в точці $S(1;0;2)$ і напрямною лінією $\begin{cases} x^2+y^2-y=0; \\ z=0. \end{cases}$

3. Скласти рівняння циліндричної поверхні, прямолінійні твірні якої паралельні прямій $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2}$, а напрямною є лінія $\begin{cases} y^2-4x=0; \\ z-2=0. \end{cases}$

4. Дослідити поверхню $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=0$ методом перерізів і побудувати її зображення.

5. Звести рівняння поверхні до канонічного вигляду, визначити тип поверхні, записати формули перетворення координат $5x^2+8y^2+5z^2-8xz-4xy-4yz-18x+18z-2=0.$

Варіант 6

1. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії $\begin{cases} \frac{z^2}{25} - \frac{x^2}{4} = 1; \\ y = 0 \end{cases}$ навколо вісі Ox.

2. Скласти рівняння конічної поверхні з вершиною в точці $S(1;2;4)$, прямолінійні твірні якої утворюють з площиною $2x + 2y + z = 0$ кут 45°.

3. Скласти рівняння циліндричної поверхні, прямолінійні твірні якої мають напрям $\vec{p}(2;-1;3)$, а напрямною є лінія $\begin{cases} x^2 - y^2 - 3 = 0; \\ z = 0. \end{cases}$

4. Дослідити поверхню $3y^2 + 4z^2 + 2x = 0$ методом перерізів і побудувати її зображення.

5. Звести рівняння поверхні до канонічного вигляду, визначити тип поверхні, записати формули перетворення координат $5x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2xy + 6yz + 28x - 24y - 16z - 3 = 0.$

Варіант 7

1. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії $\begin{cases} y^2 = 9x; \\ z = 0 \end{cases}$ навколо вісі Oy.

2. Скласти рівняння конічної поверхні, яка має вершину в точці $S(0;2;3)$ і напрямну лінію $\begin{cases} 3x^2 - 4y^2 - 12 = 0; \\ z + 2 = 0. \end{cases}$

3. Скласти рівняння циліндричної поверхні, прямолінійні твірні якої паралельні вісі Ox, а напрямною є лінія $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 - 4z = 0; \\ x - y + 1 = 0. \end{cases}$

4. Дослідити поверхні $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = z$ методом перерізів і побудувати її зображення.

5. Звести рівняння поверхні до канонічного вигляду, визначити тип поверхні, записати формули перетворення координат $x^2+y^2-3z^2-2xy-6xz-6yz+6x+6y+6z-9=0.$

Варіант 8

1. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії $\begin{cases} \dfrac{z^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1; \\ x=0 \end{cases}$ навколо вісі Oz.

2. Скласти рівняння конічної поверхні, яка має вершину в точці $S(0;0;6)$ і напрямну лінію $\begin{cases} (x+2)^2+(y-3)^2=9; \\ z-4=0. \end{cases}$.

3. Скласти рівняння циліндричної поверхні, прямолінійні твірні якої паралельні вісі Oy, а напрямною є лінія $\begin{cases} 3x^2-4z^2+2y=0; \\ x-y+z=0. \end{cases}$

4. Дослідити поверхню $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{9}=1$ методом перерізів і побудувати її зображення.

5. Звести рівняння поверхні до канонічного вигляду, визначити тип поверхні, записати формули перетворення координат $x^2+y^2-2z^2+4xz-8xy-4yz-14x+8y-16z+16=0.$

Варіант 9

1. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії $\begin{cases} \dfrac{y^2}{81}-\dfrac{x^2}{16}=1; \\ z=0 \end{cases}$ навколо вісі Ox.

2. Скласти рівняння конічної поверхні, яка має вершину в точці $S(1;-2;0)$ і напрямну лінію $\begin{cases} x^2+z^2=1; \\ y-1=0. \end{cases}$.

3. Скласти рівняння циліндричної поверхні, прямолінійні твірні якої паралельні прямій $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{4}$, а напрямною є лінія $\begin{cases} 2x^2-3y^2-2z=0; \\ x-y+2=0. \end{cases}$

4. Дослідити поверхню $4x^2-5y^2+20z=0$ методом перерізів і побудувати її зображення.

5. Звести рівняння поверхні до канонічного вигляду, визначити тип поверхні, записати формули перетворення координат $x^2+y^2+5z^2-6xy-2xz+2yz+12x+4y-20z-3=0.$

Варіант 10

1. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії $\begin{cases} x-3z^2=0; \\ y=0 \end{cases}$ навколо вісі Oz.

2. Скласти рівняння конічної поверхні, яка має вершину в точці $S(1;0;0)$ і напрямну лінію $\begin{cases} y^2-z^2-1=0; \\ x-2=0. \end{cases}$

3. Скласти рівняння циліндричної поверхні, прямолінійні твірні якої мають напрям $\vec{p}(2;-1;1)$, а напрямною є лінія $\begin{cases} 4x^2-4z^2+3y=0; \\ x+2z-1=0. \end{cases}$

4. Дослідити поверхню $z^2-2x=0$ методом перерізів і побудувати її зображення.

5. Звести рівняння поверхні до канонічного вигляду, визначити тип поверхні, записати формули перетворення координат $6x^2+4y^2+5z^2+4xz-4yz-4x-24y+20z-27=0.$

Додаток А. Окремі види поверхонь другого порядку

Сфера

Рівняння в ПДСК:

$$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2=R^2$$

Параметричні рівняння:

$$x=R\cos u\cos v+x_0,$$
$$y=R\sin u\cos v+y_0,$$
$$z=R\sin v+z_0,$$

де $R>0$

На рис.А.1: R = 2, x_0=y_0=z_0=0,

$0\le u\le 2\pi$,

$0\le v\le 2\pi$

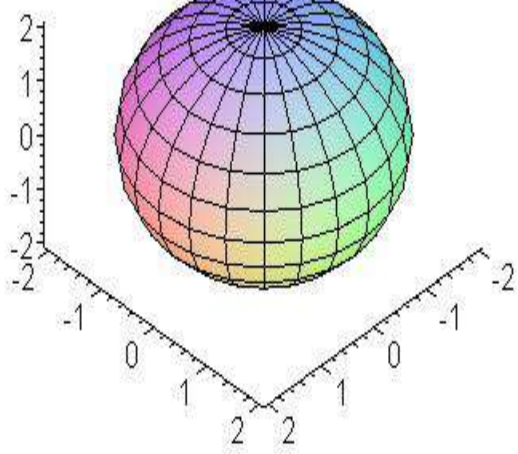

Рис.А.1.

Еліптичний циліндр

Рівняння в ПДСК:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Параметричні рівняння:

$$x=a\cos u,\quad y=b\sin u,\quad z=v,$$

де $a>0$, $b>0$

На рис.А.2: a = 3, b = 2,

$0\le u\le 2\pi$,

$0\le v\le 2\pi$

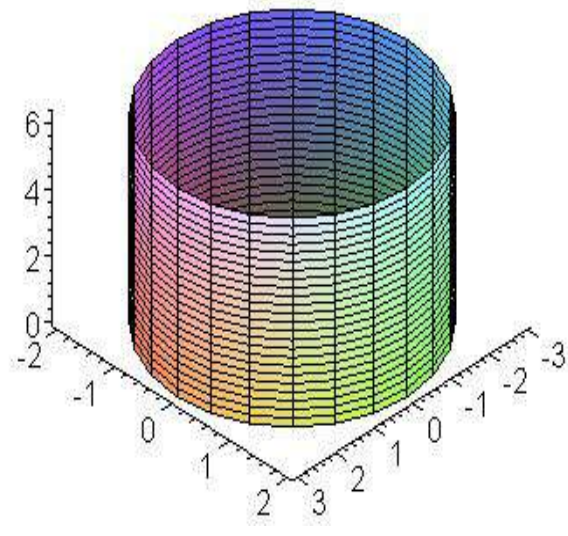

Рис.А.2.

Гіперболічний циліндр

Рівняння в ПДСК:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Параметричні рівняння:

$$x=\pm a\cosh u,\quad y=b\sinh u,\quad z=v,$$

де $a>0$, $b>0$

На рис.А.3: a = 4, b = 3

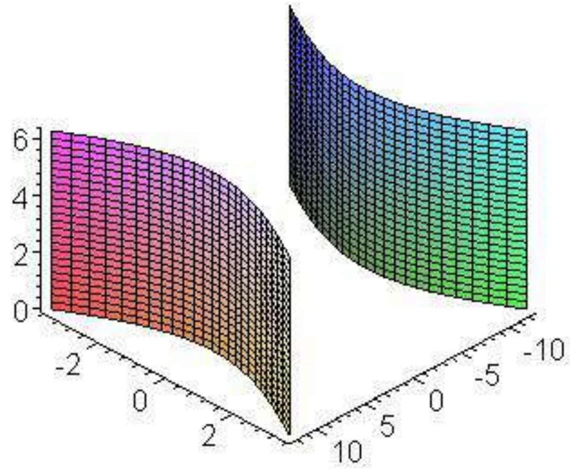

Рис.А.3.

Параболічний циліндр

Рівняння в ПДСК:

$$x^2=2py$$

Параметричні рівняння:

$$x=\frac{u^2}{2p},\quad y=u,\quad z=v,$$

де $p>0$

На рис.А.4: $x^2=2py$, $p=\dfrac{1}{2}$

$$-10\le u\le 10,$$

$$-5\le v\le 5$$

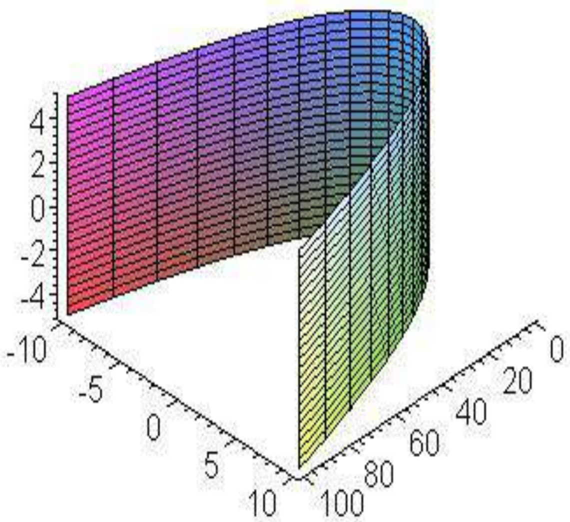

Рис.А.4.

Дійсний конус

Рівняння в ПДСК:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Параметричні рівняння:

$x = au\cos v,\quad y = bu\sin v,\quad z = cu,$

де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$

На рис.А.5: a = 4, b = 3, c = 2,

$$-\pi \le u \le \pi,$$

$$-\pi \le v \le \pi$$

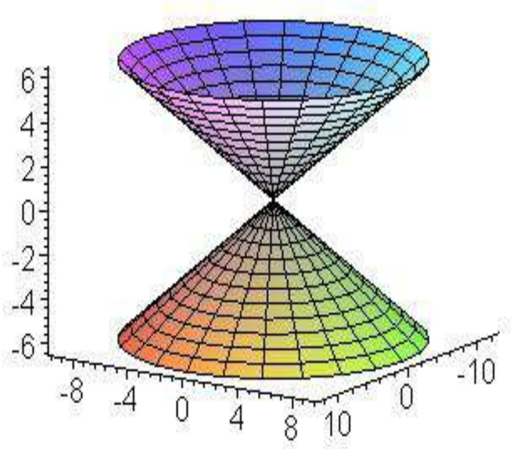

Рис.А.5.

Еліпсоїд

Рівняння в ПДСК:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Параметричні рівняння:

$$x = a\cos u\cos v,$$
$$y = b\sin u\cos v,$$
$$z = c\sin v,$$

де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$

На рис.А.6: a = 4, b = 3, c = 2,

$$0 \le u \le 2\pi,$$

$$0 \le v \le 2\pi$$

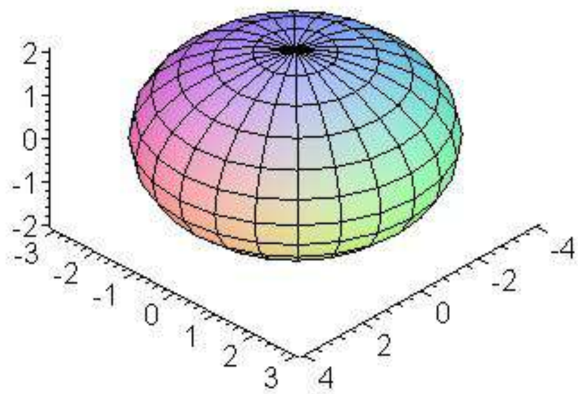

Рис.А.6.

Однопорожнинний гіперболоїд

Рівняння в ПДСК:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Параметричні рівняння:

$$x=a\cos u\cosh v,$$
$$y=b\sin u\cosh v,$$
$$z=c\sinh v,$$

де $a>0$, $b>0$, $c>0$

На рис.А.7: a = 2, b = 3, c = 4,

$0\le u\le 2\pi,$

$0\le v\le 2\pi$

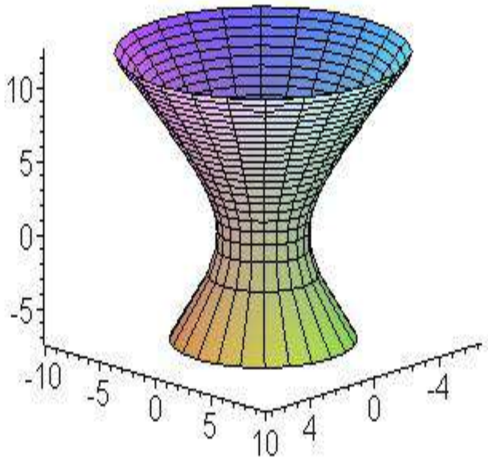

Рис.А.7.

Двопорожнинний гіперболоїд

Рівняння в ПДСК:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Параметричні рівняння:

$$x=a\cos u\sinh v,$$
$$y=b\sin u\sinh v,$$
$$z=\pm c\cosh v,$$

де $a>0$, $b>0$, $c>0$

На рис.А.8: a = 2, b = 3, c = 4,

$0\le u\le 2\pi,$

$0\le v\le 2\pi$

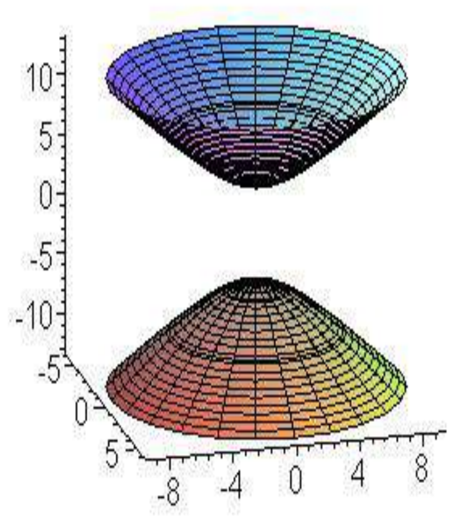

Рис.А.8.

Еліптичний параболоїд

Рівняння в ПДСК:

$$2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Параметричні рівняння:

$$x = au\cos v, \quad y = bu\sin v, \quad z = \frac{u^2}{2},$$

де $a > 0$, $b > 0$

На рис.А.9: a =4 , b = 3, c = 2,

$$0 \le u \le 2\pi,$$

$$0 \le v \le 2\pi$$

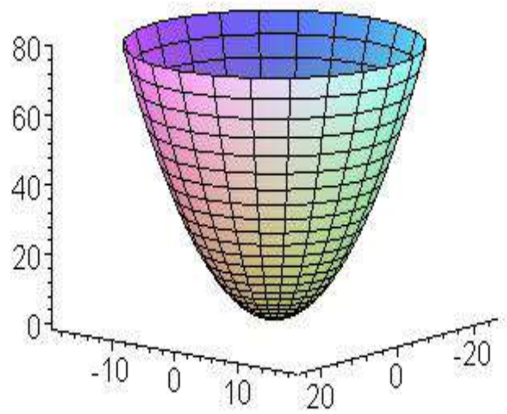

Рис.А.9.

Гіперболічний параболоїд

Рівняння в ПДСК:

$$2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Параметричні рівняння:

$$x = u,\ y = v,\ z = \frac{u^2}{2a^2} - \frac{v^2}{2b^2},$$

де $a > 0$, $b > 0$

На рис.А.10: a = 4, b = 3

$$-10 \le u \le 10,$$

$$-10 \le v \le 10$$

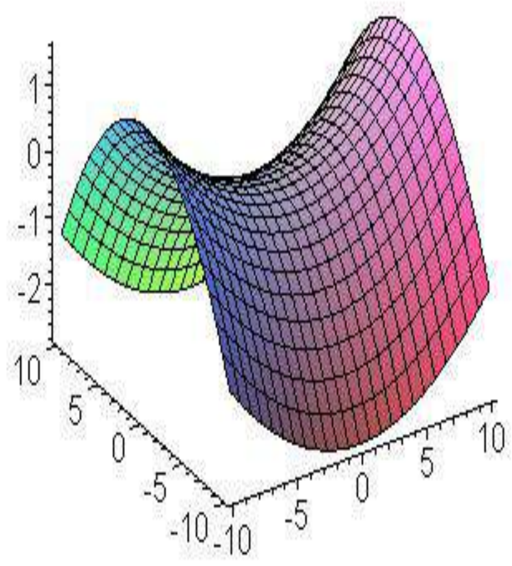

Рис.А.10.

Додаток Б. Класифікація поверхонь другого порядку

№ п/п	Назва поверхні	Канонічне рівняння	Кількість центрів
1.	Дійсний еліпсоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	1
2.	Однопорожнинний гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	1
3.	Двопорожнинний гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	1
4.	Уявний еліпсоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	1
5.	Дійсний конус	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	1
6.	Уявний конус	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	1
7.	Еліптичний параболоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$	0
8.	Гіперболічний параболоїд	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$	0
9.	Еліптичний циліндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Пряма центрів
10.	Гіперболічний циліндр	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Пряма центрів
11.	Уявний еліптичний циліндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	Пряма центрів

Продовження додатку Б

№ п/п	Назва поверхні	Канонічне рівняння	Кількість центрів
12.	Параболічний циліндр	$x^2 = 2py$	0
13.	Пара дійсних площин, що перетинаються	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Пряма центрів
14.	Пара уявних площин, що перетинаються по дійсній прямій	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Пряма центрів
15.	Пара дійсних паралельних площин	$\frac{x^2}{a^2} = 1$	Площина центрів
16.	Пара уявних паралельних площин	$\frac{x^2}{a^2} = -1$	Площина центрів
17.	Пара площин, що збігаються	$x^2 = 0$	Площина центрів

Література

1. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры с приложением собрания задач, снабженных решениями, составленного А. С. Пархоменко / П. С. Александров.– М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1968.– 912 с.
2. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / П. С. Александров.– М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1979.– 512 с.
3. Атанасян Л. С. Сборник задач по геометрии. Ч.I / Л.С. Атанасян, В.А. Атанасян.– М.: Просвещение, 1973.– 256 с.
4. Атанасян Л. С. Геометрия. В 2-х ч. Ч. I. Учеб.пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев.– М.: Просвещение, 1986.– 336 с.
5. Базылев В. Т. Геометрия. Ч. I / В. Т. Базылев, К. И. Дуничев, В. П. Иваницкая.– М.: Просвещение, 1974.– 351 с.
6. Базылев В. Т. Сборник задач по геометрии / В. Т. Базылев, К. И. Дуничев, В. П. Иваницкая и др..– М.: Просвещение, 1980.– 238 с.
7. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии / Н. В. Ефимов.– М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1965.– 228 с.
8. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии: Учеб. пособие для втузов / Д. В. Клетеник.– М.: Наука, 1986.– 224 с.
9. Ржеко В. А. Аналітична геометрія. Частина I: Елементи векторної алгебри; метод координат на площині / В. А. Ржеко, М. П. Красницький.– Полтава, ПДПУ імені В. Г. Короленка, 2004.– 68 с.
10. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О. Н. Цубербиллер.– М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1968.– 336 с.

Зміст

Микола Петрович Красницький

Валентин Олександрович Марченко

Аналітична геометрія в просторі

Навчальний посібник

Гарнітура Times New Roman. Ум.друк.арк.8,16. Формат 60*94/16

Полтавський національний педагогічний університет імені В. Г. Короленка
(36003, м.Полтава, вул..Остроградського, 2)